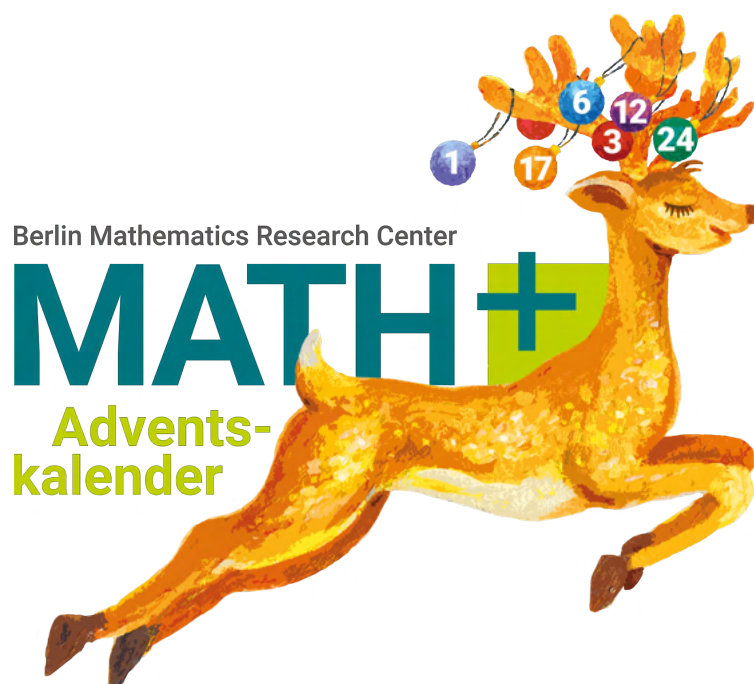




Aufgaben und Lösungen

2025

www.mathekalender.de

*Dieses Buch ist als ein Teil der
Schulaktivitäten des Exzellenzclusters
MATH+ entstanden.*



Projektleitung:

Estela Gretenkord, Lukas Protz

Mitwirkende von MATH+:

Nadja Wisniewski, Beate Rogler, Martin Skutella, Philipp Gland

Studentische Hilfskräfte:

Festina Kika, Maxim Zieger, Thomas Nowotka

Aufgabenstellende:

Silas Rathke, Fabien Nießen, Lukas Protz, Hajo Broersma, Pim van 't Hof, Thomas Nowotka, Nikola Sadovek, Stella Kapodistria, Marko Boon, Eva Deinum, Tobias Paul, Mehmet Akif Yıldız, Matthew Maat, Mar Curcó Iranzo, Tim Kunt, Lucas van Kreveld, Daniel Gembris, Max Klimm, Zoe Geiselman, Kevin Kühn

Illustrator*innen:

Friederike Hofmann, Julia Nurit Schönnagel, Ivana Martić, Zyanya Santuario, Mar Curcó Iranzo

Außerdem bedanken wir uns herzlich bei der 4TU.AMI aus den Niederlanden für die Bereitstellung zahlreicher Aufgaben und deren Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1	Spiel der Truhen	3
2	Ready, SET, Bake!	7
3	Farbenfrohe Weihnachten	13
4	Weihnachtsplätzchen ausstechen - alle Jahre wieder	19
5	Sportliche Mittagspause	24
6	Zufälliges Nikolaus-Haus-Bauen	30
7	Das Einpackraum-Rätsel	37
8	Rettet die Geschenke!	42
9	Elfen im Aufzug	48
10	Weihnachtliche Lichtershow	53
11	Wunderschönes Geschenkpapier mit einem Spirographen gestalten	58
12	Backen auf gut Glück	63
13	Die Große Walnuss-Lieferung	66
14	Auswechslung beim Eis-Basketball	71
15	Die Straße von Bethlehem	75
16	Geschenkeauslieferung im Häuserblock	80
17	Der Kranz zweier Weihnachtszauber	85
18	Tannenbaumplantage	89
19	Das Nordpol-Museum	97
20	Mehr Schafe als Schlaf	100
21	Die Weihnachtsmission des Schneewichtels	105
22	Von starken und schwachen Rentieren	112
23	Herr Johnsons zerbrochene Weihnachtsanhänger	118
24	Spiralgedicht-Wettbewerb	121



Illustration: Julia Nurit Schönnagel

1 Spiel der Truhen

Autoren: Fabien Nießen und Silas Rathke (FU Berlin)

Aufgabe

Jedes Jahr zahlt die *Eisige Bank von Borrealis* der ehrwürdigen Finanzhauptstadt des Nordpols, den Elfen ihr Gehalt aus. Doch der Weihnachtsmann hat in diesem Winter eine neue Verordnung erlassen: Niemand darf den Lohn einfach erhalten - jeder Elf und jede Elfe muss ihn sich in einem Spiel verdienen. Für die junge Werkstattelfe Johanna Schnee hat sich die Bank eine besonders raffinierte Herausforderung ausgedacht. Zu Beginn stehen drei Truhen vor ihr, noch vollkommen leer. Auf dem Tisch daneben liegen 2025 Münzen mit ganzzahligen Werten von 1 bis 2025, wobei jeder Wert genau einmal vorkommt. Der Ablauf des Spiels ist streng geregelt:

- In jedem Zug wählt die Bank eine der drei Truhen aus.
- Danach muss Johanna eine der auf dem Tisch verbliebenen Münzen nehmen und in genau diese Truhe legen.
- Das wiederholt sich so lange, bis alle Münzen auf die Truhen verteilt sind.

Erst dann, ganz am Ende, darf Johanna eine der drei Truhen auswählen und erhält deren Inhalt als Gehalt.

Da der Versuch, mittels KI auf selbstfahrende Schlitten umzustellen, krachend gescheitert ist und ein größeres Loch in die Kassen des Nordpols gerissen hat, wird die Bank versuchen,

Johannas Auszahlung möglichst gering zu halten. Was ist der höchste Betrag, den Johanna sich dennoch garantiert sichern kann, vorausgesetzt, dass sie mit einer optimalen Strategie spielt? Auf welche beiden Ziffern endet dieser Betrag?

Hinweis: Eine Strategie heißt optimal, wenn es keine andere Strategie gibt, die einen höheren Mindestbetrag für Johanna garantiert.

Antwortmöglichkeiten:

1. 00
2. 12
3. 25
4. 38
5. 47
6. 50
7. 63
8. 75
9. 86
10. 99

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Der exakte Betrag, den Johanna sich garantiert sichern kann, lautet 685 125. Daher endet der Betrag auf die Ziffern 25.

Um dies zu beweisen, zeigen wir, auf welche Art und Weise die Bank verhindern kann, dass Johannes Lohn den Betrag 685 125 übersteigt und geben danach Johannes Strategie an, mit der sie diesen Betrag garantiert erhält.

Die Strategie der Bank ist folgende: sie wählt in jedem Zug stets eine Truhe mit dem aktuell geringsten Gesamtwert. Unsere Behauptung: Dadurch stellt sie sicher, dass während des gesamten Spiels *die Differenz zwischen der wertvollsten und der wertärmsten Truhe nie größer wird als 2025*. Zu Beginn des Spiels ist diese Aussage zunächst offensichtlich korrekt. Nun nehmen wir an, dass sie vor einem beliebigen Zug gilt. Warum diese Annahme berechtigt ist, erläutern wir weiter unten.

Sind die jeweiligen Gesamtsummen der drei Truhen vor dem Zug mit $A \leq B \leq C$ bezeichnet, sei nun also $C - A \leq 2025$ (Differenz zwischen der wertvollsten und der wertärmsten Truhe ist höchstens 2025). Die Bank wählt nun ihrer Strategie folgend die wertärmste Truhe mit Wert A . Johanna legt dort eine Münze mit Wert x hinein, wobei x eine ganze Zahl mit $1 \leq x \leq 2025$ ist.

Wir betrachten die möglichen Fälle für die neue Differenz zwischen der wertvollsten und der wertärmsten Truhe nach diesem Zug:

- **Fall 1:** $A + x \leq B$

Dann ist $A + x$ der Wert der wertärmsten Truhe und die neue Differenz beträgt

$$C - (A + x) = (C - A) - x \leq 2025.$$

- **Fall 2:** $B \leq A + x \leq C$

Hier ist B der Wert der wertärmsten Truhe und die neue Differenz beträgt

$$C - B \leq C - A \leq 2025.$$

- **Fall 3:** $A + x \geq C$

In diesem Fall wird $A + x$ zum Wert der wertvollsten Truhe und B zum Wert der wertärmsten. Demnach beträgt die neue Differenz

$$(A + x) - B = (A - B) + x \leq 2025,$$

da $A - B \leq 0$ und $x \leq 2025$.

In allen Fällen bleibt die Differenz höchstens 2025.

Dieses Argument können wir nun nutzen, um die Behauptung zu zeigen. Wir wissen bereits, dass die Behauptung zu Beginn des Spiels gilt. Das Argument erlaubt nun die Schlussfolgerung, dass auch nach dem ersten Zug die Behauptung gilt. Da die Behauptung für Zug 1

stimmt, lässt sich nun erneut das Argument anwenden, sodass die Behauptung auch für Zug 2 gilt. Dieser Prozess lässt sich nun sukzessive fortführen, bis zum letzten Zug des Spiels, womit die Behauptung bewiesen ist. Diese Art des Beweises wird formal als *vollständige Induktion* bezeichnet.

Am Ende kann die wertvollste Truhe damit maximal den Wert

$$\frac{1 + 2 + \cdots + 2024}{3} + 2025 = 685\,125$$

enthalten.

Johannas Strategie, um diesen Betrag auch wirklich zu erhalten, ist folgende: sie teilt zu Beginn gedanklich die Münzen mit den Werten 1 bis 2024 in drei Gruppen mit dem gleichen Gesamtwert auf und ordnet jeder Gruppe eine der drei Truhen zu. Die Aufteilung könnte z.B. erfolgen, indem Johanna zunächst die Münzen mit Wert 8 und 4 einer Gruppe, die Münzen mit 2, 3 und 7 einer anderen Gruppe und die Münzen 1, 5 und 6 der verbleibenden Gruppe zuordnet und anschließend immer die 9 nächstgrößeren Münzen $m_1, m_2, \dots, m_9$ (Wert aufsteigend) nach folgendem Schema verteilt: m_1, m_5 und m_9 in eine Gruppe, m_2, m_6 und m_7 in eine andere Gruppe und m_3, m_4 und m_8 in die verbleibende Gruppe.

Immer wenn die Bank eine Truhe auswählt, legt Johanna eine Münze aus der entsprechenden Gruppe in diese Truhe.

Sobald die Bank erstmals eine Truhe auswählt, die ihren vorgesehenen Drittelanteil erreicht hat, bzw. für die die zugehörige Gruppe von Münzen aufgebraucht ist, legt Johanna die Münze mit Wert 2025 in diese Truhe. Ab diesem Zeitpunkt ist ihr Ziel erreicht: Diese Truhe enthält mindestens ein Drittel der Summe der Zahlen von 1 bis 2024 plus 2025. Was danach geschieht, ist irrelevant, da Johanna am Ende diese Truhe wählen kann und somit mindestens den Betrag 685 125 erhält.



Illustration: Friederike Hofmann

2 Ready, SET, Bake!

Autor: Lukas Protz

Projekt: MATH+

Aufgabe

Annika ist eine fleißige Elfe, die es liebt, ihre Mitelfen glücklich zu machen. In der Weihnachtszeit beschließt sie daher, für all ihre Freunde einschließlich des Weihnachtsmanns eine Vielzahl von Plätzchen zu backen. Um eine große Bandbreite an Plätzchensorten kreieren zu können, hat sie folgendes besorgt:

- 2 verschiedene Ausstecher: eine Weihnachtsmann- und eine Elfenform
- Zutaten für 2 Teigsorten: Vanille und Schokolade
- 3 Geschmacksrichtungen für die Glasur: Vanille, Schokolade und Limette
- 3 Arten von Streuseln: rote Herzen, silberne Perlen und gewöhnliche Streusel

Mit diesen Optionen kann Annika genau 36 verschiedene Plätzchensorten backen, wobei eine Plätzchensorte durch eine bestimmte Kombination von Ausstecher, Teig, Glasur und Streuseln gegeben ist. Zwei Kekse sind also von der gleichen Sorte, wenn für sie der gleiche Ausstecher, der gleiche Teig, die gleiche Glasur und die gleichen Streusel verwendet wurden.

Um sicherzustellen, dass jede Sorte gut schmeckt, backt Annika von jeder jeweils einen Keks. Anschließend legt sie alle so entstandenen 36 Kekse in eine Schüssel.

Annika liebt das Spiel SET und wird durch die Plätzchen an dieses erinnert. Daher überlegt sie, wie viele Kekse sie aus der Schüssel nehmen müsste, damit die entnommenen Kekse garantiert ein SET enthalten.

Ein SET von Keksen ist eine Menge aus drei Keksen, so dass in jeder Kategorie (Ausstecher, Teig, ...) entweder alle Kekse die gleiche oder alle Kekse eine unterschiedliche Eigenschaft haben. Stellen wir jeden Keks anhand seiner Eigenschaften (Ausstecher, Teig, Glasur, Streusel) dar, dann bilden beispielsweise die Kekse

(Weihnachtsmann, Vanille, Vanille, Herzen),
(Weihnachtsmann, Vanille, Schokolade, Perlen),
(Weihnachtsmann, Vanille, Limette, gewöhnlich)

ein SET. Die folgenden drei Kekse bilden dagegen kein SET:

(Elf, Vanille, Vanille, Herzen),
(Weihnachtsmann, Vanille, Schokolade, Perlen),
(Weihnachtsmann, Vanille, Limette, gewöhnlich)

Dies ist der Fall, weil der erste und der zweite Keks eine unterschiedliche Eigenschaft in der Kategorie „Ausstecher“ haben, wohingegen der zweite und der dritte Keks in dieser Kategorie die gleiche Eigenschaft besitzen.

Natürlich könnte Annika gezielt drei Kekse aus der Schüssel entnehmen, die ein SET bilden. Um es spannender zu machen, wählt sie die Kekse allerdings zufällig und ohne hinzusehen. Wie viele Kekse muss Annika mindestens aus der Schüssel nehmen, damit die entnommenen Kekse garantiert mindestens ein SET enthalten?

Antwortmöglichkeiten:

1. 14 oder mehr
2. 13
3. 12
4. 11
5. 10
6. 9
7. 8
8. 7
9. 6
10. 5 oder weniger.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 1.

Wir zeigen, dass Annika mindestens 17 Kekse entnehmen muss, um sicherzustellen, dass sich unter diesen ein SET befindet.

Dazu betrachten wir zunächst den einfacheren Fall, dass es nur eine Ausstechform und eine Teigsorte, jedoch weiterhin 3 Geschmacksrichtungen für die Glasur und 3 Arten von Streuseln gibt. Mit anderen Worten suchen wir nun ein SET in den Kategorien Glasur und Streusel. Unter dieser Einschränkung gibt es 9 verschiedene Plätzchensorten, die Annika backen könnte. Um den Auswahlprozess zu veranschaulichen, kann man eine Tabelle verwenden, wie sie in Abbildung 1 dargestellt ist.

	Herzen	Perlen	gewöhnlich
Vanille			
Schokolade			
Limette			

Abbildung 1: Jedes Feld der Tabelle repräsentiert eine Plätzchensorte.

Wählt Annika einen Keks aus, so markieren wir das entsprechende Feld in der Tabelle mit einem Kreuz. Ein SET in der Tabelle wird dann dargestellt durch

- eine vollständige Zeile oder Spalte von Kreuzen,
- eine vollständige Diagonale von Kreuzen oder
- ein Kreuz in der linken oberen Ecke, ein Kreuz in der letzten Zeile und mittleren Spalte sowie ein Kreuz in der mittleren Zeile und letzten Spalte sowie die durch Rotation der Tabelle entstehenden Konfigurationen (siehe Abbildung 2). Eine solche Konfiguration wird als *Quasidiagonale* bezeichnet.

	Herzen	Perlen	gewöhnlich
Vanille	X		
Schokolade			X
Limette		X	

	Herzen	Perlen	gewöhnlich
Vanille			X
Schokolade	X		
Limette		X	

	Herzen	Perlen	gewöhnlich
Vanille		X	
Schokolade	X		
Limette			X

	Herzen	Perlen	gewöhnlich
Vanille		X	
Schokolade			X
Limette	X		

Abbildung 2: Die Quasidiagonalen.

Zunächst lässt sich leicht erkennen, dass Annika vier Kekse auswählen kann, ohne ein SET zu bilden, wie in Abbildung 3 dargestellt ist:

	Herzen	Perlen	gewöhnlich
Vanille	X		X
Schokolade			
Limette	X		X

Abbildung 3: Vier Kekse, die kein SET enthalten.

Es ist jedoch nicht möglich, fünf Kekse auszuwählen, ohne dabei ein SET zu erhalten. Wir zeigen dies direkt, indem wir versuchen, fünf Kreuze in der Tabelle zu platzieren, ohne ein SET zu erzeugen. Nehmen wir dazu an, dass Annika zunächst den Keks auswählt, der dem mittleren Feld der Tabelle entspricht. (Dies kann durch eine geeignete Neuordnung der Eigenschaften zu den Spalten bzw. Zeilen erreicht werden.) Können wir dann vier weitere Kreuze platzieren, ohne ein SET zu erzeugen? In den Ecken können sich höchstens zwei Kreuze befinden, da andernfalls eine vollständige Diagonale in der Tabelle entsteht. Somit liegen mindestens zwei Kreuze entweder in der mittleren Zeile oder in der mittleren Spalte. Diese können jedoch nicht beide in der mittleren Zeile oder beide in der mittleren Spalte liegen. Daher können

wir (erneut durch eine geeignete Neuordnung der Eigenschaften) annehmen, dass sich ein Kreuz in der oberen Zeile und mittleren Spalte sowie ein weiteres Kreuz in der mittleren Zeile und linken Spalte befindet (siehe Abbildung 4):

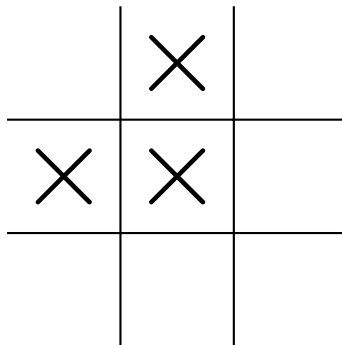


Abbildung 4: Die drei Kreuze in der mittleren Zeile und Spalte.

Um kein SET zu erzeugen, müssen die beiden anderen Kreuze in den Ecken platziert werden. Keines von ihnen kann in die linke obere Ecke gesetzt werden, da das andere sonst zwangsläufig eine vollständige Reihe, Spalte oder Diagonale erzeugen würde (siehe Abbildung 5(i)). Ebenso ist es nicht möglich, ein Kreuz in die rechte untere Ecke zu setzen, da dadurch eine Quasidiagonale entstehen würde (siehe Abbildung 5(ii)). Schließlich ist es nicht möglich, die Kreuze in die beiden verbleibenden Felder zu setzen, da dies wiederum eine Diagonale erzeugt (siehe Abbildung 5(iii)).

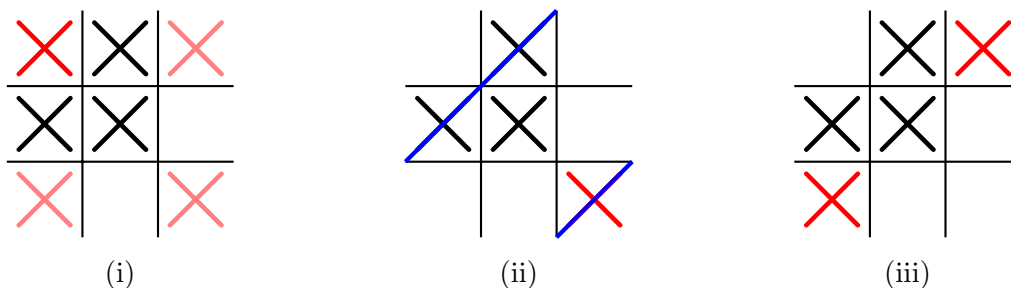


Abbildung 5: Diese drei Beispiele zeigen, dass es nicht möglich ist, zwei weitere Kreuze zu platzieren ohne ein SET zu erzeugen.

Um nun die ursprüngliche Frage zu beantworten, müssen wir die Kategorien Ausstecher und Teig wieder einführen. Da jede dieser Kategorien nur zwei mögliche Eigenschaften hat, kann ein SET nur dann entstehen, wenn alle ausgewählten Kekse in jeder dieser zwei Kategorien die gleiche Eigenschaft besitzen.

Insgesamt gibt es vier unterschiedliche Kombinationen von Ausstecher und Teig. Wenn Annika also mindestens 17 Kekse entnimmt, muss es nach dem Schubfachprinzip mindestens 5 Keksen geben, die aus demselben Teig und mit derselben Ausstechform gefertigt wurden. Von diesen fünf Keksen müssen dann aber drei ein SET bilden, da wir soeben gezeigt haben, dass bezüglich der anderen beiden Kategorien (Glasur und Streusel) bei 5 Keksen ein SET

auftreten muss.

Weniger als 17 Kekse zu entnehmen reicht hingegen nicht aus, um garantiert ein SET zu erhalten, da es in diesem Fall möglich ist, dass es keine fünf mit demselben Teig und derselben Ausstechform gefertigte Kekse gibt. Und für vier oder weniger mit demselben Teig und derselben Ausstechform gefertigte Kekse lässt sich eine Kombination aus Glasuren und Streuseln finden, wie in Abbildung 3, sodass diese Kekse kein SET enthalten.

Daher lautet die Antwort auf die Aufgabe: 17.



Illustration: Ivana Martić

3 Farbenfrohe Weihnachten

Autor: Hajo Broersma

Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Der Maler-Elf Mondrian hat eine rechteckige Weihnachtskarte entworfen, wie in Abbildung 6 dargestellt wird. Die Fläche der Größe 8×12 ist in folgende Bereiche unterteilt: 72 Einheitsquadrate (1×1), drei 2×2 Quadrate und sechs 1×2 Rechtecke.

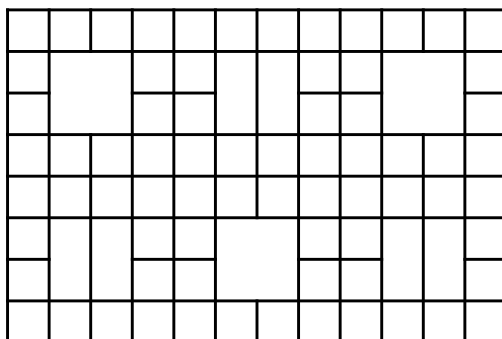


Abbildung 6: Die unbemalte Weihnachtskarte.

Mondrian bittet drei Feen, die verschiedenen Bereiche der Karte mit Rot, Gelb und Blau zu bemalen. Jeder Bereich - egal ob (1×1) Einheitsquadrat, 2×2 Quadrat oder 1×2 Rechteck

- soll mit genau einer der drei Farben eingefärbt werden.

Die fertige Färbung ist nur dann *zulässig*, wenn an keiner Stelle zwei Felder der gleichen Farbe eine gemeinsame Kante besitzen, während sie sich aber an einer Ecke berühren dürfen. Abbildung 7 verdeutlicht diese Regel an zwei Beispielen.

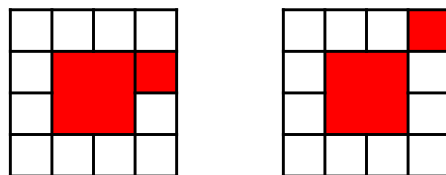


Abbildung 7: Die (ausschnittsweise) Färbung auf der linken Seite *ist nicht* zulässig, die auf der rechten Seite *ist* zulässig.

Es sind viele unterschiedliche zulässige Färbungen möglich. Mondrian hat eine besondere Vorliebe für die Farbe Rot, da sie ihn an den Anzug des Weihnachtsmanns erinnert. Daher möchte er zunächst wissen, ob eine zulässige Färbung existiert, bei der genau die Hälfte der 72 Einheitsquadrate rot bemalt wird.

Außerdem interessiert ihn, was die größtmögliche Fläche ist, die man bei einer zulässigen Färbung rot bemalen kann. Dabei hat jedes Einheitsquadrat die Fläche 1, jedes 2×2 Quadrat die Fläche 4 und jedes 1×2 Rechteck die Fläche 2.

Die Feen müssen nun also die folgenden beiden Fragen beantworten:

- Frage 1: Gibt es eine zulässige Färbung, bei der genau 36 Einheitsquadrate rot bemalt werden?
- Frage 2: Was ist die größtmögliche Fläche, die bei einer zulässigen Färbung rot bemalt werden kann?

(Antwortmöglichkeiten auf nächster Seite.)

Antwortmöglichkeiten:

1. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist NEIN; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 39.
2. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist NEIN; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 40.
3. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist NEIN; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 41.
4. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist NEIN; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 42.
5. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist NEIN; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 43.
6. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist JA; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 39.
7. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist JA; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 40.
8. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist JA; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 41.
9. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist JA; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 42.
10. Die korrekte Antwort auf Frage 1 ist JA; die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung ist 43.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Der einfachere Teil der Aufgabe ist es, Frage 1 zu beantworten. Es ist möglich, eine zulässige Färbung zu finden, in der 36 Einheitsquadrate rot eingefärbt sind.

Dafür starten wir in der linken oberen Ecke und färben das dortige Einheitsquadrat rot. Nun nehmen wir zunächst die Hilfsfarbe schwarz und färben jedes Einheitsquadrat, das eine Seite mit dem gefärbten Quadrat teilt. Danach färben wir wieder jedes Einheitsquadrat, das eine Seite mit den schwarz gefärbten Einheitsquadraten teilt, rot ein. Diese Vorgehensweise wird iterativ auf die gesamte Karte angewendet, sodass am Ende eine Hälfte der Einheitsquadrate rot und die andere schwarz eingefärbt ist. Nun färben wir alle 2×2 Quadrate gelb und in allen Paaren von 1×2 Rechtecken ein Rechteck gelb und das andere blau.

Nun können wir diese Färbung zulässig vervollständigen, indem wir die schwarz gefärbten Einheitsquadrate nach und nach gelb beziehungsweise blau färben. Dabei färben wir schwarze Quadrate, die eine Kante mit einem blauen und roten Bereich (egal ob 1×1 , 1×2 oder 2×2) teilen, gelb und analog Quadrate, die eine Seite mit einem gelben und roten Bereich teilen, blau.

Schlussendlich können wir die verbliebenen schwarzen Einheitsquadrate blau färben. Abbildung 8 zeigt ein Beispiel für eine zulässige Färbung mit 36 roten Einheitsquadraten.

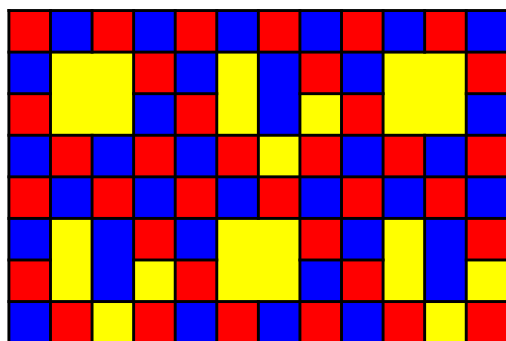


Abbildung 8: Ein Beispiel für eine zulässige Färbung mit 36 roten Einheitsquadraten.

Nun bleibt zu zeigen, dass die größte mögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung 41 ist.

Dafür teilen wir die Karte in sechs quadratische Gebiete der Größe 4×4 ein. Wir betrachten zuerst ein Gebiet mit einem 2×2 Quadrat und den 12 benachbarten Einheitsquadraten wie oben in Abbildung 7 dargestellt.

Angenommen, wir färben das 2×2 Quadrat nicht rot, dann können wir maximal 6 der umliegenden 12 Einheitsquadrate rot färben und erhalten eine Fläche von 6. Wenn wir aber das 2×2 Quadrat rot färben, ist es möglich, die vier Einheitsquadrate an den Ecken rot zu färben, wodurch sich eine maximale Fläche von 8 ergibt.

Weiterhin betrachten wir ein Gebiet, das ein Paar von 1×2 Rechtecken samt den umliegenden 12 Einheitsquadraten enthält. Wenn wir keins der 1×2 Rechtecke rot färben, können wir eine maximale Fläche von 6 erhalten, wenn wir die benachbarten Einheitsquadrate zulässig rot färben. In dem Fall, dass eines der 1×2 Rechtecke rot gefärbt wird, ist eine rote Fläche von 7 möglich, indem wir alle benachbarten Einheitsquadrate, die keine Seite mit dem rot gefärbten

Rechteck teilen, auch rot färben.

Mit dieser Analyse erhalten wir die obere Schranke 15 für die maximale rote Fläche, die von der linken 8×4 Fläche (den beiden oben betrachteten Gebieten) beigesteuert wird. Angenommen, die beiden Gebiete haben tatsächlich eine rote Fläche von 8 beziehungsweise 7, wie oben geschildert. Wir können leicht feststellen, dass es nicht möglich ist, die beiden oben benannten Muster zu einer zulässigen Färbung zu kombinieren, da wir stets benachbarte rote Einheitsquadrate erhalten. Es folgt also, dass die maximale rote Fläche, die von der linken 8×4 Fläche beigesteuert werden kann, 14 ist. Ein Beispiel dafür findet sich in Abbildung 9.

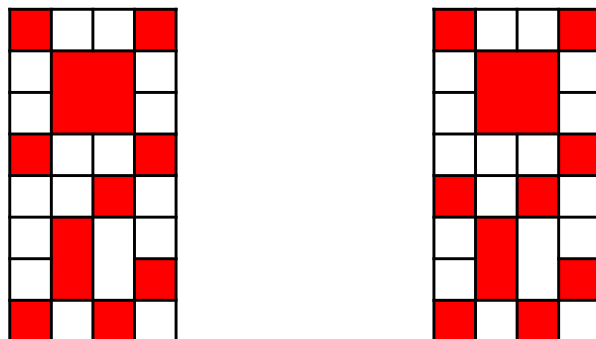


Abbildung 9: Zwei Beispiele für eine Teilfärbung der linken 8×4 Fläche, in der die rote Fläche genau 14 ausmacht (im linken Beispiel tragen die obere und die untere Hälfte 8 bzw. 6 bei, im rechten Beispiel 7 bzw. 7).

Dementsprechend kann die rote Fläche, die von der mittleren und auch von der rechten 8×4 Fläche beigesteuert wird, auch jeweils maximal 14 sein. Die größtmögliche rote Fläche in einer zulässigen Färbung wäre demnach $3 \cdot 14 = 42$. Der letzte Schritt ist zu zeigen, dass eine rote Fläche von 42 in einer zulässigen Färbung nicht möglich ist - lediglich eine rote Fläche von 41.

Angenommen, wir haben eine zulässige Färbung mit einer roten Gesamtfläche von 42. Es muss nach obiger Analyse jede 8×4 Fläche (links, mittig, rechts) eine rote Fläche von 14 beitragen, die sich aus $7 + 7$ oder $8 + 6$ von dem oberen und unteren Gebiet zusammensetzt. Ein geeigneter Weg, einen Widerspruch zu erzielen, ist zunächst anzunehmen, dass die mittlere 8×4 Fläche einen roten Beitrag von $7 + 7$ leistet. Dann kann man mit der Symmetrie und der erzwungenen Färbung des mittleren oberen Gebiets folgern, dass entweder das linke obere oder das rechte obere Gebiet maximal eine rote Fläche von 6 beisteuern kann. Allerdings wäre für eine rote Gesamtfläche von 42 nötig, dass beide Gebiete mindestens eine rote Fläche von 7 beisteuern.

Es folgt also, dass die mittlere 8×4 Fläche notwendigerweise $6 + 8$ an roter Fläche beisteuern muss. Wieder gilt nach Symmetrie und Betrachten aller möglichen Färbungen des oberen mittleren Gebietes, dass entweder das obere linke oder das obere rechte Gebiet höchstens eine rote Fläche von 7 haben können.

Angenommen es ist in diesem Fall das rechte obere Gebiet, welches eine rote Fläche von genau 7 beiträgt, da mindestens eine Fläche von 7 nötig ist, um die rote Gesamtfläche von 42 zu erreichen. Nun müssen die Einheitsquadrate in den beiden unteren Ecken rot sein, da die Färbung des mittleren oberen Gebiets das erzwingt. Dasselbe gilt für die beiden rechten Ecken des unteren mittleren Gebiets, da dieses nach Annahme eine rote Fläche von 8 beisteuert. Es

folgt nun, dass das untere rechte Gebiet höchstens eine rote Fläche von 6 beisteuern kann, was im Widerspruch dazu steht, dass dieses Gebiet eine Fläche von 7 beitrugen müsste, um 42 als Gesamtfläche zu erreichen.

Folglich gilt, dass eine rote Gesamtfläche von 42 nicht möglich ist.

Allerdings lässt sich mit der obigen Argumentation leicht zeigen, dass eine rote Fläche von 41 möglich ist. Beginne dafür mit $6 + 8$ für die mittlere 8×4 Fläche, außerdem $8 + 6$ für die linke und $7 + 6$ für die rechte 8×4 Fläche, so erhält man die Färbung aus Abbildung 10, die sich einfach zu einer zulässigen Färbung, siehe Abbildung 11, vervollständigen lässt, indem man blau und gelb für die bisher nicht gefärbten Flächen verwendet.

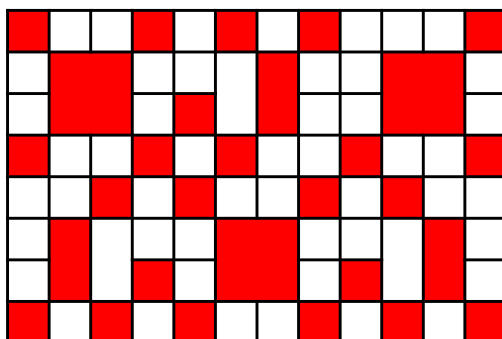


Abbildung 10: Eine unvollständige zulässige Färbung mit einer roten Gesamtfläche von 41.

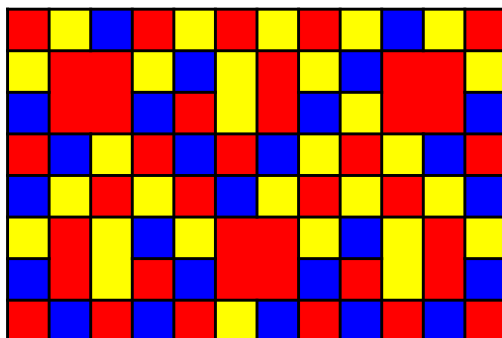


Abbildung 11: Ein Beispiel für eine zulässige Färbung mit der maximalen roten Gesamtfläche von 41.



Illustration: Ivana Martić

4 Weihnachtsplätzchen ausstechen - alle Jahre wieder

Autor: Pim van 't Hof (Universität Twente)

Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Die Elfen Pi und Pie sind wieder am Werk: Genau wie letztes Jahr backen sie perfekt runde Weihnachtsplätzchen. Zu diesem Zweck haben sie gestern ein großes, kreisrundes Stück Teig vorbereitet und dieses über Nacht zum Ruhen in den Kühlschrank gelegt. Als sie heute Morgen den Kühlschrank öffneten, stellten sie jedoch erschrocken fest, dass ein großes, kreisrundes Stück herausgeschnitten wurde. (Sie vermuten, dass die Elfe Pastry das Stück entwendet hat, um es als Boden für ihren alljährlichen Weihnachtskuchen zu verwenden.)

