



20 Mehr Schafe als Schlaf

Autor: Matthew Maat (Universiteit Twente)

Projekt: Combining algorithms for parity games & linear programming

Aufgabe

Auf den ersten Blick ist es eine ganz gewöhnliche Nacht. Eine kleine Gruppe von Hirten sitzt am Feuer, während die letzten Sonnenstrahlen allmählich vom Licht eines hellen Sterns hoch am Himmel abgelöst werden. Unwissend, was sie später in dieser Nacht erleben werden, versuchen die Männer einzuschlafen.

Wie jeder Hirte weiß, ist Schäfchen zu zählen die beste Methode, um sanft in den Schlaf zu finden. Da sie dies jedoch jede Nacht tun, wollen sie für etwas Abwechslung sorgen und versuchen, die Schafe in einem vertikalen *Schaf-Konga* anzuordnen, das wir im folgenden Schritt für Schritt definieren werden.

Ein vertikales 1-Schaf-Konga besteht einfach aus einem einzigen Schaf. Größere vertikale Schaf-Kongas lassen sich aus kleineren zusammensetzen. In der folgenden Konstruktion werden Schafe idealisiert und als Kreise dargestellt. Für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt: Ein vertikales n -Schaf-Konga besteht aus einem vertikalen $(n-1)$ -Schaf-Konga sowie zwei identischen horizontalen $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -Schaf-Kongas¹, wobei ein horizontales Schaf-Konga einfach ein um 90 Grad gedrehtes vertikales Schaf-Konga ist. Die zwei horizontalen Schaf-Kongas werden dabei über- und unterhalb des vertikalen Schaf-Kongas auf derselben vertikalen Geraden zentriert und so angeordnet, dass die entstehende Figur sowohl eine horizontale als auch eine vertikale Symmetriearchse besitzt.

¹ $\lceil x \rceil$ ist die kleinste natürliche Zahl, die mindestens so groß ist wie x , zum Beispiel ist $\lceil 6,5 \rceil = 7 = \lceil 7 \rceil$.

In Abbildung 1 sind einige Beispiele für vertikale Schaf-Kongas zu sehen. Dabei repräsentieren die braunen Schafe das $(n-1)$ -Schaf-Konga und die weißen Schafe die horizontalen $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -Schaf-Kongas des jeweiligen n -Schaf-Kongas.

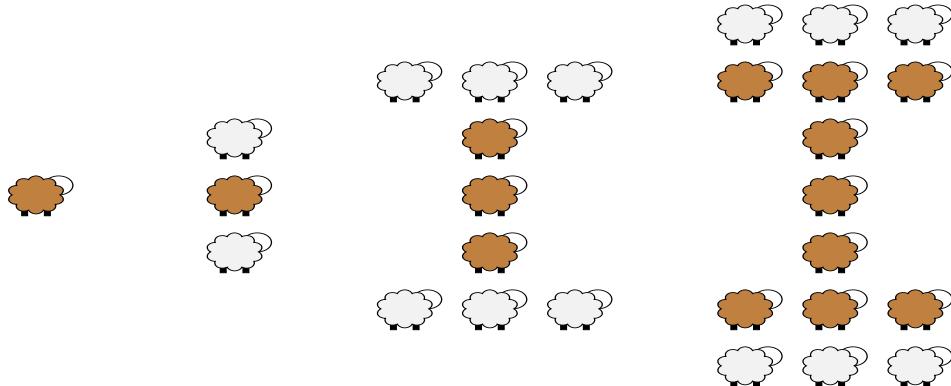


Abbildung 1: Von links nach rechts: Ein 1-Schaf-Konga, ein 2-Schaf-Konga, ein 3-Schaf-Konga und ein 4-Schaf-Konga.

Nun sei C die Gesamtanzahl von Schafen in einem (2025^5) -Schaf-Konga. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Ein Hinweis befindet sich unterhalb der Antwortmöglichkeiten.

Antwortmöglichkeiten:

1. $C \leq 2025^5$
2. $2025^5 < C \leq 2025^{20,25}$
3. $2025^{20,25} < C \leq 10^{100}$
4. $10^{100} < C \leq 10^{202,5}$
5. $10^{202,5} < C \leq 2,025^{2025}$
6. $2,025^{2025} < C \leq 5,202^{2025}$
7. $5,202^{2025} < C \leq 20,25^{2025}$
8. $20,25^{2025} < C \leq 2025!$
9. $2025! < C \leq (2025^5)^{2025^5}$
10. $C > (2025^5)^{2025^5}$

Hinweis: Denke über Zweierpotenzen nach.