Aufgaben und Lösungen
2023

www.mathekalender.de

Inhaltsverzeichnis

1 Wasserschaden in der technischen Abteilung

Autoren: Olaf Parczyk, Silas Rathke (FU Berlin)
Projekt: EF 1-12

Illustration: Friederike Hoffmann

Aufgabe

In der technischen Abteilung arbeiten zehn Wichtel in zehn Büros an allen möglichen technischen Problemen, die bei der größten Geschenkeproduktion der Welt auftreten können.
Wegen des Klimawandels und dem damit verbundenen Anstieg des Meeresspiegels erleiden jedoch drei Büros einen Wasserschaden und sind von nun an unbenutzbar. Jetzt haben wir also zehn Wichtel, aber nur noch sieben Büros. Was soll man nun tun?
Die Lösung ist schnell gefunden: Jeden Tag kommen nur sieben Wichtel in die technische Abteilung, und die anderen drei arbeiten von Zuhause aus.
Sicherheitswichtel Willi hat die wichtige Aufgabe, zehn Wichtel mit Schlüsseln für Büros auszurüsten. Jeder Schlüssel passt nur in ein spezifisches Büroschloss und wird an einen

Wichtel verteilt. Ein Wichtel kann sogar mehrere Schlüssel erhalten. Insbesondere können Büros auch von mehreren Schlüsseln geöffnet werden.
Willi hat eine klare Regel bei der Schlüsselverteilung: Nachdem die Schlüssel verteilt sind, darf es keine Rolle spielen, welche sieben Wichtel in die technische Abteilung kommen. Es muss immer möglich sein, die sieben Wichtel den sieben funktionierenden Büros zuzuordnen, sodass jeder Wichtel Zugang zu einem Büro hat, mit dem passenden Schlüssel. Das Tauschen oder Ausleihen von Schlüsseln ist strengst verboten.
Natürlich könnte Willi jedem Wichtel einen Schlüssel für jedes Büro geben, was bedeuten würde, dass er insgesamt siebzig Schlüssel herstellen müsste. Doch Willi überlegt, ob es auch mit weniger Schlüsseln möglich ist. Er sucht nach der kleinsten Anzahl, k, von Schlüsseln, die er insgesamt verteilen muss, um die vorherige Regel zu erfüllen. Welche Aussage über k ist korrekt?

Antwortmöglichkeiten:

1. $k < 20$
2. $20 \leq k < 25$
3. $25 \leq k < 30$
4. $30 \leq k < 35$
5. $35 \leq k < 40$
6. $40 \leq k < 45$
7. $45 \leq k < 50$
8. $50 \leq k < 55$
9. $55 \leq k < 60$
10. $60 \leq k$

Projektbezug:

Im Projekt „Learning Extremal Structures in Combinatorics“ verwenden wir Ansätze aus dem Bereich der künstlichen Intelligenz und des maschinellen Lernens, um neue Konstruktionen für Graphen mit bestimmten Eigenschaften zu finden.
Die vorliegende Aufgabe lässt sich gut als extremales Problem in der Graphentheorie formulieren, ähnlich wie die Probleme, die wir in diesem Projekt studieren.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.
Wir zeigen, dass $k = 28$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen:

1. Es gibt eine Verteilung mit 28 Schlüsseln, die die gewünschte Regel erfüllt.
2. Es gibt keine Verteilung mit 27 oder weniger Schlüsseln, die die gewünschte Regel erfüllt.

Zunächst geben wir eine Verteilung mit 28 Schlüsseln an. Dazu stellt Willi für jedes Büro einen Schlüssel her und verteilt diese sieben Schlüssel an sieben Wichtel. Diese sieben Wichtel, die wir Wichtel vom Typ A nennen, erhalten keine weiteren Schlüssel. Die drei anderen Wichtel, die Wichtel vom Typ B heißen, bekommen für jedes Büro einen Schlüssel. Das sind dann insgesamt $7 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 28$ Schlüssel. Wenn die Wichtel vom Typ A, die nur einen Schlüssel haben, ins Büro kommen, gehen sie in ihr zugehöriges Büro. Wenn eines der anderen drei Wichtel vom Typ B dabei ist, kann er problemlos in eines der übrig gebliebenen Büros gehen, da er einen Schlüssel zu jedem Büro hat. Man sieht also, dass diese Verteilung mit 28 Schlüsseln tatsächlich funktioniert.
Wir zeigen nun, dass es keine Verteilung mit 27 Schlüsseln gibt. Angenommen, es gibt so eine Verteilung. Dann kann ein Büro im Durchschnitt von $\frac{27}{7} \approx 3,857$ Schlüsseln geöffnet werden. Insbesondere muss es ein Büro C geben, welches höchstens von 3 Schlüsseln aufgeschloßen werden kann. Denn hätte jedes Büro mindestens 4 Schlüssel, dann wäre auch der Durchschnitt mindestens 4. Wenn nun aber drei Wichtel mit Zugang zum Büro C alle zu Hause bleiben, kann keiner C aufschließen. Das zeigt, dass es keine Verteilung mit 27 Schlüsseln geben kann.

2 Geschenk Organisation

Autorin: Lotte Weedage (University of Twente)
Projekt: 4TU.AMI

Illustration: Friederike Hoffmann

Aufgabe

Die Elfen brauchen deine Hilfe! Im Dorf des Weihnachtsmanns gibt es ein großes, perfekt quadratisches Lagerhaus, in dem alle Geschenke gelagert werden. Um sicherzustellen, dass sie kein Geschenk übesehen, ordnen sie ihre Geschenke wie folgt an: Das erste Geschenk wird genau in der Mitte des Lagers platziert, und jedes weitere Geschenk wird 1 Meter entfernt in einer gegen den Uhrzeigersinn spiralförmigen Bewegung um dieses Geschenk gelagert. In Abbildung 1 ist ein Beispiel dargestellt: Das erste Geschenk befindet sich in der Mitte, das zweite Geschenk wird 1 Meter rechts von diesem Geschenk gelagert, das dritte Geschenk 1 Meter über dem zweiten Geschenk usw. Das System kann auch als zweidimensionales

Raster betrachtet werden: Wir nennen den Speicherort des ersten Geschenks $(0, 0)$, dann ist der Speicherort des zweiten Geschenks $(1, 0)$.

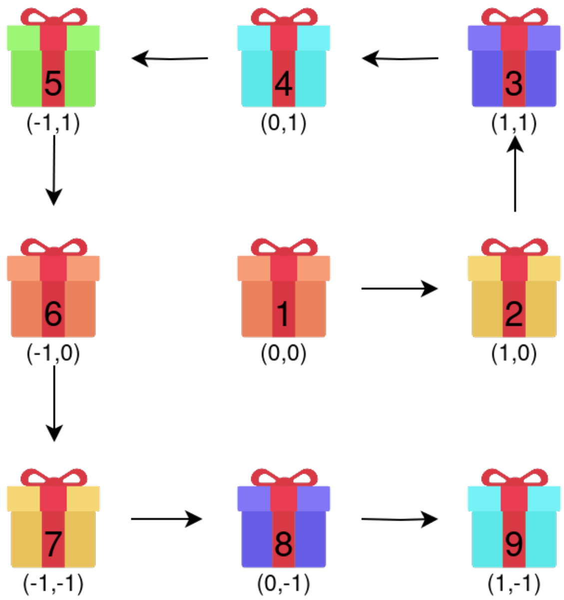


Abbildung 1: Die Anordnung der Geschenke im Lagerhaus.

Darüber hinaus gibt es Geschenke in fünf Farben: Pfirsich, Gelb, Lila, Türkis und Limettengrün. Die Geschenke müssen in dieser genauen Reihenfolge gelagert werden. Das erste Geschenk (in der Mitte des Lagers) ist pfirsich, das zweite Geschenk ist gelb, das dritte lila usw. Nach dem jede der fünf Farben einmal benutzt wurde, beginnen wir wieder mit pfirsich.
Eines Tages, als fast alle Geschenke bereits ausgeliefert wurden und daher nicht mehr im Lagerhaus waren, mussten die Reinigungselfen das Lagerhaus reinigen und kannten dieses wichtige Ordnungssystem der anderen Elfen nicht. Sie bewegten alle verbliebenen Geschenke. Jetzt geraten die Geschenkelfen in Panik, da sie nicht mehr wissen, welche Geschenke sich an den Standorten $(-49, 50)$ und $(-39, 49)$ befinden müssen.
Welche Farbe haben die Geschenke an den Standorten $(-49, 50)$ und $(-39, 49)$?

Antwortmöglichkeiten:

1. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist pfirsich und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist türkis.
2. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist gelb und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist türkis.
3. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist grün und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist grün.
4. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist grün und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist türkis.
5. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist lila und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist pfirsich.
6. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist gelb und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist lila.

7. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist lila und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist gelb.
8. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist pfirsich und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist lila.
9. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist türkis und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist grün.
10. Das Geschenk bei $(-49, 50)$ ist lila und das Geschenk bei $(-39, 49)$ ist türkis.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.
Um dieses Problem zu lösen, müssen wir die Anzahl der Schritte bestimmen, die erforderlich sind, um zu $(-39, 49)$ und zu $(-49, 50)$ zu gelangen. Dazu konzentrieren wir uns nur auf die Ecken, insbesondere die Stellen, an denen wir die Richtung ändern. In Abbildung 2 haben wir die Entfernungen zwischen den ersten Ecken dargestellt. Zum Beispiel erfordert der Weg von den Ecken $(0, 0)$ zu $(1, 0)$ einen Schritt, und von den Ecken $(1, 1)$ zu $(-1, 1)$ sind zwei Schritte erforderlich. Der Übergang von $(-1, -1)$ zu $(2, -1)$ erfordert drei Schritte, ebenso wie der Übergang von $(2, -1)$ zu $(2, 2)$, und die folgenden beiden Ecken erfordern jeweils vier Schritte.

Abbildung 2: Spirale „aufgerollt“.

Um von $(0, 0)$ nach $(-1, 1)$ zu gelangen, sind vier Schritte erforderlich. Um von einer oberen/unteren linken/rechten Ecke zu einer anderen oberen/unteren linken/rechten Ecke zu gelangen, muss man einen quadratischen Pfad einschlagen, ähnlich dem Umrunden eines „Stadtblocks“. Daher setzt sich die Anzahl der Schritte von $(0, 0)$ zu einer der oberen linken Ecken aus der Entfernung von $(0, 0)$ zu $(-1, 1)$ plus der Anzahl der Schritte zusammen, um den Stadtblock „aufgerollt“ zu umrunden:

- Von $(0, 0)$ zu $(-2, 2) : 4 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16$ Schritte.
- Von $(0, 0)$ zu $(-3, 3) : 4 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 = 36$ Schritte.
- Von $(0, 0)$ zu $(-4, 4) : 36 + 6 + 7 + 7 + 8 = 64$ Schritte.

Beachte, dass die Anzahl der erforderlichen Schritte einem quadratischen Muster folgt: Um $(-1, 1)$ zu erreichen, sind $2^2 = 4$ Schritte erforderlich, während für $(-4, 4)$, $8^2 = 64$ Schritte erforderlich sind. Dies ist nicht überraschend, da wir im Wesentlichen die Flächen von verschachtelten Quadraten berechnen. Daher benötigt jede Ecke $(-x, x)$, wobei $x = 1, 2, 3$ usw., $(2x)^2$ Schritte, um diese Ecke zu erreichen.
Um den Standort $(-49, 50)$ zu erreichen, berechnen wir zuerst die Anzahl der Schritte zur nächsten Ecke $(-50, 50)$. Dies erfordert $(2 \cdot 50)^2 = 10,000$ Schritte. Da es 5 verschiedene Geschenkfarben gibt und 10,000 durch 5 teilbar ist, wird das Geschenk bei $(-50, 50)$ pfirsich sein. Das bedeutet, dass um zu $(-49, 50)$ zu gelangen, wir einen Schritt zurück gehen müssen. Also ist das Geschenk an $(-49, 50)$ grün, was die letzte Farbe in der Sequenz ist.
Wir können die gleiche Logik auf den Standort $(-39, 49)$ anwenden. Dazu bewegen wir uns zuerst zur nächstgelegenen Ecke, in diesem Fall $(-49, 49)$, was $(2 \cdot 49)^2 = 9,604$ Schritte erfordert. Daher können wir ein grünes Geschenk an diesem Ort erwarten. Dann gehen wir 10 Schritte zurück, was bedeutet, dass das Geschenk am Standort $(-39, 49)$ ebenfalls grün sein wird.

3 Verräterische Töne

Autor*innen: Svenja M. Griesbach & Max Klimm
Projekt: Information design for Bayesian networks (MATH+ AA3-9)

Illustration: Julia Schönnagel

Aufgabe

Für dieses Rätsel schlüpfst du in die Rolle des Grinch, der dem Weihnachtsmann und seinen Elfen immer wieder in die Quere kommt. Um dich dieses Jahr von den Streichen an Heiligabend abzuhalten, haben die Elfen dir ein Angebot gemacht: Sie haben heute den ganzen Tag Plätzchen gebacken und du sollst erraten, welche Sorte heute gebacken wurde. Wenn du die richtige Sorte errätst, bekommst du eine riesige Keksdose mit frischen Plätzchen geschenkt. Wenn du allerdings falsch tippst, musst du im Gegenzug versprechen, an Heiligabend keine Streiche zu spielen. Du bist zwar häufig frech, aber wenn es zu solchen Angeboten kommt, kannst du dich auf die Ehrlichkeit der Elfen immer verlassen und wirst dich daher auch selbst an das Versprechen halten. Da es nur drei unterschiedliche Kekssor-

ten (*Vanillekipferl, Nussecken* und *Schokoplätzchen*) gibt, die die Elfen regelmäßig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit backen, sind die Elfen überzeugt, dass du in zwei von drei Fällen falsch raten wirst und sie somit gute Chancen auf ein entspanntes Weihnachtsfest haben. Allerdings hast du das Verhalten der Elfen die letzten Jahre schon sehr gut beobachtet und somit ein paar Informationen über deren Verhalten gesammelt. Dir ist zum Beispiel aufgefallen, dass die Elfen beim Backen der Vanillekipferl immer *Driving Home For Christmas* hören. Wenn sie hingegen Nussecken backen, hören sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit mal *All I Want For Christmas Is You* und manchmal *Last Christmas*. Anders ist das, wenn sie Schokoplätzchen backen. Zwar hören sie auch währenddessen immer nur entweder *All I Want For Christmas Is You* oder *Last Christmas* in der Dauerschleife, aber in zwei von drei Fällen läuft *All I Want For Christmas Is You*.
Welche Aussage über die drei Weihnachtslieder und Kekssorten ist richtig?