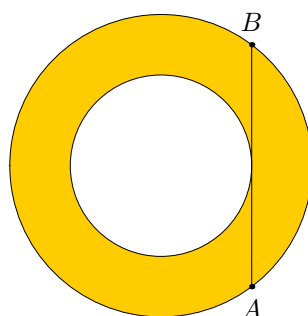


Abbildung 12: Das Stück Teig, das Pi und Pie heute Morgen im Kühlschrank vorfanden.

Abbildung 12 zeigt den Teig, so wie er heute Morgen von Pi und Pie im Kühlschrank vorgefunden wurde. Die Begrenzungen des ursprünglichen Teigstücks und des großen kreisförmigen Lochs bilden konzentrische Kreise, d.h. sie haben einen gemeinsamen Mittelpunkt aber unterschiedliche Radien. Die Strecke AB ist eine Sehne des großen Kreises, die tangential zur Begrenzung des kreisförmigen Lochs verläuft. Die Länge von AB beträgt 36 cm.

Da die Elfen Pi und Pie an ihrem Ideal perfekt runder Plätzchen festhalten wollen, aber nur zwei relativ große kreisrunde Plätzchenausstecher zur Verfügung haben, beschließen sie, den vorgefundenen Teig zu einer Kugel zu kneten und ihn erneut kreisrund auszurollen. Hierbei soll das neu ausgerollte Teigstück den gleichen Flächeninhalt besitzen wie das heute Morgen im Kühlschrank vorgefundene. Aus diesem kreisrunden Teigstück stechen sie nun drei Plätzchen aus: ein großes und zwei kleinere. Abbildung 13 zeigt den übrig gebliebenen Teig, nachdem die drei Plätzchen in den Ofen gelegt wurden. Die Begrenzung des großen Lochs verläuft durch den Mittelpunkt des kreisrunden Teigstücks und berührt dessen Begrenzung. Die Begrenzungen der zwei (kongruenten) kleineren Löcher berühren sich gegenseitig, die Begrenzung des großen Lochs und die Begrenzung des kreisrunden Teigstücks.

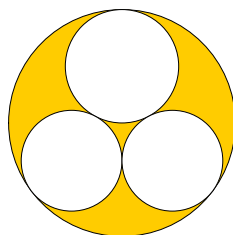


Abbildung 13: Der übrig gebliebene Teig ist in Gelb dargestellt. Die weißen Kreise repräsentieren die Löcher.

Wie groß ist die Fläche des übrig gebliebenen Teigs, nachdem die drei perfekt runden Plätzchen ausgestochen wurden?

(Antwortmöglichkeiten auf nächster Seite.)

Antwortmöglichkeiten:

1. $112\pi \text{ cm}^2$
2. $115\pi \text{ cm}^2$
3. $118\pi \text{ cm}^2$
4. $120\pi \text{ cm}^2$
5. $125\pi \text{ cm}^2$
6. $128\pi \text{ cm}^2$
7. $130\pi \text{ cm}^2$
8. $132\pi \text{ cm}^2$
9. $136\pi \text{ cm}^2$
10. Die in der Aufgabenstellung gegebenen Informationen sind nicht ausreichend, um die Fläche des übrig gebliebenen Teigs berechnen zu können.

Lösung**Die richtige Antwort ist: 2.**

Zunächst bestimmen wir die Fläche des kreisförmigen Teigstücks, aus dem die Elfen Pi und Pie die drei Kekse ausstechen. Diese ist gleich der Fläche des Teigstücks, das sie heute Morgen im Kühlschrank gefunden haben (siehe Abbildung 12). Seien r bzw. R die Radien des inneren bzw. äußeren Kreises in Abbildung 12. Dann ist die Fläche X des Teigstücks gegeben durch

$$X = \pi R^2 - \pi r^2. \quad (1)$$

Sei nun O der Mittelpunkt der beiden konzentrischen Kreise und M der Punkt, an dem die Sehne AB den inneren Kreis berührt, siehe Abbildung 14.

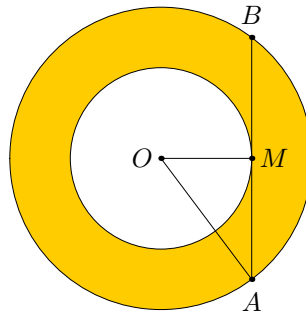


Abbildung 14: Der Flächeninhalt des gelben Teigstücks beträgt $324\pi \text{ cm}^2$.

Da die beiden Kreise konzentrisch sind und die Strecke AB Tangente des inneren Kreises ist, gilt $AM = BM = 18$ und OM ist senkrecht zu AB . Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$R^2 = (OA)^2 = (OM)^2 + (AM)^2 = r^2 + 18^2 = r^2 + 324. \quad (2)$$

Durch Kombination der Gleichungen (1) und (2) erhalten wir für die Fläche X des Teigstücks

$$X = 324\pi.$$

Nun bestimmen wir, wie viel von dieser Fläche nach dem Ausstechen der drei Kekse übrig bleibt. Ausgehend von der Fläche X können wir den Radius berechnen, den das kreisförmige Teigstück, aus dem die Kekse ausgestochen werden, hat. Der Radius beträgt 18. Da der Rand der größten Ausstanzung durch den Mittelpunkt dieses Kreises verläuft und dessen Rand berührt, hat das große Loch den Radius 9. Es bleibt zu zeigen, dass die beiden kleineren Löcher den Radius 8 besitzen, da sich daraus ergibt, dass die verbleibende Fläche

$$324\pi - 81\pi - 2 \cdot 64\pi = 115\pi$$

beträgt.

Der Nachweis, dass die kleinen Löcher den Radius 8 haben, kann auf verschiedene Weise erfolgen. Wir geben einen Beweis an, der lediglich den Satz des Pythagoras sowie die Tatsache verwendet, dass bei zwei sich berührenden Kreisen die Mittelpunkte der Kreise und der Berührungspunkt auf einer Geraden liegen.

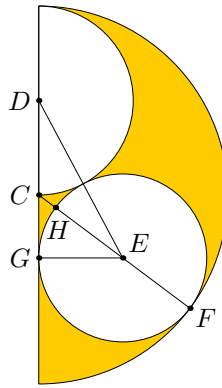


Abbildung 15: Die rechte Hälfte des verbleibenden Teigstücks.

Wir betrachten die rechte Hälfte des verbleibenden Teigstücks; siehe Abbildung 15. Seien C , D und E die Mittelpunkte des kreisförmigen Teigstücks, des großen Lochs bzw. des kleinen Lochs unten rechts. Seien F und G die Punkte, an denen der Rand des kleinen Lochs den Rand des Teigstücks bzw. den Durchmesser des Teigstücks berührt. Schließlich sei H der Punkt, an dem CE den Rand des kleinen Lochs schneidet.

Da C und E die Mittelpunkte zweier Kreise sind, die sich im Punkt F berühren, liegen die Punkte C , E und F auf einer Geraden. Da CF ein Radius des äußeren Kreises ist, gilt $CF = 18$. Da EF und EH Radien des kleinen Lochs sind, folgt $CH = 18 - 2x$, wobei x der Radius des kleinen Lochs ist.

Betrachten wir nun das Dreieck CEG . Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$(CG)^2 = (CE)^2 - (EG)^2 = ((18 - 2x) + x)^2 - x^2 = 324 - 36x. \quad (3)$$

Wenden wir den Satz des Pythagoras auf das Dreieck DEG an, so erhalten wir

$$(DG)^2 = (DE)^2 - (EG)^2 = (9 + x)^2 - x^2 = 81 + 18x. \quad (4)$$

Durch Kombination der Gleichungen (3) und (4) sowie der Tatsache, dass $DG = 9 + CG$ gilt, erhalten wir

$$\sqrt{81 + 18x} = 9 + \sqrt{324 - 36x}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach x auf, so erhalten wir $x = 8$. Damit ist der Beweis abgeschlossen.



Illustration: Julia Nurit Schönnagel

5 Sportliche Mittagspause

Autor: Thomas Nowotka (MATH+)

Aufgabe

Auch am Nordpol hat man mittlerweile erkannt, dass sportliche Aktivität äußerst förderlich für Wohlbefinden und Konzentration ist. Daher ist es verpflichtend für alle Mitarbeitenden der Weihnachtsmannwerkstatt, in der Mittagspause an einem gemeinsamen Bewegungsspiel teilzunehmen.

Heute ist Oberelf Alvie für die Organisation der Pause zuständig. Er stellt sich mit allen Elfen, die heute Schicht haben, in einem Kreis auf. Zu Beginn des Spiels hält Alvie einen magischen Ball aus Sternenstaub in der Hand. Dieser wird nun in mehreren Runden hin- und hergeworfen, und zwar nach festen Regeln:

1. Die k -te Runde beginnt, indem Alvie den Ball dem k -ten Kollegen links von ihm zuspielt.
2. In der k -ten Runde wirft jeder Elf den Ball, nachdem er ihn bekommen hat, dem k -ten Elfen links von ihm zu.
3. Eine Runde endet, sobald der Ball wieder zu Alvie zurückgekehrt ist.

Abbildung 16 zeigt beispielhaft, wie die zweite und dritte Runde ablaufen, wenn 8 Elfen auf Arbeit sind.

Alvie möchte jedem Elfen den Ball genau einmal zuspielen, d.h. es werden so viele Runden gespielt, wie Elfen abzüglich Alvie anwesend sind. Da die Elfen einen starken Gerechtigkeits-sinn haben, jubeln sie am Ende einer Runde, wenn in dieser jeder Elf den Ball werfen durfte.

Abbildung 16 zeigt beispielhaft, wie die dritte Runde abläuft, wenn 8 Elfen auf Arbeit sind. Man sieht, dass jeder Elf den Ball einmal werfen darf, d.h. am Ende der Runde wird gejubelt.

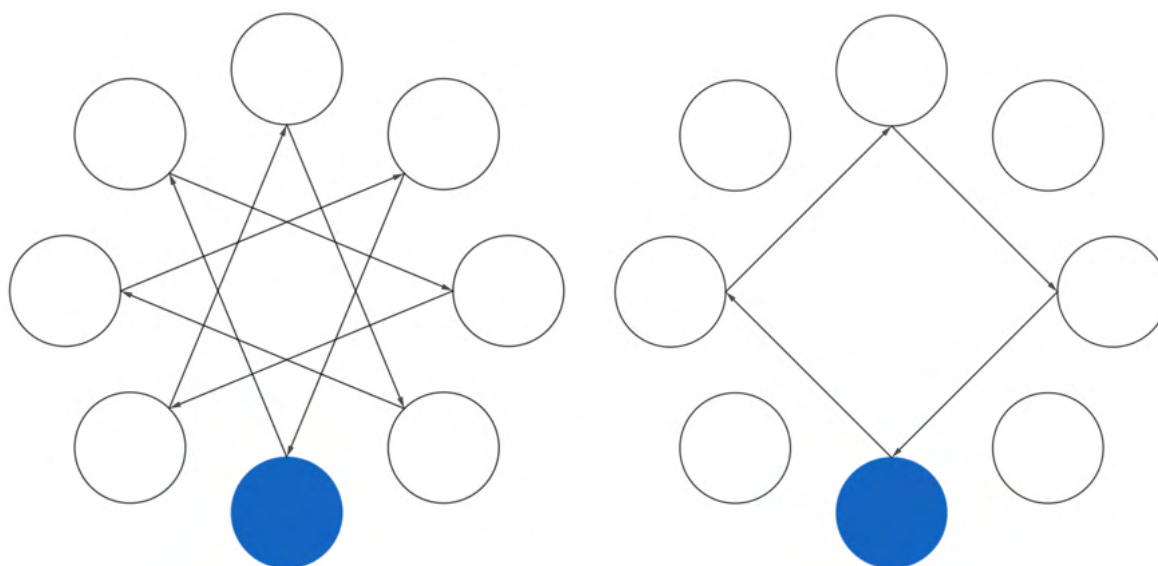


Abbildung 16: Die dritte und die zweite Runde, wenn 8 Elfen (Kreise) auf Arbeit sind. Würfe sind als Pfeile dargestellt. Alvie ist blau eingefärbt.

Als Alvie am Ende des Tages einen Bericht für den Weihnachtsmann schreiben muss, fällt ihm auf, dass er nicht mehr genau weiß, wie viele Elfen inklusive ihm heute in der Werkstatt gearbeitet haben.

Durch intensives Nachdenken kann er vieles ausschließen und die Möglichkeiten auf zehn Zahlen einschränken (siehe Antwortmöglichkeiten). Außerdem fällt ihm noch ein, dass in der heutigen Mittagspause 80 mal gejubelt wurde.

Kannst du Alvie sagen, wie viele Elfen (inkl. ihm) heute auf der Arbeit gewesen sind?

Bemerkung: Man kann zeigen, dass der Ball in jeder Runde des Spiels nach endlich vielen Würfen zu Alvie zurückkehrt. Davon darf in dieser Aufgabe ausgegangen werden.

Hinweis: Jede positive ganze Zahl größer als eins lässt sich eindeutig als Produkt aus Primzahlen beschreiben (eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren in dem Produkt). Dieses Produkt nennt man Primfaktorzerlegung und kann bei der Lösung dieser Aufgabe hilfreich sein.

Antwortmöglichkeiten:

1. 148
2. 151
3. 152
4. 157
5. 164
6. 166
7. 173
8. 179
9. 181
10. 184

Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Sei n die Anzahl der Elfen, die heute auf der Arbeit waren.
Dann wurden in der heutigen Mittagspause $n - 1$ Runden gespielt.

Wir überlegen uns nun, dass in der k -ten Runde genau dann gejubelt wird, wenn k und n teilerfremd sind.

Dazu nehmen wir zunächst an, dass k und n nicht teilerfremd sind und zeigen, dass in diesem Fall nach Runde k nicht gejubelt wird.

Nach der Definition von Teilerfremdheit gibt es einen gemeinsamen Teiler $d > 1$. Nun färben wir bei Alvie beginnend im Uhrzeigersinn jeden d -ten Elfen rot ein, bis wir wieder bei Alvie ankommen. Wegen $d \mid n$ sind dann $\frac{n}{d}$ Elfen rot.¹ Dies sind wegen $d > 1$ nicht alle, d.h. es gibt Elfen, die nicht eingefärbt wurden (siehe Abb. 17).

Wird von Alvie aus der Ball in Runde k entsprechend Regel 2 geworfen, landet er wegen $d \mid k$ stets nur bei rot eingefärbten Elfen. Dies bedeutet, dass in dieser Runde nicht jeder Elf den Ball werfen darf und daher nicht gejubelt wird.

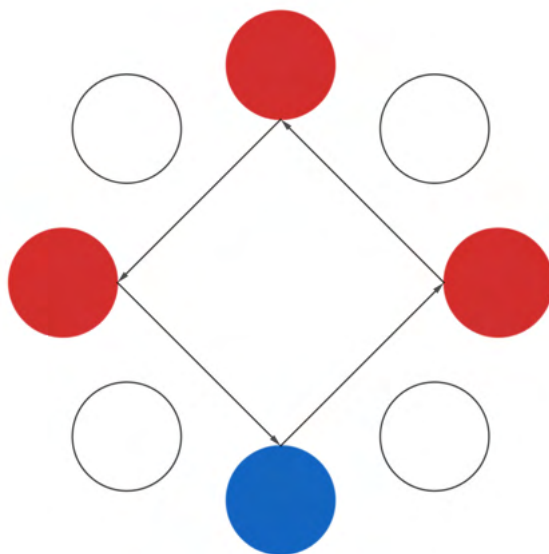


Abbildung 17: Runde $k = 6$, wenn $n = 8$ Elfen (Kreise) auf der Arbeit sind. Würfe sind als Pfeile dargestellt. Von Alvie (blau) aus ist entgegen dem Uhrzeigersinn jeder 2-te Elf rot eingefärbt.

Nun betrachten wir den Fall, dass k und n teilerfremd sind und zeigen, dass in diesem Fall nach Runde k gejubelt wird. Dazu führen wir folgende Bezeichnung ein: Für eine positive ganze Zahl l sagen wir, dass der Ball l Elfen passiert hat, wenn ein Elf den Ball dem l -ten

¹ $d \mid n$ („ d teilt n “) bedeutet, dass d ein Teiler von n ist.

Elfen links von ihm zuspielt.

Für jede positive ganze Zahl m gilt: Der Ball ist in der k -ten Runde genau dann nach m Würfeln wieder bei Alvie, wenn er durch die m Würfe, Regel 2 befolgend, ein- oder mehrmals den kompletten Kreis aus n Elfen passiert hat, d.h. wenn $n \mid k \cdot m$ gilt. Dies ist wegen der Teilerfremdheit von n und k genau dann der Fall, wenn $n \mid m$ gilt: Schreibt man nämlich $\frac{km}{n}$ als Bruch, so lassen sich gemeinsame Faktoren von km und n kürzen. Weil k und n aber teilerfremd sind, lässt sich nur zwischen m und n kürzen. Die Aussage $n \mid k \cdot m$ bedeutet, dass der Bruch so gekürzt werden kann, dass im Nenner eine 1 steht. Da nur mit m gekürzt werden kann, folgt also, dass das genau dann möglich ist, wenn $n \mid m$ gilt. Folglich ist der Ball erstmals nach n Würfeln wieder bei Alvie, d.h. die Runde umfasst genau n Würfe.

Jetzt zeigen wir per Widerspruch, dass keine zwei Würfe vom gleichen Elf geworfen werden können. Wäre das der Fall, gäbe es eine Folge von Würfeln, die von einem Elf wieder zu sich selbst führt, ohne dass Alvie den Ball erhält. Wie würde das Spiel weitergehen? Die Situationen bei dem der Elf das erste und das zweite mal den Ball erhält führen zur exakt gleichen Abfolge an darauffolgenden Würfeln. Daher würde dieser Elf den Ball immer wieder zugespielt bekommen und der Ball würde nie wieder bei Alvie landen, was ein Widerspruch zur Bemerkung in der Aufgabenstellung ist.

Da keine zwei der n Würfe vom gleichen Elfen durchgeführt werden und n Elfen mitspielen, wirft also jeder Anwesende den Ball einmal und es wird am Ende der Runde gejubelt.

Es wurde heute also so oft gejubelt, wie es positive ganze Zahlen kleiner als n gibt, die teilerfremd zu n sind. Diese Anzahl sei mit $\varphi(n)$ bezeichnet.

Wir wollen somit die Zahl n aus den Antwortmöglichkeiten ermitteln, für die $\varphi(n) = 80$ gilt.

Ist p eine Primzahl, so ist jede positive ganze Zahl kleiner als p zu p teilerfremd, d.h. wir erhalten

$$\begin{aligned}\varphi(151) &= 150 \neq 80, \\ \varphi(157) &= 156 \neq 80, \\ \varphi(173) &= 172 \neq 80, \\ \varphi(179) &= 178 \neq 80, \text{ und} \\ \varphi(181) &= 180 \neq 80.\end{aligned}$$

Es verbleiben also die Möglichkeiten $148 = 2^2 \cdot 37$, $152 = 2^3 \cdot 19$, $164 = 2^2 \cdot 41$, $166 = 2 \cdot 83$ und $184 = 2^3 \cdot 23$, deren Primfaktorzerlegungen alle von der Form $2^q \cdot p$ mit einer positiven ganzen Zahl q und einer Primzahl $p \neq 2$ sind.

Daher bestimmen wir nun $\varphi(2^q p)$: Eine positive ganze Zahl m kleiner als $2^q p$ ist genau dann nicht teilerfremd zu $2^q p$, wenn m und $2^q p$ einen gemeinsamen Teiler besitzen. Das ist genau dann der Fall, wenn $2 \mid m$ oder $p \mid m$ gilt. Die Begründung dafür ist ähnlich wie oben mit dem Kürzen von Brüchen.

Es gibt $\frac{2^q p}{2} - 1 = 2^{q-1} p - 1$ durch 2 teilbare positive ganze Zahlen kleiner als $2^q p$ und $\frac{2^q p}{p} - 1 = 2^q - 1$ durch p teilbare positive ganze Zahlen kleiner als $2^q p$. Es sind $\frac{2^q p}{2p} - 1 = 2^{q-1} - 1$ positive ganze Zahlen kleiner als $2^q p$ sowohl durch p als auch durch 2 teilbar.

Addieren wir nun die ersten beiden Anzahlen und subtrahieren die dritte, um die Doppelzählungen zu vermeiden, erhalten wir die Anzahl der positiven ganzen Zahlen kleiner als $2^q p$, die durch 2 oder p teilbar, also nicht teilerfremd zu $2^q p$ sind. Diese beträgt

$$(2^{q-1}p - 1) + (2^q - 1) - (2^{q-1} - 1) = 2^{q-1}p - 1 + 2^{q-1}.$$

Ziehen wir diese Anzahl von der Anzahl der positiven ganzen Zahlen kleiner als $2^q p$ ab, erhalten wir $\varphi(2^q p)$. Also ist

$$\varphi(2^q p) = (2^q p - 1) - (2^{q-1}p - 1 - 2^{q-1}) = 2^{q-1}p - 2^{q-1} = 2^{q-1}(p - 1).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\varphi(148) &= \varphi(2^2 \cdot 37) = 2^1 \cdot 36 = 72 \neq 80, \\ \varphi(152) &= \varphi(2^3 \cdot 19) = 2^2 \cdot 18 = 72 \neq 80, \\ \varphi(166) &= \varphi(2^1 \cdot 83) = 2^0 \cdot 82 = 82 \neq 80, \\ \varphi(184) &= \varphi(2^3 \cdot 23) = 2^2 \cdot 22 = 88 \neq 80, \text{ und} \\ \varphi(164) &= \varphi(2^2 \cdot 41) = 2^1 \cdot 40 = 80.\end{aligned}$$

Damit sind heute 164 Elfen auf Arbeit gewesen.



Illustration: Friederike Hofmann

6 Zufälliges Nikolaus-Haus-Bauen

Autor: Silas Rathke (FU Berlin)

Aufgabe

In der Bar „Zum Tropfenden Eiszapfen“ geht der Nikolaus seiner Lieblingsbeschäftigung nach: Er redet unentwegt über sein Haus. Was für eine architektonische Meisterleistung es doch sei! In seiner Schlichtheit elegant verbinde es prägende Elemente der Neoromanik mit der Scheldegotik! Und trotz dieser intellektuellen Glanzleistung weiß noch immer jedes Kind, wie es aussieht! Voller Stolz präsentiert er schließlich seiner gelangweilten Zuhörerschaft eine Zeichnung seines so verehrten Hauses (siehe Abb. 18).

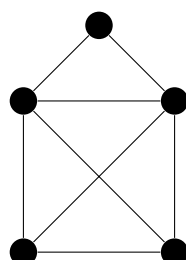


Abbildung 18: Das Haus vom Nikolaus bestehend aus fünf Kreisen und acht Verbindungslinien.

„Und das Beste kommt erst noch!“, lässt er sein unfreiwilliges Publikum wissen. „Wenn man erst einmal die fünf schwarzen Kreise gemalt hat, kann man alle acht Linien zwischen den Kreisen zeichnen, ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu malen!“

Jetzt wird es dem anwesenden Mathematiker-Elf Uhur zu bunt und er antwortet mit einem seiner Lieblingssätze: „Beweise es!“

Der Nikolaus erstarrt. Immerhin hat er in seinem Redeschwall den einen oder anderen Glühwein getrunken und so fällt ihm nun beim besten Willen nicht mehr ein, wie man sein Haus mit der oben genannten Regel zeichnen kann. Es bleibt ihm nichts anderes übrig, als zufällig zu zeichnen und das Beste zu hoffen.

Er holt einen dicken roten Filzstift aus seinem Sack und beschließt, die dünnen schwarzen Linien in der Zeichnung des Hauses vom Nikolaus mit dem Filzstift nachzuzeichnen.

Dafür wählt er uniform zufällig² einen der fünf Kreise als Startpunkt und setzt dort seinen Stift an. Von da an zeichnet er die nächste Linie immer auf die folgende Art: Er schaut sich an, wo sein Stift gerade ist, schaut welche Linien bei der schwarzen Zeichnung diesen Kreis als Endpunkt haben und noch nicht nachgezeichnet sind. Von diesen wählt er uniform zufällig und unabhängig von seinen vorherigen Entscheidungen eine aus und zeichnet sie mit dem Filzstift nach. Das macht er so lange, bis sein Stift einen Punkt erreicht, wo schon alle Linien rot nachgezeichnet sind.

Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass er dann tatsächlich das vollständige Haus des Nikolaus nachgezeichnet hat. Was ist die 100. Stelle nach dem Komma in der Dezimaldarstellung von p ?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

²uniform zufällig bedeutet in diesem Fall, dass alle Kreise mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

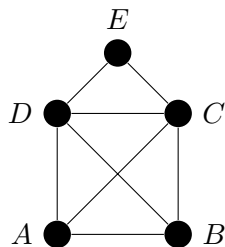


Abbildung 19: Das Haus vom Nikolaus mit Kreisen A bis E.

Wenn eine Linie einen Kreis als Endpunkt hat, sagen wir, dass die Linie *inzident* zu dem Kreis ist. Der *Grad* eines Kreises ist die Anzahl seiner inzidenten Kanten. Beim Haus vom Nikolaus hat der Kreis A zum Beispiel den Grad 3.

Um diese Aufgabe zu lösen, können wir den Mathematiker-Freund von Uhu zurate ziehen: Euler. Nach seinem Satz kann man eine Figur wie das Haus vom Nikolaus genau dann zeichnen ohne den Stift abzusetzen, wenn die Figur zusammenhängend ist und höchstens zwei Kreise einen ungeraden Grad haben. Wenn genau zwei Kreise ungeraden Grad haben, dann sind dies genau die Kreise, wo der Stift anfangen und aufhören muss.

Beim Haus vom Nikolaus haben genau A und B ungeraden Grad. Wenn er bei A anfängt, dann endet sein Stift nach dem Satz von Euler am Ende bei B. Warum ist das so? Er kann nicht wieder bei A sein, da immer wenn der Stift bei A ist, eine gerade Anzahl an inzidenten Linien bereits gezeichnet sind. Es gibt also immer noch mindestens eine Linie, über die der Stift den Punkt A wieder verlassen kann. Immer wenn der Stift bei einem anderen Kreis als A ist, nennen wir ihn K, hat er bereits eine ungerade Anzahl an zu K inzidenten Linien gezeichnet. Das heißt, der Stift kann am Ende nur beim Kreis B sein, weil nur er eine ungerade Anzahl an inzidenten Linien hat.

Wenn der Nikolaus am Anfang nicht A oder B auswählt, dann wird er in keinem Fall das vollständige Haus zeichnen können. Dies passiert mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{5}$.

Jetzt müssen wir noch ausrechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass er das vollständige Haus zeichnet, wenn er bei A oder B anfängt. Da das Haus symmetrisch ist, reicht es, wenn wir uns nur den Fall anschauen, wo er bei A anfängt.

Sei p_A die Wahrscheinlichkeit, dass der Nikolaus das vollständige Haus zeichnet unter der Voraussetzung, dass er bei A gestartet ist. Wir werden zunächst die Gegenwahrscheinlichkeit $\overline{p_A}$ berechnen, also die Wahrscheinlichkeit, dass der Nikolaus nicht das vollständige Haus zeichnet, obwohl er bei A angefangen hat. Wir wissen bereits, dass seine Zeichnung bei B aufgehört haben muss. Das bedeutet, dass auch in seiner Zeichnung A und B ungeraden Grad haben, während C, D und E einen geraden Grad haben. Außerdem muss B den Grad 3 haben, da man sonst noch hätte weiterzeichnen können. Schauen wir uns die Linien vom Haus vom Nikolaus an, die nicht zu B inzident sind:

Um ein Beispiel zu konstruieren, bei dem nicht das ganze Haus gezeichnet wird, müssen wir

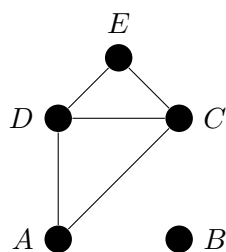


Abbildung 20: Linien des Hauses vom Nikolaus, die nicht inzident zu B sind.

von diesen Linien welche auswählen, die wir in der Zeichnung des Hauses weglassen wollen. Diese wählen wir so, dass an jedem Kreis eine gerade Anzahl an inzidenten Linien ausgewählt wird. Man sieht schnell, dass dies auf genau drei Arten geht (siehe Abb. 21).

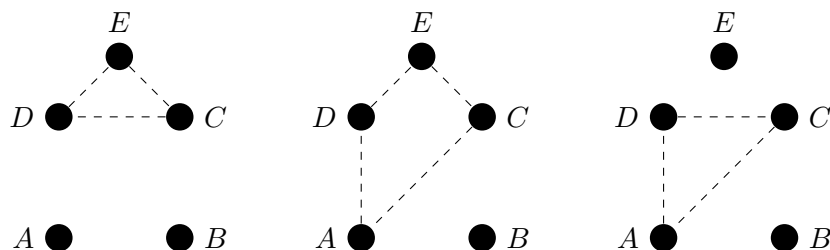


Abbildung 21: Geschickte Auswahl an Linien aus Abbildung 20.

Die drei Fälle übersetzen sich zu drei Endzuständen, bei denen nicht das ganze Haus vom Nikolaus eingezeichnet wird (siehe Abb. 22)

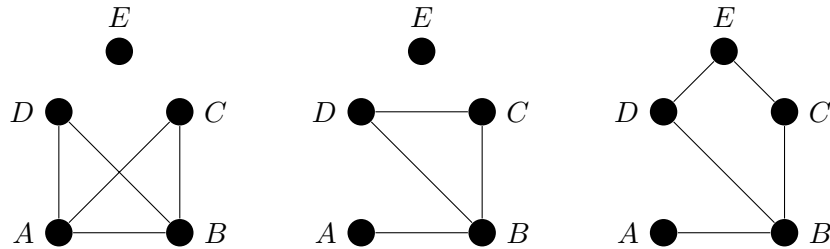


Abbildung 22: Wenn der Nikolaus bei A anfängt, sind das die einzigen Endzustände, wo nicht das ganze Haus gezeichnet wurde.

Jetzt müssen wir nur noch ausrechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Figuren gezeichnet werden, wenn man bei A anfängt. Das tun wir in der folgenden Tabelle:

Kreis-Reihenfolge	Wahrscheinlichkeit	=
A, B, C, A, D, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{54}$
A, B, D, A, C, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{54}$
A, C, B, A, D, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{54}$
A, C, B, D, A, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1$	$\frac{1}{54}$
A, D, B, A, C, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{54}$
A, D, B, C, A, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1$	$\frac{1}{54}$
A, B, C, D, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{54}$
A, B, D, C, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{54}$
A, B, C, E, D, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{54}$
A, B, D, E, C, B	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{54}$

Somit kann man sehen, dass $\overline{p_A} = 10 \cdot \frac{1}{54} = \frac{5}{27}$ ist. Damit erhalten wir

$$p_A = 1 - \overline{p_A} = \frac{22}{27}.$$

Die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit hat er, wenn er bei B startet. Da nur die Kreise A und B von den insgesamt 5 Knoten überhaupt zu einem Erfolg des Nikolaus' führen können, ergibt sich die generelle Erfolgswahrscheinlichkeit

$$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{22}{27} = \frac{44}{135} = 0,3259.$$

Die 100. Nachkommastelle ist also eine 9.

Hoffentlich wird sich der Nikolaus nach dieser komplizierten Rechnerei beim nächsten Mal zweimal überlegen, wen er mit seinem Geschwafel langweilt...

Alternative Lösung:

In der obigen Lösung haben wir bereits festgestellt, dass man das Haus vom Nikolaus nur vollständig zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen, wenn man bei A oder B in Abbildung 19 startet.

Es gibt 44 Möglichkeiten, das Haus vom Nikolaus zu zeichnen, wenn man bei A startet. Diese sind in Abbildung 23 dargestellt.

Wir wollen zunächst die Wahrscheinlichkeit für jede der 44 Möglichkeiten berechnen, das Haus zu zeichnen, wenn wir bei A starten. Dazu betrachten wir für jeden Kreis die Linien, die wir noch ausgehend davon zeichnen müssen:

- Wenn man bei A startet, wählt man eine der drei inzidenten Linien mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ zum Nachzeichnen aus. Wenn man das Haus weiterzeichnet, ohne den Stift abzusetzen, gelangt man über eine der verbleibenden zwei inzidenten Linien irgendwann wieder bei A . Jetzt bleibt nur noch eine Linie, die man mit Wahrscheinlichkeit 1 wählt um weiterzuzeichnen.
- Kreis B wird im Verlauf der Zeichnung zunächst über eine inzidente Linie erreicht. Dann wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine der beiden verbleibenden inzidenten Linien gewählt um weiterzuzeichnen.
- Kreis C wird im Verlauf der Zeichnung zunächst über eine inzidente Linie erreicht. Dann wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ eine der drei verbleibenden inzidenten Linien gewählt. Später wird C nochmals über eine inzidente Linie erreicht und schließlich wählt man mit Wahrscheinlichkeit 1 die letzte verbleibende inzidente Linie um C zu verlassen.
- Bei Kreis D wird wie beim Fall für Kreis C eine Linie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gewählt und eine weitere mit Wahrscheinlichkeit 1, um die ausgehenden Linien von D zu zeichnen.
- Kreis E wird über eine inzidente Linie erreicht. Dann verbleibt nur noch eine weitere inzidente Linie um E zu verlassen, die mit Wahrscheinlichkeit 1 genommen wird.

Man erhält jede der 44 Zeichnungen aus Abbildung 23 mit folgender Wahrscheinlichkeit:

$$\underbrace{\frac{1}{3} \cdot 1}_{\text{ausgehend von } A}, \underbrace{\cdot \frac{1}{2}}_{\text{von } B}, \underbrace{\cdot \frac{1}{3} \cdot 1}_{\text{von } C}, \underbrace{\cdot \frac{1}{3} \cdot 1}_{\text{von } D}, \underbrace{\cdot 1}_{\text{von } E} = \frac{1}{54}$$

Da das Haus symmetrisch ist, gibt es auch 44 Möglichkeiten das Haus zu zeichnen, wenn wir bei B starten.

