



5 Plätzchen mit Glasur überziehen

Autoren: Rudolf Straube (Heinrich-Hertz-Gymnasium Berlin) und
Arthur Straube (ZIB)

Projekt: AA1-18

Aufgabe

Die Wichtel Bob und Sieglinde saßen am Adventstag zusammen und spielten vergnügt Schach. Plötzlich schlug die Uhr und läutete damit ihre Arbeitsschicht in der Weihnachtsfabrik ein. Ihre Aufgabe in der Weihnachtsfabrik ist es Plätzchen, bestehend aus 10 quadratischen Feldern, der rechteckigen Formen 1×10 und 2×5 mit Glasur zu überziehen, siehe Abbildung 1.

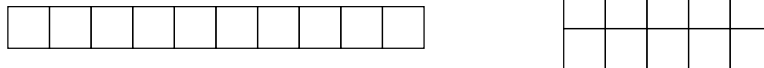


Abbildung 1: Die Plätzchen der Formen 1×10 (links) und 2×5 (rechts).

Damit die Plätzchen in ihrer Dekoration aber einzigartig bleiben, bestücken Bob und Sieglinde Teilplätzchen mit Glasur nach dem “Weihnachtsschachprinzip”. Wie Schachkönige, die die bis zu acht Felder um sich herum auf einem Schachbrett schlagen können, tragen sie die Glasur nur so auf die Teilplätzchen auf, dass sich keine zwei mit Glasur bedeckten Felder mit einer Kante oder Ecke berühren. Gleichzeitig darf aber keinesfalls noch Platz für ein weiteres Glasurfeld auf dem ganzen Plätzchen bleiben. Optimierung spielt dabei keine Rolle. Es ist also gut möglich, dass in einer Anordnung mehr und in einer anderen weniger Glasurfelder auf das ganze rechteckige Plätzchen gepasst hätten.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Plätzchen der Formen 1×10 und 2×5 mit Glasur zu überziehen? Die Antwort ist in Zahlenpaaren (M, N)

anzugeben, wobei M für die Form 1×10 und N für die Form 2×5 steht.

Hinweis: Betrachte nur die Endkonfigurationen. Insbesondere gelten auch Konfigurationen, die durch Drehungen ineinander überführt werden können, als verschieden.

Antwortmöglichkeiten:

1. (9, 12)
2. (12, 12)
3. (12, 16)
4. (12, 20)
5. (12, 24)
6. (12, 36)
7. (16, 16)
8. (16, 20)
9. (16, 24)
10. (16, 36)

Projektbezug:

Inhaltlich befasst sich das Math⁺ Projekt mit biochemischen Oszillatoren. Insbesondere die charakteristischen intrazellulären Bedingungen implizieren, dass chemische Reaktionen in sehr kleinen Volumina ablaufen. Auf diesen mikroskopischen Skalen wird die diskrete Natur der reagierenden Komponenten entscheidend. Das bedeutet, dass die ablaufenden biochemischen Prozesse inhärent stochastisch sind und klassische makroskopische Modelle der Reaktionskinetik oft nicht anwendbar sind. Die vorgeschlagene Aufgabe, Konfigurationsmöglichkeiten zu zählen, ist ein einfaches Beispiel, das direkt an den Bereich der Stochastik und Wahrscheinlichkeitsrechnung grenzt. Die Aufgabe zeigt, dass selbst in relativ einfachen Situationen eine direkte Zählung von Möglichkeiten schwierig sein kann. Durch geschickten Einsatz mathematischer Methoden kann der Aufwand jedoch erheblich reduziert werden und es können allgemeinere Lösungen gefunden werden.