Antwortmöglichkeiten

1. Das Lied *Driving Home For Christmas* wird am häufigsten gespielt.
2. Wenn du weißt, welches Lied heute gespielt wurde, kannst du deine durchschnittliche Gewinnwahrscheinlichkeit auf mehr als 70% erhöhen.
3. Es gibt kein Lied, bei dem du dir ganz sicher sein kannst, welche Kekse heute gebacken wurden.
4. Wenn *All I Want For Christmas Is You* gespielt wurde, hast du die höchsten Gewinnchancen, wenn du auf die Nussecken tippst.
5. Nussecken werden häufiger als Schokokekse und Vanillekipferl gebacken.
6. Wenn *Last Christmas* gespielt wurde, kannst du keine Kekssorte sicher ausschließen.
7. Die Wahrscheinlichkeit, dass Schokoplätzchen gebacken wurden und die Elfen dabei *All I Want For Christmas Is You* gehört haben, liegt bei $\frac{2}{3}$.
8. Wenn das Lied *Driving Home For Christmas* gespielt wurde, ist jede Kekssorte gleich wahrscheinlich.
9. Die Wahrscheinlichkeit, dass du heute *Last Christmas* gehört hast, liegt bei 20%.
10. *All I Want For Christmas Is You* wird am häufigsten gespielt und *Driving Home For Christmas* am seltensten.

Projektbezug:

Im Math+ Projekt AA3-9 *Information design for Bayesian networks* wird untersucht, inwiefern durch die Weitergabe von Informationen Verkehrsgleichgewichte verbessert werden können. Dabei wird angenommen, dass die Verkehrsteilnehmenden aus den zur Verfügung gestellten Informationen Rückschlüsse über den tatsächlichen Verkehr ziehen können. Dies geschieht nach einem ähnlichen Prinzip, nach dem auch hier der Grinch in der Aufgabe durch das Hören der Musik Rückschlüsse auf die gebackene Kekssorte zieht.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Um das Rätsel zu lösen müssen wir uns genau anschauen, welche Informationen uns die einzelnen Lieder geben. Wir kürzen die Lieder mit L_1, L_2 und L_3 für *Driving Home For Christmas, All I Want For Christmas* und *Last Christmas* ab und die Kekssorten mit K_1, K_2 und K_3 für *Vanillekipferl, Nussecken* und *Schokoplätzchen.* Da alle Plätzchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gebacken werden, gilt

$$P(K_1) = P(K_2) = P(K_3) = \frac{1}{3}.$$

Die Antwort 5 ist also falsch. Außerdem können wir dem Text folgende *bedingte* Wahrscheinlichkeiten[1] entnehmen:

$$\begin{aligned}
&P(L_1|K_1) = 1 && P(L_2|K_1) = 0 && P(L_3|K_1) = 0 \\
&P(L_1|K_2) = 0 && P(L_2|K_2) = \frac{1}{2} && P(L_3|K_2) = \frac{1}{2} \\
&P(L_1|K_3) = 0 && P(L_2|K_3) = \frac{2}{3} && P(L_3|K_3) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Hieraus können wir mit Hilfe des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit uns zunächst herleiten, wie wahrscheinlich es ist, die einzelnen Lieder zu hören. Dieser besagt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich ist der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen:

$$\begin{aligned}
P(L_1) &= P(L_1|K_1) \cdot P(K_1) + P(L_1|K_2) \cdot P(K_2) + P(L_1|K_3) \cdot P(K_3) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\
P(L_2) &= P(L_2|K_1) \cdot P(K_1) + P(L_2|K_2) \cdot P(K_2) + P(L_2|K_3) \cdot P(K_3) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18} \\
P(L_3) &= P(L_3|K_1) \cdot P(K_1) + P(L_3|K_2) \cdot P(K_2) + P(L_3|K_3) \cdot P(K_3) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

Die Antworten 1, 9 und 10 können damit ausgeschlossen werden. Mit dem Satz von Bayes der besagt,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned}
&P(K_1|L_1) = 1 && P(K_2|L_1) = 0 && P(K_3|L_1) = 0 \\
&P(K_1|L_2) = 0 && P(K_2|L_2) = \frac{3}{7} && P(K_3|L_2) = \frac{4}{7} \\
&P(K_1|L_3) = 0 && P(K_2|L_3) = \frac{3}{5} && P(K_3|L_3) = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

[1] Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis A eintritt, unter der Bedingung, dass bereits bekannt ist, dass das Ereignis B eingetreten ist. Sie wird durch die Formel $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ gegeben.

können wir die anderen bedingten Wahrscheinlichkeiten berechnen. Damit lassen sich die Antworten 3, 4, 6 und 8 als falsch identifizieren. Abhängig von dem Lied, das wir heute gehört haben, wissen wir jetzt also, welche Kekssorte am wahrscheinlichsten ist. Unsere Gewinnwahrscheinlichkeit maximieren wir somit wie folgt:

- wenn wir Lied L_1 (Driving Home For Christmas) hören, tippen wir auf Kekssorte K_1 (Vanillekipferl),
- wenn wir Lied L_2 (All I Want For Christmas) hören, tippen wir auf Kekssorte K_3 (Schokoplätzchen) und
- wenn wir Lied L_3 (Last Christmas) hören, tippen wir auf Kekssorte K_2 (Nussecken).

Um jetzt noch unsere Gewinnwahrscheinlichkeit zu berechnen, müssen wir noch einbeziehen, wie die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Lieder sind. Bezeichnen wir mit R das Ereignis, bei dem wir richtig raten, erhalten wir die Gewinnwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(R) &= P(L_1) \cdot P(K_1|L_1) + P(L_2) \cdot P(K_3|L_2) + P(L_3) \cdot P(K_2|L_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{7}{18} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{18} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{13}{18} \approx 72{,}2\%. \end{aligned}$$

Die richtige Lösung ist also Antwortmöglichkeit 2. Um schließlich die Antwort 7 zu widerlegen, müssen wir lediglich berechnen:

$$P(L_2 \cap K_3) = P(K_3) \cdot P(L_2|K_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

4 Weihnachtschaos

Autorin: Marieke Heidema (Universität Groningen)

Illustration: Vira Raichenko

Aufgabe

Vor Weihnachten arbeiten die Elfen des Weihnachtsmanns immer hart an Geschenken für Kinder aus der ganzen Welt: Sie lesen Wunschzettel und Briefe, stellen Geschenke her, verpacken sie und sortieren sie, bevor sie sie in den Schlitten des Weihnachtsmanns legen.

In den Tagen vor Heiligabend arbeiten alle Elfen besonders hart. Das ist auch die Zeit, in der im Workshop des Weihnachtsmanns viel Chaos herrscht: Man findet Elfen, die hektisch über alle Brücken laufen, die die verschiedenen Teile des Workshops des Weihnachtsmanns verbinden. Sie hinterlassen eine Spur von Bändern und springen über die Rollen Geschenkpapier, die den Boden bedecken...

Im letzten Jahr haben die Elfen das Lager so durcheinander gebracht, dass der Weihnachtsmann gestolpert ist und fast verletzt wurde, als er den Fortschritt der Elfen inspizierte! In diesem Jahr wollen die Elfen sicherstellen, dass der Weihnachtsmann nicht wieder fällt. Deshalb haben die Elfen beschlossen, alle Brücken zwischen den 5 Stationen des Workshops zu säubern:

(A) der Leseraum für Briefe

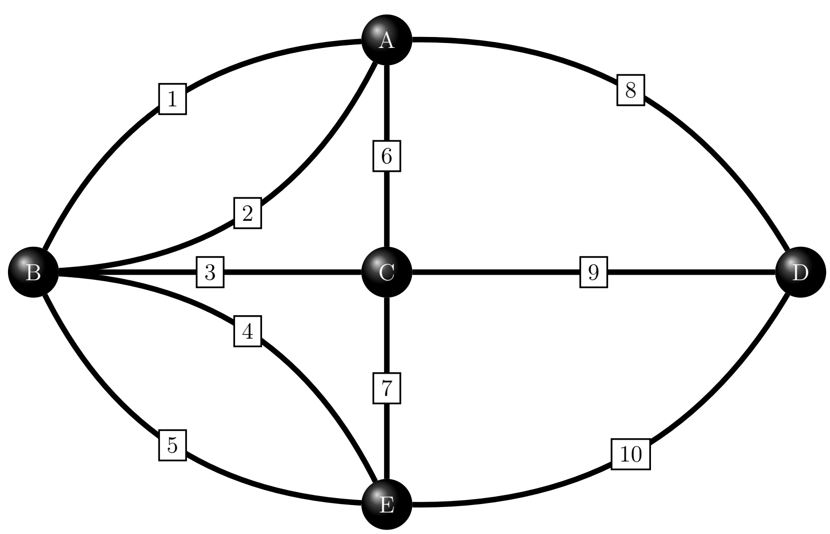
(B) die Geschenkfabrik

(C) der Geschenkverpackungsraum

(D) der Sortierraum

(E) das Lager mit dem Schlitten des Weihnachtsmanns

Ihr Ziel ist es, einen reibungslosen und sicheren Durchgang für den Weihnachtsmann sicherzustellen, während er ihre festlichen Vorbereitungen überwacht. Die Anordnung des Workshops des Weihnachtsmanns lautet wie folgt:



Hierbei bezeichnen die Linien $1, 2, ..., 10$ jeweils eine Brücke, die die fünf verschiedenen Stationen A,B,...,E des Workshops verbindet.

Santa wird seinen Rundgang durch den gesamten Workshop machen, und die Elfen müssen wissen, welchen Weg sie nehmen müssen, um alle Brücken effizient zu säubern, bevor Santa kommt. Die beiden wichtigen dabei Fragen lauten:

- Ist es möglich, den Workshop aufzuräumen, indem jede Brücke nur einmal überquert wird?
- Wenn dies möglich ist, welche Start- und Endpunkte innerhalb des Workshops gibt es für den Reinigungsprozess?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es ist nicht möglich, alle Brücken zu säubern, ohne Brücke Nummer 7 mehr als einmal zu überqueren.
2. Es ist nicht möglich, alle Brücken zu säubern, ohne Brücke Nummer 8 mehr als einmal zu überqueren.
3. Es ist nicht möglich, alle Brücken zu säubern, ohne Brücke Nummer 9 mehr als einmal zu überqueren.
4. Es ist möglich, wenn die Elfen bei A starten und bei B enden.
5. Es ist möglich, wenn die Elfen bei A starten und bei C enden.
6. Es ist möglich, wenn die Elfen bei A starten und bei D enden.
7. Es ist möglich, wenn die Elfen bei A starten und bei E enden.
8. Es ist möglich, wenn die Elfen bei B starten und bei C enden.
9. Es ist möglich, wenn die Elfen bei B starten und bei D enden.
10. Es ist möglich, wenn die Elfen bei C starten und bei D enden.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.
Diese Aufgabe ist ein Beispiel für das Problem der „Sieben Brücken von Königsberg“, ein bekanntes Problem in der Mathematik. Dieses Problem ist nach der Stadt Königsberg in Preußen benannt, durch die ein Fluss ging, der zwei große Inseln schuf, die miteinander und mit dem Festland durch sieben Brücken verbunden waren. Die Frage bestand darin, herauszufinden, ob es möglich ist einen Spaziergang durch das Festland und die Inseln der Stadt zu machen über, sodass jede der sieben Brücken genau einmal überquert wird.
Im 18. Jahrhundert legte Euler die Grundlagen der Graphentheorie, indem er zeigte, dass das Problem keine Lösung hat. Unsere Variation des Problems hat jedoch eine Lösung! Wie Euler feststellte, als er das Problem der „Sieben Brücken von Königsberg“ behandelte, ist es nur möglich, über alle Brücken genau einmal (und nur einmal) zu gehen, wenn entweder

- der mathematische Grad jedes Festlands/Insel, also die Anzahl der mit ihm verbundenen Brücken, für alle Festländer/Inseln gerade ist, oder wenn
- es genau zwei Festländer/Inseln mit einem ungeraden Grad gibt. Insbesondere, wenn dies der Fall ist, müssen die Festländer/Inseln, die einen ungeraden Grad haben, die Start- und Endpunkte der Route sein.

Es ist wichtig zu beachten, dass dies nur dann zutrifft, wenn es möglich ist, jede Station von jeder anderen Station aus zu besuchen, oder in mathematischen Begriffen ausgedrückt, wenn wir einen sogenannten *zusammenhängenden* Graphen haben. Wenn wir die Karte des Workshops des Weihnachtsmanns betrachten, sehen wir folgendes:

(A) der Leseraum für Briefe hat 4 Brücken, die mit ihm verbunden sind,

(B) die Geschenkfabrik hat 5 Brücken, die mit ihr verbunden sind,

(C) der Geschenkverpackungsraum hat 4 Brücken, die mit ihm verbunden sind,

(D) der Sortierraum hat 3 Brücken, die mit ihm verbunden sind,

(E) das Lager mit dem Schlitten des Weihnachtsmanns hat 4 Brücken, die mit ihm verbunden sind.

Also haben der Leseraum für Briefe, der Geschenkverpackungsraum und das Lager mit dem Schlitten des Weihnachtsmanns alle eine gerade Anzahl von Brücken, die sie mit anderen Stationen verbinden, während die Geschenkfabrik und der Sortierraum eine ungerade Anzahl von Brücken mit ihnen verbunden haben. Daher ist nach Eulers Beobachtung das genau einmalige Überqueren aller Brücken möglich. Insbesondere müssen die Reinigungselfen in der Geschenkfabrik starten und im Sortierraum enden (oder umgekehrt). Ein Beispiel für das Überqueren der Brücken ist folgend aufgeführt: 1-8-10-5-2-6-3-4-7-9.

5 Geschenkversand

Autor*innen: EWM-NL

Illustration: Ivana Martić

Aufgabe

Julia Robinson war eine der besten Mathematikerinnen des 20. Jahrhunderts und ist eine alte Freundin des Weihnachtsmanns. Sie hat an dem sogenannten 10. Hilbert-Problem gearbeitet, aber auch im Bereich der Spieltheorie geforscht. Jetzt braucht der Weihnachtsmann ihre Hilfe bei einem lustigen Spiel, das seine Elfen entwickelt haben, um sich beim Arbeiten an einem Förderband zu amüsieren.
Der Weihnachtsmann verpackt und versendet Geschenke mit n Förderbändern. Der Fertigungsprozess ist ein $n \times n$ Quadratgitter, und alle n Pakete befinden sich auf der Diagonalen dieses Quadrats, siehe Abbildung 1. Um sie verschicken zu können, müssen diese Pakete in

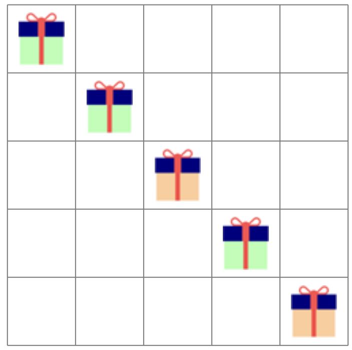


Abbildung 1: Der Fertigungsprozess für $n = 5$.

die unterste Reihe des Quadrats transportiert werden. Dazu können die Elfen des Weihnachtsmanns die Geschenke nach unten bewegen. Sie können dies jedoch nur tun, indem sie gleichzeitig *zwei* Pakete um *einen Schritt* nach unten bewegen. Pakete in der untersten Reihe können nicht weiter bewegt werden, da sie sonst von den Förderbändern fallen würden.
Der Weihnachtsmann möchte, dass die unterste Reihe mit allen n Geschenken gefüllt ist (damit alle Pakete verschickt werden können). Manchmal scheinen seine Elfen jedoch stecken zu bleiben und können nicht alle Geschenke versenden. Wann ist es möglich, dass der Weihnachtsmann alle Geschenke mit einem Algorithmus bis zum unteren Ende des Quadrats bringen kann, ohne stecken zu bleiben?