Wir starten unsere Zeichnung mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{5}$ bei A oder B . Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{2}{5} \cdot 88 \cdot \frac{1}{54} = 0,3259.$$

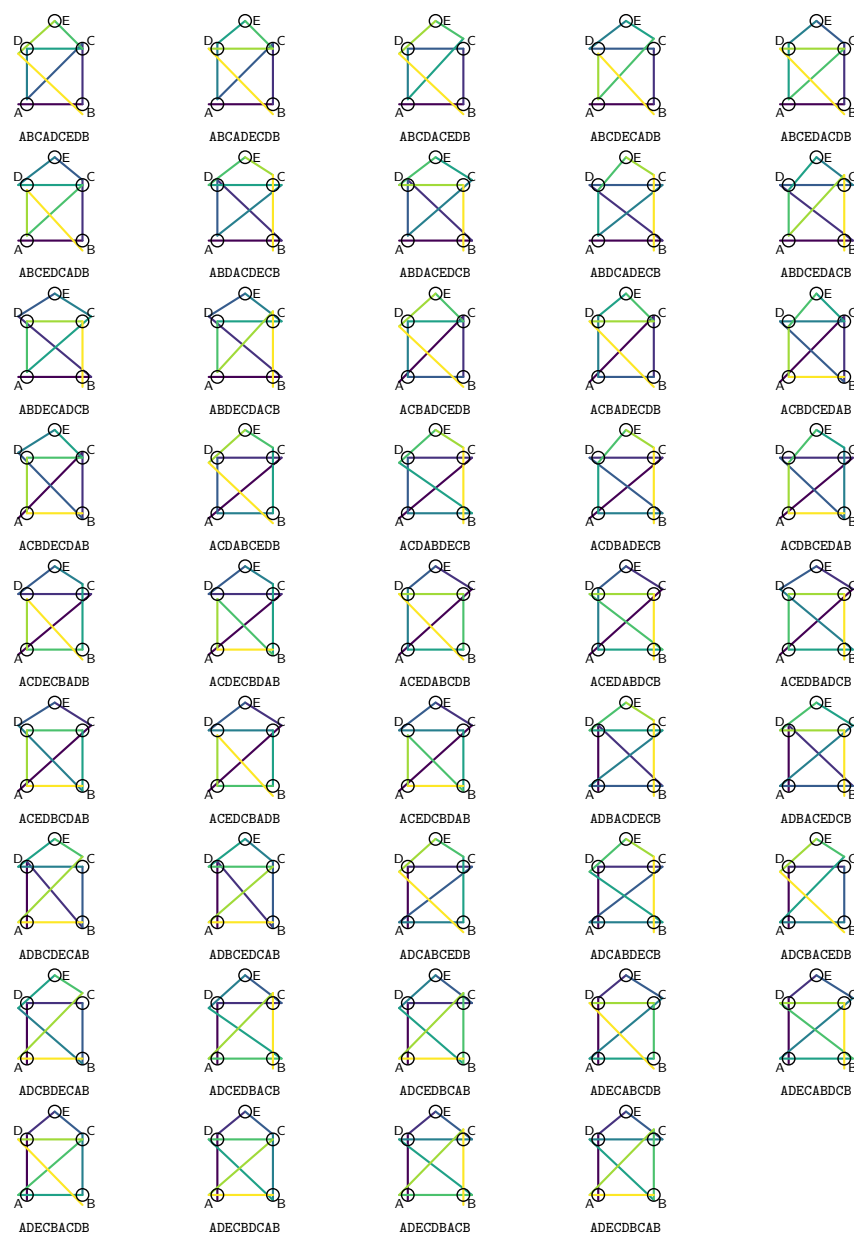


Abbildung 23: Die 44 Möglichkeiten, das Haus vom Nikolaus einzuzichnen, wenn man unten links anfängt zu zeichnen.



Illustration: Ivana Martić

7 Das Einpackraum-Rätsel

Autor: Nikola Sadovek

Aufgabe

Im Einpackraum des Weihnachtsmanns haben die Wichtel alle Hände voll zu tun, um die letzten Geschenke rechtzeitig vor dem Heiligabend fertig zu verpacken. Doch es gibt ein Problem – **die Geschenkpapiermaschine ist kaputt!**

Anstatt alle möglichen Formen an Geschenkpapier zurechtzuschneiden, kann die Maschine das Papier nur in **fünf besondere Formen** schneiden (siehe Abbildung 24). Jede Form besteht aus sogenannten identischen Einheits- Wichtelquadraten (alle kleinen Quadrate haben exakt die gleiche Größe), und die Maschine kann sie **weder drehen noch spiegeln** – jedes Stück muss genauso verwendet werden, wie es in der Abbildung 24 gezeigt ist.

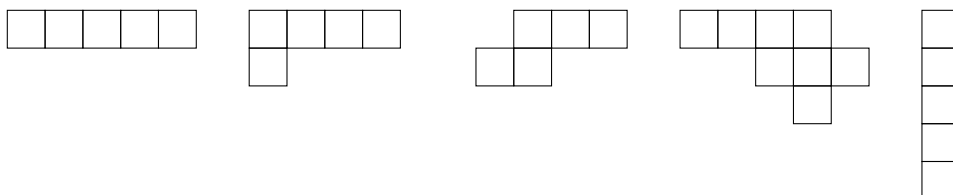


Abbildung 24: Die fünf besonderen Formen.

Zum Glück kann jedes dieser Stücke noch zum Einpacken für einige Geschenke benutzt werden:

- **Langer Streifen** - wird zum Verpacken von Spielzeugzügen verwendet.
- **L-Form** - passt um Schachteln mit Ecken.
- **Kleine Stufenform** - bedeckt gestapelte Bücher.
- **Wasserpistole** - für die Wasserpistolen in den Geschenkkartons.
- **Gerade Säule** - für Zuckerstangen.

Die Wichtel müssen nun einige **rechteckige Stücke der Größe** $m \times n$ mit der Maschine zurechtschneiden, wobei $m, n \geq 1$. Dabei entspricht m der Anzahl der Zeilen und n der Anzahl der Spalten des jeweiligen rechteckigen Stücks.

Sie wollen herausfinden, **für welches Paar** (m, n) , das in den Antwort- möglichkeiten aufgeführt ist, sie das gesamte Rechteck **ausschließlich mit diesen fünf Formen** auffüllen können – **ohne, dass ein Rest übrig bleibt**. Kannst du ihnen helfen und das passende Paar bestimmen?

Antwortmöglichkeiten:

1. $m = 2021, n = 2024$.
2. $m = 2021, n = 2029$.
3. $m = 2022, n = 2026$.
4. $m = 2022, n = 2028$.
5. $m = 2023, n = 2024$.
6. $m = 2023, n = 2027$.
7. $m = 2024, n = 2026$.
8. $m = 2024, n = 2027$.
9. $m = 2024, n = 2029$.
10. Keine der anderen Antworten ist richtig.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir zeigen, dass die Lösungen genau die Paare (m, n) sind, für die 5 das Produkt mn teilt. Zunächst zeigen wir, dass wir, falls $5 \mid mn$, das Rechteck der Dimension $m \times n$ ausschließlich mit langen Streifen oder nur mit geraden Spalten füllen können.

Ist nämlich $5 \mid mn$, so muss 5 entweder m oder n teilen. Um dies zu sehen, betrachten wir die folgenden zwei Fälle:

1. $5 \mid m$: In diesem Fall ist die Aussage offensichtlich richtig.
2. $5 \nmid m$: In diesem Fall haben m und 5 keine gemeinsamen positiven Teiler außer 1. Dennoch kann der Bruch $\frac{mn}{5}$ zu einer ganzen Zahl gekürzt werden. Da m und 5 nicht gekürzt werden können, müssen n und 5 kürzbar sein. Also gilt $5 \mid n$, und die Aussage ist bewiesen.

Ist Fall 1 erfüllt, können wir jede Spalte mit $m/5$ geraden Spalten füllen und damit das gesamte Rechteck ausfüllen. Analog dazu können wir im zweiten Fall jede Zeile mit $n/5$ langen Streifen füllen und so das gesamte Rechteck ausfüllen.

Nun zeigen wir, dass, wenn ein $m \times n$ -Rechteck ausschließlich mit den fünf gegebenen Formen ausgefüllt werden kann, dann $5 \mid mn$ gilt. Dazu zerlegen wir das Rechteck in mn gleich große Quadrate. Anschließend weisen wir den Quadraten gemäß Abbildung 2 Werte zu. Dabei erhält das Quadrat unten links die Koordinaten $(1, 1)$ und das Quadrat oben rechts die Koordinaten (m, n) . Der Wert eines Quadrats mit beliebigen Koordinaten (i, j) ist gegeben durch

$$2^{i+j} \pmod{31}.$$

Dabei bezeichnet die Operation „mod 31“ den Rest der Division von 2^{i+j} durch 31.

Betrachten wir nun eine der vier Formen, die jeweils fünf Quadrate überdecken. Sie überdecken stets fünf Quadrate mit unterschiedlichen Werten. Dies lässt sich leicht von Hand überprüfen, da es aufgrund der Periodizität der Werte nur wenige Fälle zu betrachten gibt. Somit ist die Summe dieser Werte stets 31.

Für die Form, die acht Quadrate überdeckt, ist die Situation etwas anders. Auch hier ergibt die Summe der Werte der überdeckten Quadrate stets ein Vielfaches von 31. Dies lässt sich ebenfalls leicht durch Betrachtung aller möglichen Fälle zeigen.

Damit ist gezeigt, dass die Summe der Werte der von jeder der gegebenen Formen überdeckten Quadrate immer durch 31 teilbar ist. Folglich ist bei einer vollständigen Pflasterung eines $m \times n$ -Rechtecks die Summe aller Werte durch 31 teilbar. Dies verwenden wir nun, um unsere Behauptung zu beweisen.

Da die Summe der Zahlen 1, 2, 4, 8, 16 gleich 31 ist und somit durch 31 teilbar ist, können wir folgern, dass die Summe der Werte von fünf aufeinanderfolgenden Spalten durch 31 teilbar ist, da die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16 genau einmal in jeder Zeile auftreten.

Analog dazu ist auch die Summe der Werte von fünf aufeinanderfolgenden Zeilen durch 31 teilbar.

Auf diese Weise können wir die Größe des Rechtecks schrittweise reduzieren, indem wir zunächst jeweils fünf aufeinanderfolgende Spalten entfernen und anschließend jeweils fünf aufeinanderfolgende Zeilen entfernen, ohne dabei den Rest der Summe aller verbleibenden Werte modulo 31 zu verändern (siehe Abbildung 3).

1	2	4	8	16	1	2	4
16	1	2	4	8	16	1	2
8	16	1	2	4	8	16	1
4	8	16	1	2	4	8	16
2	4	8	16	1	2	4	8
1	2	4	8	16	1	2	4

Abbildung 25: Zuordnung von Werten zu den Quadraten des Rechtecks. Die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16 wiederholen sich periodisch.

Das reduzierte Rechteck hat die Dimensionen $k \times l$ mit $k, l < 5$. Wenn wir zeigen können, dass entweder $k = 0$ oder $l = 0$ gilt, so folgt daraus — da wir ein Vielfaches von fünf Zeilen und ein Vielfaches von fünf Spalten entfernt haben —, dass die ursprüngliche Anzahl der Zeilen oder Spalten durch 5 teilbar sein muss, womit die Behauptung bewiesen ist.

Überprüfung der Fälle:

1. $k = 1$ **oder** $l = 1$: Dieser Fall entspricht einem Rechteck mit genau einer Zeile oder einer Spalte, die höchstens vier Quadrate enthält. Die Werte in diesen Quadraten müssen alle verschieden sein, und mindestens ein Wert fehlt. Daher ist die Summe dieser Werte kleiner als 31. Die einzige Möglichkeit, dass das Rechteck eine durch 31 teilbare Summe besitzt, ist, dass die Summe gleich 0 ist, also $k = 0$ oder $l = 0$.
2. $k = l = 2$: Nach der Konstruktion gibt es im Wesentlichen drei Möglichkeiten, von denen keine zu einer durch 31 teilbaren Summe führt. Somit kann dieser Fall ausgeschlossen werden. Abbildung 4 illustriert dies.
3. $k = 2, l = 3$ (**oder** $k = 3, l = 2$): Dieser Fall kann ausgeschlossen werden, indem man das 2×3 -Rechteck zu einem 2×5 -Rechteck erweitert. Nach den vorherigen Argumenten teilt 31 die Summe der Werte des 2×5 -Rechtecks.

Wäre die Summe der Werte des 2×3 -Rechtecks durch 31 teilbar, so müsste auch die Summe der Werte des verbleibenden 2×2 -Rechtecks durch 31 teilbar sein, was im Widerspruch zum vorherigen Fall steht. Daher kann auch dieser Fall ausgeschlossen werden. (Analog können wir den Fall $k = 3, l = 2$ ausschließen.)

4. Alle übrigen Fälle: Das obige Argument lässt sich allgemeiner anwenden: Indem man ein $k \times l$ -Rechteck entweder zu einem $(5 - k) \times l$ - oder zu einem $k \times (5 - l)$ -Rechteck erweitert, erhalten wir ein Rechteck, dessen Summe der Werte durch 31 teilbar ist. Somit ist auch die Summe der Werte des $k \times l$ -Rechtecks durch 31 teilbar, genau dann, wenn die Summe der Werte des $(5 - k) \times l$ -Rechtecks und die Summe der Werte des $k \times (5 - l)$ -Rechtecks durch 31 teilbar sind.

Auf diese Weise können wir alle übrigen Fälle auf die zuvor betrachteten Fälle zurückführen. Durch die Überprüfung aller Fälle folgern wir, dass entweder $k = 0$ oder $l = 0$ gilt, womit der Beweis abgeschlossen ist.

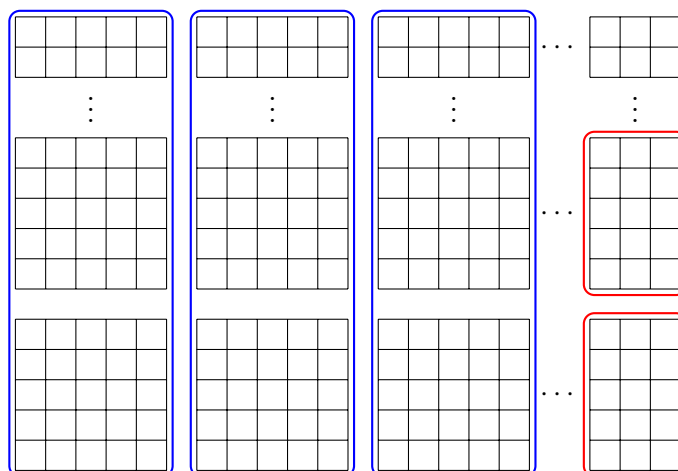


Abbildung 26: Reduktion der Dimensionen des Rechtecks. Zunächst werden alle Folgen von fünf aufeinanderfolgenden Spalten (blau) entfernt. Anschließend werden alle Folgen von fünf aufeinanderfolgenden Zeilen (rot) entfernt.

$2x$	$4x$
x	$2x$

16	1
8	16

1	2
16	1

Abbildung 27: Die Summe der Werte ist in jedem Fall nicht durch 31 teilbar. Insbesondere ist im ersten Fall $9x$ nicht durch 31 teilbar, da x selbst nicht durch 31 teilbar ist.



Illustration: Zyanya Santuario

8 Rettet die Geschenke!

Autor: Lukas Protz

Projekt: MATH+

Aufgabe

Als der Sicherheits-Elf bemerkte, was passiert war, war er entsetzt. Der Grinch hatte es geschafft, sich in den Tresorraum zu schleichen, in dem alle Weihnachtsgeschenke aufbewahrt werden. Nicht nur das - er hatte den Code zum Öffnen des Tresors geknackt, ihn verändert und so umprogrammiert, dass alles im Inneren zerstört wird, falls zu oft ein falscher Code eingegeben wird.

Der Sicherheits-Elf flehte den Grinch an, ihm den richtigen Code zu geben, doch der Grinch antwortete, böse lachend: „Schnapp dir 100 Elfen und bring sie zum Tresor. Wir werden ein kleines Spiel spielen und vielleicht könnt ihr eure Geschenke noch retten.“

Sofort folgte der Sicherheits-Elf den Anweisungen des Grinchs und kehrte mit 100 Elfen zum Tresor zurück.

„Die Regeln sind folgende:“, sagt der Grinch. „Der Code für den Tresor besteht aus 100 verschiedenen Zeichen, die sich nicht wiederholen. Insgesamt gibt es 199 Zeichen, aus denen ihr auswählen könnt.“ Er zeigt auf ein Bedienfeld mit 199 Knöpfen, von denen jeder mit genau einem Zeichen beschriftet ist. „Außerdem gibt es einen Bildschirm, der den zuvor eingegebenen Code anzeigt. Er markiert Zeichen, die an der richtigen Position stehen grün, und Zeichen, die im Code vorkommen, aber an der falschen Stelle stehen blau.“

Jeder von euch hat nur einen einzigen Versuch, den Tresor zu öffnen. Außerdem dürft ihr

während des Spiels in keiner Weise miteinander kommunizieren. Um das Ganze noch etwas schwieriger zu machen, werde ich dafür sorgen, dass nur der Elf, der gerade an der Reihe ist, den Bildschirm sehen kann. Während seines Zuges zeigt der Bildschirm lediglich die eingegebenen Zeichen an – ganz ohne Hinweise darauf, ob sie richtig oder falsch sind. Erst wenn alle 100 Zeichen eingegeben wurden und der Elf zurücktritt, wertet der Tresor den Versuch aus und der Bildschirm hebt die entsprechenden Zeichen hervor – sichtbar für den nächsten Elfen. Sobald der richtige Code eingegeben wird, öffnet sich der Tresor.

Wenn keiner von euch den richtigen Code eingibt, werden alle Geschenke automatisch zerstört. Ihr habt 10 Elfen-Minuten (die Standard-Zeiteinheit am Nordpol), um euch eine Strategie zu überlegen.“

Nach einigen Minuten des angestrengten Nachdenkens kommt ein Elf auf eine Idee: „Lasst uns eine Liste aller Zeichen machen. Der erste von uns probiert die ersten 100 Zeichen auf der Liste aus und bei jedem weiteren Versuch machen wir Folgendes:

Wenn ein Zeichen grün markiert wird, bleibt es an derselben Position. Wenn ein Zeichen blau markiert wird, wird es an die nächste freie Position rechts davon im Code gesetzt. Dabei ist eine freie Position eine Position, an der bisher kein grün markiertes Zeichen steht.

Es kann passieren, dass ein blau markiertes Zeichen am Ende des Codes keine freie Position rechts von sich hat. In diesem Fall wird das Zeichen an die erste freie Position im Code gesetzt, von links beginnend.

Die übrigen Positionen werden mit den nächsten unbenutzten Zeichen aus der Liste gefüllt. Jedes dieser Zeichen kommt an die erste noch freie Position, wieder von links nach rechts.“

Da ihnen die Zeit davonläuft, einigen sich die Elfen auf diese Strategie und beginnen mit dem Spiel.

Hoffentlich können die Elfen ihre Geschenke retten! Sei m die minimale Anzahl an Elfen, die nötig wären, um sicherzustellen, dass die Elfen den Code mit ihrer Strategie knacken. Welche Ziffer steht an der Einerstelle von m ?

(Antwortmöglichkeiten auf nächster Seite.)

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir beantworten die Frage allgemeiner: Sei n die Gesamtzahl der Zeichen und k die Länge des Codes. Der Prozess des Findens des Codes bleibt derselbe. Außerdem bezeichne $m_{n,k}$ die minimale Anzahl an Versuchen, die erforderlich ist, um zu garantieren, dass sich der Tresor öffnet. Wir werden zeigen, dass gilt

$$m_{n,k} \geq n - k + 1.$$

Dies ist für unser Problem ausreichend, da $n = 199$ und $k = 100$ die Ungleichung

$$k = 100 \geq 100 = n - k + 1$$

erfüllen. Tatsächlich gilt $m_{199,100} = 100$.

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, führen wir die folgende Notation ein: Mit einem *Shift* meinen wir das Verschieben eines korrekt gewählten, aber falsch positionierten Zeichens auf die Position direkt rechts davon oder, falls es eine solche Position nicht gibt, auf die erste Position des Codes. Beachte, dass ein solcher Shift nach den Regeln nicht zwingend erlaubt ist, diese Notation jedoch dennoch nützlich sein wird.

Zunächst halten wir einige einfache Beobachtungen fest:

Beobachtung 1: Nach höchstens $n - k + 1$ Versuchen sind alle korrekten Zeichen bestimmt. Nach dem ersten Versuch wurden k Zeichen überprüft. In jedem weiteren Versuch wird mindestens ein weiteres Zeichen überprüft, sofern noch nicht alle korrekten Zeichen bestimmt wurden. Somit wurden nach $n - k + 1$ Versuchen mindestens

$$1 \cdot k + (n - k) \cdot 1 = n$$

Zeichen überprüft.

Beobachtung 2: Es gilt $m_{n,k} \leq n$. Nach Beobachtung 1 sind nach höchstens $n - k + 1$ Versuchen alle Zeichen bestimmt. Danach ist nach spätestens $k - 1$ weiteren Versuchen jedes Zeichen korrekt positioniert. Dies liegt daran, dass jedes korrekt platzierte Zeichen auf eine neue Position verschoben wird, auf der es zuvor noch nicht platziert war. Da es nur k Positionen gibt, muss jedes Zeichen nach höchstens $k - 1$ Shifts an der richtigen Position sein. Folglich gilt

$$m_{n,k} \leq n - k + 1 + k - 1 = n.$$

Beachte, dass diese obere Schranke in dieser Allgemeinheit nicht verbessert werden kann, da $m_{n,n} = n$ gilt. Dies lässt sich wie folgt erkennen: Nach dem ersten Versuch sind alle korrekten Zeichen bestimmt. Es gibt ein Szenario, in dem alle Zeichen genau eine Position rechts von ihrer korrekten Position liegen, mit Ausnahme des Zeichens an der ersten Position. Dessen korrekte Position ist die letzte Position im Code. Dann sind $n - 1$ Shifts erforderlich, um alle Zeichen korrekt zu platzieren.

Nun können wir mit dem Beweis der Behauptung beginnen: Betrachten wir ein beliebiges Szenario des Spiels. Es gibt nichtnegative ganze Zahlen $a, l_1, l_2, \dots, l_a$, so dass im i -ten Versuch

genau l_i korrekte Zeichen gefunden werden und im Versuch $a + 1$ alle verbleibenden korrekten Zeichen bestimmt werden. Da wir annehmen, dass $k \geq n - k + 1$ gilt, folgt aus Beobachtung 1, dass nach k Versuchen alle korrekten Zeichen identifiziert worden sind. Außerdem sind nach k Versuchen zumindest die l_1 im ersten Versuch gefundenen Zeichen korrekt platziert. Die im zweiten Versuch gefundenen Zeichen benötigen höchstens einen weiteren Shift, die im dritten Versuch gefundenen Zeichen höchstens zwei weitere Shifts, und allgemein benötigen die im i -ten Versuch gefundenen Zeichen höchstens $i - 1$ Shifts.

Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass im nächsten Versuch jedes falsch positionierte Zeichen eine gewisse Anzahl von Shifts durchführen muss, bis es eine Position erreicht, die derzeit von einem anderen falsch positionierten Zeichen besetzt ist. Dieses Zeichen wiederum wird auf die Position eines weiteren falsch positionierten Zeichens verschoben, und so weiter. Setzt man diesen Prozess fort, so bilden die verbleibenden falsch platzierten Zeichen einen Zyklus. Dies bedeutet, dass die Summe aller einzelnen Shifts gleich k ist.

Wir werden zeigen, dass die Summe der einzelnen Shifts nach dem k -ten Versuch um jedes falsch positionierte Zeichen richtig zu positionieren echt kleiner als k ist. Folglich schließen wir, dass nach dem Versuch k alle Zeichen korrekt platziert sind.

Aufgrund der vorherigen Überlegung ist die Gesamtzahl S der Shifts, die nach dem k -ten Versuch noch benötigt werden, nach oben beschränkt durch

$$S \leq l_1 \cdot 0 + l_2 \cdot 1 + l_3 \cdot 2 + \cdots + l_a \cdot (a - 1) + (k - l_1 - l_2 - \cdots - l_a) \cdot a,$$

wobei der letzte Term den verbleibenden korrekten Zeichen entspricht, die noch gefunden werden müssen, multipliziert mit der maximalen Anzahl an Shifts, die nach dem k -ten Versuch noch erforderlich sind.

Nun wollen wir den allgemeinen Fall auf speziellere Fälle zurückführen. Seien $a, l_1, \dots, l_a$ wie zuvor. Anstatt alle verbleibenden korrekten Zeichen im Versuch $a + 1$ zu finden, betrachten wir nun das Szenario, in dem wir alle verbleibenden korrekten Zeichen bis auf das letzte finden. Das letzte Zeichen wird in einem späteren Versuch, sagen wir im Versuch b , gefunden. Dies beeinflusst lediglich den letzten Term der oberen Schranke für S , der nun durch

$$(k - l_1 - l_2 - \cdots - l_a - 1) \cdot a + 1 \cdot (b - 1)$$

ersetzt wird.

Dieser Term ist nun größer als zuvor, da $b - 1$ größer als a ist. Dies führt zur Frage, wie groß b überhaupt werden kann:

Im ersten Versuch werden k Zeichen überprüft, im zweiten $k - l_1$. Setzt man dies fort, so sieht man, dass im i -ten Versuch für $i \leq a$ genau

$$k - l_1 - l_2 - \cdots - l_{i-1}$$

Zeichen überprüft werden. Nach dem Versuch $a + 1$ wurden insgesamt

$$k + (k - l_1) + (k - l_1 - l_2) + \cdots + (k - l_1 - l_2 - \cdots - l_a) = (a + 1)k - a \cdot l_1 - \cdots - 1 \cdot l_a$$

Zeichen überprüft. In jedem weiteren Versuch wird genau ein weiteres Zeichen überprüft, bis das letzte korrekte Zeichen gefunden ist. Da es insgesamt n Zeichen gibt, benötigt man höchstens

$$n - (a + 1)k + a \cdot l_1 + \cdots + 1 \cdot l_a$$

weitere Versuche, um das letzte korrekte Zeichen zu bestimmen. Fasst man alles zusammen, so folgt

$$b \leq a + 1 + n - (a + 1)k + a \cdot l_1 + \cdots + 1 \cdot l_a.$$

Schließlich können wir

$$\begin{aligned} S &\leq l_1 \cdot 0 + l_2 \cdot 1 + l_3 \cdot 2 + \cdots + l_a \cdot (a - 1) + (k - l_1 - l_2 - \cdots - l_a - 1) \cdot a \\ &\quad + 1 \cdot (a + 1 + n - (a + 1)k + a \cdot l_1 + \cdots + 1 \cdot l_a - 1) \\ &= (k - 1) \cdot a + a + 1 + n - (a + 1)k - 1 \\ &= n - k \end{aligned}$$

berechnen, da sich die l_i -Terme in der ersten Gleichung wegekürzen. Dies bedeutet

$$S \leq n - k < n - k + 1 \leq k,$$

oder kurz $S < k$. Damit ist der Beweis abgeschlossen.



Illustration: Zyanya Santuario

9 Elfen im Aufzug

Autoren: Stella Kapodistria (TUE) und Marko Boon (TUE)

Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Es ist Heiligabend am Nordpol und der Weihnachtsmann bereitet sich auf seine große Reise vor. Sein Schlitten, bis zum Hochglanz poliert, wartet oben auf dem Turm der Weihnachtswerkstatt, im 10. Stock. Unten im Erdgeschoss (im 0. Stock) steht der Weihnachtsmann vor dem Aufzug und reibt sich die müden Knie nach einer langen Nacht voller Spielzeuginspektionen. Als sich die Türen des Aufzugs mit einem fröhlichen Ding öffnen, macht er erleichtert einen Schritt auf sie zu – endlich ein Aufzug, der ihn zu seinem Schlitten bringt, statt endloser Treppen und enger Schornsteine!

Doch bevor er hineingehen kann, huscht eine kichernde Schar von acht schelmischen Elfen an ihm vorbei. In einem Wirbel aus winzigen Händen und klingelndem Gelächter hämmern sie auf das Bedienfeld ein und lassen eine fröhliche Kombination von Knöpfen aufleuchten. Jeder Elf drückt genau einen der Knöpfe $1, 2, \dots, 10$ (zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jeden Knopf), mit einer unerschütterlichen Weihnachtsfreude, die nur solche kleinen Unruhestifter besitzen.

Der Weihnachtsmann stöhnt, fasst sich an den Kopf und denkt: „Ich hätte die Treppe nehmen sollen...“. Noch bevor er einen Blick auf das leuchtende Bedienfeld werfen kann, um zu sehen, welche Knöpfe die Elfen gedrückt haben, fragt er sich, umgeben von seiner fröhlichen Bande gerne Knöpfe drückender Schelme: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Aufzug auf dem Weg zu meinem Schlitten im 10. Stock in genau fünf anderen Stockwerken hält?“

Bemerkung: Der Aufzug startet im 0. Stock und hält – von unten nach oben – genau einmal in jedem Stockwerk, dessen Knopf mindestens einmal gedrückt wurde. Sobald der Weihnachtsmann einsteigt, drückt er den Knopf für den 10. Stock, wo sein Schlitten wartet.

Antwortmöglichkeiten:

1. $\frac{6067920}{8^8} \approx 0.3617 \approx 36\%$.
2. $\frac{452307240}{8^{10}} \approx 0.4212 \approx 42\%$.
3. $\frac{17781120}{9^8} \approx 0.4131 \approx 41\%$.
4. $\frac{40007520}{10^8} \approx 0.4001 \approx 40\%$.
5. $\frac{44007520}{10^8} \approx 0.4401 \approx 44\%$.
6. $\frac{52007520}{10^8} \approx 0.5201 \approx 52\%$.
7. $\frac{52007520}{11^8} \approx 0.2426 \approx 24\%$.
8. $\frac{62007520}{11^8} \approx 0.2893 \approx 29\%$.
9. $\frac{64007520}{11^8} \approx 0.2986 \approx 30\%$.
10. $\frac{80015040}{11^8} \approx 0.3733 \approx 37\%$.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4

Wir leiten zunächst eine Formel für einen allgemeineren Fall her: Es sei $M + 1$ das oberste Stockwerk, m die Anzahl der Stopps und E die Anzahl der Elfen. Zur Lösung unseres spezifischen Problems setzen wir anschließend $M = 9$, $m = 5$ und $E = 8$ ein.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Möglichkeiten, dass die Elfen genau m der Stockwerke $1, 2, \dots, M$ und eventuell das oberste Stockwerk auswählen, geteilt durch die Gesamtanzahl der Möglichkeiten, Stockwerke (beliebig) auszuwählen.

Der Nenner (alle möglichen Varianten, Stockwerke auszuwählen) ist gleich $(M + 1)^E$, da es E Elfen gibt, die alle einen von $M + 1$ Knöpfen drücken.

Für den Zähler beachten wir, dass von den $(M + 1)^E$ Möglichkeiten nur wenige die Bedingung erfüllen, dass die E Elfen die Knöpfe von genau m der Stockwerke $1, 2, \dots, M$ sowie eventuell den Knopf des obersten Stockwerks drücken.

Zunächst wählen wir aus den M möglichen Stockwerken m Stockwerke aus, an denen der Aufzug halten wird. Dies kann auf $\binom{M}{m} = \frac{M!}{m!(M-m)!}$ verschiedene Arten geschehen.

Nun ist zu ermitteln, auf wie viele Arten die Elfen aus den ausgewählten m Stockwerken plus dem obersten Stockwerk wählen können, wobei alle ausgewählten Stockwerke mindestens einmal vorkommen müssen:

Dafür berechnen wir zunächst die Anzahl der Möglichkeiten, wie die Elfen aus den m Stockwerken plus dem obersten Stockwerk auswählen können. Diese Anzahl beträgt $(m + 1)^E$. Dabei haben wir jedoch auch alle Fälle mitgezählt, in denen mindestens eines der ausgewählten Stockwerke nicht gedrückt wird. Daher müssen wir die Anzahl dieser Fälle, die wir im Folgenden mit C bezeichnen, wieder abziehen.

Wir berechnen C mithilfe des sogenannten *Inklusions-Exklusions-Prinzips*: Für jedes Stockwerk j der m ausgewählten Stockwerke zählen wir die Anzahl der Fälle, in denen das Stockwerk j nicht besucht wird und addieren diese. Wir erhalten $\binom{m}{1}(m + 1 - 1)^E$.

Nun wurden für jedes Paar von Stockwerken j, k aus den m gewählten alle Fälle doppelt gezählt, in denen sowohl k als auch j nicht besucht wurden. Daher zählen wir für jedes mögliche Paar die Anzahl der Fälle, in denen dies passiert, addieren diese Anzahlen, was $\binom{m}{2}(m + 1 - 2)^E$ ergibt, und subtrahieren diesen Wert vom vorherigen Ergebnis.

Als Nächstes betrachten wir alle Tripel von Stockwerken j, k, l aus den m gewählten Stockwerken. In dem Fall, dass keines der drei Stockwerke i, j, k besucht wurde, haben wir im ersten Schritt drei hinzugefügt und im zweiten Schritt drei subtrahiert. Daher müssen wir für jedes Tripel die Anzahl dieser Fälle zählen und die erhaltenen Anzahlen addieren, wodurch wir $\binom{m}{3}(m + 1 - 3)^E$ erhalten. Diesen Wert addieren wir wieder zum vorher berechneten Ergebnis. Wenn wir dieses Verfahren nun für jede Menge von i Stockwerken für $i = 4, \dots, m$ weiterführen, erhalten wir insgesamt

$$C = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \binom{m}{i} (m + 1 - i)^E.$$

Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten, wie die Elfen aus den ausgewählten m Stockwerken

plus dem obersten Stockwerk wählen können, wobei jedes der m ausgewählten Stockwerke mindestens einmal vorkommt, gleich

$$(m+1)^E - C = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (m+1-i)^E.$$

Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\binom{M}{m}}{(M+1)^E} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (m+1-i)^E.$$

Wenn wir nun schlussendlich $M = 9, m = 5$ und $E = 8$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\binom{9}{5}}{10^8} \sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{5}{i} (6-i)^8 = \frac{40007520}{10^8} = \frac{250047}{625000} \approx 0.4000752 \approx 40\%.$$

Alternativ kann man die Wahrscheinlichkeit auch mithilfe einer Rekursion berechnen, indem man jeweils einen Elfen hinzufügt:

Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}(M, E, m)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass der Aufzug genau an m verschiedenen Stockwerken aus $\{1, \dots, M\}$ hält, bevor er das Stockwerk $M+1$ erreicht.

Betrachte nun den E -ten Elfen, nachdem $E-1$ Elfen bereits gedrückt haben. Es gibt genau zwei verschiedene zu beachtende Fälle:

Wenn die ersten $E-1$ bereits m verschiedene Stopps aus den Stockwerken $\{1, \dots, M\}$ verursacht haben, muss der neue Elf den Knopf eines der bereits gewählten Stockwerkes oder des obersten Stockwerkes drücken, damit die Gesamtzahl gleich m bleibt. Von den $M+1$ gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten sind also $m+1$ Möglichkeiten günstig. Daher beträgt die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der neue Elf die Zahl der Stopps bei den Stockwerken $1, \dots, m$ nicht erhöht, $(m+1)/(M+1)$.

In dem Fall, dass die ersten $E-1$ Elfen genau $m-1$ Zwischenstopps verursacht haben, erhöht der neue Elf diese Zahl auf m genau dann, wenn er eins der $M-(m-1) = M-m+1$ bislang ungewählten Stockwerke wählt. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist $(M-m+1)/(M+1)$.

