8 Harmonie pur

Autorin: Luise Fehliner (HU Berlin)
Projekt: ZE-AP1 – Teachers at University

Aufgabe

Das Bleiglasfenster in der Werkstatt des Weihnachtsmanns ist kaputt gegangen. Im trapezförmigen Fenster war – getrennt durch die Mittelparallele – der untere Teil grün und der obere rot (s. Abbildung 1). Die Wichtel wollen es natürlich sofort reparieren.

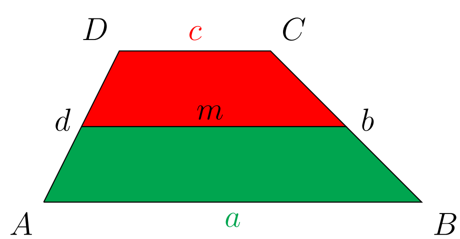

Abbildung 1: Trapezförmiges Fenster mit den Grundseiten a und c sowie den Schenkeln b und d. Das Trapez $ABCD$ wird durch die Parallele m in zwei kleinere Trapeze geteilt.

Aber der Weihnachtsmann ist damit nicht einverstanden. Er ist doch sehr gestresst und hätte gerne eine harmonische Unterteilung. Wenn das Fenster sowieso neu gebaut werden muss, kann man es ja auch gleich neu gestalten:

Die Wichtel sollen den Trennungsbalken zwischen rotem und grünem Glas nun so einbauen, dass die Länge des parallel zu den Grundseiten verlaufenden Balkens m gerade das harmonische Mittel aus den Längen von Grundseiten a und c ist. Dabei ist das **harmonische Mittel** der Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte. Das harmonische Mittel von a und c ist demnach durch

$$\frac{2}{a^{-1} + c^{-1}}$$

gegeben. Nun diskutieren die Wichtel, wie sie das anstellen sollen.

Welche der Konstruktionen erfüllt den Wunsch des Weihnachtsmannes?

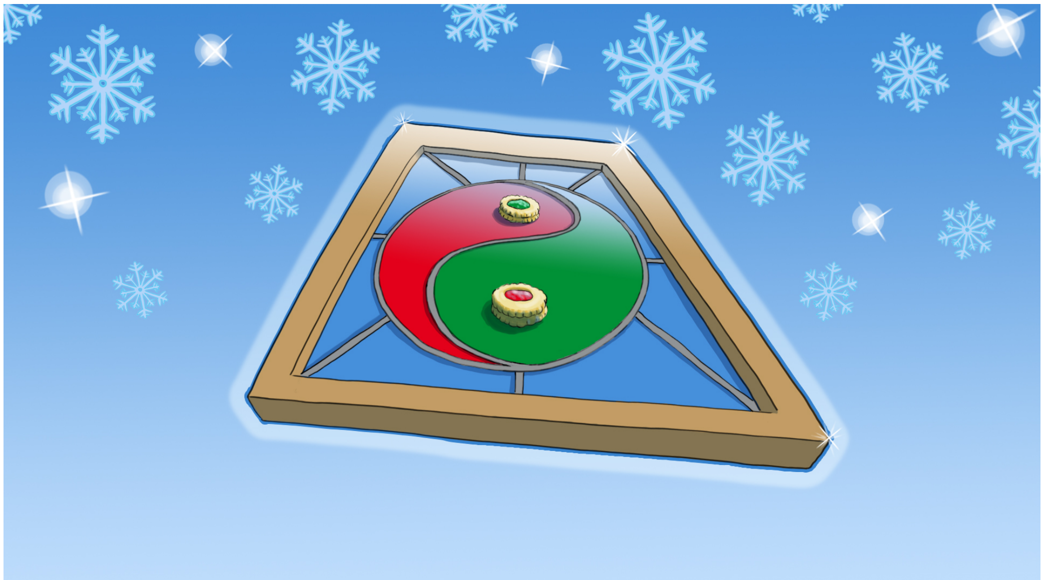

Illustration: Sonja Rörig

Antwortmöglichkeiten:

1. Marek sagt: Der Weihnachtsmann soll sich nicht so haben. Die Mittelparallele erfüllt das doch.

2. Nadia schlägt folgende Konstruktion vor: Wir zeichnen einen Kreis um A mit Radius c. Den Schnittpunkt dieses Kreises mit $\overline{AB}$ nennen wir E. Wir konstruieren die Mittelsenkrechte von $\overline{AE}$ und bezeichnen einen Schnittpunkt von dieser mit dem Kreis um B durch A mit F. Die Länge von $\overline{AF}$ ist die gesuchte Länge für den Trennungsbalken.

3. Ida ist davon überzeugt, dass der parallele Trennungsbalken so eingebaut werden muss, dass die rote und grüne Glasscheibe denselben Flächeninhalt haben.

4. Jonas möchte die Höhe des Trapezes im Verhältnis c (unten) zu a (oben) teilen und dort den parallelen Trennbalken einbauen.

5. Hannah schlägt vor, die Parallele zu den Grundseiten durch den Schwerpunkt des Trapezes zu bauen.

6. Rasmus konstruiert über zwei Scherungen aus einem Quadrat mit Kantenlänge 1 ein Rechteck mit den Kantenlängen a und $\frac{1}{a}$ und eines mit den Kantenlängen c und $\frac{1}{c}$. Anschließend trägt er die Längen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}$

hintereinander auf einem Strahl ab und halbiert die entstandene Strecke. Das ist die gesuchte Länge.

7. Lina ist das alles zu kompliziert. Sie möchte die Parallele zu den Grundseiten durch den Diagonalenschnittpunkt des Trapezes als Trennungsbalken benutzen.

8. Jolanda zeichnet das Lot von D auf die Grundseite a, dann die Diagonale $\overline{AC}$. Durch den Schnittpunkt der beiden konstruiert sie dann die Parallele zu den Grundseiten.

9. Cornelius konstruiert die Mittelsenkrechten der Schenkel b und d. Dann zeichnet er die Parallele zu den Grundseiten durch deren Schnittpunkt.

10. Milena ist fest davon überzeugt: Das geht gar nicht. Der Weihnachtsmann will uns mit dieser Aufgabe nur hereinlegen.