Antwortmöglichkeiten:

1. Für jeden Wert von n.
2. Wenn n gerade ist.
3. Wenn n ungerade ist.
4. Für alle $n \geq 24$.
5. Für alle $n \geq 12$.
6. Für alle n, bei denen entweder $n - 1$ oder n ein Vielfaches von 4 ist.
7. Für alle n, bei denen entweder $n + 1$ oder n ein Vielfaches von 4 ist.
8. Für alle n, bei denen entweder $n - 1$ oder n ein Vielfaches von 3 ist.
9. Für alle n, bei denen entweder $n + 1$ oder n ein Vielfaches von 3 ist.
10. Für keinen Wert von n.

Projektbezug:

EWM-NL ist der niederländische Verband für Frauen in der Mathematik.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Am Anfang gibt es $(n-1)+(n-2)+\cdots+1 = n(n-1)/2$ leere Plätze unter den Geschenken. Mit jeder Bewegung nimmt diese Anzahl um 2 ab. Daher sollte $n(n-1)/2$ gerade sein. Also gilt $n(n-1)/2 = 2k$ für ein k, oder anders ausgedrückt $n(n-1) = 4k$. Da entweder n oder $n-1$ ungerade ist, bedeutet dies, dass die jeweils andere Zahl ein Vielfaches von 4 sein sollte.

Diese Bedingung ist auch ausreichend. Die Elfen können tatsächlich mit den linken beiden Spalten beginnen und das dort liegende Paar von Geschenken so weit wie möglich nach unten bewegen. Danach befindet sich das Geschenk in Spalte 2 in der untersten Reihe, während das Geschenk in Spalte 1 noch einen Platz zu hoch ist. Die Elfen wiederholen dies für alle Paare von Spalten nach den ersten beiden (Spalten 3 und 4, dann 5 und 6 usw.). Danach gibt es zwei Fälle:

- n war durch 4 teilbar: Dann haben die Hälfte der Spalten $(n/2)$ immer noch ein Geschenk, das einen Platz zu hoch ist. Diese Geschenke können paarweise nach unten bewegt werden, da $n/2$ gerade ist, wenn n durch 4 teilbar ist.
- $n-1$ war durch 4 teilbar: Dann haben die Hälfte der Spalten, abgerundet $((n-1)/2)$, immer noch ein Geschenk, das einen Platz zu hoch ist (da die letzte Spalte, die nicht zu einem Paar gehörte, ihr Geschenk bereits in der untersten Spalte hatte). Jetzt gilt $n-1 = 4k$ für ein k, so dass $(n-1)/2 = 2k$, und eine gerade Anzahl von Geschenken mit einem leeren Platz darunter bleibt.

6 Krach im Wichtelamt

Autoren: Olaf Parczyk, Silas Rathke (FU Berlin)
Projekt: EF 1-12

Illustration: Vira Raichenko

Aufgabe

Politik ist nicht leicht! Auch am Nordpol nicht. Dort entscheiden zehn gewählte Bürokratie-Wichtel über die Gesetze im ewigen Eis.
Doch nun ist ein riesiger Streit darüber entstanden, wofür im nächsten Jahr Geld ausgegeben werden soll. Manche wollen das Geld einsetzen, um den Kindern bessere Geschenke zu machen. Andere wollen es lieber in einen leichteren Schlitten investieren, um die Rentiere zu entlasten, und wieder andere wollen das Wichteldorf mit moderneren Heizungen ausstatten. Der Streit wurde so erbittert geführt, dass insgesamt 20 Feindschaften entstanden sind. Eine Feindschaft besteht dabei immer aus genau zwei Bürokratie-Wichteln, die sich so in

die Haare gekriegt haben, dass sie nicht mehr miteinander sprechen (wenn Wichtel A mit Wichtel B streitet und Wichtel B mit Wichtel A, zählt es als eine Feindschaft).
Einige Wichtel sprechen vielleicht nicht mit allen anderen Wichteln, und es könnte auch Wichtel geben, die mit allen anderen Wichteln Frieden geschlossen haben.
Um die Wogen zu glätten, lädt Oberwichtel Olav die zehn Bürokratie-Wichtel zu einem Arbeitstreffen ins Wichtelamt ein. Dort sollen in unterschiedlichen Räumen an Lösungen gearbeitet werden. Ein einziger Raum reicht dafür leider nicht aus, da verfeindete Bürokratie-Wichtel nicht im selben Raum arbeiten können. Unglücklicherweise hat Olav den Überblick darüber verloren, wer mit wem verfeindet ist - er weiß nur, dass es genau 20 Feindschaften sind. Deswegen möchte Olav die Räume so buchen, sodass diese für alle möglichen Arten von Feindschaften ausreichen würden. Was ist die kleinste Anzahl k an Räumen, die Olav braucht, sodass man die zehn Bürokratie-Wichtel bei 20 Feindschaften in jedem Fall auf k Räume aufteilen kann, ohne dass verfeindete Wichtel im selben Raum landen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 10

Projektbezug:

Im Projekt „Learning Extremal Structures in Combinatorics“ verwenden wir Ansätze aus dem Bereich der künstlichen Intelligenz und des maschinellen Lernens, um neue Konstruktionen für Graphen mit bestimmten Eigenschaften zu finden.
Die vorliegende Aufgabe lässt sich gut als extremales Problem in der Graphentheorie formulieren, ähnlich wie die Probleme, die wir in diesem Projekt studieren.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.
Um die Aufgabe zu lösen, zeigen wir zwei Dinge:

1. Fünf Räume reichen nicht immer aus.
2. Sieben Räume sind einer zu viel.

1. Zuerst zeigen wir, dass fünf Räume nicht ausreichen. Dafür reicht es aus, ein Szenario zu konstruieren, in dem eine Aufteilung auf fünf Räume nicht möglich ist. Nehmen wir dafür an wir haben sechs Wichtel, die alle untereinander verfeindet sind. Insgesamt ergibt das $5+4+3+2+1 = \binom{6}{2} = 15$ Feindschaften. Da jeder mit jedem verfeindet ist, können keine zwei der sechs Wichtel in denselben Raum gesteckt werden und man braucht sechs eigene Räume, selbst wenn die anderen vier Wichtel friedlich sind. Somit braucht Olav in diesem Fall mindestens sechs Räume.

2. Wir zeigen nun, dass sechs Räume ausreichen. Zuerst weist Olav jedem Bürokratie-Wichtel einen eigenen Raum zu, also insgesamt 10 Räume. Wir zeigen nun, dass diese Aufteilung nicht optimal ist. In einer optimalen Aufteilung muss es zwischen allen Räumen Feindschaften geben. Andernfalls könnte man die beiden Räume kombinieren und eine bessere Aufteilung finden. Da $\binom{10}{2} > 20$ gilt, gibt es zwei Räume, zwischen denen überhaupt keine Feindschaft besteht. Olav kann also sicher die Wichtel dieser beiden Räumen zusammen in einen Raum packen. Jetzt gibt es noch neun Räume. Wir zeigen, dass wir weitere Räume kombinieren können. Zwei Räume A und B können nicht verschmolzen werden, wenn es mindestens einen Wichtel aus Raum A und einen Wichtel aus Raum B gibt, die verfeindet sind. In diesem Fall sagen wir, dass zwei Räume miteinander im Konflikt stehen. Beachte, dass in einer optimalen Verteilung die Anzahl der Räume, die im Konflikt miteinander sind, kleiner oder gleich der Anzahl der Feindschaften der Wichtel zwischen diesen Räumen sein muss, weil es für zwei Räume im Konflikt ausreicht, ein verfeindetes Wichtelpaar zu haben. Im nächsten Schritt prüfen wir, ob wir zwei weitere Räume kombinieren können. Für die Anzahl der möglichen Räume in Konflikt gilt $\binom{9}{2} > 20$. Dies impliziert, dass es mehr als 20 Feindschaften zwischen den Elfen geben würde. Daher kann neun nicht die optimale Anzahl an Räumen sein. Olav kann diesen Prozess fortsetzen, bis nur noch sechs Räume übrig sind. Nur dann kann es passieren, dass sich zwei Räume nicht fusionieren lassen, da $\binom{6}{2} < 20 < \binom{7}{2}$ gilt.

7 Das Dreieck von Al-Bermuda

Author: Matthew Maat (Universiteit Twente)
Project: Combining algorithms for parity games and linear programming

Illustration: Vira Raichenko

Aufgabe

Während ihrer langen Reise durch die Wüste sind die heiligen drei Könige beim Reiten ihrer Kamele eingeschlafen. Als sie aufwachen sind sie überrascht, denn sie können den Stern nicht mehr sehen. Tatsächlich ist der gesamte Himmel von einer großen Wolke bedeckt. Das muss die berüchtigte Al-Bermuda-Wolke sein. Eine Legende besagt, dass sie die Form eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks hat, wobei die längste Seite 100 Kilometer lang ist. Solange sie sich unter der Wolke befinden, ist keine Orientierung möglich. Aber sobald es ihnen gelingt, aus der Wolke herauszukommen, werden sie es sofort bemerken, weil sie den Stern wieder sehen werden. Leider haben sie kaum noch Wasser. Je schneller sie der Wolke also entkommen können, desto besser. Es ist nur noch genug Wasser für 100 Kilometer

übrig. Caspar wettet mit Melchior, dass er garantieren kann, dass sie die Wolke in weniger als 100 Kilometer Fußweg verlassen können und so hoffentlich nicht durstig werden, wenn sie seinem Rat folgen.
Caspar beginnt, über seine Strategie nachzudenken. Wenn er einfach 100 Kilometer in einer geraden Linie geht, ist es möglich, dass sie sich jetzt in der unteren linken Ecke des Dreiecks befinden und zufällig genau nach rechts gehen (siehe Strecke AB in Abb. 1). Dann entkommen sie nicht innerhalb von 100 Kilometer. Stattdessen, wenn er in einem Kreis mit einem Umfang von 100 Kilometer geht, ist es möglich, dass sie im Punkt C gestartet sind (siehe Abbildung 1) daher das Dreieck ebenfalls nicht verlassen. Nach weiterem Nachdenken kommt er auf 4 weitere Strategien (siehe ebenfalls Abb. 1):

(a) Gehe 50 Kilometer geradeaus, mache eine Drehung von der Größe α und gehe weitere 50 Kilometer geradeaus.

(b) Gehe x Kilometer geradeaus, mache eine 90°-Drehung nach rechts, gehe dann geradeaus für $100 - 2x$ Kilometer, mache eine weitere Rechtsdrehung und gehe dann nochmals x Kilometer geradeaus.

(c) Das gleiche wie (b), aber diesmal machen wir bei der zweiten Drehung anstelle einer Drehung nach rechts eine Linksdrehung.

(d) Gehe z Kilometer geradeaus, mache eine Rechtsdrehung und gehe weitere $100 - z$ Kilometer geradeaus.

Angenommen, dass Caspar die richtigen Werte für die Parameter α, x, y und z auswählt, sofern diese existieren, welche dieser Strategien kann Caspar verwenden, um sich selbst zu garantieren, die Wette zu gewinnen?

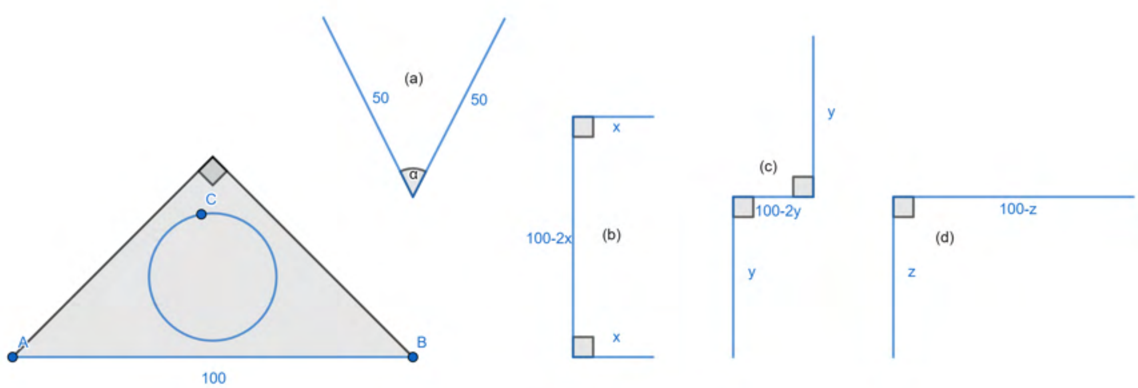


Abbildung 1: Links: Das Dreieck von Al-Bermuda. Rechts: Caspars Ideen für die zu nehmenden Routen.

Antwortmöglichkeiten:

1. Caspar kann die Wette nicht garantiert gewinnen
2. Nur eine der vier Strategien
3. Nur (a) und (b)
4. Nur (a) und (c)
5. Nur (a) und (d)
6. Nur (b) und (c)
7. Nur (b) und (d)
8. Nur (c) und (d)
9. Drei der vier Strategien
10. Caspar kann die Wette mit allen Strategien garantiert gewinnen

Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Zur Vereinfachung verwenden wir ein Koordinatensystem (siehe Abb. 2), sodass die drei Ecken des Dreiecks die Koordinaten $A(0,0), B(100,0)$ und $C(50,50)$ haben. Die Grenzen des Dreiecks werden durch $y=0, y=x$ und $y=100-x$ gegeben. Nun betrachten wir die Strategien einzeln.

(a) Die Route kann so im Dreieck platziert werden, dass der Start und das Ende auf der unteren Seite des Dreiecks liegen und die x-Koordinate des Drehpunkts bei 50 liegt. Dann ist klar, dass die Route immer innerhalb des Dreiecks bleibt.

(b) Die Route kann so im Dreieck platziert werden, dass der Start und das Ende auf der unteren Seite des Dreiecks liegen, und die Wendepunkte genau an den linken und rechten Kanten bei den Koordinaten (x,x) und $(100-x,x)$ liegen (wobei x nun der Parameter für die Route ist).

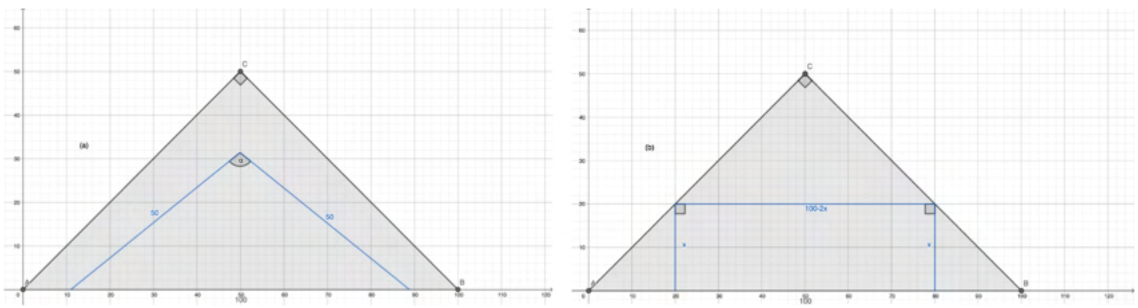


Abbildung 2: Typ (a) und (b) Routen innerhalb des Dreiecks.