Somit gilt für alle $M, 1 \leq m \leq M$ und $E \geq 1$, dass

$$\mathbb{P}(M, E, m) = \frac{m+1}{M+1} \mathbb{P}(M, E-1, m) + \frac{M-m+1}{M+1} \mathbb{P}(M, E-1, m-1)$$

ist. Da

$$\mathbb{P}(M, E, 0) = 1/(M+1)^E$$

und

$$\mathbb{P}(M, 0, m) = \mathbf{1}_{\{m=0\}}^3$$

bekannt sind, können wir $\mathbb{P}(M, E, m)$ für alle M, E, m mit $0 \leq m \leq M$ berechnen, indem wir die obige Rekursionsformel benutzen. Wir erhalten $\mathbb{P}(9, 8, 5) \approx 0.4$.

³ $\mathbf{1}_{m=0}$ ist eine Indikatorfunktion, die für $m = 0$ den Wert 1 und ansonsten den Wert 0 annimmt.

Alternativ kann man die Wahrscheinlichkeit Stockwerk für Stockwerk berechnen:

Sei $\mathbb{P}(M, f, E, m)$ die Wahrscheinlichkeit, genau m Stopps aus den Stockwerken $\{f+1, \dots, M\}$ zu erzeugen, wenn man im Stockwerk f startet und noch E Elfen im Aufzug sind. Jeder Elf wird den Aufzug mit Wahrscheinlichkeit $1/(M+1-f)$ im Stockwerk $(f+1)$ verlassen. Sei nun i die Anzahl der Elfen, die im Stockwerk $(f+1)$ aussteigen. Dann gilt für alle M, f, E, m mit $f < M$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M, f, E, m) &= \left(1 - \frac{1}{M+1-f}\right)^E \mathbb{P}(M, f+1, E, m) \\ &\quad + \sum_{i=1}^E \binom{E}{i} \left(1 - \frac{1}{M+1-f}\right)^{E-i} \left(\frac{1}{M+1-f}\right)^i \mathbb{P}(M, f+1, E-i, m-1). \end{aligned}$$

Da für alle M, E und m

$$\mathbb{P}(M, M, E, m) = \mathbf{1}_{\{m=0\}}$$

gilt, können wir $\mathbb{P}(M, f, E, m)$ für alle M, f, E, m mit $f \leq M$ direkt berechnen. Insbesondere erhalten wir $\mathbb{P}(9, 0, 8, 5) \approx 0.4$.

Ein alternativer Ansatz beruht auf multinomialem Zählen:

Wir können eine m -elementige Teilmenge S von $\{1, 2, \dots, M\}$ wählen und die Elfen folgendermaßen aufteilen:

$$m_1, \dots, m_m \geq 1, \quad m_{m+1} \geq 0, \quad m_1 + \dots + m_{m+1} = E,$$

wobei m_i für $i = 1, \dots, m$ die Anzahl der Elfen, die für das i -te der m gewählten Stockwerke gedrückt haben und m_{m+1} der Anzahl der Elfen, die für das oberste Stockwerk $M+1$ gedrückt haben, bezeichnet.

Für jede konkrete Verteilung, repräsentiert als Tupel $(m_1, \dots, m_{m+1})$, ist die Anzahl der Fälle, bei denen die Wahl der E (unterscheidbaren) Elfen zu genau diesen Anzahlen führt

$$\frac{E!}{m_1! \cdots m_{m+1}!}.$$

Da es $\binom{M}{m}$ Möglichkeiten gibt, S zu wählen, ist die von uns gesuchte Anzahl

$$\binom{M}{m} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_{m+1} = E \\ m_1, \dots, m_m \geq 1, m_{m+1} \geq 0}} \frac{E!}{m_1! \cdots m_{m+1}!}.$$

Dieser multinomiale Ausdruck zählt *genau die gleichen Fälle* wie der erste Ansatz mit der Inklusions-Exklusions-Formel. Die Äquivalenz ergibt sich daraus, dass:

- unser erster Ansatz die Gesamtanzahl aller Fälle zählt und anschließend die Fälle abzieht, in denen nicht in allen m ausgesuchten Stockwerken gehalten wird.
- der jetzige Ansatz direkt die Anzahl der Fälle zählt, in denen in jedem der m ausgewählten Stockwerke gehalten wird.

Beide Methoden zählen also genau dieselbe Menge an Möglichkeiten, weshalb die Summen identisch sind.



Illustration: Ivana Martić

10 Weihnachtliche Lichtershow

Autor: Lukas Protz
 Projekt: MATH+

Aufgabe

Der eifrige Elf Eifi hat viele Drohnen gekauft, um bei der Arbeit am Nordpol zu helfen. Leider sind die Elfen in der IT-Abteilung nicht so eifrig wie Eifi und sagen ihm, dass sie derzeit keine Kapazitäten haben, um die Drohnen zu programmieren. Deshalb möchte Eifi die Drohnen selbst programmieren. Aber nicht, um bei der tatsächlichen Arbeit zu helfen, nein, er möchte mit den Drohnen eine Lichtershow veranstalten, um seine Mitelfen zu unterhalten und ihnen helfen, sich zu entspannen und den Weihnachtsstress für eine Weile zu vergessen.

Eifi hat sich bereits einige Flugrouten für die Drohnen überlegt. Er führt ein Koordinatensystem ein, dessen Mittelpunkt sich genau am Nordpol befindet. Der Einfachheit halber nimmt er an, dass die Fläche um den Nordpol herum perfekt eben ist. Die Einheiten des Koordinatensystems sind Elfen-Meilen, die Standard-Entfernungseinheit am Nordpol. Die Flugrouten, die Eifi im Sinn hat, hängen von zwei positiven ganzen Zahlen a, b ab und können in Abhängigkeit von der Zeit wie folgt parametrisiert werden:

$$\gamma(t) = (\sin(at), \sin(bt)), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Anmerkung: Für jeden Wert t gibt die Formel die beiden Koordinaten der Flugroute zum Zeitpunkt t an. Selbstverständlich wird die Zeit t in der Standard-Zeiteinheit am Nordpol gemessen, der Elfen-Minute. Ferner ist $\sin(t)$ eine Funktion bezüglich des Bogen- und nicht

bezüglich des Gradmaßes, d.h. $\sin(\pi) = 0$, aber $\sin(180) \approx -0.8011 \neq 0$.

Eifrig wie Eifi ist, probiert er einige Kombinationen von a, b aus und lässt die Drohnen eine nach der anderen fliegen, aber ... oh nein. Bei einer der Kombinationen beginnen die Drohnen ab einem bestimmten Punkt der Route ihre Flugrichtung umzukehren und genau den Weg zurückzufliegen, den sie gekommen sind, wodurch sie mit anderen Drohnen zusammenstoßen. Eifi bricht das Experiment sofort ab. Er fragt sich: Für welche Kombinationen von a, b kann das passieren? Kannst du Eifi dabei helfen, alle Paare von a, b zu finden, für die die Drohnen ab einem bestimmten Punkt beginnen, den Weg zurückzufliegen, den sie gekommen sind, damit er seine Versuche, die schönste Flugroute zu finden, ohne weitere Unfälle fortsetzen kann?

Bemerkung: Für jede reelle Zahl α ist $\sin(\alpha)$ definiert als die vertikale Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreises, den man erhält, wenn man ausgehend von dem Schnittpunkt des Einheitskreises mit der rechten Seite der horizontalen Achse entgegen dem Uhrzeigersinn den Winkel α im Bogenmaß misst. Der Einheitskreis ist definiert als der Kreis mit Radius 1, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist. Abbildung 28 veranschaulicht diese Definition und in Abbildung 29 ist der Graph der Sinus-Funktion für α zwischen $-\pi$ und 3π dargestellt.

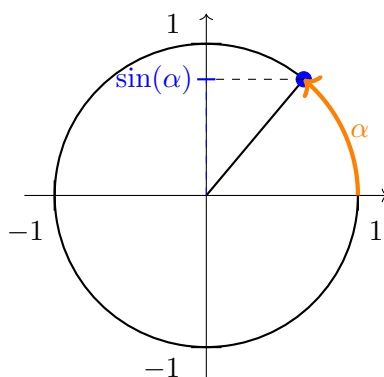


Abbildung 28: Veranschaulichung der Definition von $\sin(\alpha)$.

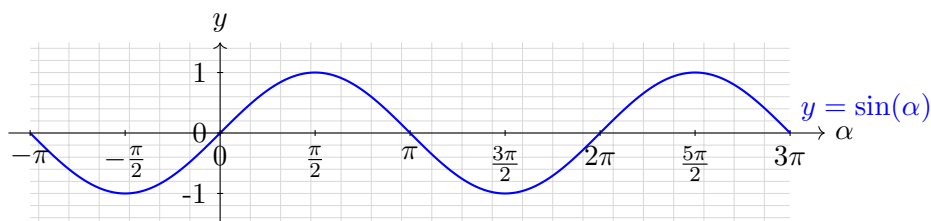


Abbildung 29: Der Graph der Sinus-Funktion.

Antwortmöglichkeiten:

1. Bei keiner Kombination von a und b passiert dies. Eifi hat die Drohnen einfach falsch programmiert.
2. Es gibt genau eine Kombination von a und b , bei der dies passiert. Eifi hatte einfach das Pech, die Drohnen mit genau dieser Kombination getestet zu haben.
3. Es gibt nur endlich viele Kombinationen von a und b , für welche dies passiert.
4. Dies kann nur passieren, wenn $a = b$.
5. Dies kann nur passieren, wenn a und b teilerfremd sind, d.h. keine gemeinsamen positiven Teiler außer der 1 haben.
6. Dies kann nur passieren, wenn a und b nicht teilerfremd sind, d.h. einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben.
7. Dies passiert genau dann, wenn a und b beide Zweierpotenzen sind oder wenn $a = b$ gilt.
8. Dies passiert genau dann, wenn die höchste Zweierpotenz die a teilt auch die höchste Zweierpotenz ist, die b teilt.
9. Dies passiert für alle Kombinationen von a und b , wenn beide Zahlen größer als 2025^{2025} sind.
10. Keine der anderen Antworten ist richtig.

Lösung**Die richtige Antwort ist: 8.**

Wir zeigen, dass die Drohnen genau dann ab einem bestimmten Punkt beginnen, den Weg zurückzufliegen, den sie gekommen sind, wenn die höchste Zweierpotenz, die a teilt, gleich der höchsten Zweierpotenz ist, die b teilt, wenn also

$$a = 2^n c \quad b = 2^n d,$$

gilt, wobei n eine nicht-negative ganze Zahl und c, d ungerade positive ganze Zahlen sind.

Damit die Drohnen den Weg zurückfliegen, den sie gekommen sind, muss es einen Zeitpunkt $t_0 \in (0, 2\pi)$ geben, sodass

$$\gamma(t_0 + t) = \gamma(t_0 - t) \quad \text{für alle } t \text{ mit } t_0 + t, t_0 - t \in [0, 2\pi).$$

Dies impliziert das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \sin(a(t_0 + t)) = \sin(a(t_0 - t)) \\ \text{II} \quad & \sin(b(t_0 + t)) = \sin(b(t_0 - t)). \end{aligned}$$

Wenn zwei Funktionswerte der Sinus-Funktion $\sin(x), \sin(y)$ gleich sind, müssen ihre Argumente x, y in folgender Weise zusammenhängen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = y + 2k\pi & \text{für eine ganze Zahl } k, \text{ oder} \\ x = -y + (2k+1)\pi & \text{für eine ganze Zahl } k. \end{array} \right\}$$

Diese Tatsachen folgen aus der 2π -Periodizität der Sinus-Funktion, der Identität $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ sowie aus der Beobachtung, dass die Gleichung $\sin(x) = v$ für ein gegebenes v höchstens zwei Lösungen für $x \in [0, 2\pi)$ besitzt.

Wendet man die Beziehung zwischen den Argumenten auf die Gleichungen I und II an, erhält man

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} a(t_0 + t) = a(t_0 - t) + 2k\pi & \text{oder} \\ a(t_0 + t) = -a(t_0 - t) + (2k+1)\pi \end{array} \right\} \text{ und} \\ \text{II} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} b(t_0 + t) = b(t_0 - t) + 2l\pi & \text{oder} \\ b(t_0 + t) = -b(t_0 - t) + (2l+1)\pi \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass l hier auch eine ganze Zahl sein soll.

Wir können die erste Gleichung in I ausschließen, da sie zu

$$t = \frac{k}{a}\pi$$

umgeformt werden kann. Somit gilt die Gleichung nur für diskrete Werte für t , was bedeutet, dass die Dronen ihren zurückgelegten Weg nur an diskreten Punkten kreuzen und damit nicht den bereits geflogenen Weg zurückfliegen. Auf die gleiche Art und Weise können wir die erste

Gleichung in II ausschließen.

Formen wir stattdessen die zweite Gleichung in I und die zweite Gleichung in II um, erhalten wir

$$t_0 = \frac{2k+1}{2a}\pi \quad \text{und} \quad t_0 = \frac{2l+1}{2b}\pi.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für t_0 gleich und formt die entstehende Gleichung um, so erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{2k+1}{2l+1}.$$

Wenn wir $\frac{2k+1}{2l+1}$ vollständig kürzen, bleiben Zähler und Nenner natürlich ungerade und wir erhalten $\frac{2k'+1}{2l'+1}$ mit ganzzahligem k', l' und $\text{ggT}(2k'+1, 2l'+1) = 1$. Aus

$$\frac{a}{b} = \frac{2k'+1}{2l'+1}$$

folgt dann aber

$$a = \lambda(2k'+1) \quad \text{und} \quad b = \lambda(2l'+1)$$

für eine ganze Zahl λ .

Aufgrund der Tatsache, dass $2k'+1$ und $2l'+1$ ungerade sind, muss die höchste Zweierpotenz, die a teilt, auch λ teilen und umgekehrt. Das gleiche gilt natürlich auch für b und λ , daher ist die höchste Zweierpotenz, die a teilt, auch die höchste Zweierpotenz, die b teilt.

Nun bleibt zu zeigen, dass die Dronen ab einem bestimmten Zeitpunkt t_0 tatsächlich den Weg zurückfliegen, den sie gekommen sind, wenn $a = 2^n c$ und $b = 2^n d$ gilt, wobei c, d positive ungerade Zahlen sind. Um das zu beweisen, benötigen wir die Tatsache, dass $\sin\left(m\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(m\frac{\pi}{2} - x\right)$ für jede ungerade ganze Zahl m gilt. Dies erkennt man leicht, wenn man beachtet, dass $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$ gilt und die 2π -Periodizität der Sinus-Funktion verwendet.

Mit Blick auf die obigen Argumente liegt es nahe, $t_0 = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ zu wählen. Tatsächlich erhält man dann

$$\sin\left(a\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} + t\right)\right) = \sin\left(c\frac{\pi}{2} + at\right) = \sin\left(c\frac{\pi}{2} - at\right) = \sin\left(a\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} - t\right)\right),$$

und analog

$$\sin\left(b\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} + t\right)\right) = \sin\left(d\frac{\pi}{2} + bt\right) = \sin\left(d\frac{\pi}{2} - bt\right) = \sin\left(b\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} - t\right)\right).$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

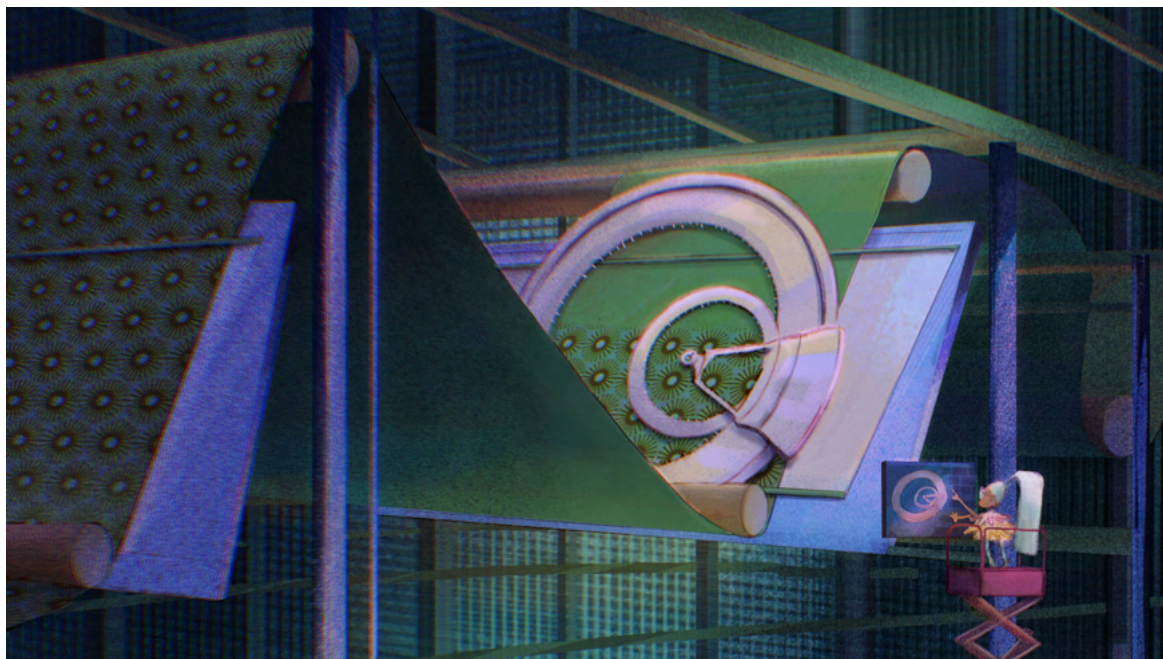


Illustration: Zyanya Santuario

11 Wunderschönes Geschenkpapier mit einem Spirographen gestalten

Autorin: Eva Deinum (Wageningen University & Research)

Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Die Elfen benutzen einen Spirographen, um Geschenkpapier für Weihnachten zu verzieren. Dieser Spirograph besteht aus einem beweglichen inneren Zahnrad mit n Zähnen und einem festen äußeren Ring mit N Zähnen, wobei $N > n$ gilt. Das innere Zahnrad sowie der äußere Ring sind kreisförmig. Die Zähne des inneren Zahnrads und des äußeren Rings passen exakt ineinander, sodass das innere Zahnrad nicht zwischen den Zähnen des äußeren Rings rutschen kann, sondern sich nur entlang des Rings abrollen lässt. Das innere Zahnrad besitzt ein vom Mittelpunkt versetztes Loch für einen Stift. In Abbildung 30 ist links der Spirographaufbau dargestellt; das Loch für den Stift ist durch einen blauen Punkt markiert.

Wenn das innere Zahnrad entlang des äußeren Rings abgerollt wird und der Stift durch das Loch gleichzeitig auf das Papier gedrückt wird, lassen sich geschlossene Kurven wie die violette Kurve auf der linken Seite von Abbildung 30 zeichnen. Eine solche geschlossene Kurve entsteht, wenn das innere Zahnrad so lange am äußeren Ring abgerollt wird, bis es wieder zu seiner ursprünglichen Position zurückkehrt (einschließlich der Lage des Lochs für den Stift). Die so erzeugten Kurven können unterschiedliche Symmetrien besitzen und sich auch selbst schneiden. So schneidet sich beispielsweise die violette Kurve in Abbildung 30 selbst und besitzt eine 7-fache (Rotations-) Symmetrie. Eine n -fache Rotations-Symmetrie bedeutet dabei,

dass eine Drehung um den Mittelpunkt des äußeren Rings um den Winkel $\frac{360^\circ}{n}$ die Kurve auf sich selbst abbildet; nach n Anwendungen der zur Symmetrie gehörenden Rotation ergibt sich dann eine vollständige 360° -Drehung.

Durch die Wahl unterschiedlicher Werte von n und N können die Elfen viele verschiedene Kurven erzeugen. Auf der rechten Seite von Abbildung 30 sind zwei weitere Beispiele dargestellt: Die obere Kurve besitzt 7-fache Symmetrie und schneidet sich selbst; die untere besitzt 8-fache Symmetrie und schneidet sich nicht selbst.

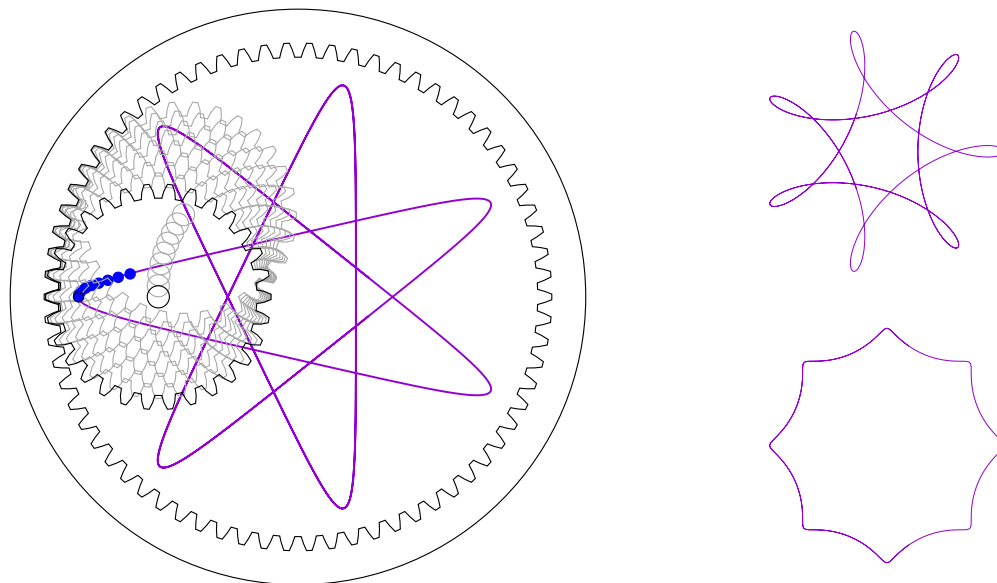


Abbildung 30: Spirographaufbau (links) mit der eingezeichneten violetten Kurve; Beispiele für Kurven mit anderen Werten von n und N (rechts).

Heute ist ein junger Elf dafür verantwortlich, das Geschenkpapier zu gestalten. Leider versteht er den Spirographen noch nicht vollständig, und es ist niemand da, der ihm helfen könnte. Er möchte eine Kurve zeichnen, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Die Kurve hat 5-fache Symmetrie.
2. Die Kurve schneidet sich selbst.

Dem jungen Elf stehen drei äußere Ringe zur Verfügung: $N = 100$, $N = 115$ und $N = 144$. Außerdem gibt es sechs innere Zahnräder: $n = 20$, $n = 23$, $n = 36$, $n = 40$, $n = 46$ und $n = 69$. Wie viele verschiedene Kombinationen aus äußerem Ring und innerem Zahnrad kann der Elf wählen, um eine Kurve zu erzeugen, die beide gewünschten Eigenschaften erfüllt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1 Kombination.
2. 2 Kombinationen.
3. 3 Kombinationen.
4. 4 Kombinationen.
5. 5 Kombinationen.
6. 6 Kombinationen.
7. 7 Kombinationen.
8. 8 Kombinationen.
9. 9 Kombinationen.
10. Ohne zu wissen, wo sich das Loch im inneren Zahnrad befindet, kann man die Anzahl der gesuchten Kombinationen nicht eindeutig bestimmen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Jede geschlossene Kurve, die mit dem Spirographen gezeichnet werden kann, kann (auch) gezeichnet werden, indem man an einer Position des inneren Zahnrads beginnt, bei der das Loch für den Stift dem äußeren Ring am nächsten ist.

Beginnt man von einer solchen Position aus, so wollen wir nun die Anzahl T der Zähne bestimmen, die das innere Zahnrad entlang gerollt werden muss, bevor sich die Kurve schließt. Die Kurve schließt sich genau dann, wenn die aktuelle Position des inneren Zahnrads zum ersten Mal wieder mit seiner Ausgangsposition übereinstimmt. Einerseits folgt daraus, dass T ein Vielfaches von N ist, d. h. es gibt eine positive ganze Zahl β mit $T = \beta \cdot N$. Andererseits ist nach jeweils n Zähnen das Loch für den Stift des inneren Zahnrads wieder am nächsten zum äußeren Ring. Dies impliziert, dass T auch ein Vielfaches von n ist, d. h. es gibt eine positive ganze Zahl α mit $T = \alpha \cdot n$. Zusammen ergeben diese beiden Bedingungen für T die folgende Gleichung:

$$\alpha \cdot n = \beta \cdot N.$$

Außerdem schließt sich die Kurve, wenn die aktuelle Position des inneren Zahnrads zum ersten Mal mit seiner Ausgangsposition übereinstimmt. Das bedeutet, dass wir nach dem kleinsten Wert von α suchen, für den die obige Gleichung eine ganzzahlige Lösung für β besitzt. Formen wir die Gleichung nach β um, so erhalten wir

$$\beta = \frac{\alpha \cdot n}{N}.$$

Kürzen wir den Bruch, indem wir sowohl N als auch n durch ihren größten gemeinsamen Teiler $\text{ggT}(n, N)$ teilen, so erhalten wir

$$\beta = \frac{\alpha \cdot (n/\text{ggT}(n, N))}{N/\text{ggT}(n, N)}.$$

Da $N/\text{ggT}(n, N)$ und $n/\text{ggT}(n, N)$ keine positiven gemeinsamen Teiler außer 1 besitzen, muss α ein Vielfaches von $N/\text{ggT}(n, N)$ sein, damit β eine ganze Zahl ist. Da wir den kleinsten positiven Wert für α suchen, erhalten wir

$$\alpha = \frac{N}{\text{ggT}(n, N)}.$$

Mit diesem Ergebnis können wir β berechnen als

$$\beta = \frac{n}{\text{ggT}(n, N)}.$$

Damit die Kurve sich selbst schneidet, darf sie sich nicht schon nach nur N Zähnen schließen. Dies bedeutet, dass $\beta > 1$ gelten muss. Außerdem muss für eine 5-fache Symmetrie der Kurve α durch 5 teilbar sein. Die Berechnung von α und β für alle Kombinationen von n und N führt zu den in Abbildung 31 dargestellten Werten.

Insgesamt führen 8 Kombinationen von n und N zu Werten von α und β , die die oben genannten Bedingungen erfüllen. Damit ist gezeigt, dass Antwort 8 korrekt ist.

	$N = 100$	$N = 115$	$N = 144$
$n = 20$	$\alpha = 5, \beta = 1$	$\alpha = 23, \beta = 4$	$\alpha = 36, \beta = 5$
$n = 23$	$\alpha = 100, \beta = 23$	$\alpha = 5, \beta = 1$	$\alpha = 144, \beta = 23$
$n = 36$	$\alpha = 25, \beta = 9$	$\alpha = 115, \beta = 36$	$\alpha = 4, \beta = 1$
$n = 40$	$\alpha = 5, \beta = 2$	$\alpha = 23, \beta = 8$	$\alpha = 18, \beta = 5$
$n = 46$	$\alpha = 50, \beta = 23$	$\alpha = 5, \beta = 2$	$\alpha = 72, \beta = 23$
$n = 69$	$\alpha = 100, \beta = 69$	$\alpha = 5, \beta = 3$	$\alpha = 48, \beta = 23$

Abbildung 31: Die Tabelle zeigt die Werte von α und β in Abhängigkeit von den Werten für n und N . Die Einträge, für die α durch 5 teilbar ist und $\beta > 1$ gilt, sind blau hervorgehoben.

Bemerkung: Die obigen Überlegungen zeigen außerdem, dass die Position des Lochs relativ zum inneren Zahnrad für die Symmetrie und die Selbstschnittpunkte der Kurve irrelevant ist, solange sich das Loch im Inneren des inneren Zahnrads befindet.



Illustration: Friederike Hofmann

12 Backen auf gut Glück

Autor: Tobias Paul (ehemals HU Berlin)

Aufgabe

In der Weihnachtsbäckerei wird wie jedes Jahr am 01.12.2025 mit den Vorbereitungen für die Kekse begonnen, die an Heiligabend bereitstehen sollen. Damit eine ausreichende Anzahl fertig wird, beschließen die Wichtel, immer zwei Bleche gleichzeitig zu backen.

Dafür wird vor jedem Backvorgang ein Blech links vom Ofen für die obere Schiene und ein Blech rechts vom Ofen für die untere Schiene belegt. Leider gibt es nur zwei verschiedene Formen zum Ausstechen der Plätzchen: Sterne und Tannenbäume. Für den ersten Backvorgang werden die Bleche zufällig⁴ mit Keksen in diesen beiden Formen belegt. Jedes Blech wird dabei mit exakt 1000 Plätzchen befüllt, unabhängig von der Form. Danach werden beide Bleche in den Ofen geschoben und die Plätzchen 15 Minuten bei 175 Grad gebacken.

Parallel werden für den nächsten Backvorgang neue Bleche vorbereitet, wieder eins links und eins rechts vom Ofen mit jeweils 1000 Keksen. Dabei wird auf dem linken Blech die Form eines jeden Plätzchens durch Kopieren der Form eines jeweils zufällig gewählten Plätzchens des oberen Blechs im Ofen bestimmt. Analog gilt für das rechte Blech, dass die Form jedes neuen Plätzchens durch die Form eines zufällig ausgewählten Plätzchens des unteren Blechs im Ofen bestimmt wird.

An jedem Tag werden exakt 20 Backvorgänge durchgeführt, was die arbeitsrechtlich zulässige

⁴„zufällig“ bedeutet hier stets, dass jede Form bzw. jedes Plätzchen die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, ausgewählt zu werden.

Höchstzahl für Wichtel darstellt. Der erste Backvorgang findet am 01.12.2025 statt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (gerundet auf eine Nachkommastelle), dass zwei zufällig gewählte Kekse, die im letzten Backvorgang am 24.12.2025 fertiggestellt werden, die gleiche Form haben, wenn sie

- (a) vom gleichen Blech und
- (b) von unterschiedlichen Blechen stammen?

Antwortmöglichkeiten:

- 1. (a) 0,5 (b) 0,5
- 2. (a) 0,6 (b) 0,5
- 3. (a) 0,7 (b) 0,5
- 4. (a) 0,5 (b) 0,6
- 5. (a) 0,6 (b) 0,6
- 6. (a) 0,7 (b) 0,6
- 7. (a) 0,5 (b) 0,7
- 8. (a) 0,6 (b) 0,7
- 9. (a) 0,7 (b) 0,7
- 10. keine der oben angegebenen Lösungen

Projektbezug:

Im Projekt EF4-7 wurde sich mit verschiedenen Populationsmodellen beschäftigt. Der in dieser Aufgabe beschriebene Prozess ähnelt dem eines Wright-Fisher-Modells, welches eines der ersten Populationsmodelle in der Mathematik war.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Zu (a): Wir betrachten den gegenteiligen Fall, nämlich, dass die beiden gewählten Kekse eine unterschiedliche Form haben. Die beiden gewählten Kekse haben genau dann eine unterschiedliche Form, wenn die „Vorbild“-Kekse auf dem vorherigen Blech bereits eine unterschiedliche Form hatten.

Dazu ist es notwendig, dass nicht derselbe Keks auf dem vorherigen Blech maßgeblich für die Form der beiden Kekse ist. Das tritt mit der Wahrscheinlichkeit $1 - 1/1000$ ein, da die Wahrscheinlichkeit, dass ein ausgewählter Keks erneut ausgewählt wird, bei $1/1000$ liegt.

Dieses Argument lässt sich jetzt iterativ fortsetzen, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass in der gesamten Backhistorie nie derselbe Keks auf dem vorherigen Blech die Form der nachfolgenden Kekse bestimmt hat, nach dem 479. Kopiervorgang bei

$$(1 - 1/1000)^{479} \approx 0,62$$

liegt. Wir beziehen uns hier auf den 479. Kopiervorgang, da die Wichtel an 24 Tagen je 20 Backvorgänge durchgeführt haben, wobei in der Vorbereitung auf den zweiten Backvorgang erstmals kopiert wurde.

In dem Fall, in dem es nie zu einem gemeinsamen „Vorbild“ gekommen ist, haben die beiden gewählten Kekse genau dann eine unterschiedliche Form, wenn ihre (verschiedenen) „Vorbilder“ auf dem allerersten Blech eine unterschiedliche Form haben. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist 0,5, denn die Formen auf dem ersten Blech wurden jeweils zufällig mit Wahrscheinlichkeit 0,5 vergeben.

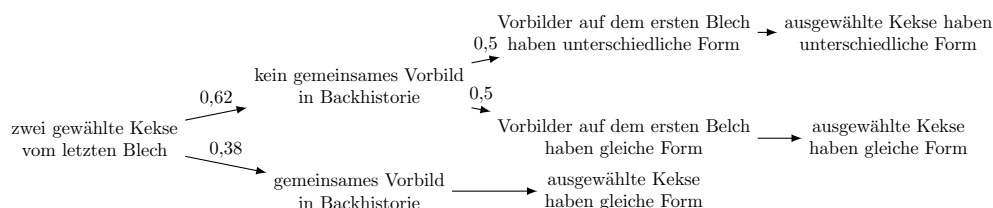


Abbildung 32: Baumdiagramm zur Verdeutlichung des Sachverhalts.

Der bisher betrachtete Sachverhalt ist in Abbildung 32 in Form eines Baumdiagramms veranschaulicht. Mit den Pfadregeln ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden ausgewählten Kekse eine unterschiedliche Form haben, ungefähr $0,62 \cdot 0,5 = 0,31$ beträgt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden ausgewählten Kekse die gleiche Form haben, ungefähr $1 - 0,31$, was gerundet auf eine Nachkommstelle 0,7 ergibt.

Zu (b): Mit einem ähnlichen Argument kommt man darauf, dass die beiden ausgewählten Kekse des letzten Backvorgangs genau dann die gleiche Form haben, wenn die „Vorbilder“ auf dem ersten linken bzw. rechten Blech die gleiche Form hatten. Da die Form am Anfang zufällig mit Wahrscheinlichkeit 0,5 vergeben wurde, haben die beiden „Vorbilder“ und damit auch die beiden ausgewählten Kekse mit Wahrscheinlichkeit 0,5 die gleiche Form.



Illustration: Zyanya Santuario

13 Die Große Walnuss-Lieferung

Autor: Mehmet Akif Yıldız

Aufgabe

Die legendäre Nussknacker-Werkstatt bereitet sich auf die große Weihnachtsparade vor! Um für jede Walnuss-Notlage gerüstet zu sein, haben sie 2025 Walnüsse — zufällig in drei Kisten gestopft, keine davon leer. Zufällig bedeutet hier Folgendes: Wenn man die Anzahlen a , b und c der Walnüsse in den drei Kisten der Größe nach auflistet, also $a \leq b \leq c$, dann ist jedes Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen mit $a + b + c = 2025$ gleich wahrscheinlich.

Soeben kam aus der Nussknacker-Zentrale die Nachricht, dass eine enorme Walnusslieferung unterwegs sei. Dabei haben die Lieferelfen eine sehr einfache Regel: Sie entladen nur in leere Kisten — und diese Lieferung ist so riesig, dass sie unbedingt zwei leere Kisten benötigen! Falls weniger als zwei Kisten leer sind, werden die Lieferelfen die gesamte Lieferung auf den Boden werfen, was eine rollende Walnusslawine in der Nussknacker-Werkstatt verursachen würde.