(c) Wenn wir unseren Parameter y zum Beispiel auf 10 setzen, passt die Route nicht mehr innerhalb des Dreiecks. Der *worst case* tritt ein, wenn man am unteren Rand des Dreiecks startet, die erste Drehung genau an der linken Seite macht und die zweite Drehung am unteren Rand des Dreiecks. Um zu sehen, warum dies der *worst case* ist, machen wir die folgenden Beobachtungen:

- Die Route enthält einen geraden Abschnitt von 80 Kilometern, während die kurzen Seiten des Dreiecks mit dem Satz des Pythagoras nur $100 \cdot \sqrt{2} \approx 71$ Kilometer lang sind. Daher würde die Route nur ins Dreieck passen, wenn der 80-Kilometer-Abschnitt nahe am unteren Rand des Dreiecks und fast horizontal verläuft.
- Wenn wir versuchen würden, den behaupteten *worst case* ein wenig im Uhrzeigersinn zu drehen, bewegt sich die linke Seite der Route nach oben, sodass wir die Route nach rechts verschieben müssten, wenn der Startpunkt im Dreieck bleiben soll. Dies würde dazu führen, dass wir das Dreieck noch früher verlassen (unter der Voraussetzung, dass wir zeigen, dass die behauptete schlechteste Route das Dreieck verlässt).

- Wenn wir versuchen würden, den behaupteten *worst case* gegen den Uhrzeigersinn zu drehen, würde sich der Endpunkt der Route fast gerade nach oben bewegen, während die linke Seite etwa gleich bleibt. Daher würden wir das Dreieck ebenfalls früher verlassen.

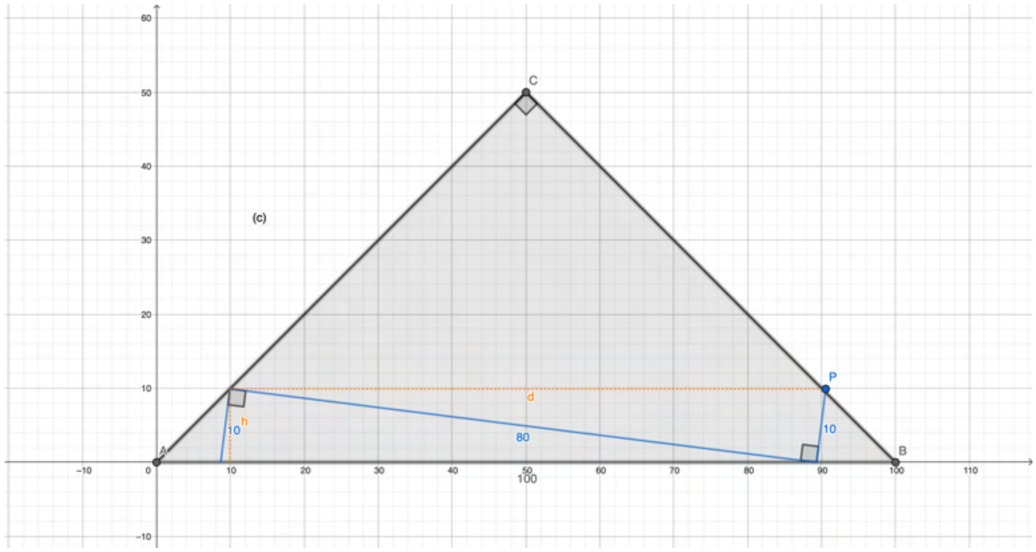


Abbildung 3: *Worst case* Route für Strategie (c), die trotzdem das Dreieck verlässt.

Nun können wir uns auf den *worst case* konzentrieren. Sei h die vertikale Strecke vom unteren Rand des Dreiecks zum ersten Wendepunkt, sei P der Endpunkt der Route und sei d die Strecke zwischen dem ersten Wendepunkt und P (vergleiche Abb. 3). Die Länge von d ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras. Sie ist $\frac{6500}{\sqrt{6500}}$. Unter Verwendung der Ähnlichkeit des Dreiecks, das durch h, das erste Segment der Route und einen Abschnitt des unteren Randes des Al-Bermuda-Dreiecks gebildet wird; und des Dreiecks, das durch d, den 80-Kilometer-Abschnitt und den letzten Abschnitt der Route gebildet wird, kann man h über

$$\frac{h}{10} = \frac{80}{d}$$

berechnen, also $h = \frac{800}{\sqrt{6500}}$. Daher sind die Koordinaten des ersten Wendepunkts (h, h), und weil d horizontal ist, sind die Koordinaten des Endpunkts $P = (\frac{7300}{\sqrt{6500}}, \frac{800}{\sqrt{6500}})$. Dies liegt etwa 0,47 Kilometer über der Linie $y = 100 - x$, sodass sie rechtzeitig dem Dreieck entkommen würden.

(d) Hier können wir zwei Fälle unterscheiden: $z < 50$ und $z \geq 50$. Im ersten Fall können wir den Endpunkt der Route als A wählen und den zweiten Abschnitt der Route auf der Unterseite des Dreiecks liegen lassen. Die resultierende Route bleibt dann innerhalb des Dreiecks. Im zweiten Fall wählen wir B als den Startpunkt der Route und den ersten Abschnitt der Route auf der Unterseite des Dreiecks. Die resultierende Route bleibt dann innerhalb des Dreiecks.

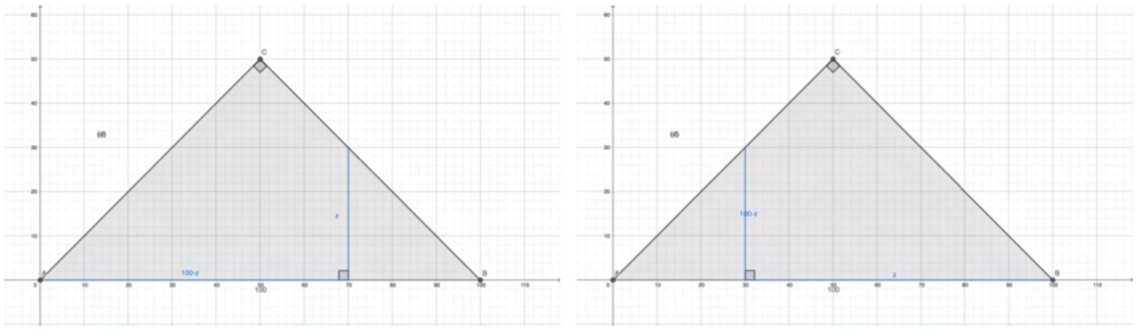


Abbildung 4: Links: $z < 50$, Rechts: $z \geq 50$. In beiden Fällen verläuft die Route komplett innerhalb des Dreiecks.

Also kann Caspar nur mit Strategie (c) garantiert die Wette gewinnen.

8 Kekse, Karten und Weihnachtszauber

Autorin: Margarita Kostre
Projekt: MATH+

Illustration: Friederike Hoffmann

Aufgabe

Die Elfen Gwendelyn und Fredi arbeiten für den Weihnachtsmann. In ihren Pausen spielen sie gerne Karten um Kekse einmal pro Tag. Jeden Tag bringen sie unterschiedliche Kekse zur Arbeit, da sie beide gerne backen. Abhängig davon, welche Kekse sie dabei haben, sind sie eher dazu bereit, eigene Kekse abzugeben, falls sie beim Kartenspiel verlieren, oder darauf aus, andere Kekse zu bekommen, falls sie gewinnen.
So bekommt Gwendelyn, falls sie gewinnt:

- An Tagen 1 bis 6: 20 Kekse,
- An Tagen 7 bis 12: 40 Kekse,

- An Tagen 13 bis 18: 30 Kekse,
- An Tagen 19 bis 24: 50 Kekse.

So gibt Gwendelyn, falls sie verliert:

- An Tagen 1 bis 6: 20 Kekse ab,
- An Tagen 7 bis 12: 10 Kekse ab,
- An Tagen 13 bis 18: 5 Kekse ab,
- An Tagen 19 bis 24: 25 Kekse ab.

Außerdem hat Gwendelyn unterschiedliche Arbeitszeiten, die sich auf ihre Leistung beim Kartenspiel auswirken. Gwendelyn gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von:

- 50 Prozent an ungeraden Tagen, die durch drei teilbar sind,
- 40 Prozent an geraden Tagen,
- 20 Prozent an ungeraden Tagen, die nicht durch drei teilbar sind.

An welchem Tag erwartet Gwendelyn die meisten Kekse zu gewinnen?

Fredi kriegt so viele Kekse vom Weihnachtsmann als Belohnung nach der langen Adventszeit und er hatte so viel Spaß mit Gwendelyn, dass er die Idee hat nach der Weihnachtszeit weiter zu spielen. Diesmal aber mit einer Münze. Die Regel ist relativ einfach, eine faire Münze wird von Gwendelyn so lange geworfen, bis zum ersten Mal „Kopf“ fällt. Dies beendet das Spiel und Gwendelyn geht mit den gewonnen Keksen nachhause. Der Gewinn von Keksen für Gwendelyn richtet sich nach der Anzahl der Münzwürfe insgesamt. Gewinnt sie beim ersten Wurf, dann erhält Gwendelyn einen Keks. Bei zwei Würfen (also einmal „Zahl“, einmal „Kopf“) gibt es zwei Kekse, bei drei Würfen 4 Kekse, bei vier Würfen 8 Kekse und bei jedem weiteren Wurf verdoppelt sich der Betrag an Keksen. Fredi gewinnt nichts bei dem Spiel, aber da er nicht zu viele Kekse essen möchte, ist er damit einverstanden. Gwendelyn ist begeistert und fragt sich wie viele Kekse sie diesmal erwartet zu gewinnen.

A) An welchem Tagen während der Adventszeit erwartet Gwendelyn die meisten Kekse zu gewinnen?
B) Wie viele Kekse erwartet sie von Fredi nach der Adventszeit zusätzlich zu bekommen?

Hinweis: In dieser Aufgabe ist der Erwartungswert im mathematischen Sinne gesucht. Der Erwartungswert beschreibt den gewichteten Durchschnitt, wobei die Gewichtung durch die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Werte erfolgt. Der Erwartungswert ist ein Maß für den „mittleren“ oder „durchschnittlichen“ Wert, den man in einer großen Anzahl von Experimenten oder Zufallsereignissen erwarten würde. Dabei muss der Erwartungswert nicht tatsächlich ein im Experiment beobachteter Wert sein.

Antwortmöglichkeiten:

1. 22 und 0
2. 9 und 152
3. 9 und 2048
4. 9 und unendlich
5. 15 und 152
6. 15 und 2048
7. 15 und unendlich
8. 21 und 152
9. 21 und 2048
10. 22 und unendlich

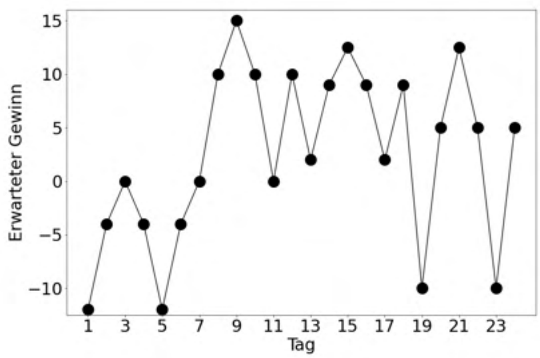


Abbildung 1: Der zu erwartende Gewinn an den Tagen 1 bis 24 in Keksen.

Die richtige Antwort ist: 4.

Lösung:

Der zu erwartende Gewinn $E(t)$ an Keksen am Tag t berechnet sich aus der Anzahl der zu gewinnenden Kekse $G(t)$ multipliziert mit der Gewinnwahrscheinlichkeit $p(t)$ abzüglich der Anzahl der abzugebenden Kekse $V(t)$ multipliziert mit der Verlustwahrscheinlichkeit:

$$E(t) = G(t) \cdot p(t) - V(t) \cdot (1 - p(t))$$

Zum Beispiel ist die Anzahl der zu erwartenden Kekse am siebten Tag

$$E(7) = 40 \cdot 0.2 - 10 \cdot 0.8 = 0.$$

Wir berechnen den zu erwartenden Gewinn in Keksen für jeden Tag, vergleiche Abbildung 1. Wir erkennen, dass Gwendelyn den höchsten Gewinn am neunten Tag erwartet, nämlich 15 Kekse.

Für den zweiten Teil stellen wir zunächst fest, dass die Wahrscheinlichkeit erst beim k-ten Wurf „Kopf" zu werfen $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ beträgt. Wir beobachten außerdem, dass der Gewinn bei genau k Würfen 2^{k-1} Kekse beträgt. Würden wir das Spiel spätestens nach n Würfen abbrechen, wobei $n \in \mathbb{N}$, so wäre die erwartete Anzahl an Keksen, die Gwendelyn nach der Adventszeit erhält

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot 2^{1-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{2-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^{3-1} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Da wir das Spiel jedoch nicht nach einer festen Zahl n abbrechen, muss die erwartete Anzahl an Keksen „unendlich" betragen.
Dies nennt man das *Sankt-Petersburg-Paradoxon*. Es besagt, dass man bei diesem Spiel im Mittel einen unendlich hohen Gewinn erwartet, obwohl das Gewinnen einer großen Summe sehr unwahrscheinlich ist.

9 Geheime Geschenke

Autoren: Felix und Nathanael Höfling
Projekt: EF4-10

Illustration: Christoph Graczyk

Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist wie jedes Jahr sehr dankbar für die großartige Arbeit seiner Wichtel und möchte jeden von ihnen auch gern beschenken. Doch er kann die Namen nicht auf die

Geschenke schreiben, da die Überraschung sonst nicht gelingt. Eines Tages kommt Zwerg Alwin zu Besuch, und der Weihnachtsmann schildert ihm das Problem. „Lieber Alwin, was soll ich nur machen?“Der schlaue Alwin hat sofort eine Idee: „Du könntest für jeden Wichtel einen Geheimcode auf sein Geschenk schreiben. Es ist wichtig, dass kein Code doppelt vorkommt. Außerdem sollen ähnliche Namen ganz verschiedene Codes bekommen, damit sie die Namen nicht erraten können. Ich erstelle Dir gleich eine Liste mit den Codes.“

Für jedem Namen berechnet Zwerg Alwin auf folgende Weise einen vierstelligen Geheimcode: Zuerst übersetzt er die Buchstaben des Namens entsprechend ihrer Position im Alphabet in Zahlen, ein E wird eine 5, ein M eine 13, und das Z bekommt die 26 usw. Dann befüllt er eine Tabelle mit zwei Zeilen, siehe Tabelle unten. In die erste Spalte schreibt er oben eine 1 und unten eine 0. Dann addiert er in der ersten Zeile zu der zuletzt geschriebenen Zahl immer den Wert des nächsten Buchstabens hinzu. Bevor er das Ergebnis zu der Zeile hinzufügt, achtet er jedoch darauf, dass die Zahl kleiner ist als 47. Falls das Ergebnis größer oder gleich 47 ist, subtrahiert er 47 von dem Ergebnis. Ist das Ergebnis kleiner als 10, wird eine Null vorangestellt, z.B. aus 7 wird 07. In der zweiten Zeile geht er genauso vor, außer dass er zu der zuletzt geschriebenen Zahl immer den entsprechenden (oben drüber) Eintrag aus der ersten Zeile dazu addiert. Zuletzt nimmt er die jeweils letzte Zahl aus den beiden Zeilen und schreibt sie hintereinander, die Zahl aus der zweiten Zeile zuerst – dies ist der Geheimcode des Namens. Nach dieser Methode bekommt beispielsweise Luise den Code 3120, so wie es im Bild gezeigt ist.

LUISE $\longrightarrow$ 12 - 21 - 9 - 19 - 5					
1	13	34	43	15	**20**
0	13	00	43	11	**31**

Eine Weile später hält der Weihnachtsmann glücklich die Liste mit den Geheimcodes in der Hand und macht sich an die Arbeit. In der Wichtelwerkstatt bestellt er für jeden seiner Wichtel ein schönes Geschenk, doch nicht auf dessen Namen, sondern zu dem Geheimcode. Am Tag vor Heiligabend bereitet er seinen Schlitten vor. Am Nordpol ist es kalt und es wütet ein fürchterlicher Schneesturm. Als sich der Weihnachtsmann zu seinen Rentieren umdreht, öffnet sich sein Mantel etwas, der Wind erfasst die Liste mit den Geheimcodes und weht sie davon. Der Weihnachtsmann ist schockiert.
Zurück in der Wichtelwerkstatt nimmt er das erste Geschenk in die Hand. Es hat die Aufschrift „2122“. Doch welchem Wichtel soll er es geben? Kannst Du ihm helfen? Für wen ist das Geschenk?

Antwortmöglichkeiten:

1. Lotte
2. Flavia
3. Luiz
4. Elisabeth
5. Nathanael

6. Matteo
7. Evelina
8. Mathilda
9. Lutz
10. Fridolin

Projektbezug:

Zur Modellierung kooperativen Verhaltens werden häufig agentenbasierte Modelle eingesetzt. Diese Modelle beschreiben Zehntausende unabhängig agierender Einheiten (Personen, Tiere, Autos, Mobiltelefone, ...), die jedoch miteinander im Austausch stehen. Dadurch können unter anderem großräumige Strukturen entstehen, die sich mit wenigen Parametern beschreiben lassen, beispielsweise Grüppchenbildung oder Cluster. Die enorme Informationsfülle des ursprünglichen Modells lässt sich also auf wenige wichtige Kennzahlen reduzieren. Umgekehrt kann man aus den Kennzahlen kaum mehr auf die Positionen der einzelnen Agenten schließen. Wie solche Zusammenhänge mathematisch formuliert und berechnet werden können, ist Gegenstand der aktuellen Forschung.
Ganz ähnlich reduzieren wir in der Aufgabe lange und kurze Namen stets auf dieselbe Länge. Die Umkehrung der Abbildung, also die Berechnung des Namens anhand des Codes ist nahezu unmöglich. Anders als bei den Agentensystemen haben die Codes zusätzlich die Eigenschaft, dass ähnlichen Namen deutlich verschiedene Codes zugeordnet werden. Somit fungiert der Code auch als Prüfsumme, damit lassen sich dann Buchstabendreher entdecken. Es gibt noch viele andere Anwendungen solcher Codes, beispielsweise das sichere Überprüfen von Passwörtern auf einem Computer, ohne dafür das eigentliche Passwort speichern zu müssen.
Zur mathematischen Konstruktion der Codes: die Berechnung geschieht in Anlehnung an die Adler32-Hash-Funktion.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 7. Evelina

Die Geheimcodes sind so konstruiert, dass es praktisch unmöglich ist, aus einem Code direkt den verschlüsselten Namen zu berechnen. Da aber nur zehn Antworten zur Auswahl stehen, können wir zu jeder möglichen Antwort aus dem Namen den Code berechnen. Für die richtige Antwort werden wir den Code „2122“ finden.
Evelina hat die Buchstabenwerte 5, 22, 5, 12, 9, 14, 1. In die kleine Tabelle zur Berechnung des Codes tragen wir folgende Zahlen ein:

1	06	28	33	45	07	21	**22**
0	06	34	20	18	25	46	**21**

Aus der letzten Spalte ergibt sich der Code 21|22.
Die Geheimcodes der anderen Namen lauten: Lotte: 4226, Flavia: 0305, Luiz: 1822, Elisabeth: 2735, Nathanael: 4130, Matteo: 1928, Mathilda: 3122, Lutz: 4033, Fridolin: 0841. Alwin hat übrigens den Code 1813.
Um die Berechnung zu verkürzen, kann man auch ein kleines Computerprogramm schreiben, zum Beispiel in Python:

```python
def get_code(name):
    values = [ord(x) - ord('A') + 1 for x in name.upper()]

    a = [1,]
    b = [0,]
    for x in values:
        a.append((a[-1] + x) % 47)
        b.append((b[-1] + a[-1]) % 47)
    code = a[-1] + 100 * b[-1]

    print("Name: {0:s} -- Code: {1:04d}".format(name, code))
    print("Buchstabenwerte: ", *values)
    print("Zeile 1:", format_row(a))
    print("Zeile 2:", format_row(b))

    return code

def format_row(a):
    return " | ".join(["{0:02d}".format(x) for x in a])

get_code('Evelina')
```

10 Raumkrümmende Lagerdurchquerung

Autoren: Ravi Snellenberg, Martin Skrodzki (TU Delft)
Projekt: *Holonomy*, Computer Graphics and Visualization

Illustration: Ivana Martic

Aufgabe

Die Elfen des esoterischen Forschungsbereichs haben einen Weg gefunden, die Lagerkapazität im aktuellen Lagerraum zu erhöhen. Dies war dringend nötig aufgrund der ständig wachsenden Menge an Geschenken, die jedes Jahr gelagert werden müssen. Die Art und Weise, wie die Elfen dies erreicht haben, besteht darin, die Räume im aktuellen Lagerhaus auf clevere Weise mithilfe von Portalen zu verbinden. Normalerweise könnte man 4 quadratische Räume um eine Ecke platzieren, aber mit der Art und Weise, wie die Räume jetzt verbunden sind, müsste ein Elf durch 5 quadratische Räume gehen, um den Eckpunkt zu laufen, an dem die Räume zusammentreffen, anstatt der üblichen 4 (siehe Abb. 1). Aufgrund der Schwierigkeit, diese raumverändernden Portale zu erstellen, können die Elfen sie nur in einem begrenzten, separaten Bereich erstellen, der von Wänden umgeben ist. Dieser Bereich wird als Kontrollraum bezeichnet. Um das Lager zu durchqueren, betreten die Elfen also den Kontrollraum anstelle des physischen Lagers. Und wenn ein Elf in ein anderes Quadrat im Kontrollraum geht, betritt er einen neuen Lagerraum. Welcher Raum dies ist, wird durch die neue Art der Verbindung der Räume entschieden. Der Kontrollraum ist ein Raster von 3×3 Räumen mit Portalen an jeder Wand, die zwei quadratische Räume innerhalb des Kontrollraums trennen (siehe Abb. 1). Ecken haben keine Portale, sodass es nicht möglich ist, diagonal im Kontrollraum zu gehen, sondern nur orthogonal. Trotz dieser Einschränkung ist es immer noch möglich, jeden der möglicherweise unendlichen Räume im Lager zu erreichen, indem man die Anordnung der Räume auf clevere Weise nutzt.

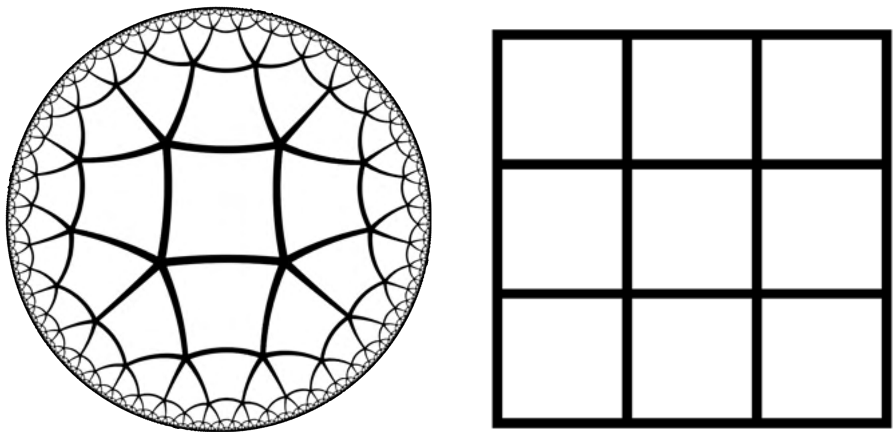


Abbildung 1: Das Lagerraum-Layout: Die linke Abbildung zeigt eine Karte des neuen Lagerlayouts. Jedes Viereck ist tatsächlich ein quadratischer Raum, obwohl es auf der Karte verzerrt erscheinen. Dies ist aufgrund der Notwendigkeit, den zusätzlichen fünften Raum an jeder Ecke darzustellen. Es wird das Poincaré-Kreisscheibenmodell verwendet, um dieses spezielle Layout anzuzeigen. Die rechte Abbildung zeigt den Kontrollraum.

Da die Elfen im esoterischen Forschungsbereich erkannten, dass die gesamte Situation wirklich verwirrend ist, haben sie eine Infografik erstellt, die sie an die Vordertür des Kontrollraums hängten, siehe Abbildung 2.

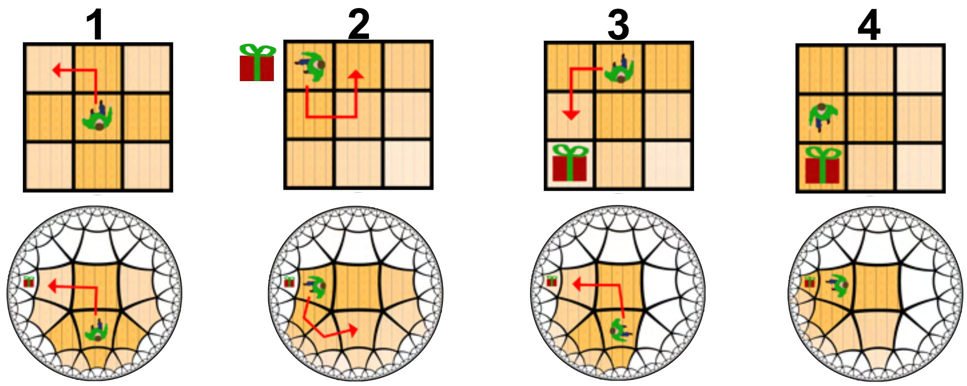


Abbildung 2: Die Infografik. Je heller der Boden wird, desto weiter entfernt ist ein Raum.

Die Infografik zeigt eine hypothetische Situation, in der ein Elf ein Geschenk erreichen muss, das nicht direkt erreichbar ist, basierend auf dem Ausgangslayout des Kontrollraums. Der obere Teil der Infografik zeigt den Kontrollraum, in dem sich der Elf bewegt, während er durch das Lager geht. Der untere Teil der Infografik zeigt eine Draufsicht auf das Lagerlayout, das mit der darüber liegenden Ansicht des Kontrollraums verknüpft ist. Die farbigen Räume in der Infografik sind die Räume, die durch Gehen eines direkten Pfades (eines kürzesten Pfades) zu einem Raum im Kontrollraum von der aktuellen Position des Elfen aus erreichbar sind. Das Gehen unterschiedlicher kürzester Pfade zum gleichen Raum im Kontrollraum führt nicht immer zum gleichen Raum im Lager. Zum Beispiel kann der Elf im Kontrollraum, der im ersten Schritt der Infografik angezeigt wird, jeden Eckraum auf zwei verschiedene Arten erreichen. Im Lagerlayout ist zum Beispiel zu sehen, dass beide Arten, die obere rechte Eckenkachel im Kontrollraum zu erreichen (erst nach oben, dann nach rechts oder erst nach rechts, dann nach oben), zu zwei verschiedenen Räumen im Lager führen, siehe Abb. 3.

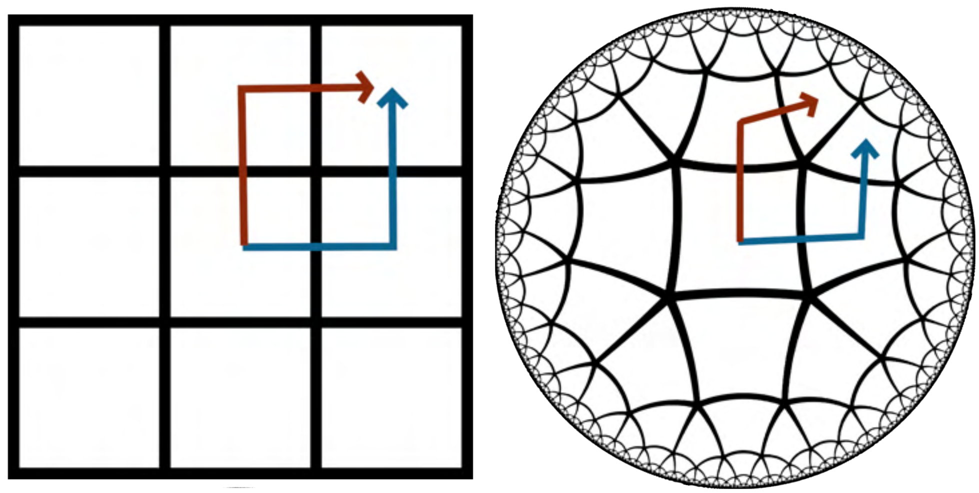


Abbildung 3: Links: Zwei Wege zur oberen rechten Ecke im Kontrollraum. Rechts: Die entsprechenden Wege im tatsächlichen Lager.

Die Infografik zeigt, dass es durch Gehen im Kontrollraum auf bestimmte Weise möglich ist, das Geschenk zu erreichen, obwohl es von der Ausgangsposition aus nicht direkt erreichbar war. Sie zeigt auch, wie sich der direkt zugängliche Bereich verschiebt, während der Elf durch das Lager geht.
Jetzt fragen sich die entwicklungsorientierten Elfen des esoterischen Forschungsbereichs: Was ist die minimale Anzahl von Portalen, die durchquert werden müssen, um das Geschenk in der Situation von Abbildung 4 zu erreichen? Dieses wäre ohne die Beschränkung der Kontrollraumgröße mit drei Schritten nach vorne erreichbar. Angenommen wird bei dem Szenario, dass der Elf in der Mitte des Kontrollraums startet.

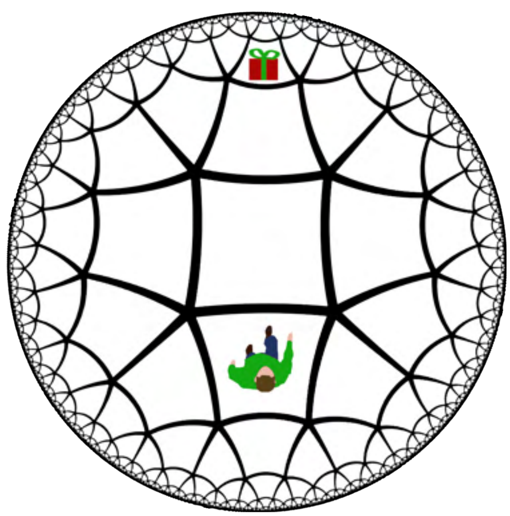


Abbildung 4: Das Szenario aus der Frage.