Zum Glück bleiben noch ein paar Stunden um zwei der Kisten zu leeren. Zwei clevere Werkstattleitungen, Aria und Bram, beschließen, ein Spiel daraus zu machen, die Kisten zu leeren:

Das Spiel

Aria und Bram wechseln sich ab. Ist ein Spieler an der Reihe, so besteht ein zulässiger Spielzug aus folgenden Schritten:

- Wähle zwei nicht leere Kisten. Seien a und b die Anzahl der Walnüsse in den zwei Kisten, wobei $1 \leq a \leq b$.
- Wähle eine positive ganze Zahl c , wobei $1 \leq c \leq a$.
- Packe c Walnüsse aus der Kiste mit weniger Walnüssen in die andere Kiste. Nach dem Zug enthalten diese beiden Kisten nun $a - c$ und $b + c$ Walnüsse.

Ein Spieler verliert, wenn er keinen zulässigen Spielzug mehr ausführen kann – das heißt, wenn nur noch eine nichtleere Kiste übrig ist. Aria beginnt das Spiel.

Angenommen, Aria und Bram spielen optimal. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Bram das Spiel gewinnt. Welche der folgenden Optionen hat die geringste Abweichung von p ?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0,1%
2. 0,2%
3. 0,3%
4. 0,5%
5. 1%
6. 2%
7. 5%
8. 10%
9. 25%
10. 50%

Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Skizze der Lösung: Zunächst legen wir einige Begriffe fest. Eine Verteilung der Nüsse auf die drei Kisten heißt *Gewinnposition* für einen Spieler, wenn es für diesen Spieler eine Strategie gibt, die seinen Sieg garantiert. Eine *Verlustposition* für einen Spieler hingegen ist eine Verteilung der Nüsse, bei der jeder Zug dieses Spielers zwangsläufig zu einer Gewinnposition für den anderen Spieler führt. Da beide Spieler optimal spielen, verliert unweigerlich derjenige, der sich in einer Verlustposition befindet.

Unsere erste Beobachtung ist, dass das Spiel deterministisch ist, nachdem die Walnüsse auf drei Haufen aufgeteilt wurden, d. h. jede Position ist entweder eine Gewinn- oder eine Verlustposition. Um dies zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil an und konstruieren einen Widerspruch. Angenommen, es existiert eine Position, die weder eine Gewinn- noch eine Verlustposition ist. Jedes Spiel, das Aria und Bram von dieser Position aus spielen, muss in einer Verlustposition enden (nämlich dann, wenn genau eine der Kisten nicht leer ist). Es muss also eine erste Position p im Spiel geben, die entweder Gewinn- oder Verlustposition ist. Ist p eine Verlustposition, so war die Position vor p eine Gewinnposition, was der Annahme widerspricht, dass p die erste Position ist, die entweder eine Gewinn- oder eine Verlustposition ist. Ist p eine Gewinnposition, so war die Position vor p eine Verlustposition, da andernfalls weder Bram noch Aria p als nächste Position gewählt hätten. Auch dies widerspricht der Annahme, dass p die erste Position ist, die entweder eine Gewinn- oder Verlustposition ist. Daher war die Annahme, dass es eine Position gibt, die weder Gewinn- noch Verliererposition ist, falsch, womit die Behauptung bewiesen ist.

Nun wissen wir, dass die Haufen nach einer zufälligen Aufteilung die Größen

$$1 \leq a \leq b \leq c \quad \text{mit} \quad a + b + c = 2025$$

besitzen. Wir behaupten, dass Aria das Spiel genau dann gewinnt, wenn $a < b$ gilt.

Wir verwenden das Tripel (x, y, z) mit $x \leq y \leq z$, um die aktuelle Konfiguration der Haufen zu jedem Zeitpunkt während des Spiels zu beschreiben, sowie das Tripel (x', y', z') mit $x' \leq y' \leq z'$, um die Konfiguration zu beschreiben, die aus (x, y, z) nach einem Spielzug entsteht. Sei nun angenommen, ein Spieler erhält das Tripel (x, y, z) mit $x < y \leq z$. Dann kann er diese Konfiguration in

$$(x, x, y + z - x)$$

überführen, indem er $y - x$ Nüsse aus der Kiste mit y Nüssen in die Kiste mit z Nüssen verschiebt. Somit gilt $x' = y' = x$ und $z' = y + z - x$. Der andere Spieler muss dann eine positive ganze Zahl $k \leq x'$ wählen und kann eine der Transformationen

$$(x' - k, x' + k, z') \quad \text{oder} \quad (x' - k, x', z' + k)$$

durchführen. Alle diese Transformationen führen zu einer Konfiguration (x'', y'', z'') mit $x'' < y''$. Daher kann ein Spieler, der mit einer Konfiguration beginnt, bei der genau eine der Kisten die kleinste Anzahl an Nüssen enthält, stets erreichen, dass die nächste Konfiguration, die er erhält, wieder genau eine Kiste mit der kleinsten Anzahl an Nüssen besitzt. Da das Spiel endet, wenn zwei Kisten leer sind, also beide 0 Nüsse enthalten, kann dieser Spieler niemals

verlieren. Folglich sind Konfigurationen (x, y, z) mit $x < y$ Gewinnpositionen. Dagegen sind Konfigurationen (x, y, z) mit $x = y$ Verlustpositionen, da sie stets zu einer Gewinnposition führen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Dementsprechend gewinnt Aria das Spiel genau dann, wenn die Zerlegung von 2025 Walnüssen in drei nichttriviale Teile einen eindeutig kleinsten Teil besitzt. Mit anderen Worten sind die einzigen Anfangszerlegungen, in denen Bram gewinnt,

$$(1, 1, 2023), (2, 2, 2021), \dots, (674, 674, 677), (675, 675, 675).$$

Um die Gesamtanzahl der Zerlegungen von 2025 in drei nichtleere Teile zu zählen, konzentrieren wir uns auf die Größe des kleinsten Teils. Es sei der kleinste Teil gleich k . Dann müssen wir die verbleibenden

$$2025 - k$$

Walnüsse auf zwei Teile y und z verteilen, wobei $k \leq y \leq z$ gilt.

Da $y \geq k$ und $z \geq k$ ist, setzen wir

$$y = k + u, \quad z = k + v,$$

wobei $u \leq v$ und $u, v \geq 0$ sind. Einsetzen liefert

$$k + (k + u) + (k + v) = 2025 \quad \Rightarrow \quad u + v = 2025 - 3k.$$

Da $u \leq v$ gilt, muss

$$0 \leq u \leq \left\lfloor \frac{2025 - 3k}{2} \right\rfloor$$

sein.⁵ Damit ist für ein festes k die Anzahl der möglichen Paare (u, v) mit $u \leq v$ genau

$$\left\lfloor \frac{2025 - 3k}{2} \right\rfloor + 1.$$

Jedes dieser Paare erzeugt genau ein Tripel $(k, k + u, k + v)$. Setzt man $j = 675 - k$, so kann man den obigen Ausdruck umformen zu

$$\left\lfloor \frac{2025 - 3k}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3(675 - k)}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3j}{2} \right\rfloor + 1.$$

Da $0 \leq k \leq 675$ gilt, haben wir auch $0 \leq j \leq 675$. Wertet man den obigen Ausdruck für kleine Werte von j aus, so erhält man die folgende Folge:

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots$$

Tatsächlich handelt es sich hierbei genau um die natürlichen Zahlen ohne die Vielfachen von 3, wie man folgendermaßen erkennen kann:

Die Zahlen der Folge erhält man, indem man abwechselnd 1 und 2 zur vorherigen Zahl der Folge addiert. Betrachtet man den ähnlichen Ausdruck $\frac{3j}{2} + 1$, so sieht man, dass sich dieser um 3 vergrößert, wenn man j um 2 vergrößert. Tatsächlich hat das Erhöhen von j um 2 auf beide Ausdrücke denselben Effekt. Aufgrund der Abrundungsfunktion im ersten Ausdruck

⁵Mit $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet man die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich einer reellen Zahl x ist.

bewirkt jedoch eine Erhöhung von j um 1, dass sich der neue Ausdruck um $\frac{3}{2}$ erhöht, der ursprüngliche Ausdruck jedoch nur um 1. Das bedeutet, dass jede dritte positive ganze Zahl in der Folge übersprungen wird. Da die ursprüngliche Folge mit 1, 2, 4 beginnt, folgt daraus, dass alle Vielfachen von 3 übersprungen werden.

Die Summe aller Werte der Folge ergibt die Gesamtzahl der Verteilungen der Nüsse auf die drei Kisten. Mit der obigen Beobachtung reduziert sich dies auf das Summieren aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis $\lfloor \frac{3 \cdot 675}{2} \rfloor + 1 = 1013$ und das anschließende Subtrahieren aller Vielfachen von 3, die kleiner als 1013 sind. Dies kann mithilfe der Gaußschen Summenformel durchgeführt werden, die besagt, dass für eine positive ganze Zahl n gilt:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Damit ergibt sich die Gesamtzahl der Verteilungen zu

$$\frac{1013 \cdot 1014}{2} - 3 \cdot \frac{337 \cdot 338}{2} = 342732.$$

Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{675}{342732} = 0.0019694688 \dots \approx 0.2\%.$$



Illustration: Julia Nurit Schönnagel

14 Auswechslung beim Eis-Basketball

Autor: Silas Rathke

Aufgabe

Álex ist der Trainer einer Eis-Basketball-Mannschaft des Nordpols. Diese besteht aus 99 Spielern. Für alle, die mit den lokalen Regeln des Eis-Basketballs vom Weihnachtsdorf nicht so sehr vertraut sind, seien die wichtigsten hier aufgeführt:

- Während des Spiels stehen pro Mannschaft genau drei Spieler auf dem Feld.
- Pro Spielunterbrechung darf pro Mannschaft höchstens ein Spieler ausgewechselt werden. Dabei dürfen auch Spieler wieder eingewechselt werden, die vorher schon einmal gespielt haben.
- In einem Spiel muss jeder der 99 Spieler einer Mannschaft für diese mindestens einmal auf dem Feld stehen.

Álex macht sich vor allem wegen der letzten Regel Sorgen. Ihm ist aufgefallen, dass jede Kombination aus drei Spielern seiner Mannschaft entweder sehr gut oder sehr schlecht zusammenspielt. Sein Ziel ist es, in einem Spiel alle 99 Spieler mindestens einmal einzusetzen, ohne dass zu irgendeinem Zeitpunkt ein schlechtes Dreierteam spielen muss.

Während er überlegt, fällt ihm Folgendes auf: Wenn jedes Paar von Spielern mit allen 97 anderen Spielern gut zusammenspielen könnte, wäre es einfach, sein Ziel zu erreichen: Er könnte ja jede beliebige Auswechslung vornehmen und einen Spieler nach dem anderen auf das Feld schicken. Wenn jedoch jedes Paar von Spielern nur mit genau einem anderen Spieler

ein gutes Dreierteam bilden würde, hätte er keine Chance: Egal, welches Team am Anfang auf dem Feld steht, Álex könnte keine Auswechslung vornehmen, ohne dass ein schlechtes Dreierteam weiterspielen müsste.

Finde die kleinste nicht-negative ganze Zahl k mit der folgenden Eigenschaft: Wenn jedes Paar von Spielern mit mindestens k der 97 anderen Spieler ein gutes Dreierteam bildet, dann ist es immer möglich, ein Dreierteam als Startteam auszuwählen und dann eine Folge von Auswechslungen vorzunehmen, sodass jeder der 99 Spieler mindestens einmal auf dem Feld steht und zu keiner Zeit ein schlechtes Dreierteam spielt.

Was ist die Einerziffer von k ?

Bemerkung: Eis-Basketball-Spiele im Weihnachtsdorf dauern immer sehr, sehr lange und haben wegen der glatten Eisfläche viele Spielunterbrechungen. Egal welche Folge von Auswechslungen sich Álex also vornimmt, es gibt auf jeden Fall genug Unterbrechungen, um sie alle durchzuführen.

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Korrekt ist $k = 33$. Um dies zu beweisen, werden wir erst zeigen, dass, wenn jedes Paar mit 32 anderen Spielern gut spielt, es trotzdem noch sein kann, dass nicht alle Spieler eingewechselt werden können, wenn zu keiner Zeit ein schlechtes Dreierteam spielen soll. Danach beweisen wir dann, dass es bei 33 hingegen immer möglich ist.

Konstruktion für 32:

Angenommen, die Spieler sind in drei Gruppen A , B und C mit jeweils 33 Spielern aufgeteilt und ein Team spielt genau dann gut zusammen, wenn

- 2 Spieler aus A und ein Spieler aus B oder
- 2 Spieler aus B und ein Spieler aus C oder
- 2 Spieler aus C und ein Spieler aus A sind.

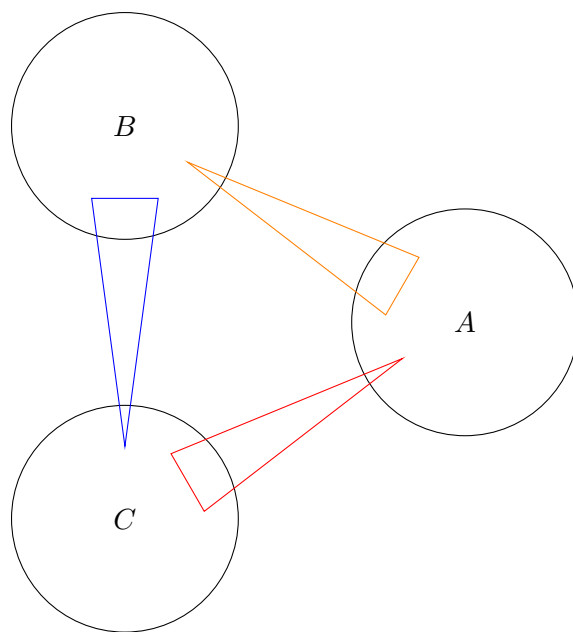


Abbildung 33: Darstellung der Konstruktion

Abbildung 33 verdeutlicht dieses Konzept.

Jedes Paar kann hier mit 32 anderen Spielern gut zusammenspielen (oder sogar mit 33, wenn beide Spieler des Paares aus derselben Gruppe kommen). Jedoch kann man kein Startteam wählen, von welchem ausgehend man dann alle Spieler einwechseln kann: Wenn zum Beispiel am Anfang ein Team aufgestellt wird, welches zwei Spieler aus A und einen Spieler aus B hat, dann kann man danach den Spieler aus B nur durch Spieler aus B und die Spieler aus A nur durch Spieler aus A ersetzen. Man kann also nie einen Spieler aus C einwechseln.

Beweis für 33:

Angenommen, jedes Paar kann mit mindestens 33 anderen Spielern gut zusammenspielen. Wir stellen uns die Spieler als Knoten in einem vollständigen Graphen ⁶ vor und färben die Kanten so ein, dass zwei Paare P_1 und P_2 von Knoten genau dann Kanten der gleichen Farbe einschließen, wenn es möglich ist durch Auswechslungen von einem Team, in dem das Paar P_1 spielt, zu einem Team zu kommen, in dem P_2 spielt. In dem Beispiel oben haben zum Beispiel die Kanten zwischen zwei Knoten aus A und alle Kanten zwischen einem Knoten aus A und einem Knoten aus B dieselbe Farbe. Eine Kante zwischen einem Knoten aus B und einem Knoten aus C hat jedoch eine andere Farbe.

Wir müssen zeigen, dass es eine Farbe c gibt, sodass jeder Knoten mindestens eine Kante der Farbe c besitzt.

Zunächst zeigen wir, dass für jeden Knoten die ausgehenden Kanten in höchstens zwei Farben gefärbt sind: Angenommen, es gibt einen Knoten v , wo die Kanten $\{u_1, v\}$, $\{u_2, v\}$ und $\{u_3, v\}$ zu den Knoten u_1, u_2 und u_3 in drei unterschiedlichen Farben gefärbt sind. Das Spielerpaar u_1v bildet mit mindestens 33 anderen Spielern ein gutes Dreierteam. Würde es mit u_2 ein gutes Dreierteam bilden, dann hätten $\{u_1, v\}$ und $\{u_2, v\}$ dieselbe Farbe. Gleiches gilt für u_3 . Daher bildet u_1v mit 33 Spielern außerhalb von u_1, u_2, u_3, v ein gutes Dreierteam. Gleiches gilt für u_2v und u_3v .

Da es allerdings nur 95 Spieler außerhalb von u_1, u_2, u_3, v gibt, muss es einen Spieler w geben, der mit zwei der drei Paare u_1v, u_2v, u_3v ein gutes Team bildet. Sagen wir, das sind u_1v und u_2v . Dann sind aber die Kanten $\{u_1, v\}$ und $\{u_2, v\}$ gleich gefärbt, da wir mit dem Team u_1vw starten und dann u_1 durch u_2 ersetzen könnten. Das ist ein Widerspruch, also sind die Kanten jedes Knotens in höchstens zwei Farben gefärbt.

Auf die gleiche Art kann man leicht zeigen, dass es keine drei Kanten $\{u, v\}$, $\{v, w\}$, $\{w, u\}$ gibt, die alle unterschiedlich gefärbt sind.

Sei nun v ein beliebiger Knoten. In dem Fall, dass alle von ihm ausgehenden Kanten gleich gefärbt sind, haben alle 99 Knoten mindestens eine Kante dieser Farbe, da der Graph vollständig ist. Damit ist die Aussage gezeigt.

Wir nehmen also an, dass v ausgehende Kanten in den Farben c_1 und c_2 - aber in keiner anderen Farbe - hat. Weiterhin nehmen wir an, dass ein Knoten w existiert, der keine ausgehende Kante hat, die o.B.d.A. ⁷ mit der Farbe c_1 gefärbt ist. Andernfalls wäre die Aussage nämlich schon gezeigt. Dann muss $\{v, w\}$ mit der Farbe c_2 gefärbt sein. Analog zum Knoten w muss es auch einen Knoten u geben, der keine ausgehende Kante der Farbe c_2 hat. In diesem Fall hat $\{v, u\}$ die Farbe c_1 und die Kante $\{u, w\}$ hat weder die Farbe c_1 noch c_2 .

Dann sind aber $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ und $\{w, u\}$ allesamt unterschiedlich gefärbt, was einen Widerspruch zu obigem Resultat darstellt.

Da nun aber die Annahme, dass keine Farbe existiert, sodass jeder Knoten mindestens eine ausgehende Kante in dieser Farbe hat, zu einem Widerspruch führt, muss es eine Farbe geben, sodass jeder Knoten mindestens eine ausgehende Kante in dieser Farbe hat.

⁶Wir beziehen uns hier auf Graphen aus der Graphentheorie, die aus Knoten und Kanten bestehen, wobei eine Kante jeweils zwei Knoten verbindet. Ein Graph ist vollständig, wenn in diesem alle Knoten durch eine Kante verbunden sind.

⁷ohne Beschränkung der Allgemeinheit



Illustration: Julia Nurit Schönngel

15 Die Straße von Bethlehem

Autor: Matthew Maat (Universität Twente)

Projekt: Combining algorithms for parity games & linear programming

Aufgabe

Nach dem Besuch der Hirten und der heiligen drei Könige wird Josef im Traum gewarnt: er, seine Frau Maria und das Jesuskind müssen nach Ägypten fliehen, um dem bösen König Herodes zu entkommen.⁸ Doch von Bethlehem nach Ägypten zu kommen, ist nicht ungefährlich. Da sie den Weg nicht kennen, müssen sie den Richtungsangaben der Einheimischen vertrauen, denen sie auf ihrer Reise begegnen. Vor allem aber hoffen sie, nicht an römischen Wachposten vorbeizukommen, bei welchen sie mit Sicherheit gefasst werden würden.

⁸Matthäusevangelium, Kapitel 2, Vers 13-15.

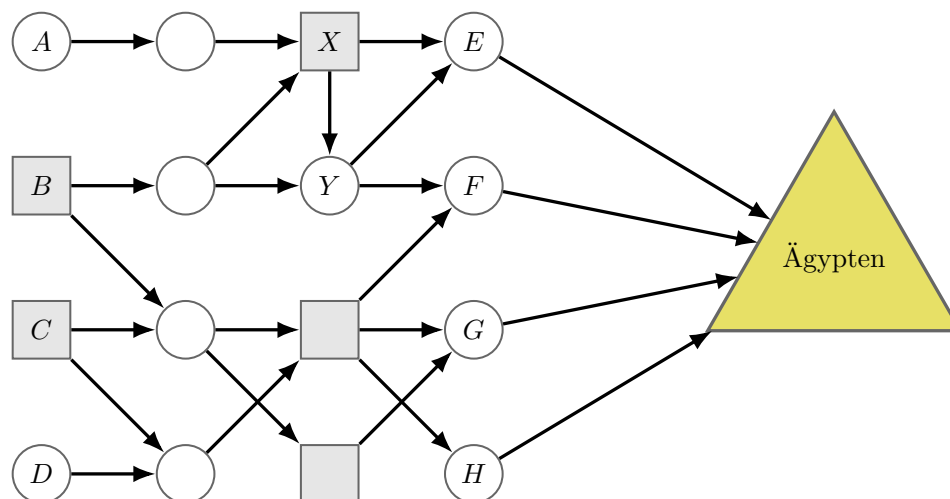


Abbildung 34: Karte des Straßennetzes. Kreise und Quadrate stellen Städte dar. Pfeile repräsentieren Einbahnstraßen zwischen den Städten, die nur in die Richtung des jeweiligen Pfeils benutzt werden können.

Das Straßennetz ist in Abbildung 34 dargestellt. Maria und Josef starten in Bethlehem (B auf der Karte). Die 16 Städte sind durch Quadrate und Kreise markiert. Jede der Städte Emmaüs, Filadelfia, Gerar und Hebron (E, F, G und H) enthält möglicherweise einen römischen Wachposten (in den anderen Städten gibt es keine Wachposten). Es ist allen Einheimischen bekannt, wie die Karte aussieht und wo sich die Wachposten befinden. Die Menschen in dieser Region vertrauen Fremden jedoch nicht so leicht, weshalb sie Durchreisenden ihr geographisches Wissen nicht in Gänze preisgeben. Reisenden wird, sobald sie in einer Stadt ankommen, lediglich gesagt, welche Straße sie von dieser Stadt aus nehmen sollten. Alle Straßen sind Einbahnstraßen, d.h. sie können nur in einer Richtung passiert werden und es ist unmöglich, unterwegs umzukehren. Da die Reisenden den Weg nicht kennen, werden sie den ihnen mitgeteilten Richtungsangaben stets Folge leisten.

In den meisten Städten (weiße Kreise) sind die Einwohner freundlich und werden die Reisenden, wenn möglich, in eine Richtung schicken, die es ihnen erlaubt, die römischen Wachposten zu umgehen. Einige Städte (graue Quadrate) hingegen werden vollständig von Herodes' Spionen bewohnt, die die Reisenden, wenn möglich, in eine Richtung schicken, die zu einem Wachposten führt. Sowohl die freundlichen Einwohner als auch die Spione wissen, wo die Spione leben, und wählen unter Berücksichtigung des gesamten verbleibenden Weges nach Ägypten jeweils eine der besten Optionen, um ihr Ziel zu erreichen.

Beispiel: Angenommen, Emmaüs hat einen römischen Wachposten, Filadelfia jedoch nicht. Dann gilt: Reisende, die in der Stadt X ankommen, werden von den Spionen nach E , und Reisende, die in der Stadt Y ankommen, von den freundlichen Einwohnern nach F geschickt. Man bemerke, dass die Spione die Reisenden in diesem Fall nicht von X nach Y schicken werden, weil sie wissen, dass sie von den dort lebenden freundlichen Einwohnern weiter nach F geleitet werden würden.

Am Ende kommen Maria und Joseph mit dem Kind sicher in Ägypten an, ohne auf einen

Wachposten zu stoßen. In Ägypten treffen sie auf andere Reisende, die in Afek, Cäsarea und Damaskus (A , C , D auf der Karte) gestartet sind und ebenfalls auf Angaben von Einheimischen angewiesen waren. Merkwürdigerweise sind diese auf ihrer Reise nach Ägypten allesamt römischen Wachposten begegnet.

Angesichts der Tatsache, dass Joseph und Maria nicht auf einen römischen Wachposten gestoßen sind, die anderen Reisenden jedoch schon, welche der folgenden Aussagen trifft auf den Standort bzw. die Standorte des Wachpostens bzw. der Wachposten zu?

Bemerkung: Reisende erhalten auch in den Städten, in denen sie starten, Richtungsangaben.

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt nur eine Möglichkeit für die Verteilung der Wachposten. Bei dieser gibt es genau einen Wachposten.
2. Es muss genau 2 Wachposten geben und diese müssen sich in E und F befinden.
3. Es muss genau 2 Wachposten geben und diese müssen sich in E und G befinden.
4. Es muss genau 2 Wachposten geben und diese müssen sich in E und H befinden.
5. Es muss genau 2 Wachposten geben und diese müssen sich in F und G befinden.
6. Es muss genau 2 Wachposten geben und diese müssen sich in F und H befinden.
7. Es muss genau 2 Wachposten geben und diese müssen sich in G und H befinden.
8. Es gibt nur eine Möglichkeit für die Verteilung der Wachposten. Bei dieser gibt es genau drei Wachposten.
9. Es gibt genau zwei verschiedene Möglichkeiten für die Verteilung der Wachposten.
10. Es gibt mehr als zwei verschiedene Möglichkeiten für die Verteilung der Wachposten.

Projektbezug:

Diese Aufgabe hängt mit Erreichbarkeitsspielen zusammen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Mit den gegebenen Informationen können wir für jede der vier Städte bestimmen, ob es dort einen Kontrollpunkt gibt oder nicht.

- Zunächst nehmen wir an, dass es in Emmaüs keinen Kontrollpunkt gibt. Dann könnten die freundlichen Menschen Reisende von Afek nach Emmaüs den Weg weisen, indem sie die in Abbildung 2 blau markierten Straßen empfehlen. Dies würde jedoch bedeuten, dass Reisende aus Afek keinen Kontrollpunkt passieren würden, was im Widerspruch zu unseren Erkenntnissen steht. Daher ist diese Annahme unmöglich, und Emmaüs muss einen Kontrollpunkt haben.
- Da wir nun weiterhin wissen, dass Emmaüs einen Kontrollpunkt hat, nehmen wir an, dass es in Filadelfia ebenfalls einen Kontrollpunkt gibt. Dann könnten die Spione die in Abbildung 2 rot markierten Straßen empfehlen, wodurch alle Reisenden aus Bethlehem entweder in Emmaüs oder in Filadelfia enden würden. Dies kann jedoch nicht der Fall sein, da wir wissen, dass Joseph und Maria keinen Kontrollpunkt passiert haben. Folglich kann es in Filadelfia keinen Kontrollpunkt geben.

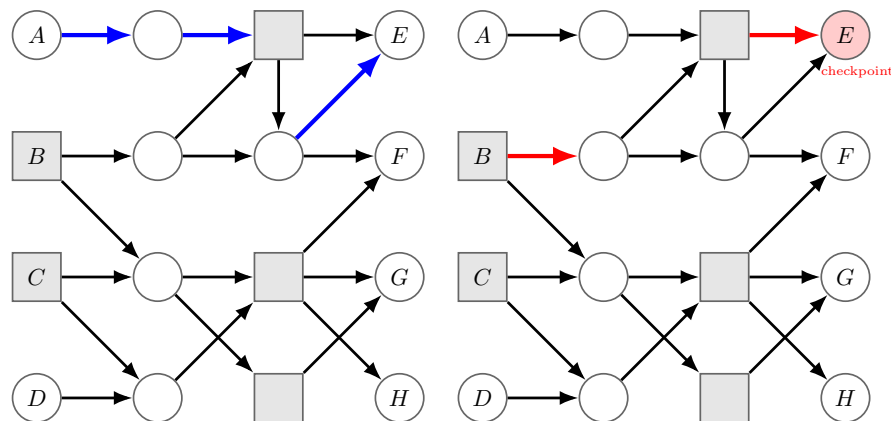


Abbildung 35: Links: Die freundlichen Einwohner können Reisende von Afek nach Emmaüs führen, indem sie die blau markierten Straßen empfehlen. Rechts: Die Spione können Reisende von Bethlehem nach Emmaüs oder Filadelfia führen, indem sie die rot markierten Straßen empfehlen.

- Nun können die Spione über die links in Abbildung 3 markierten Straßen jede Person von Bethlehem nach Gerar leiten. Das bedeutet, dass Gerar keinen römischen Kontrollpunkt haben kann, da wir wissen, dass Joseph und Maria sicher angekommen sind.
- Reisende aus Damaskus haben keine Möglichkeit, Emmaüs zu erreichen. Da wir jedoch wissen, dass Reisende aus Damaskus auf einen Kontrollpunkt treffen, muss es einen weiteren Kontrollpunkt geben, der sich folglich in Hebron befinden muss.

Fasst man all dies zusammen, so sieht man, dass es genau eine mögliche Verteilung der Kontrollpunkte gibt, wie sie rechts in Abbildung 3 dargestellt ist. Außerdem können die freundlichen Menschen die blau markierten Straßen empfehlen, um Reisende von Bethlehem in sichere Städte zu führen, und die Spione können Reisende von ihren Ausgangspunkten mithilfe der rot markierten Straßen zu den Kontrollpunkten leiten. Somit handelt es sich tatsächlich um eine gültige Verteilung der Kontrollpunkte, und sie ist die einzige mögliche.

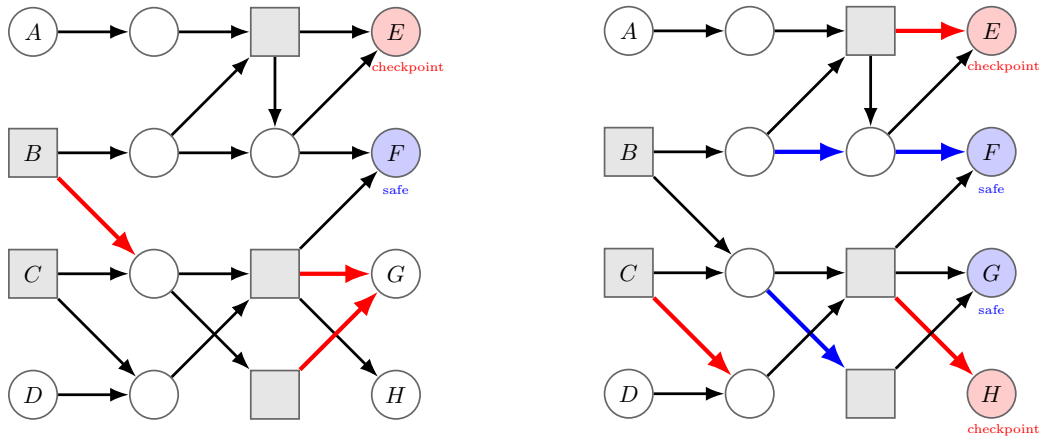


Abbildung 36: Links: Die Spione können Reisende von Bethlehem nach Gerar leiten, indem sie die rot markierten Straßen empfehlen. Rechts: Die Verteilung der Kontrollpunkte sowie die Straßen, entlang derer freundliche Menschen und Spione die Reisenden führen.

Bemerkung: Im Kontext von Erreichbarkeitsspielen bezeichnet man die Menge der Städte, von denen aus die Spione bzw. die freundlichen Menschen garantieren können, dass man eine bestimmte Menge von Städten S erreicht, als den *Attraktor* von S . Die in diesem Beweis betrachteten zugehörigen Strategien der freundlichen Menschen und der Spione heißen *Attraktorstrategien*. Attraktoren zu einer Städtemenge S lassen sich leicht berechnen, indem man von rechts nach links vorgeht: Zunächst überprüft man, welche Städte in einem Schritt zwangsweise nach S geführt werden können, und fügt diese Städte dem Attraktor von S hinzu. Anschließend überprüft man erneut, welche Städte nun zwangsweise in den Attraktor von S geführt werden können, und fügt auch diese hinzu, und so weiter. Sobald keine weiteren Städte mehr hinzukommen, hat man den Attraktor von S berechnet!



Illustration: Mar Curcó Iranzo

16 Geschenkeauslieferung im Häuserblock

Autorin: Mar Curcó Iranzo

Aufgabe

Der Weihnachtsmann fliegt über Verdedam, eine für ihre Gärten berühmte Stadt, um Geschenke auszuliefern. Jeder Häuserblock der Stadt lässt sich als Gitter darstellen, wobei jede Zelle entweder einen Schornstein darstellt, an dem der Weihnachtsmann Geschenke abliefern muss, oder einen kleinen Garten, in dem einige Elfen darauf warten, weitere Geschenke auf seinen Schlitten zu laden. Das Aufladen bzw. Ausliefern von Geschenken wird durch positive bzw. negative ganze Zahlen dargestellt. So steht zum Beispiel eine Zelle mit der Zahl 4 für einen kleinen Garten, in dem 4 Geschenke auf den Schlitten geladen werden. Eine Zelle mit der Zahl -4 steht für einen Schornstein, an dem der Weihnachtsmann 4 Geschenke ausliefern muss.

In Verdedam sind die Elfen hoch organisiert. In jedem Häuserblock verteilen sie die Geschenke in den Gärten so, dass folgende Bedingung erfüllt ist: In jedem 4×3 oder 3×4 Rechteck des zugehörigen Gitters ist die Summe der Einträge null.

-9	-8	-11	24	-2	-10	-16
-16	16	29	-50	11	25	-7
22	-15	-3	21	-12	-22	38
-1	10	-14	1	6	8	-19
-26	-5	3	7	1	4	-33
30	1	-2	-4	-4	-6	39

5	1	4	-1	3
-2	3	1	-5	-6
-4	-2	-2	2	2

Abbildung 37: Die zugehörigen Gitter der ersten beiden Häuserblöcke. In jedem 4×3 oder 3×4 Rechteck der Gitter ist die Summe der Einträge null.

Der Weihnachtsmann kommt mit einem leeren Schlitten in Verdedam an, fliegt von Block zu Block und folgt innerhalb jedes Blocks stets demselben Ablauf: Zuerst besucht er alle kleinen Gärten, um Geschenke aufzuladen, und erst danach besucht er alle Schornsteine, jeden genau einmal. Unter Berücksichtigung der Reihenfolge, in der der Weihnachtsmann die Blöcke jedes Jahr besucht, haben seine gut organisierten Elfen die Geschenke natürlich so verteilt, dass der Weihnachtsmann an jedem Schornstein genügend Geschenke auf seinem Schlitten hat, um die geforderte Anzahl auszuliefern.

Der erste Block auf seiner Route, dargestellt in Abbildung 37, wird durch ein 6×7 Gitter beschrieben, dessen Einträge sich zu 1 summieren. Somit verlässt der Weihnachtsmann diesen Block mit einem Geschenk. Der zweite Block, ebenfalls in Abbildung 37 dargestellt, wird durch ein 3×5 Gitter beschrieben, dessen Einträge sich zu -1 summieren. Mithilfe des zusätzlichen Geschenks aus dem vorherigen Block liefert der Weihnachtsmann alle Geschenke aus und verlässt diesen Block mit einem leeren Schlitten.