Antwortmöglichkeiten:

1. 3
2. 5
3. 6
4. 7
5. 8
6. 9
7. 10
8. 12
9. 14
10. 42

Projektbezug:

Das Szenario, das dieses Problem beschreibt, ist die Umgebung einer Virtual-Reality-Anwendung namens *Holonomy* (benannt nach der mathematischen Eigenschaft, die diese Durchquerung ermöglicht). *Holonomy* wird entwickelt, um verschiedene Fragen zu beantworten. Zum Beispiel Fragen wie „Könnte eine solche Demonstration Menschen helfen, die zugrunde liegenden mathematischen Eigenschaften intuitiver zu verstehen?“, „Wie schnell passen sich Menschen an die Navigation in einer hyperbolischen Welt an?“und „Wie könnten wir dem Spieler helfen, sich in einer solchen Umgebung zu bewegen?“. Und wenn wir herausfinden können, wie man die Navigation in diesen hyperbolischen Räumen einfach gestalten kann, könnte es verwendet werden, um konsistente Welten jeder Größe zu schaffen, die in einem begrenzten Raum durchquert werden können. Das Berechnen der kürzesten Wege zwischen zwei Orten ist ein Beispiel für eine der Herausforderungen, die wir beim Erstellen von *Holonomy* entdeckt haben.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

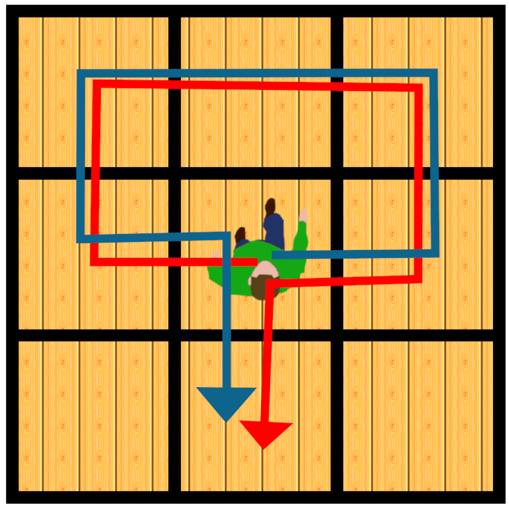


Abbildung 5: Die optimalen Wege: beide, der blaue und der rote, sind korrekt.

In Abbildung 5 sehen wir einen Weg, der nur 7 Portale verwendet. Man kann mithilfe Abbildung 4 leicht überprüfen, dass dieser Weg tatsächlich zum Geschenk führt. Es bleibt zu zeigen, dass es keinen kürzeren Weg gibt.
Wenn es keine Einschränkungen gäbe, könnte man das Geschenk erreichen, indem man 3 Portale benutzt. Dies ist jedoch mit den Beschränkungen des Kontrollraums nicht möglich. Denn um das Geschenk zu erreichen, muss der Elf auf irgendeine Weise eine Ecke nutzen. Indem er um eine Ecke geht und dann zum Geschenk, muss der Elf mindestens 6 Portale durchqueren. Alle Pfade, die genau 6 Portale verwenden, erfordern, dass der „große“Raum in der Mitte von Abbildung 4 auf diesem Pfad liegt. Daher muss der Elf um eine der Ecken des großen Raums gehen. Alle diese Pfade können jedoch nicht innerhalb des Kontrollraums abgelaufen werden, was die Möglichkeit mit 6 Portaldurchquerungen ausschließt. Das bedeutet, dass es keinen Weg geben kann, der weniger als 7 Portale verwendet.

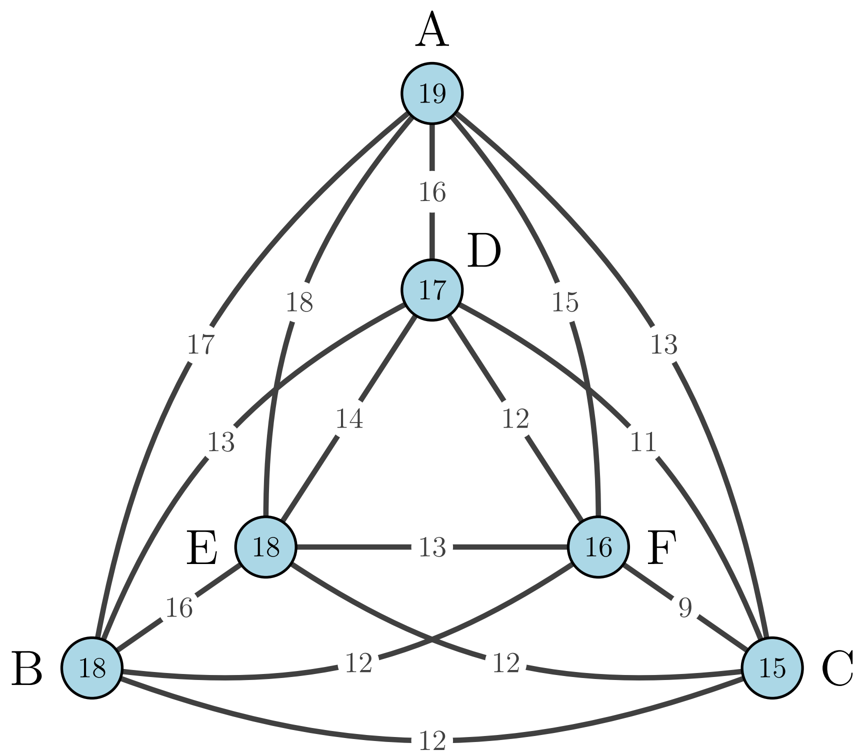
11 Reisender Weihnachtsmann Problem

Autor: Dion Gijswijt (TU Delft)
Projekt: 4TU.AMI

Illustration: Zyanya Santaurio

Aufgabe

Aktuell ist der Weihnachtsmann auf einer Mission, um Geschenke an Kinder zu verteilen. Seine Reise erstreckt sich über sechs Städte, die mit A bis F bezeichnet sind. Ausgehend von der Werkstatt des Weihnachtsmanns (WdW) muss er eine der Städte A, B, C, D, E oder F auswählen, um seinen Besuch zu beginnen.
Die Rentiere sind müde vom Spielen und können deswegen keine langen Strecken mehr zurücklegen. Das erfordert, dass der Weihnachtsmann die kürzeste Route plant. Er hat eine Karte, die Flugentfernungen zwischen den Städten entlang verbindender Linien anzeigt, und die Kreise zeigen die Entfernungen von der WdW zu jeder Stadt an.



Der Weihnachtsmann muss nun die kürzeste Abfolge für den Besuch der Städte wählen, bevor er zur Werkstatt des Weihnachtsmanns zurückkehrt. Wenn er beispielsweise die Route WdW-F-A-E-B-C-D-WdW nimmt, ist die Tour $16+15+18+16+12+11+17 = 105$ lang. Was ist die Länge der kürzesten Tour, die der Weihnachtsmann nehmen kann?

Antwortmöglichkeiten:

1. 104
2. 103
3. 102
4. 101
5. 100
6. 99
7. 98
8. 97
9. 96
10. 95

Lösung

Die richtige Antwort ist: 7. 98

Zunächst einmal ist zu bemerken, dass es niemals optimal ist, eine der Städte A,B,C,D,E,F zweimal zu besuchen oder die Werkstatt des Weihnachtsmanns dreimal zu besuchen. Nehmen wir an, wir machen einen Umweg von Stadt_1 nach Stadt_2 indem wir ein zweites mal über Stadt_3 laufen:

$$... - \text{Stadt}_1 - \text{Stadt}_3 - \text{Stadt}_2 - ... - \text{WdW}$$

Der direkter Weg von Stadt_1 nach Stadt_2

$$... - \text{Stadt}_1 - \text{Stadt}_2 - ... - \text{WdW}$$

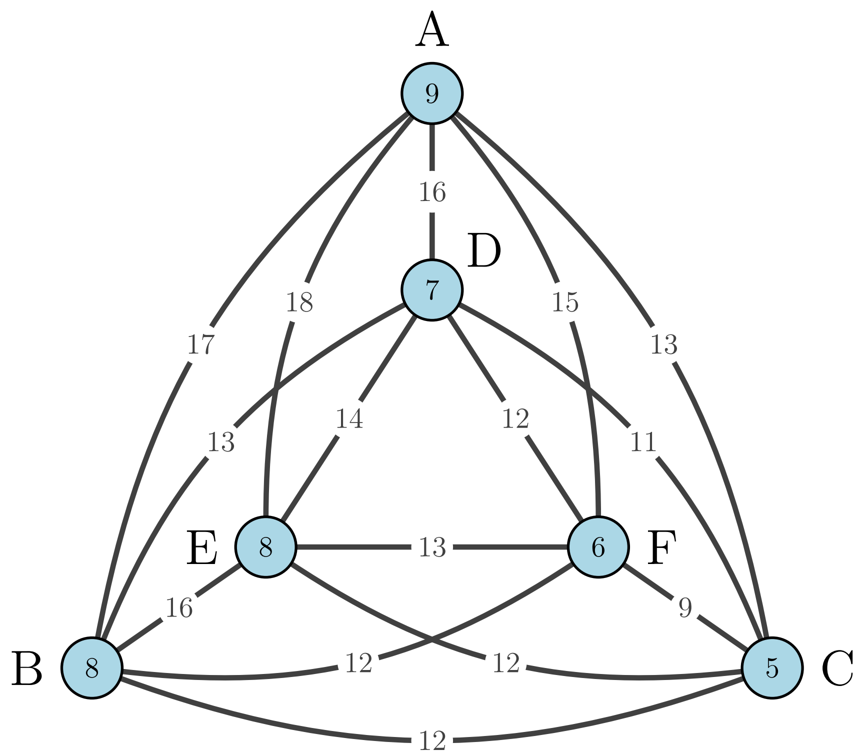
kostet maximal 18, da dies die Länge der längsten Strecke ist. Der Umweg kostet mindestens 9+11=20.

Daher lohnt es sich nicht, eine Stadt zweimal zu besuchen. Auch das dreimalige Besuchen der Werkstatt des Weihnachtsmanns ist nicht optimal, da es die Entfernung zu keiner Stadt verkürzt.

Daher nehmen wir ab sofort an, dass die Städte A, B, C, D, E, F jeweils genau einmal besucht werden und die Werkstatt des Weihnachtsmanns nur zu Beginn und am Ende aufgesucht wird.

Um das Problem zu vereinfachen, ändern wir die Entfernungen, während wir die relativen Unterschiede zwischen ihnen beibehalten. Dies bedeutet, dass die Reihenfolge, in der die Städte näher oder weiter von der Werkstatt des Weihnachtsmanns entfernt sind, gleich bleibt. Insbesondere ändert sich durch diese Änderung der Längen nicht, welche Touren optimal sind.

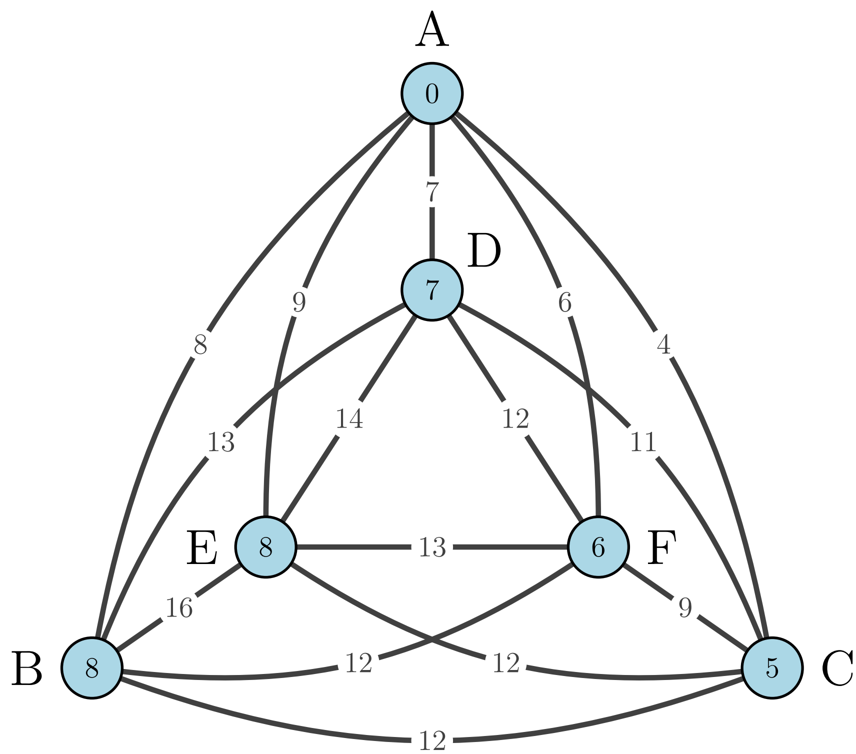
Zuerst verringern wir die Entfernung zu jeder Werkstatt um 10. Dies verringert die Länge jeder Tour um $2 \cdot 10 = 20$, da jede Tour von der Werkstatt des Weihnachtsmanns zu einer Stadt führt und von einer anderen Stadt zurück zur Werkstatt des Weihnachtsmanns. Das ergibt folgende Entfernungen:



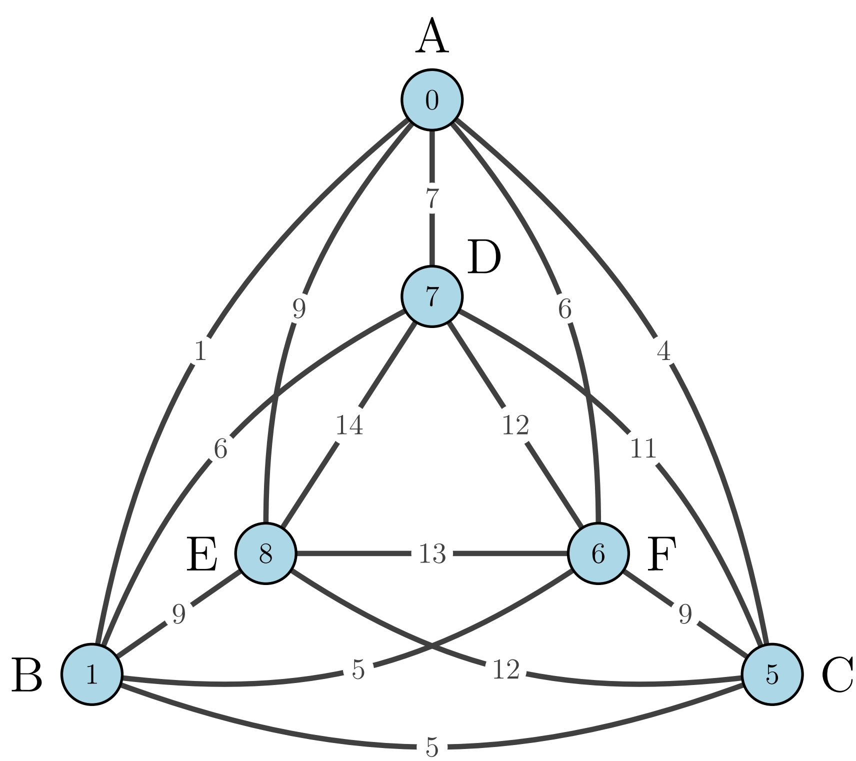
Im nächsten Schritt verkürzen wir die Entfernung zwischen den Städten

- die Entfernung von Stadt A verkürzen wir um 9,
- die Entfernung von Stadt B verkürzen wir um 7,
- die Entfernung von Stadt C verkürzen wir um 4,
- die Entfernung von Stadt D verkürzen wir um 6,
- die Entfernung von Stadt E verkürzen wir um 8,
- die Entfernung von Stadt F verkürzen wir um 5.