Als der Weihnachtsmann seine Reise durch Verdedam fortsetzt, zwingen ihn starke Winde, seine Route leicht zu ändern, und er erreicht einen anderen Teil der Stadt früher als erwartet. Dort kommt er zu einem dritten Häuserblock, der durch ein 7×10 Gitter dargestellt wird.

				20	25				

Abbildung 38: Das Gitter des dritten Häuserblocks.

Der Weihnachtsmann weiß, dass sich im Zentrum dieses Blocks zwei kleine Gärten befinden, in denen er 20 bzw. 25 Geschenke auflädt, wie in Abbildung 38 angegeben. Alle 4×3 und 3×4 Rechtecke erfüllen die übliche Bedingung.

Der Weihnachtsmann erreicht diesen dritten Häuserblock mit einem leeren Schlitten. Natürlich haben die Elfen dieses unvorhergesehene Ereignis bei der Verteilung der Geschenke nicht berücksichtigt, sodass der Weihnachtsmann möglicherweise nicht genügend Geschenke hat, um alle geforderten Mengen in diesem Block auszuliefern. Wie viele Geschenke wird er nicht ausliefern können, oder wie viele Geschenke wird er übrig behalten, wenn er den Block verlässt?

Hinweis: Für das in Abbildung 38 dargestellte 7×10 Gitter mit den fest vorgegebenen zentralen Einträgen 20 und 25 existiert mindestens eine Belegung, die die Bedingung erfüllt, dass in jedem 3×4 und jedem 4×3 Rechteck die Summe der Einträge null ist.

Antwortmöglichkeiten:

1. Er wird 45 Geschenke nicht ausliefern können.
2. Er wird 25 Geschenke nicht ausliefern können.
3. Er wird 20 Geschenke nicht ausliefern können.
4. Er wird 5 Geschenke nicht ausliefern können.
5. In dem Block gibt es genau so viele Geschenke, wie ausgeliefert werden müssen.
6. Er wird 5 Geschenke auf seinem Schlitten übrig haben.
7. Er wird 20 Geschenke auf seinem Schlitten übrig haben.
8. Er wird 25 Geschenke auf seinem Schlitten übrig haben.
9. Er wird 45 Geschenke auf seinem Schlitten übrig haben.
10. Mit den gegebenen Informationen ist keine eindeutige Bestimmung möglich.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 1.

Die richtige Antwort ist 1., der Weihnachtsmann wird 45 Geschenke nicht ausliefern können. Zur Bestimmung dieser Zahl stellen wir fest, dass im Wesentlichen die Summe aller Zahlen in den Zellen des Gitters zu bestimmen ist. Dabei steht in jeder Zelle eine positive ganze Zahl, wenn dort Geschenke aufgeladen, und eine negative ganze Zahl, wenn dort Geschenke ausgeliefert werden.

Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, die Zahlen in den Zellen neben den beiden bekannten Werten mit A und B zu bezeichnen, wie in Abbildung 39 links dargestellt.

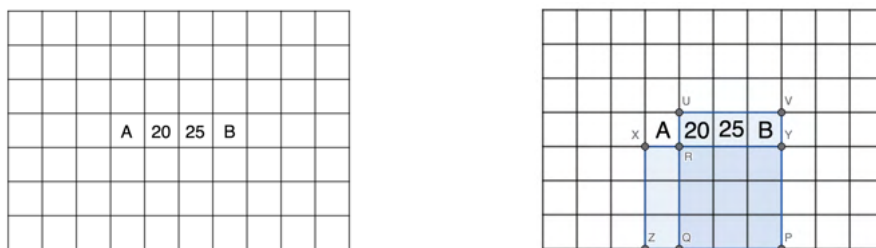


Abbildung 39: Das 7×10 -Gitter.

Nun betrachten wir in Abbildung 39 rechts das 4×3 -Rechteck, das durch die Punkte $UVVP$ gegeben ist, sowie das 3×4 -Rechteck, das durch die Punkte $XYPZ$ gegeben ist. Gemäß der gegebenen Regeln müssen sich in beiden Rechtecken die Einträge zu 0 summieren. Da sich die beiden Rechtecke im Rechteck $RYQP$ überlappen, folgt daraus, dass die Summe der Zahlen im 1×3 -Rechteck $UVYR$ mit der Summe der Zahlen im 3×1 -Rechteck $XRQZ$ übereinstimmt. Somit müssen sich die Zahlen in $XRQZ$ zu $20 + 25 + B$ aufsummieren.

Mit ähnlichen Konstruktionen erkennt man, dass sich in Abbildung 40 die Einträge in jedem blauen Rechteck zu $20 + 25 + B$ und in jedem orangenen Rechteck zu $20 + 25 + A$ aufsummieren.

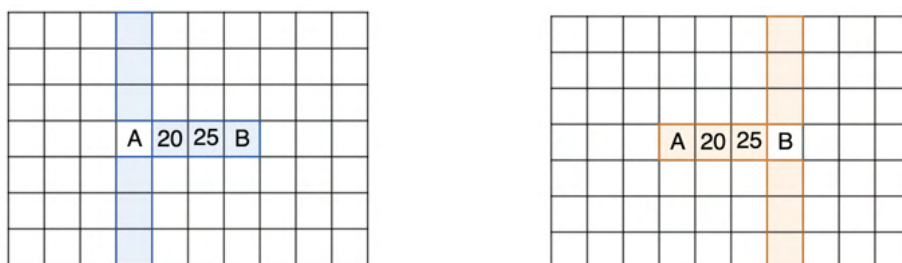


Abbildung 40: Rechtecke, deren Einträge die gleiche Summe besitzen.

Nun betrachten wir in Abbildung 41 links das 4×3 -Rechteck $OLZN$ und das 3×4 -Rechteck $MXQN$. Wie zuvor müssen sich in beiden Rechtecken die Einträge zu 0 aufsummieren und da die Rechtecke sich im Rechteck $MRZN$ überlappen, müssen die Einträge im 1×3 -Rechteck $OLRM$ die gleiche Summe haben wie die im 3×1 -Rechteck $RXQZ$, also $20 + 25 + B$.

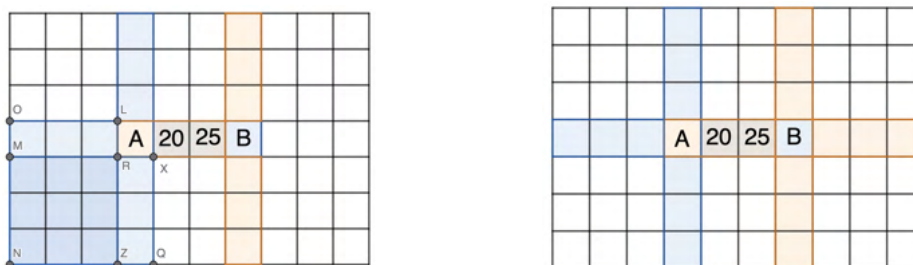


Abbildung 41: Eine weitere Konstruktion und weitere Rechtecke, deren Einträge die gleiche Summe besitzen.

Daher besitzen in Abbildung 41 rechts die Einträge in jedem blauen Rechteck die Summe $20 + 25 + B$. Analog erhält man, dass die Einträge in jedem orangenen Rechteck in Summe $20 + 25 + A$ ergeben.

Nun betrachten wir in Abbildung 42 links das 3×4 -Rechteck $adhe$. Da die Zahlen in diesem Rechteck in Summe 0 ergeben und die Zahlen im enthaltenen blauen Rechteck summiert mit den Zahlen im enthaltenen orangenen Rechteck $(20 + 25 + B) + (20 + 25 + A)$ liefern, müssen die Zahlen im grünen Rechteck $bcgf$ die Summe $-(20 + 25 + B) - (20 + 25 + A)$ haben. Analog ergibt sich, dass auch die Einträge im grünen Rechteck $ijkl$ die Summe $-(20 + 25 + B) - (20 + 25 + A)$ haben.

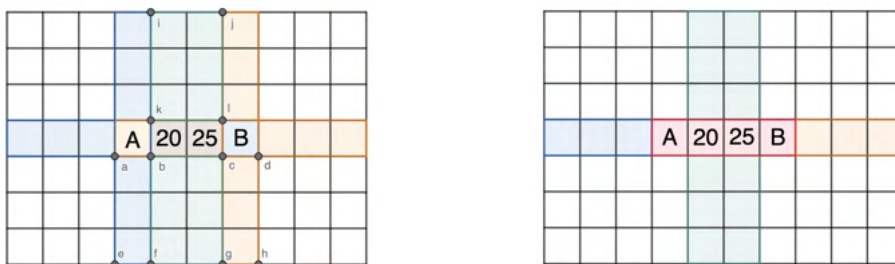


Abbildung 42: Eine weitere Konstruktion und die abschließende Berechnung.

Schließlich gilt: Da in Abbildung 42 rechts die Zahlen in allen weißen 3×4 -Rechtecken die Summe 0 haben, ist die Summe aller Einträge des 7×10 -Gitters gleich der Summe der Einträge der farbigen Zellen. Mit den oben hergeleiteten Beziehungen berechnen wir die Gesamtsumme wie folgt:

$$(A + 20 + 25 + B) + (20 + 25 + B) + (20 + 25 + A) + (- (20 + 25 + B) - (20 + 25 + A)) + (- (20 + 25 + B) - (20 + 25 + A)) = -45.$$

Der Weihnachtsmann wird also 45 Geschenke nicht ausliefern können.



Illustration: Ivana Martić

17 Der Kranz zweier Weihnachtszauber

Autor: Mehmet Akif Yıldız

Aufgabe

Die Elfen bereiten einen prachtvollen, verzauberten Weihnachtskranz vor, der über dem Tor zum Rentiertrainingsgelände aufgehängt werden soll. Auf dem Kranz werden speziell nummerierte, magische Ornamente angeordnet.

Jedes Ornament trägt eine von den Elfen frei gewählte reelle Zahl, welche positiv oder negativ, aber niemals 0 sein kann.

Es gibt zwei Arten von magischen Ornamenten, blaue und rote:

- Ein blaues Ornament verwendet einen Elfen-Zauber: Es leuchtet, wenn seine Zahl gleich der Summe der Zahlen seiner beiden Nachbarn ist.
- Ein rotes Ornament verwendet einen Rentier-Zauber: Es leuchtet, wenn seine Zahl gleich dem Produkt der Zahlen seiner beiden Nachbarn ist.

Damit die Zauber richtig wirken können, müssen rote und blaue Ornamente auf dem Kranz strikt abwechselnd angeordnet sein - blau, rot, blau, rot ... einmal ganz herum. Da es das Jahr 2025 ist, hätten die Elfen gerne einen Kranz mit 2025 Ornamenten vorbereitet. Auf einem solchen Kranz ist es jedoch nicht möglich, die Ornamente strikt abwechselnd anzuordnen, weshalb die Elfen stattdessen Kränze in der nächstkleineren und der nächstgrößeren zulässigen Größe in Betracht ziehen: einen mit $n_1 = 2024$ und einen mit $n_2 = 2026$ Ornamenten. Sie

wollen eine Anordnung von Ornamenten finden, in welcher jedes Ornament leuchtet. Eine solche Anordnung nennen wir eine *vollständig leuchtende Anordnung*.

Für jede Kranzgröße fragen sich die Elfen:

- Gibt es eine vollständig leuchtende Anordnung?
- Falls es eine solche Anordnung gibt: Was ist die Summe aller Zahlen auf dem Kranz? Ist diese eindeutig bestimmt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Weder für n_1 noch für n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung.
2. Genau für eine der Größen n_1 und n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung, aber die Summe der Zahlen ist nicht eindeutig bestimmt.
3. Sowohl für n_1 als auch n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung; bei genau einer der beiden Kranzgrößen ist die Summe der Zahlen eindeutig bestimmt und beträgt 0.
4. Sowohl für n_1 als auch n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung; bei genau einer der beiden Kranzgrößen ist die Summe der Zahlen eindeutig bestimmt und beträgt 506, 5.
5. Sowohl für n_1 als auch n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung; bei genau einer der beiden Kranzgrößen ist die Summe der Zahlen eindeutig bestimmt und beträgt 759.
6. Sowohl für n_1 als auch n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung; bei genau einer der beiden Kranzgrößen ist die Summe der Zahlen eindeutig bestimmt und beträgt 759, 75.
7. Sowohl für n_1 als auch n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung. Bei beiden Kranzgrößen ist die Summe der Zahlen eindeutig bestimmt und beide Summen addiert ergeben 0.
8. Sowohl für n_1 als auch n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung. Bei beiden Kranzgrößen ist die Summe der Zahlen eindeutig bestimmt und beide Summen addiert ergeben 1265, 5.
9. Sowohl für n_1 als auch n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung. Bei beiden Kranzgrößen ist die Summe der Zahlen eindeutig bestimmt und beide Summen addiert ergeben 1266, 25.
10. Sowohl für n_1 als auch n_2 existiert eine vollständig leuchtende Anordnung. Bei beiden Kranzgrößen ist die Summe der Zahlen eindeutig bestimmt und beide Summen addiert ergeben 1518, 75.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Zunächst zeigen wir, dass für beide Kranzgrößen vollständig leuchtende Anordnungen existieren. Trägt jedes blaue Ornament die Zahl $1/2$ und jedes rote Ornament die Zahl $1/4$, so sind die Bedingungen, unter denen jedes Ornament leuchtet, erfüllt. Damit erhalten wir eine vollständig leuchtende Anordnung für jede gerade Anzahl von Ornamenten, insbesondere für n_1 und n_2 .

Nun betrachten wir eine beliebige vollständig leuchtende Anordnung. Wir wählen ein beliebiges blaues Ornament, dessen Zahl wir mit $a \neq 0$ bezeichnen. Das darauf folgende rote Ornament trage die Zahl ab für ein gewisses $b \neq 0$. Die Zahlen auf den weiteren Ornamenten können nun jeweils eindeutig aus den beiden vorhergehenden mithilfe der Leuchtbedingungen bestimmt werden. Daraus ergibt sich das in Abbildung 43 dargestellte Muster der aufeinanderfolgenden Ornamente.

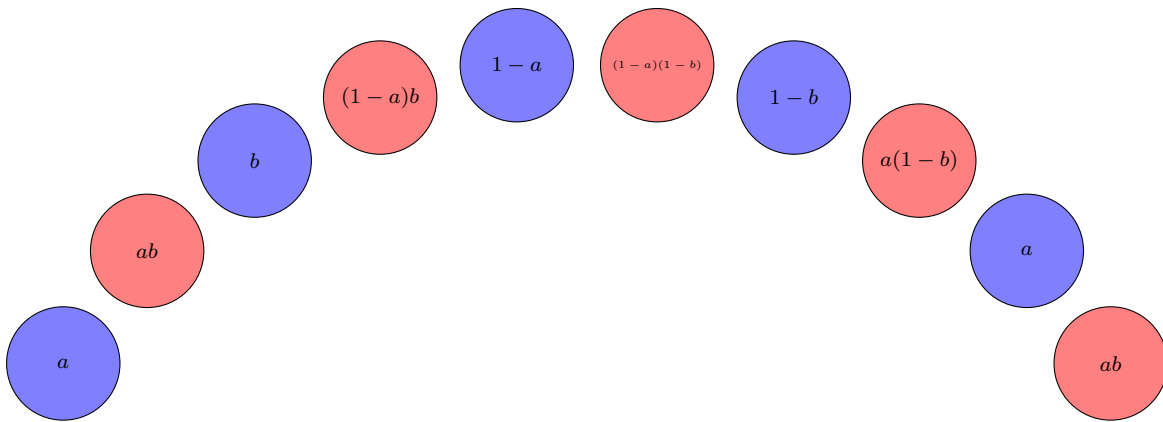


Abbildung 43: Zehn aufeinanderfolgende Ornamente in einem Kranz mit $n \geq 10$ Ornamenten.

Ausgehend vom Paar (a, ab) erhalten wir nach acht Schritten wieder dasselbe Paar (a, ab) . Somit wiederholen sich die Zahlen nach jeweils 8 Ornamenten.

Ist die Kranzgröße $n_1 = 2024$, welche durch 8 teilbar ist, so treten daher die Zahlen $a, ab, b, (1-a)b, (1-a), (1-a)(1-b), (1-b), a(1-b)$ insgesamt 253-mal auf. Wir berechnen die Summe von acht aufeinanderfolgenden Ornamenten:

$$\begin{aligned} & a + ab + b + (1-a)b + (1-a) + (1-a)(1-b) + (1-b) + a(1-b) \\ &= a + ab + b + b - ab + 1 - a + 1 + ab - a - b + 1 - b + a - ab \\ &= 3. \end{aligned}$$

Da die betrachtete Anordnung beliebig war, ist für $n_1 = 2024$ die Summe eindeutig bestimmt als $3 \cdot 253 = 759$.

Ist die Kranzgröße $n_2 = 2026$, welche bei Division durch acht den Rest 2 besitzt, so muss in unserem periodischen Muster die Zahl auf Ornament 1 mit der Zahl auf Ornament 3 sowie

die Zahl auf Ornament 2 mit der Zahl auf Ornament 4 übereinstimmen. Daraus folgt $a = b$ und $ab = (1 - a)b$.

Setzt man $a = b$ in die zweite Gleichung ein, so erhält man $a^2 = (1 - a)a$, also $0 = (1 - 2a)a$. Da die Zahl auf keinem Ornament Null sein darf, folgt $a = b = 1/2$. Somit ist für n_2 die einzige vollständig leuchtende Anordnung genau die zu Beginn beschriebene. Die Summe ist eindeutig bestimmt als $1013 \cdot 1/2 + 1013 \cdot 1/4 = 759,75$.

Damit existieren für beide Kranzgrößen vollständig leuchtende Anordnungen, die Summe der Zahlen ist jeweils eindeutig bestimmt, und die beiden Summen ergeben zusammen 1518,75.



Illustration: Friederike Hofmann

18 Tannenbaumplantage

Autor: Tim Kunt (Zuse-Institut Berlin)

Aufgabe

Auf den Wunschzetteln, die dem Weihnachtsmann zugesendet werden, wird nicht selten um einen Weihnachtsbaum gebeten. Daher kümmert sich die Gärtner-Elfe Anna darum, Tannenbäume heranzuziehen. Da die klimatischen Gegebenheiten am Nordpol einen Anbau im Freien unmöglich machen, steht Anna ein extra zu diesem Zweck errichteter Raum der Weihnachtsmannwerkstatt zur Verfügung. Dessen quadratischer Grundriss ist in 7×7 kleine Felder unterteilt, mit einem Wasserbecken genau in der Mitte.

Jedes der 49 kleinen Felder muss entweder für einen Tannenbaum oder für die Wasserzufuhr verwendet werden. Jedes Tannenbaum-Feld muss direkt an mindestens ein Wasserfeld angrenzen (d.h. sich mit diesem eine Seite teilen). Alle Wasserfelder müssen miteinander verbunden sein (d.h. von jedem Wasserfeld kann man jedes andere Wasserfeld durch eine Folge von Wasserfeldern erreichen, bei welcher sich jeweils zwei aufeinanderfolgende Wasserfelder eine Seite teilen). Das mittlere Feld ist ein Wasserfeld.

Was ist die maximale Anzahl an Tannenbäumen, die Anna unter diesen Bedingungen zeitgleich anpflanzen kann?

Bemerkung: Abbildung 44 zeigt beispielhaft, wie man in einem 5×5 -Raum die unter den gegebenen Bedingungen maximale Anzahl an Tannenbäumen anpflanzen könnte.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Wie in Abbildung 45 dargestellt, gibt es eine Bepflanzung mit 28 Tannenbäumen. Somit können lediglich die Antworten 8, 9 oder 10 korrekt sein.

Um 9 und 10 auszuschließen, zeigen wir nun, dass unter den gegebenen Bedingungen nicht 30 oder mehr Tannenbäume angepflanzt werden können. Hierfür beweisen wir, dass jede korrekte Bepflanzung des Raumes mindestens 20 Wasserfelder enthalten muss. Den Beweis führen wir in 3 Schritten.

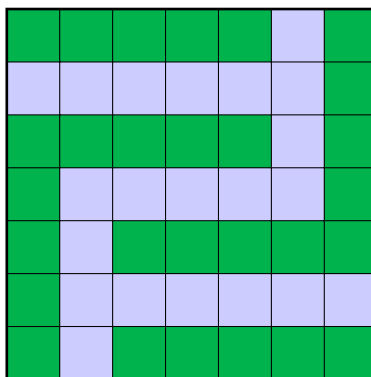


Abbildung 45: Eine Bepflanzung mit 21 Wasserfeldern und 28 Tannenbäumen

Schritt 1: Wasserfelder am Rand

Ein Feld nennen wir *versorgt*, falls es ein Wasserfeld ist oder unmittelbar horizontal oder vertikal an ein Wasserfeld angrenzt. Bei einer korrekten Bepflanzung des Raumes müssen alle 49 Felder versorgt sein.

Also müssen insbesondere die 4 Ecken versorgt sein. Da alle Wasserfelder verbunden sein müssen, muss unabhängig davon, ob die jeweilige Ecke ein Wasserfeld ist oder nicht, jeweils eines der beiden angrenzenden⁹ Randfelder ein Wasserfeld sein. Somit muss es mindestens 4 Wasserfelder am Rand geben.

Wir zeigen nun, dass man im Fall von genau 4 oder genau 5 Wasserfeldern am Rand keine Bepflanzung mit weniger als 21 Wasserfeldern erreichen kann:

Wir wissen bereits, dass jeweils eines der beiden an eine Ecke angrenzenden Felder ein Wasserfeld sein muss. In Abbildung 46 links ist dieser Sachverhalt durch die blauen Balken dargestellt. Nun betrachte man die rot eingefärbten Felder in Abbildung 46 links. Das jeweils angrenzende Randfeld muss versorgt sein, d.h. dieses Randfeld, eines der beiden zu diesem Randfeld angrenzenden Randfelder oder das rot eingefärbte Feld ist ein Wasserfeld.

Gibt es nur 4 Wasserfelder am Rand, folgt somit, dass alle rot eingefärbten Felder Wasserfelder sein müssen. Ferner müssen für den Zusammenhang der Wasserfelder die 4 diagonal an die Ecken angrenzenden Felder Wasserfelder sein. Die Situation ist in Abbildung 46 rechts

⁹Ein Feld heißt *angrenzend* an ein anderes Feld, wenn es sich mit diesem eine Seite teilt.



Abbildung 46: Links die allgemeine Situation, rechts die Situation bei 4 Wasserfeldern am Rand

dargestellt. Dann gibt es 13 Wasserfelder und 9 nicht miteinander verbundene Bereiche von Wasserfeldern. Um diese zu verbinden braucht es noch mindestens 8 weitere Wasserfelder. Somit braucht man mindestens 21 Wasserfelder.

Gibt es genau 5 Wasserfelder am Rand, so müssen gemäß der obigen Beobachtung mindestens 3 der rot eingefärbten Felder Wasserfelder sein.

Angenommen, es sind genau 3 der rot eingefärbten Felder Wasserfelder. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass das obere rot eingefärbte Feld kein Wasserfeld ist. Dann muss allerdings das angrenzende Randfeld versorgt sein, weshalb eines der beiden daran angrenzenden Randfelder ein Wasserfeld sein muss. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass es das linke ist. Die Situation ist in Abbildung 47 links dargestellt. Für den Zusammenhang der Wasserfelder müssen die diagonal an die Ecken angrenzenden Felder, bis auf das gelb eingefärbte, Wasserfelder sein.

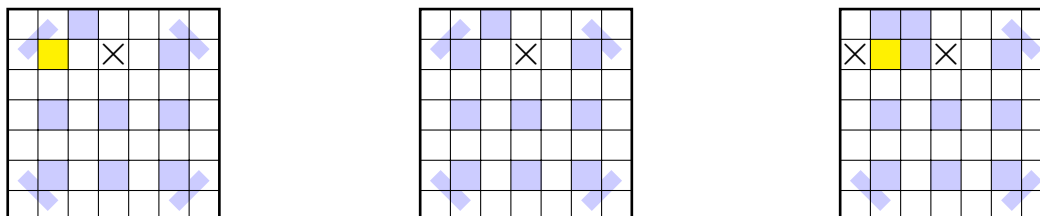


Abbildung 47: Links die Situation bei 5 Wasserfeldern am Rand, wenn 3 der rot eingefärbten Felder Wasserfelder sind und rechts daneben die Situationen abhängig davon, ob das gelb eingefärbte Feld ein Wasserfeld ist.

Nun führen wir eine Fallunterscheidung danach durch, ob das in Abbildung 47 gelb eingefärbte Feld ein Wasserfeld ist:

Ist das gelb eingefärbte Feld ein Wasserfeld, so sieht das Feld aus wie in Abbildung 47 mittig dargestellt. Es gibt 13 Wasserfelder und je nachdem, welches der beiden an die obere linke Ecke angrenzenden Felder ein Wasserfeld ist, entstehen 8 oder 9 nicht miteinander verbundene Bereiche von Wasserfeldern. Im Falle, dass sich das Wasserfeld direkt unter der oberen linken Ecke befindet, gäbe es 9 nicht miteinander verbundene Bereiche und so bräuchte es mindestens 8 weitere Wasserfelder um diese zu verbinden, was bereits 21 Wasserfelder ergibt. Im Falle, dass sich das Wasserfeld direkt rechts neben der oberen linken Ecke befindet, braucht es mindestens 7 weitere Wasserfelder, um diese zu verbinden. Wenn wir diese 8 Be-

reiche von Wasserfeldern mit nur 7 Wasserfeldern verbinden, gibt es in diesem Fall allerdings kein Wasserfeld, welches 2 Bereiche verbindet und gleichzeitig das mit dem Kreuz markierte Feld - welches ja kein Wasserfeld ist - versorgt. Somit braucht es noch mindestens ein weiteres Wasserfeld und daher werden mindestens 21 Wasserfelder benötigt.

Ist das gelb eingefärbte Feld kein Wasserfeld, so ist die Situation notwendigerweise wie in Abbildung 47 rechts. Das mit dem Kreuz markierte Randfeld kann kein Wasserfeld sein, da es laut Annahme nur genau fünf Wasserfelder am Rand gibt. Um dieses zu versorgen, muss dann allerdings das gelb eingefärbte Feld ein Wasserfeld sein, was zu einem Widerspruch führt. Somit kann es diesen Fall gar nicht geben.

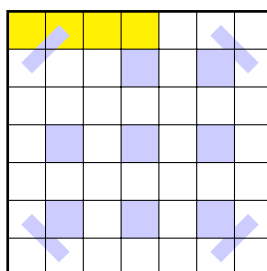


Abbildung 48: Die Situation mit 5 Wasserfeldern am Rand, wobei alle 4 roten Felder Wasserfelder sind.

Es verbleibt noch die Situation zu betrachten, dass sich am Rand genau 5 Wasserfelder befinden und 4 der rot eingefärbten Felder Wasserfelder sind. Diese ist in Abbildung 48 dargestellt. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass eines der gelb eingefärbten Felder das fünfte Wasserfeld am Rand ist. Wieder sind notwendigerweise 3 der diagonal an die Ecken angrenzenden Felder Wasserfelder.

Es gibt in diesem Fall 13 Wasserfelder und mindestens 9 nicht verbundene Bereiche von Wasserfeldern. Um diese zu verbinden braucht es noch mindestens 8 weitere Wasserfelder. Somit werden mindestens 21 Wasserfelder benötigt.

Bevor wir uns in Schritt 3 den Fällen mit mehr als fünf Randfeldern zuwenden, untersuchen wir im folgenden Schritt Bepflanzungen, bei denen die Konstellation der Wasserfelder vier sogenannte *Knicks* enthält.

Schritt 2: Knicks

Die in Abbildung 49 dargestellte Konstellation von Wasserfeldern sowie die Konstellationen, die durch Spiegelung, Rotation oder eine Kombination davon aus dieser hervorgehen, bezeichnen wir als *Knicks*.

Da die Wasserfelder verbunden sein müssen, können wir uns vorstellen, dass wir beginnend mit dem Wasserfeld in der Mitte die einzelnen Wasserfelder schrittweise an die bestehenden Wasserfelder anfügen, d.h. so hinzufügen, dass die Wasserfelder stets verbunden sind.

Nun möchten wir die Anzahl der hinzugefügten Wasserfelder zählen, durch welche (mindestens) ein Knick entsteht.

Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass das zweite Wasserfeld über dem mittigen

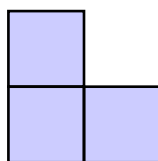


Abbildung 49: Darstellung eines Knicks

platziert wird.

Um die obere und untere linke Ecke zu versorgen muss mindestens ein Wasserfeld so angefügt werden, dass ein Knick in Richtung der linken Seite entsteht. So kann aber maximal eine der beiden linken Ecken versorgt werden. Zusätzlich muss also entweder noch ein weiteres Wasserfeld so an die mittlere Spalte angefügt werden, dass ein zweiter Knick in Richtung der linken Seite entsteht, was zu einer nach links offenen U-förmigen Wasserfeldkonfiguration führt (*Fall 1*, siehe Abbildung 50), oder beide linken Ecken werden über zwei Knicke erreicht, wobei die Wasserfelder eine nach oben oder unten offene U-Form bilden (*Fall 2*, siehe Abbildung 51). Analog kann für die rechten Ecken argumentiert werden. Somit ist die Anzahl der einen Knick erzeugenden Wasserfelder mindestens 4.

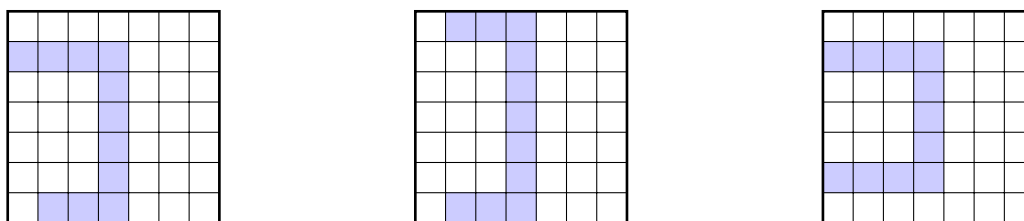


Abbildung 50: Versorgung der linken Ecken in Fall 1, bei dem die Wasserfelder eine nach links offene U-Form bilden.

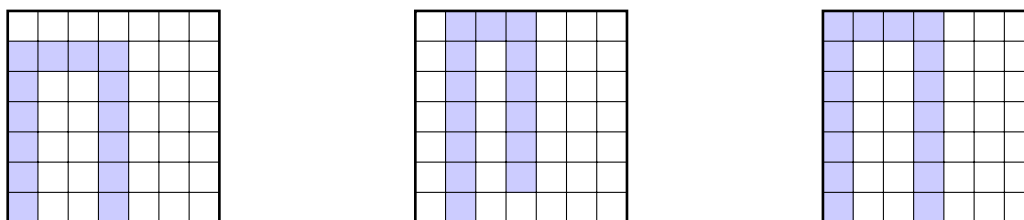


Abbildung 51: Versorgung der linken Ecken in Fall 2, bei dem die Wasserfelder eine nach oben oder nach unten offene U-Form bilden.

Wir zeigen nun, dass man, falls diese Anzahl genau 4 beträgt, keine korrekte Bepflanzung mit weniger als 21 Wasserfeldern erreichen kann:

Befinden wir uns in Fall 1, so können wir aus Symmetriegründen annehmen, dass die Versorgung der linken Ecken wie in einer der Felder in Abbildung 50 erfolgt. Befinden wir uns dagegen in Fall 2, so können wir aus Symmetriegründen annehmen, dass die Versorgung der linken Ecken wie in einer der Felder in Abbildung 51 erfolgt. Die Versorgung der Ecken der rechten Seite erfolgt analog wie auf der linken Seite. Hier kommen Spiegelungen der dargestellten Möglichkeiten an der vertikalen Symmetrieachse oder am Mittelpunkt des Raumes in Frage.

Angenommen wir versorgen die beiden linken Ecken, sowie beide rechte Ecken mit einer Kombination von Fällen 1 und 2. Man sieht leicht, dass, wenn für die Versorgung der linken oder der rechten Ecken der Fall 1 auftritt, nicht alle Felder ohne einen weiteren Knick versorgt werden können, da es in der mittleren Zeile unversorgte Felder gibt. Wenn dagegen für beiden Seiten Fall 2 auftritt, so gibt es mindestens 21 Wasserfelder.

Nun verbleibt der Fall zu betrachten, dass von der mittleren Spalte lediglich zu einer der Seiten ein Knick erfolgt, aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass dies die rechte ist. Dann erfolgt die Wasserversorgung spiralförmig wie beispielhaft in Abbildung 52 dargestellt. Man überzeugt sich leicht, dass in allen Fällen mindestens 21 Wasserfelder benötigt werden.

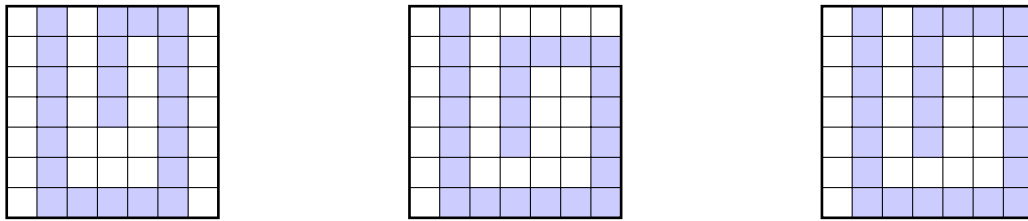


Abbildung 52: Beispiele für spiralförmige Wasserversorgung

3. Schritt: Betrachtung der verbleibenden Fälle

Wir betrachten, wie sich beim im vorherigen Schritt beschriebenen schrittweisen Anfügen der Wasserfelder die Anzahl der insgesamt versorgten Felder verändert:

Gibt es nur das Wasserfeld in der Mitte, so sind dieses Feld und die 4 angrenzenden Felder, also insgesamt 5 Felder, versorgt.

Nun überlegt man sich leicht, dass jedes weitere Wasserfeld, welches wir anfügen, die Anzahl der insgesamt versorgten Felder um höchstens 3 erhöht.

Entsteht bei Hinzufügen eines Wasserfelds (mindestens) ein Knick oder ist das hinzugefügte Wasserfeld ein Randfeld, so erhöht sich die Anzahl der insgesamt versorgten Felder um höchstens 2. Ist beides der Fall, so erhöht sich die Anzahl der insgesamt versorgten Felder sogar um höchstens 1.

Sei w die Anzahl der Wasserfelder, r die Anzahl der Wasserfelder am Rand und d die Anzahl der hinzugefügten Wasserfelder, durch welche ein Knick entstand. Wegen der vorangegangenen Überlegung sind dann höchstens $5 + 3(w - 1) - r - d$ Felder versorgt.

Da alle 49 Felder versorgt sein sollen, muss also

$$5 + 3(w - 1) - r - d \geq 49$$

beziehungsweise

$$w \geq \frac{47 + d + r}{3}$$

gelten.

Nach Schritt 1 und Schritt 2 müssen wir nun noch die Fälle betrachten, bei welchen $r \geq 6$ und $d \geq 5$ gilt. Nach obiger Ungleichung gilt dann allerdings

$$w \geq \frac{58}{3} > 19.$$

Das heißt in diesen Fällen gibt es, genau wie wir zeigen wollten, mindestens 20 Wasserfelder.

Somit enthält jede korrekte Bepflanzung des Raumes mindestens 20 Wasserfelder und höchstens 29 Tannenbäume. Daher ist Antwort 8 korrekt.

Bemerkung: Mit den Argumenten aus Schritt 1 (unzusammenhängende Bereiche verbinden, Symmetriegründe) ist es auch für 6 und 7 Wasserfelder am Rand möglich, zu zeigen, dass man mindestens 21 Wasserfelder benötigt. Schließt man dann noch den einzigen verbleibenden Fall, bei dem $47 + d + r = 60$ gilt, nämlich $r = 8$ und $d = 5$, aus, so gilt in allen weiteren Fällen $47 + d + r \geq 61$, also wegen der in Schritt 3 hergeleiteten Ungleichung $w > 20$. Dadurch hat man dann gezeigt, dass jede korrekte Befflanzung des Raumes höchstens 28 Tannenbäume enthält.

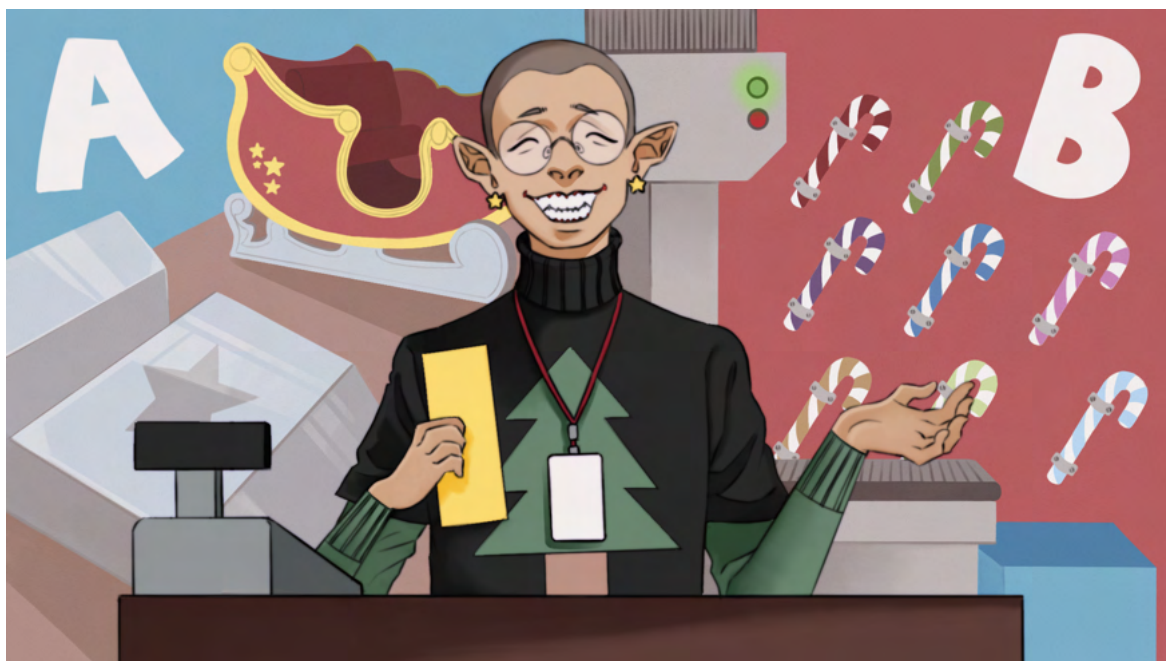


Illustration: Julia Nurit Schönnagel

19 Das Nordpol-Museum

Autor: Lucas van Kreveld

Aufgabe

Im Nordpol-Museum für Weihnachtstechnologie liegt Aufregung in der Luft. Zum allerersten Mal öffnet das Museum seine Türen für die Öffentlichkeit – und da mit einem riesigen Besucherandrang gerechnet wird, bleibt es an den ersten drei Tagen rund um die Uhr geöffnet.

Um die genialen Schlitteninnovationen zu präsentieren, die im Laufe der Jahrhunderte entwickelt wurden, hat der Weihnachtsmann den ersten großen Ausstellungsbereich eingerichtet: Halle A. Dort glänzen die größten Errungenschaften – vom klassischen Holzschlitten, der von Rentieren gezogen wird, über das kurzlebige Jetantrieb-Modell bis hin zum legendären, aber leider völlig unkontrollierbaren KI-Prototypen. Direkt daneben befindet sich Halle B, die Zuckerstangen-Ingenieurhalle, in der Besucher entdecken können, wie Zuckerstangen hergestellt, geformt und für köstlichen Genuss entworfen werden.

Das Museum hat drei Türen: eine verbindet die Außenwelt mit Halle A, eine verbindet die Außenwelt mit Halle B, und eine verbindet Halle A mit Halle B. Die Besucher treffen ab der Öffnungszeit des Museums mit einer konstanten Rate von genau einem Besucher pro Minute ein und dies während der gesamten drei Tage. Alle Besucher möchten beide Hallen besuchen, können jedoch eine von zwei verschiedenen Routen durch das Museum nehmen. Route 1 besucht zuerst Halle A, dann Halle B und verlässt dann das Museum, während Route 2 zuerst Halle B, dann Halle A besucht und dann das Museum verlässt.

Die ankommenden Besucher wechseln sich zwischen diesen beiden Routen ab: Der erste Besucher beginnt mit Halle A, eine Minute später beginnt der nächste Besucher mit Halle B, nach einer weiteren Minute beginnt der nächste Besucher mit Halle A und so weiter.

Jeder Besucher verbringt genau 15 Minuten in Halle A und genau 45 Minuten in Halle B (wegen all der köstlichen Zuckerstangenproben).

Elfe Alma ist die 2025. Besucherin. Sei k die Anzahl anderer Besucher, die sie während ihres Aufenthalts im Museum sieht? Ein Besucher gilt als gesehen, wenn er sich zu irgendeinem Zeitpunkt in derselben Halle wie sie befindet, oder wenn sie sich beim Übergang von einer Halle in die andere begegnen. Welche Ziffer steht an der Einerstelle von k ?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Lösung**Die richtige Antwort ist: 4.**

Die korrekte Anzahl beträgt **104**. Eine Möglichkeit, dies einzusehen, besteht darin, zwischen Besuchern zu unterscheiden, die Route 1 wählen, und solchen, die Route 2 wählen.

Wir bemerken zunächst, dass zwei Besucher sich nicht gleichzeitig beim Wechsel zwischen den Hallen begegnen können. Ein Besucher der Route 1 wechselt nach seiner Ankunft nach einer ungeraden Zahl von Minuten (15 min), ein Besucher der Route 2 ebenfalls nach einer ungeraden Zahl von Minuten (45 min). Da Route-1- und Route-2-Besucher zu Ankunftszeiten unterschiedlicher Parität¹⁰ eintreffen, besitzen auch ihre jeweiligen Wechselzeitpunkte unterschiedliche Parität und können daher nicht zusammenfallen.

Besucher mit Route 1: Unter den Besuchern, die Route 1 nehmen, sieht Elfe Alma genau diejenigen, die innerhalb von 45 Minuten vor oder nach ihrer Ankunft eintreffen, da sie diesen Besuchern gemeinsam in Halle B begegnet. Davon gibt es 44 Besucher.

Setzt man ihre Ankunftszeit auf 0, so sind dies die Besucher, die zu den Zeiten

$$-44, -42, \dots, -4, -2, 2, 4, \dots, 42, 44$$

ankommen.

Besucher mit Route 2: Unter den Besuchern, die Route 2 nehmen, sieht Elf Alma genau diejenigen, die innerhalb von 60 Minuten vor oder nach ihrer Ankunft eintreffen. Die Wegeführung stellt sicher, dass sie allen diesen Besuchern begegnet, da sie sich während ihres Aufenthalts im Museum zu irgendeinem Zeitpunkt gleichzeitig in derselben Halle befinden.

Davon gibt es 60 Besucher. Bei Ankunftszeit 0 sind dies die Besucher, die zu den Zeiten

$$-59, -57, \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, 57, 59$$

ankommen.

Insgesamt sieht Alma

$$44 + 60 = 104$$

andere Besucher während ihres Museumsbesuchs.

¹⁰Zwei Zahlen haben gleiche Parität, wenn beide gerade oder beide ungerade sind.



Illustration: Zyanya Santuario

20 Mehr Schafe als Schlaf

Autor: Matthew Maat (Universiteit Twente)

Projekt: Combining algorithms for parity games & linear programming

Aufgabe

Auf den ersten Blick ist es eine ganz gewöhnliche Nacht. Eine kleine Gruppe von Hirten sitzt am Feuer, während die letzten Sonnenstrahlen allmählich vom Licht eines hellen Sterns hoch am Himmel abgelöst werden. Unwissend, was sie später in dieser Nacht erleben werden, versuchen die Männer einzuschlafen.

Wie jeder Hirte weiß, ist Schäfchen zu zählen die beste Methode, um sanft in den Schlaf zu finden. Da sie dies jedoch jede Nacht tun, wollen sie für etwas Abwechslung sorgen und versuchen, die Schafe in einem vertikalen *Schaf-Konga* anzuordnen, das wir im folgenden Schritt für Schritt definieren werden.

Ein vertikales 1-Schaf-Konga besteht einfach aus einem einzigen Schaf.

Größere vertikale Schaf-Kongas lassen sich aus kleineren zusammensetzen. In der folgenden Konstruktion werden Schafe idealisiert und als Kreise dargestellt. Für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt: Ein vertikales n -Schaf-Konga besteht aus einem vertikalen $(n - 1)$ -Schaf-Konga sowie zwei identischen horizontalen $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -Schaf-Kongas¹¹, wobei ein horizontales Schaf-Konga

¹¹ $\lceil x \rceil$ ist die kleinste natürliche Zahl, die mindestens so groß ist wie x , zum Beispiel ist $\lceil 6,5 \rceil = 7 = \lceil 7 \rceil$.

einfach ein um 90 Grad gedrehtes vertikales Schaf-Konga ist. Die zwei horizontalen Schaf-Kongas werden dabei über- und unterhalb des vertikalen Schaf-Kongas auf derselben vertikalen Geraden zentriert und so angeordnet, dass die entstehende Figur sowohl eine horizontale als auch eine vertikale Symmetrieachse besitzt.

In Abbildung 53 sind einige Beispiele für vertikale Schaf-Kongas zu sehen. Dabei repräsentieren die braunen Schafe das $(n-1)$ -Schaf-Konga und die weißen Schafe die horizontalen $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -Schaf-Kongas des jeweiligen n -Schaf-Kongas.

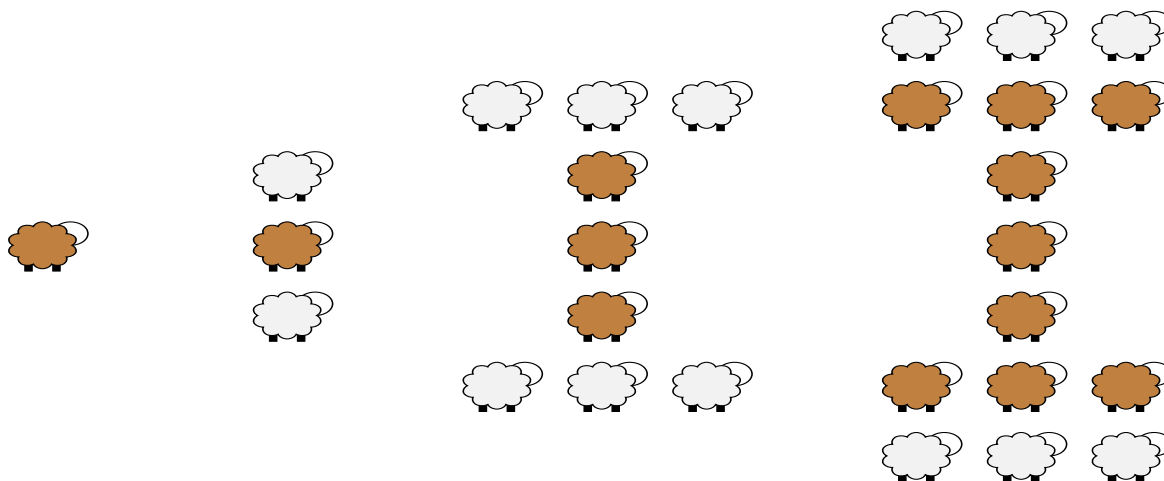


Abbildung 53: Von links nach rechts: Ein 1-Schaf-Konga, ein 2-Schaf-Konga, ein 3-Schaf-Konga und ein 4-Schaf-Konga.

Nun sei C die Gesamtanzahl von Schafen in einem (2025^5) -Schaf-Konga. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Ein Hinweis befindet sich unterhalb der Antwortmöglichkeiten.

(Antwortmöglichkeiten auf nächster Seite.)

Antwortmöglichkeiten:

1. $C \leq 2025^5$
2. $2025^5 < C \leq 2025^{20,25}$
3. $2025^{20,25} < C \leq 10^{100}$
4. $10^{100} < C \leq 10^{202,5}$
5. $10^{202,5} < C \leq 2,025^{2025}$
6. $2,025^{2025} < C \leq 5,202^{2025}$
7. $5,202^{2025} < C \leq 20,25^{2025}$
8. $20,25^{2025} < C \leq 2025!$
9. $2025! < C \leq (2025^5)^{2025^5}$
10. $C > (2025^5)^{2025^5}$

Hinweis: Denke über Zweierpotenzen nach.

Projektbezug:

Die Funktion f , die jedem n die Gesamtanzahl der Schafe in einem n -Schaf-Konga zuordnet, verhält sich ähnlich wie die Funktion $2^{(\log n)^2}$. Allgemein gilt: Wenn eine Funktion f ungefähr wie $2^{(\log n)^c}$ für eine Konstante $c \geq 1$ wächst, sagt man, dass sie *quasi-polynomielles Wachstum* aufweist. Die Laufzeit der schnellsten bekannten Algorithmen zur Bestimmung optimaler Strategien in Paritätsspielen wächst ebenfalls quasi-polynomiell.

Lösung**Die richtige Antwort ist: 5.**

Es sei $f(n)$ die Anzahl von Schafen in einem n -Schaf-Konga. Wir finden folgende rekursive Beziehung für f :

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1) + 2f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \text{ für alle } n \geq 2 \end{aligned}$$

Beachte, dass die Funktion f *streng monoton wachsend* ist, was bedeutet, dass $f(n+1) > f(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt. Diese Eigenschaft können wir nutzen um den Wert $f(2025^5)$ abzuschätzen. Wie bereits im Hinweis erwähnt, bietet es sich an, mit Zweierpotenzen zu arbeiten. Wir finden zunächst $2^{54} < 2025^5 < 2^{55}$ und damit auch

$$f(2^{54}) < f(2025^5) < f(2^{55}).$$

Nun wollen wir zuerst $f(2^{55})$ von oben abschätzen. Dafür wenden wir die obige rekursive Relation $2^{55} - 1$ mal auf den ersten Summanden an und erhalten

$$\begin{aligned} f(2^{55}) &= f(2^{55} - 1) + 2f(2^{54}) \\ &= f(2^{55} - 2) + 4f(2^{54}) \\ &= f(2^{55} - 3) + (4f(2^{54}) + 2f(2^{54} - 1)) \\ &= \dots \\ &= f(1) + (4f(2^{54}) + 4f(2^{54} - 1) + \dots + 4f(2) + 2f(1)) \\ &< 2^{56} \cdot f(2^{54}), \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichheit aus der Tatsache folgt, dass die Summe $2^{56} - 1$ Terme enthält, die alle höchstens so groß sind wie $f(2^{54})$. Auf die gleiche Art und Weise zeigen wir

$$f(2^{54}) \leq 2^{55} \cdot f(2^{53}), \quad f(2^{53}) \leq 2^{54} \cdot f(2^{52}), \quad \dots$$

bis $f(2^1) \leq 2^2 \cdot f(2^0)$. Daraus folgt dann

$$f(2^{55}) < 2^{56} \cdot f(2^{54}) < 2^{56} \cdot 2^{55} \cdot f(2^{53}) < \dots < 2^{56} \cdot 2^{55} \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot f(2^0) = 2^{1595}.$$

Hier folgt die letzte Gleichheit aufgrund der Potenzgesetze und dem Fakt, dass die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer Zahl n genau dem Ausdruck $\frac{1}{2}n(n+1)$ entspricht. Damit erhalten wir

$$f(2025^5) < f(2^{55}) \leq 2^{1595} < 2.025^{2025}.$$

Nun betrachten wir $f(2^{54})$ und wollen eine geeignete untere Schranke finden. Diesmal wenden wir die rekursive Relation 2^{53} mal auf den ersten Summanden an und erhalten

$$\begin{aligned} f(2^{54}) &= f(2^{54} - 1) + 2f(2^{53}) \\ &= f(2^{54} - 2) + 4f(2^{53}) \\ &= f(2^{54} - 3) + (4f(2^{53}) + 2f(2^{53} - 1)) \\ &= \dots \\ &= f(2^{53}) + (4f(2^{53}) + 4f(2^{53} - 1) + \dots + 4f(2^{52} + 1)) \\ &> 2^{54} \cdot f(2^{52}), \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Tatsache folgt, dass die Summe $2^{54} + 1$ Terme enthält, die alle mindestens so groß sind wie $f(2^{52})$. Auf die gleiche Art und Weise wie zuvor erhalten wir

$$f(2^{52}) > 2^{52} \cdot f(2^{50}), \quad f(2^{50}) > 2^{50} \cdot f(2^{48}),$$

und so weiter. Damit ergibt sich

$$f(2^{54}) > 2^{54} \cdot f(2^{52}) > 2^{54} \cdot 2^{52} \cdot f(2^{50}) > \dots > 2^{54} \cdot 2^{52} \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot f(2^0) = 2^{756}.$$

Die letzte Gleichheit folgt wieder aus den Potenzgesetzen und der oben erwähnten Summe aller natürlichen Zahlen bis zu einer Zahl n (in diesem Fall $n = 27$), die in diesem Fall noch mit zwei multipliziert wird. Wir sehen nun, dass

$$10^x < 2^y$$

äquivalent zu

$$\frac{x}{y} < \frac{\log 2}{\log 10} \approx 0.3 \quad \text{oder} \quad x < 0.3y$$

ist. Schlussendlich folgt

$$f(2025^5) > f(2^{54}) > 2^{756} > 10^{756 \cdot 0.3} > 10^{202.5}.$$

Alternativ kann man leicht berechnen, dass $2^{10} > 10^3$ ist, woraus sich

$$f(2025^5) > f(2^{54}) > 2^{756} > 2^{750} > 10^{3 \cdot 75} > 10^{202.5}$$

ergibt.



Illustration: Friederike Hofmann

21 Die Weihnachtsmission des Schneewichtels

Autor: Prof. Dr. Daniel Gembris (Duale Hochschule Sachsen in Dresden)

Aufgabe

Der fleißige Wichtel Willi hat die wichtige Aufgabe, den Sportplatz für die große Wichtel-Weihnachtsfeier von Schnee zu befreien. Dabei geht er systematisch vor: Er teilt den Sportplatz in gleich große Quadrate ein und räumt jeweils ein Quadrat komplett, bevor er das nächste beginnt. Den Rest des Sportplatzes, der sich nicht durch Quadrate einteilen lässt, räumt er anschließend leer. Doch damit nicht genug – er will den Schnee so verwenden, dass daraus prächtige Schneekugeln entstehen! Durch Willis jahrelange Erfahrung im Formen von Schneekugeln, wird jede seiner Kugeln perfekt und hat einen exakten Durchmesser von 1,5 m.

Folgende Informationen sind bekannt:

Informationen zum Schnee

- Der Sportplatz ist mit 5 cm Neuschnee bedeckt.
- Der Schnee hat eine Dichte von 50 kg/m^3 .
- Durch das Formen der Schneekugel verdichtet sich der Schnee und hat dann eine Dichte von 100 kg/m^3 .

Willis Schneeschiebe-Strategie für ein Quadrat

- **Aufteilung der Fläche und Wahl der Bahnbreite**

Das Quadrat mit Seitenlänge a wird in parallele Räumbahnen zerlegt, die alle parallel zu einer Seite des Quadrats verlaufen. Die Breite b einer Bahn entspricht der Breite des Schneeschiebers. Diese Breite ist so gewählt, dass Willi beim Räumen einer Bahn maximal 5 kg Schnee gleichzeitig schiebt. Die Bahnbreite hat Willi daher passend zu seiner maximalen Schiebekraft berechnet.

Die Bahnen liegen direkt nebeneinander und bedecken zusammen die gesamte Fläche des Quadrats. Falls die Seitenlänge a kein ganzzahliges Vielfaches von b ist, ist die letzte Bahn schmaler. Dabei ist sicherzustellen, dass beim Räumen dieser schmalen Bahn der Schnee der umliegenden Quadrate unberührt bleibt.

- **Bewegung beim Räumen einer Bahn**

Willi beginnt in einer Ecke des Quadrats (Startecke). Zur Positionierung der ersten Bahn bewegt er sich entlang des Quadratrandes um eine Strecke von $\frac{b}{2}$, sodass der Schneeschieber mittig auf der ersten Bahn anliegt. Ab dieser Position räumt er die Bahn, indem er den Schnee dieser Bahn geradlinig über die gesamte Länge a in Schieberichtung bis an den Rand des Quadrats schiebt.

Beim Räumen bleibt der Schnee vollständig innerhalb der aktuellen Bahn. Es bleibt kein Schnee liegen und es gelangt kein Schnee auf benachbarte Bahnen oder in benachbarte Quadrate. Der an den Rand gedrückte Schnee wird in der weiteren Betrachtung als entlang der entsprechenden Quadratseite liegend angenommen.

- **Wechsel zwischen zwei Bahnen**

Nachdem eine Bahn vollständig geräumt ist, läuft Willi zunächst entlang derselben Bahn zur Ausgangsseite des Quadrats zurück. Anschließend bewegt er sich senkrecht zur Schieberichtung um genau eine Bahnbreite b und positioniert sich am Anfang der nächsten Bahn. Dort wiederholt er den Räumvorgang nach demselben Muster.

Dieser Ablauf wird Bahn für Bahn fortgesetzt, bis alle Bahnen des Quadrats geräumt sind. Ist die letzte Bahn schmaler, erfolgt der seitliche Versatz entsprechend ihrer Breite.

- **Schneesammelstelle und Ende des Schneeschiebens**

Die Schneesammelstelle eines Quadrats befindet sich in der Ecke, die der Startecke diagonal gegenüberliegt. Nach dem Räumen der letzten Bahn läuft Willi die Bahn nicht mehr zurück, sondern bewegt sich direkt zur Sammelstelle. (Bewegungen entlang des Quadratrandes erfolgen unabhängig vom dort liegenden Schnee.)

Dort tauscht Willi den Schneeschieber gegen einen Eimer aus. Der entlang des Randes des Quadrats zusammengeschobene Schnee wird anschließend abtransportiert und zurück zur Schneesammelstelle getragen.

Informationen zum Schneetransport

- Willi trägt den Schnee grundsätzlich in 5-kg-Portionen; lediglich beim letzten Transport kann die aufgenommene Schneemenge geringer sein.

- Um nicht unnötig lange zu laufen, bis er 5 kg Schnee passiert hat, positioniert er sich entlang der Quadratseite so, dass er den Schnee von beiden Seiten aufnehmen kann. Dazu bewegt er sich so entlang der Seite des Quadrates, an der der Schnee liegt, bis er 2,5 kg Schnee hinter sich gelassen hat (oder er am Ende des Quadrates angekommen ist). Von beiden Seiten seines Standortes packt Willi nun jeweils 2,5 kg Schnee in seinen Eimer (oder aber den Rest, der evtl. am Ende eines Quadrates übrig bleibt) und transportiert diesen zur Schneesammelstelle.

Willis Geschwindigkeit und Zeitannahmen

- Er bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1 m/s – sowohl mit als auch ohne Eimer oder Schneeschieber.
- Die Zeit für das Ablegen und Aufheben von Eimer und Schieber, das Befüllen und Leeren des Eimers sowie das Formen der Schneekugeln bleibt unberücksichtigt.

Deine Aufgabe

1. **Bestimme die Kantenlänge a** des Quadrats, das für eine Schneekugel nötig ist.
2. **Bestimme die Breite b des Schneeschiebers**, den Willi verwendet.
3. **Berechne die Zeit t_{gesamt} , die Willi benötigt**, um den Schnee eines einzelnen Quadrats zur jeweiligen Schneesammelstelle zu befördern, d. h. sowohl durch Räumen mit dem Schneeschieber als auch durch Transport mit dem Eimer. Abgeschlossen ist die Aktion, wenn Willi zum Schluss an der Sammelstelle steht.

Gib alle Ergebnisse in folgenden Einheiten und Rundungen an:

- a in Metern, auf eine Stelle nach dem Komma gerundet,
- b in Metern, auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet,
- t_{gesamt} in Minuten, auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

(Antwortmöglichkeiten auf nächster Seite.)

Antwortmöglichkeiten:

1. $a = 8,4 \text{ m}$, $b = 0,22 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 10,1 \text{ min}$
2. $a = 8,4 \text{ m}$, $b = 0,22 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 13,4 \text{ min}$
3. $a = 8,4 \text{ m}$, $b = 0,22 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 15,2 \text{ min}$
4. $a = 8,4 \text{ m}$, $b = 0,24 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 10,1 \text{ min}$
5. $a = 8,4 \text{ m}$, $b = 0,24 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 15,2 \text{ min}$
6. $a = 9,0 \text{ m}$, $b = 0,22 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 10,1 \text{ min}$
7. $a = 9,0 \text{ m}$, $b = 0,22 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 13,4 \text{ min}$
8. $a = 9,0 \text{ m}$, $b = 0,24 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 10,1 \text{ min}$
9. $a = 9,0 \text{ m}$, $b = 0,24 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 13,4 \text{ min}$
10. $a = 9,0 \text{ m}$, $b = 0,24 \text{ m}$, $t_{\text{gesamt}} = 15,2 \text{ min}$

Lösung**Die richtige Antwort ist: 5.****Schritt 1: Berechnung der Masse einer Schneekugel**

Die Schneekugel hat einen Durchmesser von 1,5 m, daher beträgt ihr Radius:

$$r = \frac{1,5}{2} \text{ m} = 0,75 \text{ m} .$$

Das Volumen der Kugel berechnet sich mit der Formel:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(0,75)^3 \text{ m}^3 = \frac{9}{16}\pi \text{ m}^3 \approx 1,767 \text{ m}^3 .$$

Die Schneekugel besteht aus verdichtetem Schnee mit einer Dichte von 100 kg/m^3 . Die Masse der Schneekugel beträgt:

$$m_{\text{Kugel}} = V \cdot \text{Dichte} = \frac{9}{16}\pi \text{ m}^3 \cdot 100 \text{ kg/m}^3 = \frac{225}{4}\pi \text{ kg} \approx 176,7 \text{ kg} .$$

Schritt 2: Berechnung der Schneemenge, die für die Schneekugel benötigt wird

Der Neuschnee auf dem Sportplatz hat eine Dichte von 50 kg/m^3 und eine Höhe von $5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$. Das Volumen von $\frac{225}{9}\pi \text{ kg}$ Neuschnee ist somit:

$$V_{\text{Neuschnee}} = \frac{m_{\text{Kugel}}}{\text{Dichte}} = \frac{\frac{225}{4}\pi}{50} \text{ m}^3 = \frac{9}{8}\pi \text{ m}^3 \approx 3,534 \text{ m}^3 .$$

Aufgrund der Höhe von 0,05 m entspricht dieses Volumen einer Grundfläche von:

$$A = \frac{V_{\text{Neuschnee}}}{\text{Höhe}} = \frac{\frac{9}{8}\pi}{0,05} \text{ m}^2 = \frac{45}{2}\pi \text{ m}^2 \approx 70,68 \text{ m}^2 .$$

Die Seitenlänge des Quadrats, das für eine Schneekugel geräumt werden muss, ist:

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{45}{2}\pi} \text{ m} \approx 8,4 \text{ m} .$$

Schritt 3: Berechnung der Schneeschieberbreite

Die Masse des Schnees pro Quadratmeter beträgt:

$$\text{Masse pro m}^2 = \text{Dichte} \cdot \text{Höhe} = 50 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,05 \text{ m} = 2,5 \text{ kg/m}^2 .$$

Diese Masse des Schnees, den Willi pro Bahn schiebt, ist proportional zur Fläche der Bahn:

$$\text{Schneemasse pro Bahn} = a \cdot b \cdot \text{Masse pro m}^2 .$$

Da Willi maximal 5 kg Schnee schieben kann, gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot 2,5 \text{ kg/m}^2 &= 5 \text{ kg} , \\ b &= \frac{5}{a \cdot 2,5} \text{ m} = \frac{5}{\sqrt{22,5\pi} \cdot 2,5} \text{ m} \approx 0,238 \text{ m} . \end{aligned}$$

Die Breite des Schneeschiebers beträgt also:

$$b \approx 0,238 \text{ m} \quad (\text{ca. } 24 \text{ cm}).$$

Schritt 4: Berechnung der Transportzeit

(a) Anzahl der Bahnen

Die Anzahl der Bahnen ergibt sich aus der Seitenlänge des Quadrats und der Breite des Schneeschiebers:

$$n = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{22,5\pi}}{\frac{5}{\sqrt{22,5\pi \cdot 2,5}}} = \frac{22,5\pi}{2} \approx 35,34 \implies n = 36.$$

Willi muss also 35 volle Bahnen und eine schmalere Bahn räumen.

(b) Schneeräumzeit

Willi räumt den Schnee in parallelen Bahnen. Für jede Bahn läuft er hin und zurück. Er läuft also die Länge jeder Bahn zweimal. Die Gesamtlänge aller Bahnen beträgt daher:

$$\text{Gesamtlänge} = 2 \cdot n \cdot a = 2 \cdot 36 \cdot \sqrt{22,5\pi} \text{ m} \approx 605,3 \text{ m}.$$

Die Räumzeit bei 1 m/s Geschwindigkeit ist:

$$t_{\text{Räumen}} = \frac{\text{Gesamtlänge}}{v} = \frac{72 \cdot \sqrt{22,5\pi}}{1} \text{ s} \approx 605,3 \text{ s}.$$

Die Bewegung in senkrechter Richtung für den Wechsel von einer Bahn zur nächsten vergrößert die Strecke um $a = \sqrt{22,5\pi} \text{ m}$, da er in einer Ecke startet und in der diagonal gegenüber liegenden endet, also die gesamte Seitenlänge des Quadrats einmal zurücklegt. Allerdings muss er die letzte geräumte Bahn nicht zurücklaufen, wodurch sich die Strecke um 8,4 m verringert. Diese Änderungen der Gesamtlänge und damit auch der Räumzeit heben sich also gegenseitig auf.

(c) Schneetransport

Willi trägt den Schnee jeder Bahn mit einem masselosen Eimer in 5 kg-Portionen zur Schneesammelstelle. Um die Mitte der i -ten Bahn von der Schneesammelstelle aus zu erreichen, muss Willi eine Strecke von

$$d_i = (i - 0,5) \cdot b$$

zurücklegen.

Die Zeit für einen Transportweg (hin und zurück) für die i -te Bahn beträgt:

$$t_i = 2 \cdot d_i \cdot \frac{1}{v} = 2 \cdot (i - 0,5) \cdot b \cdot \frac{1}{v}.$$

Die gesamte Transportzeit ist die Summe der Zeiten für alle Bahnen:

$$t_{\text{Transport}} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (i - 0,5) \cdot \frac{b}{1 \text{ m}} \text{ s}.$$

Aus der Summe lässt sich der Faktor $2b$ ausklammern:

$$t_{\text{Transport}} = 2 \cdot b \cdot \sum_{i=1}^n (i - 0,5) \frac{\text{s}}{\text{m}}.$$

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n (i - 0,5) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{n}{2}.$$

Zwar hat die 36. Bahn geringeres Schneevolumen als die 35 vorherigen, das ändert aber nichts an der Zeit, die Willi braucht, um diesen Schnee zur Schneesammelstelle zu transportieren. Einsetzen von $n = 36$ liefert:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666, \quad \sum_{i=1}^n 0,5 = \frac{36}{2} = 18 ,$$

$$\sum_{i=1}^n (i - 0,5) = 666 - 18 = 648 .$$

Für die Transportzeit ergibt sich damit:

$$t_{\text{Transport}} = 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{22,5\pi} \cdot 2,5} \cdot 648 \text{ s} \approx 308,3 \text{ s} .$$

Endergebnisse

1. **Kantenlänge des Quadrats:** 8,4 m
2. **Breite des Schneeschiebers:** 0,238 m (ca. 24 cm)
3. **Transportzeit:** $t_{\text{Transport}} \approx 308,3 \text{ s}$
4. **Räumzeit:** $t_{\text{Räumen}} = 605,3 \text{ s}$
5. **Gesamtzeit:**

$$t_{\text{gesamt}} = t_{\text{Räumen}} + t_{\text{Transport}} \approx 605,3 \text{ s} + 308,3 \text{ s} = 913,6 \text{ s} \approx 15,23 \text{ Minuten} .$$



Illustration: Zyanya Santuario

22 Von starken und schwachen Rentieren

Autor: Max Klimm (TU Berlin)

Projekt: AA3-18

Evolutionsprozesse für Populationen & ökonomische Akteure

Aufgabe

Der Weihnachtsmann fährt bekanntlich einen Schlitten, der von zwei Rentieren gezogen wird, die zufällig aus einer großen Population am Nordpol ausgewählt werden. Jedes für den Schlitten eingeteilte Rentier gehört zu einer von zwei Arten: Entweder zieht es den Schlitten kräftig oder nur schwach.

Wenn beide Rentiere kräftig ziehen, fliegt der Schlitten anmutig über den Himmel, alle sind zufrieden, und beide Rentiere erhalten jeweils 4 Haufen Heu als Belohnung. Wenn ein Rentier kräftig zieht, während das andere nur schwach zieht, fliegt der Schlitten zwar weiterhin gut, aber es ist sehr anstrengend für das kräftig ziehende Rentier, das anschließend zu erschöpft ist, um zu fressen, und daher kein Heu erhält, während das schwach ziehende Rentier 5 Haufen Heu bekommt. Wenn beide Rentiere schwach ziehen, bewegt sich der Schlitten nur sehr langsam, der Weihnachtsmann ist unzufrieden, und beide Rentiere erhalten lediglich die Mindestmenge von jeweils einem Haufen Heu.

Wir möchten verstehen, wie sich der Anteil der kräftig ziehenden Rentiere in der Population entwickelt, und verwenden dafür die sogenannte *Replikatorodynamik*. Bezeichnen wir den Anteil kräftig ziehender Rentiere zum Zeitpunkt t mit $x(t)$, so ist ein zufällig ausgewähltes Rentier zum Zeitpunkt t mit Wahrscheinlichkeit $x(t)$ kräftig ziehend und mit Wahrscheinlichkeit $1 -$

$x(t)$ schwach ziehend. Mit dieser Beobachtung kann man leicht berechnen, dass ein kräftig ziehendes Rentier im Erwartungswert

$$f_k(t) = 4x(t) + 0(1 - x(t))$$

Haufen Heu erhält, wenn es zum Zeitpunkt t zum Ziehen eingeteilt ist. Eine ähnliche Gleichung erhält man für die Funktion $f_s(t)$, die die erwartete Heumenge eines schwach ziehenden eingeteilten Rentiers beschreibt.