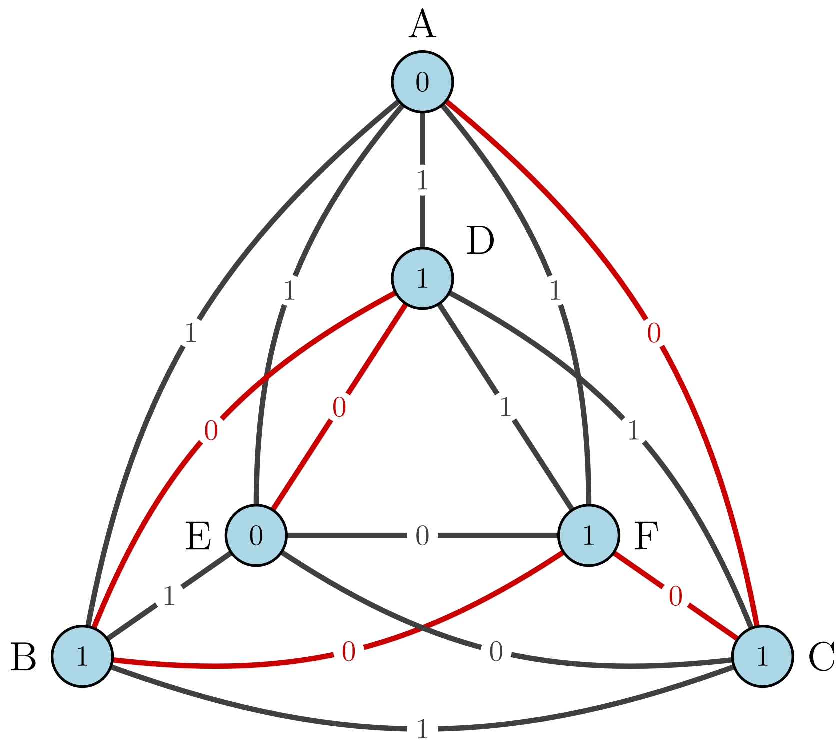
Wenn wir beispielsweise die Entfernungen von A verringern, erhalten wir folgendes Ergebnis:



Dann verringern wir die Entfernungen von der Stadt B um 7 und erhalten folgenden Graphen:



Wir führen die gleichen Verfahren für die verbleibenden Knoten durch und erhalten den folgenden Graphen:



Wir sehen, dass alle Entfernungen nun 0 oder 1 sind und die Tour WdW-A-C-F-B-D-E-WdW eine Länge von 0 hat (tatsächlich sind diese Tour und die umgekehrte Tour die einzigen Touren mit einer Länge von 0), daher ist dies eine optimale Tour. Aufgrund der Änderung der Entfernungen ist jede Tour in Wirklichkeit um $2(10+9+7+4+6+8+5) = 98$ länger. Daher hat die kürzeste Tour eine Länge von 98.

12 Der Weg nach Bethlehem

Autor: Matthew Maat (Universiteit Twente)
Projekt: Combining algorithms for parity games and linear programming

Illustration: Zyanya Santaurio

Aufgabe

Nach Rücksprache mit König Herodes machen sich die drei heiligen Könige bereit, von Jerusalem nach Bethlehem zu reisen. Allerdings gibt es ein Problem, das sie vor ihrer Abreise lösen müssen: Steuern. Aufgrund der großen Menge an Gold und Gewürzen, die sie mit sich führen, müssen sie in jeder Stadt, die sie betreten, Steuern zahlen. Um alles noch schlimmer zu machen, haben die cleveren Steuereintreiber alle Straßenschilder in Richtung der Orte gelenkt, an denen man die höchsten Steuern zahlen muss. Auf der Karte (Abb. 1) sind die Straßen und Städte zwischen Jerusalem und Bethlehem zu sehen. Die Straßen werden durch Pfeile und die Städte durch Kreise repräsentiert. Rote Pfeile markieren hierbei die Richtungen, in die die Schilder in der jeweiligen Stadt zeigen. In den Kreisen steht wie viel Steuern die heiligen drei Könige in jeder Stadt zahlen müssen.

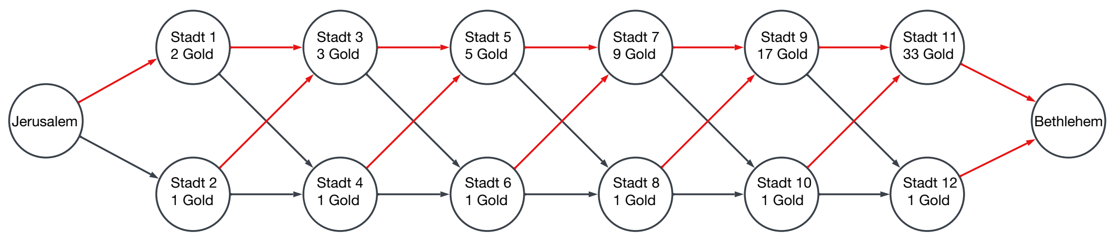


Abbildung 1: Die Straßen (Pfeile) von Jerusalem nach Bethlehem mit den Steuerbeträgen in den Kreisen. Güter können nur in Richtung der Pfeile transportiert werden.

Die drei heiligen Könige entscheiden sich, Balthasar mit folgendem Auftrag vorauszuschicken:

- Beginnend in Jerusalem, soll er zu Stadt 1 gehen, dann zu Stadt 2, 3 usw. Da Balthasar zu Fuß unterwegs ist, kann er alle vorhandenen Straßen ignorieren.
- Wenn Balthasar in einer Stadt ist, in der er das Schild so ändern kann, dass die Reise von dieser Stadt nach Bethlehem günstiger wird, ändert er das Schild, rennt zurück nach Jerusalem und beginnt den gesamten Prozess von vorne.
- Wenn Balthasar das Schild ändert, darf es nur in Richtung der Pfeile der Straßen zeigen. Zum Beispiel kann in Stadt 7 das Schild nur auf Stadt 9 oder Stadt 10 zeigen.
- Wenn Balthasar Bethlehem erreicht, schickt er eine Brieftaube, um den anderen mitzuteilen, dass sie nach Bethlehem kommen können.

Auf seiner ersten Reise ändert Balthasar das Schild in Jerusalem in Richtung Stadt 2, da dann die Gesamtsteuer für die Reise von Jerusalem aus $1+3+5+9+17+33$ Goldstücke beträgt, anstelle von $2+3+5+9+17+33$ Goldstücken. Auf seiner zweiten Reise ändert Balthasar das Schild in Stadt 1 in Richtung Stadt 4. Auf seiner dritten Reise ändert er das Schild in Jerusalem zurück nach Stadt 1. Das liegt daran, dass die Reise von dort nach Betlehem günstiger wird. Tatsächlich kostet die neue Reise $2+1+5+9+17+33$, was günstiger ist als die Kosten von $1+3+5+9+17+33$ der alten Reise.
Wie oft ändert Balthasar insgesamt ein Schild? (Wenn das Schild in einer Stadt mehrmals geändert wird, zählen wir es mehrmals.)

Antwortmöglichkeiten:

1. 55
2. 57
3. 63
4. 83

5. 114
6. 120
7. 126
8. 177
9. 240
10. 367

Projektbezug:

Der Algorithmus, den Balthasar verwendet, wird als der *Strategy Improvement Algorithmus* bezeichnet. Der Algorithmus nutzt eine sogenannte *improvement rule*, die festlegt, in welcher Reihenfolge Verbesserungen vorgenommen werden (oder in welcher Reihenfolge Balthasar die Städte besucht). In diesem Fall verwenden wir die sogenannte Bland-Regel. Obwohl es sich um ein Ein-Spieler-Spiel handelt (wir minimieren nur den Preis), können wir den Algorithmus auch verwenden, wenn es Städte gibt, die von einem Maximierer oder einem zufälligen Spieler kontrolliert werden. Es ist unbekannt, ob es eine *improvement rule* gibt, die eine geringe Anzahl von Iterationen garantiert. Wie man sehen kann, kann selbst bei einer kleinen Anzahl von Städten Blands Regel eine große Anzahl von Iterationen erfordern.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.
Beachte, dass die Stadt $2n$ immer um 2^{n-1} günstiger ist als die Stadt $2n-1$. Anstatt jede Reise von Balthasar zu verfolgen, können wir drei Dinge beweisen, die für alle Reisen von Balthasar invariant (unverändert) bleiben:

1. Jedes Mal, wenn das Schild in Stadt $2n$ oder $2n-1$ geändert wird, verringert sich der Preis der Reise von dieser Stadt um 2^n (wir betrachten Jerusalem als Stadt 0).

2. Die Kosten der Reisen von den Städten, in denen keine Änderung stattfindet, bleiben immer unverändert.

3. Der Kostenunterschied zwischen Reisen von Stadt $2n$ und $2n-1$ bleibt immer 2^{n-1} (für $n > 0$ natürlich).

Wir beginnen damit, das Ende von Balthasars Reise zu betrachten, also $n = 6$, und arbeiten uns rückwärts bis zum Anfang der Reise vor. Die Schilder können nicht in den Städten 11 und 12 geändert werden, daher sind die Aussagen 1 und 2 nach Konstruktion wahr. Der Kostenunterschied zwischen den beiden Städten beträgt tatsächlich immer $32 = 2^{6-1}$. Nun wählen wir ein beliebiges $n < 6$ und nehmen an, dass die drei Aussagen für alle Werte größer als n wahr sind. Wir werden später argumentieren, warum diese Annahme gerechtfertigt ist. Nach dieser Annahme verringert sich der Preis der Reise nach einer Änderung in Stadt $2n+1$ oder $2n+2$ um 2^{n+1}; keine anderen Kosten ändern sich; und der Kostenunterschied der Reisen von diesen Städten bleibt 2^n. Nun möchten wir unsere Behauptung für die Städte $2n$ und $2n-1$ beweisen. Nehmen wir an, Balthasar ändert das Schild in der Stadt $2n-1$. Dann müssen, da Stadt $2n$ günstiger ist, die Schilder in den vorherigen Städten bereits auf Stadt $2n$ zeigen (sonst hätte er das Schild in einer früheren Stadt geändert). Daher ändern sich keine Reisen außer der von Stadt $2n-1$. Außerdem beträgt der Kostenunterschied zwischen den Reisen von den Städten $2n+1$ und $2n+2$ nach unserer Annahme 2^n, sodass sich die Kosten der Reise von Stadt $2n-1$ um 2^n verringern. Auch wenn die Reise von Stadt $2n-1$ vor der Änderung um 2^{n-1} teurer war als von Stadt $2n$, ist sie danach um 2^{n-1} Gold günstiger.
Nehmen wir andererseits an, dass Balthasar das Schild in der Stadt $2n$ ändert. Er muss die Änderung zur besten Stadt von Stadt $2n-1$ bereits gemacht haben, daher ist die Reise von Stadt $2n-1$ günstiger als von Stadt $2n$, und die vorherigen Städte zeigen bereits auf Stadt $2n-1$. Auch hier beträgt der Kostenunterschied zwischen den Städten $2n+1$ und $2n+2$ gemäß unserer Annahme 2^n, sodass die Änderung die Reise von Stadt $2n$ um 2^n Gold günstiger macht. Nach der Änderung wird die Reise von Stadt $2n$ um 2^{n-1} günstiger sein als von Stadt $2n-1$, wenn sie vor der Änderung um 2^{n-1} teurer war.
Wenn unsere Annahme also wahr ist, haben wir die drei Aussagen für den von uns gewählten Wert für n bewiesen. Wir wissen bereits, dass $n = 6$ die Annahme erfüllt und daher müssen die Aussagen auch für $n = 5$ gelten. Aber wenn die Annahme für $n = 5$ wahr ist, können wir sie für $n = 4$ mit der gleichen Logik verwenden. Diese Kette setzt sich fort, bis wir $n = 0$ erreichen.[1] Somit gelten die drei Aussagen für alle Reisen von Balthasar. Die Gesamtanzahl der geänderten Schilder in Stadt $2n$ oder $2n-1$ ist daher der Kostenunterschied zwischen der optimalen Route und der Startroute von dieser Stadt, geteilt durch 2^n. Das sind 1

[1] Diese Art von Argumentation ist formal als *Induktion* bekannt.

Änderung in den Städten 9 und 10, 3 Änderungen in den Städten 7 und 8, und dann 7, 15, 31 und 63 Änderungen in den Städten 5, 6, Städten 3, 4, Städten 1, 2 und Jerusalem entsprechend. Insgesamt ergibt das $63 + 2 \cdot (31 + 15 + 7 + 3 + 1) = 177$ geänderten Schilder.

13 Die Rechnung des Weihnachtsmanns

Autor	Tobias Paul (HU Berlin)
Projekt:	EF 4-7

Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Um die kreative Freiheit bei den Geschenken zu beflügeln, hat der Weihnachtsmann ein neues System eingeführt: Jedes Geschenk besteht aus Einzelteilen und soll frei von den Weihnachtselfen zusammengesetzt werden. Dazu bekommt zu Beginn jeder Elf ein Einzelteil des großen Geschenks. Um die Teile geeignet miteinander zu verbinden, wuseln die Elfen wild durcheinander. Bei n anwesenden Elfen dauert es $1/(n(n-1))$ Tage, bis sich zwei Elfen mit passenden Teilen finden. Zum selben Zeitpunkt können nur zwei Elfen einander suchen. Wenn sich zwei Elfen gefunden haben, setzen sie ihre Teile sofort zusammen. Unmittelbar danach holt sich einer der beiden Elfen seinen Arbeitslohn beim Weihnachtsmann ab und verschwindet anschließend in den wohlverdienten Feierabend. Der andere Elf behält nun das größere Teil bei sich und sucht in dem Gewusel weiter nach passenden Stücken. Danach bleiben $n-1$ Elfen übrig, und sie wiederholen das analoge Verfahren, bei dem es $1/((n-1)(n-2))$ Tage dauert, bis zwei passende Elfen einander finden. So geht das Prozedere weiter, bis schließlich die letzten zwei (mittlerweile sehr großen) Teile zum fertigen Geschenk werden und die letzten zwei Elfen gehen dürfen.

Der Weihnachtsmann muss natürlich sicherstellen, dass die Geschenke auch rechtzeitig fertig werden. Außerdem muss er für die Kasse natürlich wissen, wie hoch seine Lohnkosten pro Geschenk maximal sind. Dabei ist nach Tarifvertrag eine Vergütung in Höhe von einem Keks am Tag für jeden Elfen vereinbart, wobei der Betrag auf den Krümel exakt ausgezahlt wird. Da die Anforderungen an die Geschenke weiter wachsen und immer mehr einzelne Teile erfordern, möchte er einen universellen Rahmen für das Geschenke-Zusammenstellen schaffen. Er möchte also Zahlen t und k finden, sodass

(a) jedes Geschenk, unabhängig von der Anzahl der Teile, in t Tagen zusammengebaut werden kann

(b) jedes Geschenk, unabhängig von der Anzahl der Teile, höchstens k Kekse kostet.