Die zentrale Annahme der Replikatordynamik ist, dass der Anstieg des Anteils eines Rentiertyps proportional zur Anzahl an Heuhaufen ist, die ein Rentier dieses Typs beim Dienst am Schlitten mehr bzw. weniger erhält als ein durchschnittliches Rentier in der Population. Genauer gilt für die momentane Änderungsrate $x'(t)$ (siehe Bemerkung 2) des Anteils der kräftig ziehenden Rentiere zum Zeitpunkt t die Gleichung

$$x'(t) = x(t) \left(f_k(t) - (x(t)f_k(t) + (1 - x(t))f_s(t)) \right). \quad (5)$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Bemerkung 1: Für einen gegebenen Zeitpunkt t_0 und einem Wert c gibt es genau eine Funktion $x(t)$, die sowohl $x(t_0) = c$ als auch Gleichung 5 erfüllt.

Bemerkung 2: Die *momentane Änderungsrate* (auch *Ableitung* genannt), kann wie folgt interpretiert werden:

- Wenn $x'(t) = 0$ zu jedem Zeitpunkt t in einem Intervall gilt, dann ist $x(t)$ in diesem Intervall konstant.
- Wenn $x'(t) > 0$, existiert ein Zeitintervall um t , in dem $x(t)$ zunimmt.
- Wenn $x'(t) < 0$, existiert analog ein Zeitintervall um t , in dem $x(t)$ abnimmt.

Für eine lineare Funktion $f(t) = at + b$ mit reellen Zahlen a, b ist zu jedem Zeitpunkt t die momentane Änderungsrate $f'(t)$ gleich a , also gleich dem Anstieg der Funktion.

(Antwortmöglichkeiten auf nächster Seite.)

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Formel für die erwartete Anzahl an Heuhaufen, die ein schwach ziehendes Rentier zum Zeitpunkt t erhält, wenn es zum Schlittenziehen eingeteilt ist, lautet

$$f_s(t) = 5 \cdot (1 - x(t)) + 1 \cdot x(t).$$

2. Wenn zum Zeitpunkt 0 alle Rentiere kräftig ziehend sind, wird es zu einem Zeitpunkt t der Fall sein, dass nicht mehr alle Rentiere kräftig ziehend sind.
3. Wenn zum Zeitpunkt 0 alle Rentiere schwach ziehend sind, wird dieser Zustand für immer bestehen bleiben.
4. Wenn zum Zeitpunkt 0 ein Gleichgewicht zwischen kräftig ziehenden und schwach ziehenden Rentieren besteht, also $x(0) = 1/2$ gilt, bleibt dies für immer so.
5. Der Anteil der kräftig ziehenden Rentiere zum Zeitpunkt 1 ist immer derselbe, unabhängig davon, wie groß der anfängliche Anteil kräftig ziehender Rentiere zum Zeitpunkt 0 ist.
6. Für einige anfängliche Anteile kräftig ziehender Rentiere zum Zeitpunkt 0 steigt der Anteil der kräftig ziehenden Rentiere über einen gewissen Zeitraum.
7. Der Weihnachtsmann kann einen Anteil $x(0)$ kräftig ziehender Rentiere zum Zeitpunkt 0 mit $0 \leq x(0) \leq 1/2$ wählen, sodass der Anteil kräftig ziehender Rentiere für alle Zeiten über $1/4$ liegt.
8. Angenommen, der Weihnachtsmann ändert sein Fütterungsverhalten so, dass jedes Rentier doppelt so viel Heu wie zuvor erhält. Dies beeinflusst die Dynamik des Anteils nicht, unabhängig vom anfänglichen Anteil zum Zeitpunkt 0.
9. Angenommen, der Weihnachtsmann ändert sein Fütterungsverhalten so, dass jedes Rentier einen zusätzlichen Heuhaufen erhält. Dies beeinflusst die Dynamik des Anteils für einige anfängliche Anteile.
10. Angenommen, der Weihnachtsmann ändert sein Fütterungsverhalten so, dass jedes Rentier immer genau einen Heuhaufen erhält, unabhängig von der Zugleistung. Dann werden für alle Anfangsanteile zum Zeitpunkt 0 nach einiger Zeit alle Rentiere schwach ziehend sein.

Projektbezug:

Die Replikatorodynamik ist ein Beispiel für eine Fragestellung, die im Bereich der evolutionären Spieltheorie untersucht wird. Wir interessieren uns im Projekt AA3-18 für mathematische Prozesse, die beschreiben, wie sich sowohl verschiedene Genotypen als auch unterschiedliche ökonomische Verhaltensmuster im Laufe der Zeit herausbilden. Dieses Forschungsfeld, in dem ähnliche mathematische Modelle verwendet werden, um scheinbar unabhängige Prozesse in den zwei voneinander getrennten Anwendungsbereichen Biologie und Ökonomie zu beschreiben, ist ein gutes Beispiel für die Fähigkeit der Mathematik, ein allgemeines Verständnis grundlegender Prozesse zu liefern, die je nach Anwendung völlig unterschiedliche Interpretationen haben können.

Lösung**Die richtige Antwort ist: 3.**

Bevor wir zu detaillierten Lösungen übergehen, ist es hilfreich $f_s(t)$ für jedes t zu berechnen: Zum Zeitpunkt t trifft ein schwach ziehendes Rentier mit Wahrscheinlichkeit $x(t)$ auf ein stark ziehendes Rentier, wodurch es 5 Heuhaufen erhält, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - x(t)$ auf ein schwach ziehendes Rentier, wodurch es 1 Heuhaufen erhält. Folglich ist die erwartete Anzahl an Heuhaufen, die ein schwach ziehendes Rentier zum Zeitpunkt t erhält, wenn es zum Schlittenziehen eingeteilt ist

$$f_s(t) = 5 \cdot x(t) + 1 \cdot (1 - x(t)).$$

Nun können wir die Ausdrücke für $f_k(t)$ und $f_s(t)$ in Gleichung 5 einsetzen und schlussfolgern, dass Replikatordynamik durch die (Differential-)gleichung

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \left(4x(t) + 0(1 - x(t)) \right. \\ &\quad \left. - x(t) \left(4x(t) + 0(1 - x(t)) \right) - (1 - x(t)) \left(5x(t) + 1(1 - x(t)) \right) \right) \\ &= x(t) \left(4x(t) - 4x(t)^2 - 5x(t) + 5x(t)^2 - 1 + 2x(t) - x(t)^2 \right) \\ &= x(t) \left(x(t) - 1 \right) \\ &= x(t)^2 - x(t) \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$ charakterisiert ist.

Nun können wir die Antworten nacheinander auswerten:

1. *Diese Antwort ist falsch.* Soeben haben wir berechnet, dass die erwartete Anzahl an Heuhaufen, die ein schwach ziehendes Rentier zum Zeitpunkt t erhält, wenn es zum Schlittenziehen eingeteilt ist, gleich

$$f_s(t) = 5 \cdot x(t) + 1 \cdot (1 - x(t))$$

ist.

2. *Diese Antwort ist falsch.* Wenn zum Zeitpunkt 0 alle Rentiere stark ziehen, gilt $x(0) = 1$. Wenn ferner zu einem Zeitpunkt t_0 alle Rentiere stark ziehen, erhalten wir mit Gleichung 5

$$x(t_0) = 1, \quad x'(t_0) = 0.$$

Insbesondere ist $x(t) \equiv 1$ eine Lösung der Differentialgleichung 5, die $x(0) = 1$ erfüllt. Gemäß Bemerkung 1 ist dies die einzige Lösung und deshalb ist der Anteil der kräftig ziehenden Rentiere zu jedem Zeitpunkt 1.

3. *Diese Antwort ist richtig.* Wenn zum Zeitpunkt 0 alle Rentiere schwach ziehen, gilt $x(0) = 0$. Wenn ferner zu einem Zeitpunkt t alle Rentiere schwach ziehen, erhalten wir mit Gleichung 5

$$x(t) = 0, \quad x'(t) = 0.$$

Insbesondere ist $x(t) \equiv 0$ eine Lösung der Differentialgleichung 5, die $x(0) = 0$ erfüllt. Gemäß Bemerkung 1 ist dies die einzige Lösung und deshalb ist der Anteil der kräftig ziehenden Rentiere zu jedem Zeitpunkt 0.

4. *Diese Antwort ist falsch.* Wir haben $x(0) = 1/2$. Mit der obigen Gleichung erhalten wir

$$x'(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{4},$$

sodass der Anteil der stark ziehenden Rentiere abnimmt.

5. *Diese Antwort ist falsch.* Wir haben zuvor berechnet, dass $x(1) = 0$ gilt, wenn $x(0) = 0$ ist. Betrachten wir nun den Fall $x(0) = 1/2$, das heißt, dass die Hälfte der Rentiere zum Zeitpunkt 0 stark ziehend ist. Nach der obigen Gleichung gilt

$$x'(t) = x(t)^2 - x(t).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein quadratischer Ausdruck in $x(t)$, der sein Minimum bei $x(t) = 1/2$ annimmt, und dieses Minimum ist $-1/4$. Ferner wird der Wert 0 für $x(t) = 0$ und $x(t) = 1$ angenommen. Weil für alle t die Ungleichung $0 \leq x(t) \leq 1$ gilt, können wir daraus schließen, dass $x'(t) \in [-1/4, 0]$ ¹² gilt. Das impliziert, dass der Anteil der stark ziehenden Rentiere nur abnehmen kann, aber nicht mit einer größeren Rate als $1/4$. Daher können wir schließen, dass für $x(0) = 1/2$ die Beziehung $x(1) \in [1/4, 1/2]$ und somit insbesondere $x(1) \neq 0$ gilt.

6. *Diese Antwort ist falsch.* Wie in der Auswertung der vorherigen Antwort argumentiert, gilt $x'(t) \in [-1/4, 0]$ für alle $t \geq 0$, weshalb der Anteil der stark ziehenden Rentiere niemals zunehmen kann.
7. *Diese Antwort ist falsch.* Angenommen, es gibt eine Anfangspopulation $z \in [0, 1/2]$, für die dies der Fall ist. Da für die entsprechende Dynamik $x(t) \geq 1/4$ für alle $t \geq 0$ gilt, $x(t)$ nicht-wachsend ist und $x(0) = z \leq 1/2$ gilt, können wir folgern, dass $x(t) \in [1/4, 1/2]$ für alle $t \geq 0$ gilt und somit $x'(t) \in [-1/4, -3/16]$ ist. Daher nimmt $x(t)$ mit einer Rate von mindestens $3/16$ ab, und folglich gilt $x(t) \leq 1/8$ für $t \geq 2$, im Widerspruch zur Annahme, dass $x(t) \geq 1/4$ für alle $t \geq 0$ gilt.

8. *Diese Antwort ist falsch.* Unter der neuen Fütterungspraxis gilt

$$\begin{aligned} f_k(t) &= 8x(t) \quad \text{und} \\ f_s(t) &= 10x(t) + 2(1 - x(t)). \end{aligned}$$

¹² $[a, b]$ ist die Menge aller reellen Zahlen x mit $a \leq x \leq b$.

Mit denselben Rechnungen wie zuvor erhalten wir

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= x(t) \left(8x(t) - x(t) \cdot 8x(t) - (1 - x(t)) \left(10x(t) + 2(1 - x(t)) \right) \right) \\
 &= x(t) \left(8x(t) - 8x(t)^2 - 10x(t) + 10x(t)^2 - 2 + 4x(t) - 2x(t)^2 \right) \\
 &= 2x(t) \left(x(t) - 1 \right) \\
 &= 2(x(t)^2 - x(t)).
 \end{aligned}$$

Dies definiert eine andere Dynamik, bei der sich die Anteile mit doppelter Geschwindigkeit im Vergleich zur ursprünglichen Dynamik ändern.

9. *Diese Antwort ist falsch.* Unter der neuen Fütterungspraxis gilt

$$\begin{aligned}
 f_k(t) &= 5x(t) + 1 \cdot (1 - x(t)) \quad \text{und} \\
 f_s(t) &= 6x(t) + 2 \cdot (1 - x(t)).
 \end{aligned}$$

Mit denselben Rechnungen wie zuvor erhalten wir

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= x(t) \left(5x(t) + 1(1 - x(t)) \right. \\
 &\quad \left. - x(t) \left(5x(t) + 1(1 - x(t)) \right) - (1 - x(t)) \left(6x(t) + 2(1 - x(t)) \right) \right) \\
 &= x(t) \left(4x(t) + 1 \right. \\
 &\quad \left. - 5x(t)^2 - x(t) + x(t)^2 - 6x(t) + 6x(t)^2 - 2 + 4x(t) - 2x(t)^2 \right) \\
 &= x(t) \left(x(t) - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Damit ist die Dynamik dieselbe wie zuvor. (Die intuitive Begründung ist, dass die Dynamik auf dem Unterschied der Entlohnung im Vergleich zum Durchschnitt basiert, sodass konstante Veränderungen sich herauskürzen.)

10. *Diese Antwort ist falsch.* Es ist leicht nachzurechnen, dass $x'(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, sodass der anfängliche Anteil $x(0)$ der stark ziehenden Rentiere für alle Zeiten erhalten bleibt. Insbesondere wenn wir mit $x(0) = 1/2$ starten, gilt $x(t) = 1/2$ für alle $t \geq 0$.



Illustration: Julia Nurit Schönnagel

23 Herr Johnsons zerbrochene Weihnachtsanhänger

Autoren: Zoe Geiselman und Kevin Kühn

Projekt: EF-LI-Opt-1

Aufgabe

Herr Johnson liebt Weihnachten und hat fünf selbst gebaute Weihnachtsbaumanhänger, die ihm besonders viel bedeuten. Leider hat seine Katze Rhombi im vergangenen Jahr zwei davon zerbrochen. Um rechtzeitig zu Heiligabend wieder alle seine Lieblingsanhänger am Weihnachtsbaum zu haben, möchte Herr Johnson die beiden beschädigten Anhänger neu anfertigen. Zum Glück weiß er noch, wo er die benötigten Netze kaufen kann. Dabei handelt es sich um flache Vorlagen der Anhänger, die an den richtigen Stellen gefaltet und zusammengeklebt werden müssen, um dreidimensionale Körper zu erhalten.

Er kauft das gleiche Paket mit fünf Netzen, das er bereits vor einigen Jahren gekauft hat und aus dem sich die fünf verschiedenen Anhänger herstellen lassen, die ihm so viel Freude bereitet haben. Allerdings besitzt er noch drei unbeschädigte Anhänger, die immer noch wie neu aussehen!

In Abbildung 54 sind die noch vorhandenen intakten Anhänger von Herrn Johnson zu sehen, in Abbildung 55 die fünf neu gekauften Netze (A–E).

Hilf Herrn Johnson dabei, den Überblick zu behalten. Bestimme die beiden Netze, aus denen Weihnachtsanhänger entstehen, die **nicht** zu den bereits vorhandenen Anhängern in Abbildung 54 gehören.

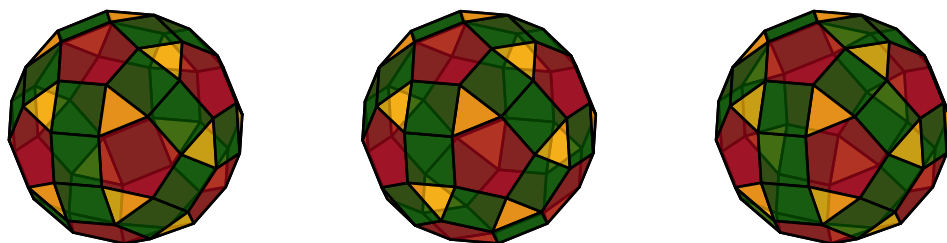
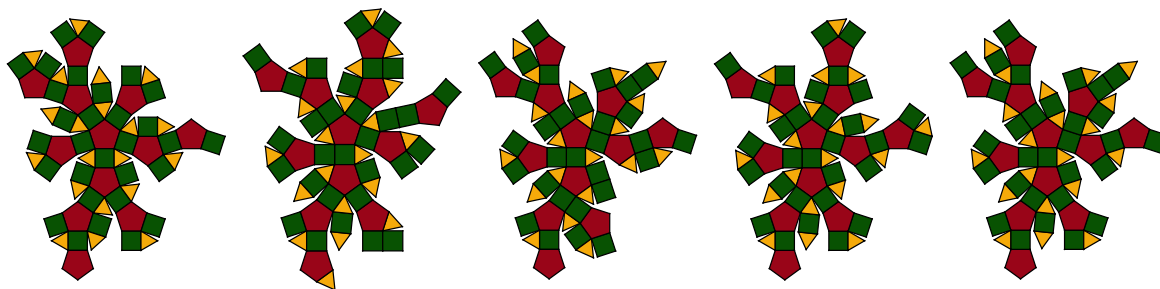


Abbildung 54: Die drei noch intakten Weihnachtsanhänger.



A

B

C

D

E

Abbildung 55: Die fünf Netze (A–E), aus denen Weihnachtsanhänger gefaltet werden können.

Antwortmöglichkeiten:

1. A und B
2. B und E
3. A und C
4. C und D
5. B und D
6. A und E
7. A und D
8. B und C
9. D und E
10. C und E

Projektbezug:

Im Projekt EF-LI-Opt-1 werden algebraisch-geometrische Objekte mit kombinatorischen und diskreten Methoden untersucht. Polytope treten auf natürliche Weise an der Schnittstelle dieser Disziplinen auf, von denen drei in der Aufgabe dargestellt sind.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Alle Körper (genannt *Polytope*) bestehen aus 20 Dreiecken, 30 Quadraten und 12 Fünfecken. Die Polytope, die aus den Netzen A und D entstehen, gehören nicht zu Herr Johnsons drei intakten Weihnachtanhängern.

In Netz A gibt es keine Quadrate, die eine gemeinsame Kante teilen, was sicherlich für alle drei Polytope aus Abbildung 54 zutrifft.

Drei in einer Linie aneinandergrenzende Quadrate kommen nur in den Netzen C und E vor, daher müssen sie dem ersten bzw. letzten unversehrten Polytop zugeordnet werden. Nur die Netze B und D kommen als Kandidaten für das mittlere Polytop infrage. Am unteren Rand von Netz D ergibt sich nach dem Zusammenkleben entsprechender Kanten eine Anordnung von Dreiecken und Quadraten, wie in Abbildung 56 dargestellt.

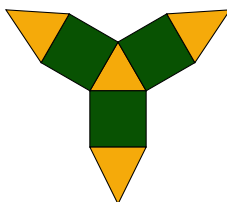


Abbildung 56: Anordnung von Dreiecken und Quadraten.

Diese Anordnung kommt im mittleren Polytop nicht vor, daher muss B das zu diesem Anhänger passende Netz sein.

Die beiden fertigen Weihnachtsbaumanhänger sind in Abbildung 57 zu sehen, nachdem Herr Johnson sie aus den Netzen A und D zusammengebaut hat.

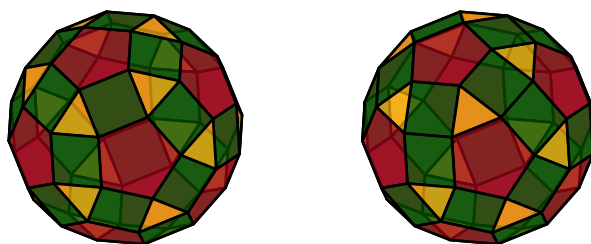


Abbildung 57: Die Weihnachtsbaumanhänger aus den Netzen A und D.

Bonusaufgabe für alle, die Weihnachts-Polytope genauso lieben wie Herr Johnson: Finde heraus, welche Anhänger zu C und E gehören.

Die Polytope in dieser Aufgabe gehören zu den sogenannten *Archimedischen* und *Johnson-Körpern*, verwandt mit den *Platonischen* Körpern, die dir möglicherweise schon in der Schule begegnet sind. Dies sind faszinierende Klassen von Polytopen, die noch heute von Forschern untersucht werden! Für alle, die sich für Polytope interessieren, empfehlen wir [diesen Artikel](#).

Eine ähnliche Spielversion von Rätseln wie das obige findet man auf www.matchthenet.de.



Illustration: Mar Curc3 Iranzo

24 Spiralgedicht-Wettbewerb

Autor: Mar Curc3 Iranzo

Aufgabe

Um den Heiligabend zu feiern, organisieren die Elfen der Weihnachtsmannwerkstatt am 24. Dezember einen besonderen Gedichtwettbewerb. Dessen Regeln lauten wie folgt:

Regel 1: Hat das Gedicht n Strophen, so muss jede Strophe genau n Verse enthalten.

Regel 2: Innerhalb einer Strophe muss jeder Vers auf ein anderes Wort enden als die 3brigen Verse.

Regel 3: Die Verse jeder Strophe m3ssen mit denselben W3rtern enden wie die Verse der vorherigen Strophe, jedoch in der Reihenfolge, die durch die nachfolgend erl3uterte, sogenannte **Spiralpermutation** vorgegeben wird.

Schreiben wir zum Beispiel ein Gedicht mit 5 Strophen, so besteht die erste Strophe aus 5 Versen, von denen jeder mit einem anderen Wort endet.

Wie in der Abbildung 58 dargestellt, bezeichnen wir diese Endw3rter der Reihe nach mit W_1 , W_2 , W_3 , W_4 und W_5 .

Zeichnen wir nun – wie in Abbildung 59 gezeigt – eine Spirale, die beim letzten Wort W_5 beginnt, so bestimmt die Reihenfolge, in der die Spirale die W3rter trifft, die Reihenfolge der Endw3rter in der n3chsten Strophe. Dies bedeutet, dass die Verse der zweiten Strophe der



Abbildung 58: Schematische Auflistung der 5 Endwörter.

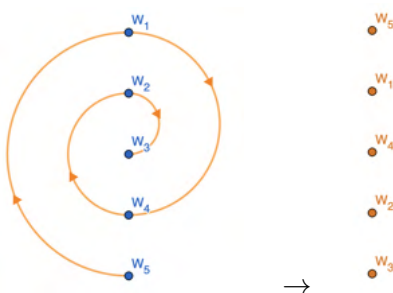


Abbildung 59: Die Spiralpermutation

Reihe nach mit den Wörtern W_5 , W_1 , W_4 , W_2 und W_3 enden. Als Nächstes wird die Reihenfolge der Endwörter der dritten Strophe bestimmt, indem man die Spiralpermutation auf die Endwörter der zweiten Strophe anwendet. Diese Iteration ist in [Abbildung 60](#) dargestellt. Für ein Gedicht mit n Strophen – und damit n Versen und n Endwörtern – lässt sich die

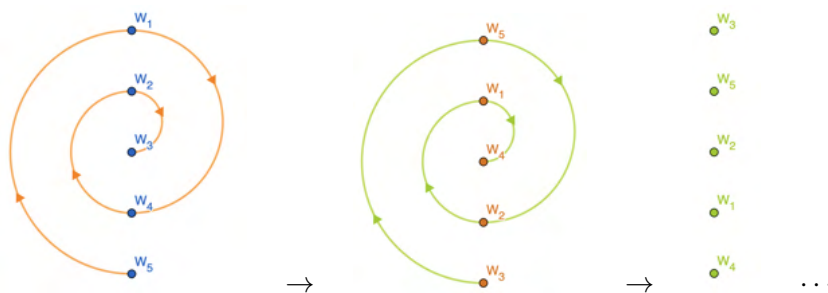


Abbildung 60: Iteration der Spiralpermutation.

Spiralpermutation Q_n mathematisch wie folgt beschreiben: Das Endwort des m -ten Verses einer Strophe, die nicht die letzte ist, ist in der darauffolgenden Strophe das Endwort von Vers

$$Q_n(m) = \begin{cases} 2m & \text{falls } m \leq n/2 \\ 2n - 2m + 1 & \text{falls } m > n/2. \end{cases}$$

Regel 4: Die Reihenfolge der Endwörter muss in jeder Strophe des Gedichts unterschiedlich

sein.

Man bemerke, dass wir aufgrund dieser letzten Regel nicht für jede Anzahl n ein Gedicht mit n Strophen schreiben können, das alle Regeln des Wettbewerbs erfüllt. Zum Beispiel ergibt sich für $n = 4$ die Situation in Abbildung 61. Es ist ersichtlich, dass wir nach drei Iteratio-

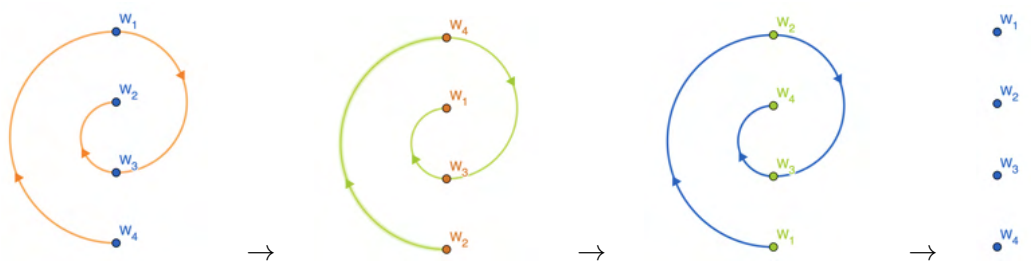


Abbildung 61: Gegenbeispiel zu Regel 4 für $n = 4$.

nen wieder dieselbe Wortreihenfolge wie in der ersten Strophe erhalten. Dies widerspricht der letzten Regel des Wettbewerbs.

Wenn die Gedichte für den Wettbewerb höchstens 10 Strophen lang sein dürfen: Was sind alle möglichen Anzahlen an Strophen, die ein den Anforderungen des Wettbewerbs genügendes Gedicht haben kann?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1, 2, 3, 5, 6 und 7.
2. 1, 2, 3, 5, 6 und 8.
3. 1, 2, 3, 5, 6 und 9.
4. 1, 2, 3, 5, 6 und 10.
5. 1, 2, 3, 5, 7 und 9.
6. 1, 2, 3, 5, 8 und 10.
7. 1, 2, 5, 6, 7 und 8.
8. 1, 2, 5, 6, 7 und 9.
9. 1, 2, 5, 6, 7 und 10.
10. 1, 2, 5, 6, 8 und 10.

Extra: Wir haben einen der Elfen um ein Beispiel für ein Gedicht gebeten, welches die Regeln des Wettbewerbs erfüllt:

Schnee fällt dicht auf den hohen Baum
Der Weihnachtsmann rutscht aus auf warmer Milch
Er bittet die Elfen um Hilfe beim verlorenen Geschenk
Frau Weihnachtsmann ruft alle herbei mit einer lauten Glocke
Und alle Blicke wenden sich zu Pip, dem scheuen Elf

Der Weihnachtsmann fragt: „Hilfst du uns, Pip, du Elf?“
Pip nickt und zeigt auf des Weihnachtsmanns Karte bei dem Baum
Die Karte zeigt Zahlen und Pfeile wie eine Glocke
Der Weihnachtsmann liest den ersten Hinweis: „Finde die Tasse Milch“
Rudolph findet sie schnell und gewinnt ein kleines Geschenk

Der Milch-Hinweis enthält ein Mathe-Rätsel-Geschenk
Kann es mit Hilfe von Pip gelöst werden, unserem Elf?
Er legt das Rätsel hin, während Rudolph trinkt die Milch
Das Rätsel sagt: „Nächster Hinweis unter dem Baum“
Frau Weihnachtsmann lacht und läutet ihre süße Glocke

Der Hinweis sagt: „Fußspuren führen dich zur Glocke“
Sie sind schon ganz nah dem verlorenen Geschenk!
Pip klatscht vor Freude beim hell leuchtenden Baum
„Rudolph, hör auf die Milch zu schlecken!“ ruft der scheue Elf
Der Weihnachtsmann schaut sich um und sieht Spuren aus Milch

Sie eilen hinaus, sie folgen der Spur der Milch
Die Abdrücke führen sie zur klingenden Glocke
Frau Weihnachtsmann klatscht, beeindruckt vom scheuen Elf
Und mit einem Lächeln gibt sie Pip das verlorne Geschenk
Endlich ist alles zurück beim leuchtenden Baum

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Alle möglichen Anzahlen an Strophen, die ein den Anforderungen des Wettbewerbs genügendes Gedicht haben kann, sind 2, 3, 5, 6 und 9. Wir werden dies zeigen, indem wir die anderen Zahlen ausschließen und gleichzeitig nachweisen, dass es tatsächlich möglich ist, dass ein Gedicht 2, 3, 5, 6 oder 9 Strophen hat.

Zunächst bemerken wir, dass ein Gedicht mit nur einer Strophe die Regeln für ein Spiralgedicht erfüllt. Außerdem wurde in der Aufgabenstellung bereits gezeigt, dass ein Spiralgedicht nicht 4 Strophen haben kann.

Für $n = 7$ ist die zugehörige Spiralpermutation in Abbildung 62 dargestellt. Wir bemerken, dass $Q_7(1) = 2, Q_7(2) = 4, Q_7(4) = 7$ und $Q_7(7) = 1$ gilt. Andererseits ist $Q_7(3) = 6$ und $Q_7(6) = 3$. Außerdem ist $Q_7(5) = 5$. Das bedeutet, dass nach 4 Anwendungen der Spiralpermutation wieder alle Wörter an ihrer ursprünglichen Position wären. Daher würde die Reihenfolge der Endwörter in Strophe 5 mit der Reihenfolge der Endwörter in Strophe 1 übereinstimmen, was der letzten Regel des Wettbewerbs widerspricht.

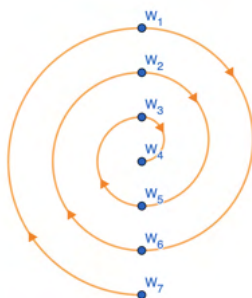
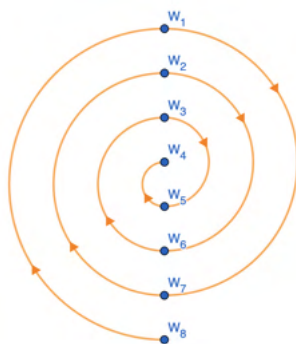
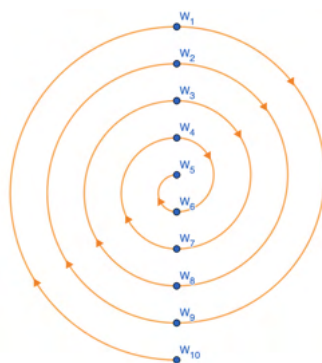


Abbildung 62: Die Spiralpermutation für $n = 7$

Für $n = 8$ ist die Spiralpermutation in Abbildung 63 dargestellt. Wir bemerken, dass $Q_8(8) = 1, Q_8(1) = 2, Q_8(2) = 4$ und $Q_8(4) = 8$ gilt. Andererseits ist $Q_8(7) = 3, Q_8(3) = 6, Q_8(6) = 5$ und $Q_8(5) = 7$. Das bedeutet, dass nach 4 Anwendungen der Spiralpermutation wieder alle Wörter an ihrer ursprünglichen Position wären. Daher würde die Reihenfolge der Endwörter in Strophe 5 mit der Reihenfolge der Endwörter in Strophe 1 übereinstimmen, was der letzten Regel des Wettbewerbs widerspricht.

Für $n = 10$ ist die Begründung ähnlich: die zugehörige Spiralpermutation ist in Abbildung 64 dargestellt. Wir bemerken, dass $Q_{10}(1) = 2, Q_{10}(2) = 4, Q_{10}(4) = 8, Q_{10}(8) = 5, Q_{10}(5) = 10$ und $Q_{10}(10) = 1$ gilt. Andererseits ist $Q_{10}(3) = 6, Q_{10}(6) = 9$ und $Q_{10}(9) = 3$. Außerdem ist $Q_{10}(7) = 7$. Das bedeutet, dass nach 6 Anwendungen der Spiralpermutation wieder alle Wörter an ihrer ursprünglichen Position wären. Daher würde die Reihenfolge der Endwörter in Strophe 7 mit der Reihenfolge der Endwörter in Strophe 1 übereinstimmen, was der letzten Regel des Wettbewerbs widerspricht.

Nun haben wir alle Strophenanzahlen außer 2, 3, 5, 6 und 9 ausgeschlossen. Jetzt zeigen wir

Abbildung 63: Die Spiralpermutation für $n = 8$ Abbildung 64: Die Spiralpermutation für $n = 10$

noch, dass ein Gedicht in unserem Wettbewerb tatsächlich 2, 3, 5, 6 oder 9 Strophen haben kann:

Für $n = 5$ wird dies durch das in der Aufgabenstellung gegebene Beispiel gezeigt.

Um die anderen Anzahlen zu überprüfen, verfolgen wir, in welcher Zeile das Endwort W_1 innerhalb der Strophen positioniert ist, indem wir wiederholt die Spiralpermutation anwenden:

Für $n = 2$ erhalten wir $Q_2(1) = 2$ und $Q_2(2) = 1$.

Für $n = 3$ erhalten wir $Q_3(1) = 2$, $Q_3(2) = 3$ und $Q_3(3) = 1$.

Für $n = 6$ erhalten wir $Q_6(1) = 2$, $Q_6(2) = 4$, $Q_6(4) = 5$, $Q_6(5) = 3$, $Q_6(3) = 6$ und $Q_6(6) = 1$.

Für $n = 9$ erhalten wir schließlich $Q_9(1) = 2$, $Q_9(2) = 4$, $Q_9(4) = 8$, $Q_9(8) = 3$, $Q_9(3) = 6$, $Q_9(6) = 7$, $Q_9(7) = 5$, $Q_9(5) = 9$ und $Q_9(9) = 1$.

Wir sehen, dass für diese Werte von n das Endwort W_1 in jeder Strophe an einer anderen Position steht. Daher ergeben sich durch Anwendung der Spiralpermutation n Strophen mit unterschiedlicher Reihenfolge der Entwürter.

Bemerkung: Im Allgemeinen sind die Zahlen n , die die Regeln des Wettbewerbs erfüllen, die sogenannten Quenau-Arnaut-Zahlen. Der Ursprung dieser Zahlen findet sich in einem mittelalterlichen Gedicht des Troubadours Arnaut Daniel. Sein Gedicht mit Titel „Lo ferm voler“ war eine Sextine, die nach den Regeln unseres Wettbewerbs konstruiert wurde: ein Gedicht mit 6 Strophen zu je 6 Zeilen, wobei jede Strophe 6 Endwörter hat, die in der jeweils

nächsten Strophe entsprechend der Spiralpermutation permutiert werden. Der Mathematiker Raymond Queneau verallgemeinerte Arnauts Konstruktion auf beliebige Zahlen n und fragte sich, welche n die Eigenschaft aus Regel 4 erfüllen. Für einen Überblick über Quenau-Arnaut-Zahlen und ihre Verbindungen zu anderen Bereichen der Mathematik und weiteren Gebieten kann man den Artikel „How a medieval troubadour became a mathematical figure“ von M. P. Saclolo heranziehen.