Derzeit ist sich der Weihnachtsmann nicht sicher, ob solche Werte t und k existieren, aber wenn sie es tun, möchte er, dass sie so klein wie möglich sind. Kannst du dem Weihnachtsmann helfen, die Antwort zu finden, also die minimalen Werte von t und k (falls sie existieren)?

Antwortmöglichkeiten:

1. $t = 0.5$ und $k = 1$
2. $t = 0.5$ und $k = 2$
3. $t = 0.5$ und k kann nicht gefunden werden
4. $t = 1$ und $k = 1$
5. $t = 1$ und $k = 2$
6. $t = 1$ und k kann nicht gefunden werden
7. $t = 2$ und $k = 1$
8. $t = 2$ und $k = 2$
9. $t = 2$ und k kann nicht gefunden werden
10. beide t und k können nicht gefunden werden.

Projektbezug:

Der beschriebene Prozess ist ein sogenannter *Koaleszenz-Prozess*. Dabei verschmelzen immer zwei Partikel zu einem größeren. In diesem Beispiel handelt es sich um den Kingman-Koaleszenten mit leicht angepasster Verschmelzungsrate. Der Koaleszent beschreibt dabei in der Biologie die Genealogie einer Teilpopulation. Die Zeit bis zum letzten verschmelzen ist dann die Zeit bis zum jüngsten gemeinsamen Vorfahren. In Aufgabenteil (a) sehen wir somit, wie lange es dauert, bis der jüngste gemeinsame Vorfahre für eine beliebig große Teilpopulation erreicht wurde. Teil (b) beschäftigt sich dann mit der Gesamtsumme der sogenannten Astlängen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Der erste Teil der Lösung: $t = 1$**.**
Zeigen wir zuerst, dass ein Geschenk der Größe n in 1 Tag zusammengebaut werden kann, unabhängig von n. Bis die ersten beiden Elfen mit kompatiblen Geschenkteilen zusammentreffen, vergehen $1/(n(n-1))$ Tage. Im nächsten Schritt vergehen $1/((n-1)(n-2))$ Tage und so weiter. Insgesamt, also bis die letzten beiden Elfen sich treffen, beträgt die Anzahl der vergangenen Tage

$$\frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 1} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Dies beweist, dass eine minimale Anzahl von Tagen t existiert und $t \leq 1$ gilt, d.h. jedes Geschenk braucht höchstens 1 Tag.
Zeigen wir nun, dass die Gleichheit $t = 1$ gilt. Nehmen wir das Gegenteil an, also $t < 1$. Das bedeutet, dass $t = 1 - \varepsilon$ Tage benötigt werden, um jedes Geschenk zusammenzubauen, wobei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl ist.
Nehmen wir nun an, wir haben ein Geschenk mit n Teilen, wobei $n > 1/\varepsilon$ (d.h. ein Geschenk aus sehr vielen Teilen). Gemäß der Gleichung (1) dauert es genau $1 - 1/n$ Tage ein solches Geschenk zu erstellen. Da t die Anzahl der Tage ist, in denen jedes Geschenk fertiggestellt werden kann, bedeutet dies insbesondere, dass

$$1 - \frac{1}{n} \leq \; t \; = \; 1 - \varepsilon.$$

Daraus folgt $n \leq 1/\varepsilon$, was ein Widerspruch ist. Daher kann t nicht echt kleiner als 1 sein.

Der zweite Teil der Lösung: k **kann nicht gefunden werden.**
Zeigen wir nun, dass ein k, sodass jedes Geschenk höchstens k Kekse kostet, nicht existiert. Nehmen wir das Gegenteil an, also dass ein solches k existiert. Wir werden nun eine Zahl n wählen, sodass ein Geschenk aus n Teilen mehr als k Kekse kostet, was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist.
Wähle $n = 2^m$, wobei m eine natürliche Zahl mit $m > 2k$ ist. Zeigen wir, dass ein Geschenk aus n Teilen mehr als k Kekse kostet.
Zu Beginn des Prozesses sind n Elfen unterwegs. Es dauert $1/(n(n-1))$ Tage, bis sich zwei von ihnen treffen, sodass der Elf, der gleich danach geht, $1/(n(n-1))$ Kekse ausgezahlt bekommen muss. Dann bleiben $n-1$ Elfen übrig, und es dauert weitere $1/((n-1)(n-2))$ Tage, bis sich wieder zwei von ihnen treffen, sodass der Elf, der gleich danach geht,

$$\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}$$

Kekse ausgezahlt bekommt. Allgemein gilt für $1 \leq j \leq n-2$, dass der j-te Elf, der geht,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{(n-j+1)(n-j)} &= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-j} - \frac{1}{n-j+1}\right) \\ &= \frac{1}{n-j} - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Kekse erhält. Die letzten beiden Elfen gehen gleichzeitig und erhalten jeweils

$$\frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 1} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Kekse. Die Gesamtanzahl der Kekse, die alle Elfen bezahlt bekommen müssen, beträgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\\ = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}.\end{aligned} \tag{2}$$

Wir werden nun zeigen, dass

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} > k$$

mit der gewählten Anzahl von $n = 2^m$ Teilen, was bedeutet, dass die n Elfen mit mehr als k Keksen bezahlt werden müssen. Dies würde den Beweis abschließen.
Zu diesem Zweck stellen wir zunächst fest, dass für jedes $r \geq 1$ die Summe der Kehrwerte der folgenden $2^r - 1$ Zahlen $2^{r-1}, 2^{r-1}+1, \ldots, 2^r - 1$, bezeichnet als S_r, abgeschätzt werden kann durch

$$S_r = \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^{r-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^r - 1} \;\geq\; \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^r} + \cdots + \frac{1}{2^r} \;=\; 2^{r-1} \cdot \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2}.$$

Da $n = 2^m$ gilt, erhalten wir für die Gesamtkosten an Keksen (2) folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} = S_1 + S_2 + \cdots + S_m \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

Somit benötigt der Weihnachtsmann, um alle Elfen zu bezahlen, mindestens $m/2 > k$ Kekse für ein solches Geschenk.

Wir kommen zu dem Schluss, dass es kein festes k gibt, für das jedes Geschenk mit bis zu k Keksen bezahlt werden kann. Hoffen wir mal, dass der Weihnachtsmann einen guten Ofen hat.

14 Das Lagerproblem des Weihnachtsmanns

Autor: Wouter Fokkema
Projekt: 4TU.AMI

Illustration: Vira Raichenko

Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat zu wenig Platz, um all seine Geschenke zu lagern! Glücklicherweise hat er einen alten Keller gefunden, der noch etwas Platz hat. Der Keller ist in Felder unterteilt. Eine Draufsicht des Kellers ist unten dargestellt. Der Weihnachtsmann möchte so viele Geschenke wie möglich in diesem Keller lagern.
Allerdings gibt es einige Regeln:

- Ein Geschenk belegt genau 1 Feld.
- Es dürfen keine Geschenke am Eingang und an Stellen platziert werden, an denen die Decke undicht ist; diese Felder sind mit einem Kreuz markiert.

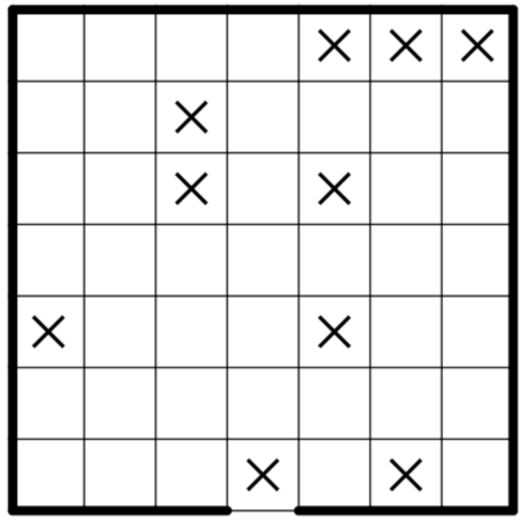


Abbildung 1: Das Layout des Kellers des Weihnachtsmanns. Das Kreuz in der Mitte der untersten Reihe markiert den Eingang. Alle anderen Kreuze markieren Stellen, an denen die Decke undicht ist.

- 2 Geschenke dürfen nicht in horizontal oder vertikal benachbarten Feldern sein. (Das liegt daran, dass alle Geschenke ähnlich aussehen und Geschenke, die direkt nebeneinander liegen, leicht verwechselt werden können.)
- Am Eingang des Kellers beginnend muss es möglich sein, jedes Feld ohne ein Geschenk zu besuchen, indem man horizontal und vertikal durch Felder ohne Geschenke geht. Mit anderen Worten müssen die Felder ohne Geschenke (einschließlich der Felder mit einem Kreuz) einen Bereich von Feldern bilden, der orthogonal verbunden ist. (Dies ist wichtig, da die Geschenke regelmäßig inspiziert werden müssen. Daher wäre es zusätzliche Arbeit, sie zu bewegen.)

Santa benötigt deine Hilfe, um die maximale Anzahl der Geschenke zu bestimmen, die in den Keller passen. Was ist diese maximale Anzahl?

Antwortmöglichkeiten:

1. Elf Geschenke
2. Zwölf Geschenke
3. Dreizehn Geschenke
4. Vierzehn Geschenke
5. Fünfzehn Geschenke
6. Sechzehn Geschenke

7. Siebzehn Geschenke
8. Achtzehn Geschenke
9. Neunzehn Geschenke
10. Zwanzig Geschenke

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Um die Lösung zu finden, zählen wir die Anzahl der horizontalen und vertikalen Verbindungen zwischen den Feldern. Um so viele Geschenke wie möglich im Keller unterzubringen, müssen wir diese Verbindungen so effizient wie möglich nutzen. Insgesamt gibt es 84 Verbindungen. Ein Geschenk in der Ecke hat 2 Verbindungen zu anderen Feldern, ein Geschenk am Rand hat 3 Verbindungen, und ein Geschenk in einem anderen Feld hat 4 Verbindungen, siehe Abbildung 2. Alle Verbindungen, die nicht an Geschenke angrenzen, werden verwendet, um die Felder ohne Geschenke miteinander zu verbinden. Sei W die Anzahl der Felder ohne Geschenke. Dann werden mindestens $W - 1$ Verbindungen benötigt, um diese Felder zu einem Gebiet zu verbinden.

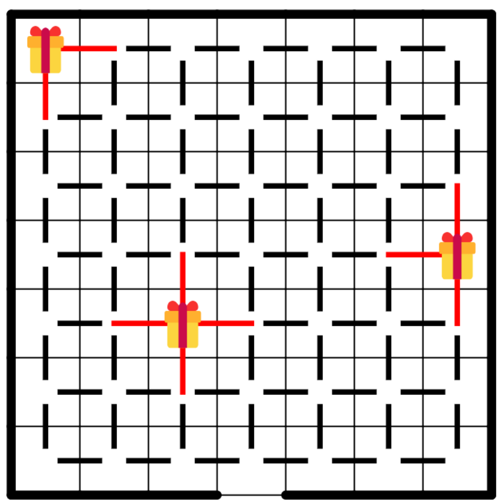


Abbildung 2: Die verschiedenen Feldtypen und ihre Verbindungen.

Indem wir so viele Geschenke wie möglich in den Ecken und entlang der Ränder platzieren, bleiben so viele Verbindungen wie möglich übrig, um die verbleibenden Felder zu einem Bereich zu verbinden. In höchstens 3 Ecken kann ein Geschenk platziert werden (aufgrund des Kreuzes in einer Ecke), und nachdem diese Geschenke platziert sind, passen höchstens 6 weitere Geschenke in Felder an den Rändern. Insgesamt benötigen die Geschenke in den Ecken und entlang der Ränder $3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 6 + 18 = 24$ Verbindungen. Jetzt bleiben noch 40 der 49 Felder übrig und 60 der 84 Verbindungen. Jedes zusätzliche Geschenk, das wir jetzt platzieren, benötigt 4 Verbindungen und 1 Feld. Damit können wir die unten stehende Tabelle erstellen.

Geschenke	Verbleibende Verbindungen	Felder ohne Geschenke
9	60	40
10	56	39
11	52	38
12	48	37
13	44	36
14	40	35
15	36	34
16	32	33
17	28	32

Wir sehen, dass 16 die größte Anzahl von Geschenken ist, bei der es theoretisch genügend Verbindungen geben kann um alle Felder ohne Geschenke zu verbinden. Um diese Anzahl zu erreichen, müssen daher 3 Geschenke in den Ecken und 6 Geschenke entlang der Ränder platziert werden. Wir müssen so wenige Verbindungen wie möglich verwenden, um die verbleibenden Felder zu verbinden. Das bedeutet, dass diese Verbindungen nirgendwo einen Kreis bilden dürfen, denn dann könnten wir eine Verbindung entfernen und die verbleibenden Felder wären immer noch verbunden. Deshalb kann in einer Lösung, die 16 Geschenke enthält, kein 2×2 Quadrat von Feldern existieren, das kein Geschenk enthält. Durch Anwendung dieser Erkenntnisse können wir die Lösung Schritt für Schritt herausfinden und feststellen, dass eine Platzierung von 16 Geschenken tatsächlich möglich ist, siehe Abbildung 3.

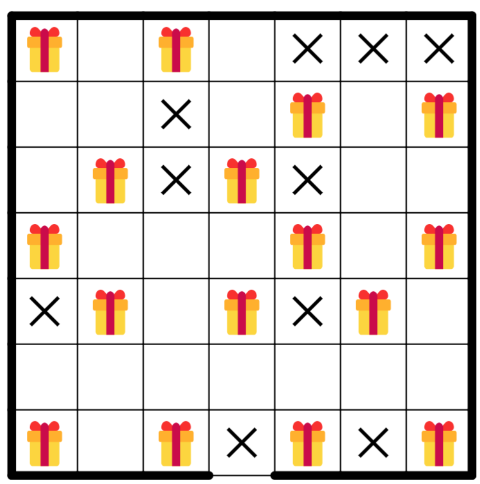


Abbildung 3: Eine Lösung (tatsächlich die einzige) um 16 Geschenke im Keller unterzubringen.

15 Tresor Knacken

Autor: Owen Hearder (FU Berlin)
Projekt: BMS

Illustration: Zyabya Santaurio

Aufgabe

Aapo war aufgeregt und ein wenig besorgt. Die Leitelfin Priita ging letzten Weihnachten in den Ruhestand und wählte Aapo aus, der neue Leitelf zu sein. Um sich auf das nächste Weihnachtsfest vorzubereiten, muss Aapo die Anweisungen lesen, wie man Leitelf wird. Da Priita so lange Leitelfin war, sind die Anweisungen in den Archiven gesperrt.

Die Archive sind auf eine sehr komplexe Weise gesperrt. Priita sagte ihm Folgendes: „Es gibt eine Menge von vierstelligen Zahlen, die gültige Codes für dem Tresor sind, und alle enthalten die Ziffer 6. Ich habe dir einen Algorithmus beschrieben, bei dem die Ausführung der Schritte 2 bis 5 (eine sogenannte Iteration) zu einer Zahl führt. Die gültigen Codes sind

solche Zahlen, wo es einen Zeitpunknt gibt, an dem diese Zahl auftaucht und dann ab dort das Ergebnis weiterer Anwendungen des Algorithmus diese Zahl nicht mehr ändern."
Aapo schaut auf das Papier, das sie ihm gegeben hat. In der Tat ist der Algorithmus wie folgt beschrieben:

1. Wähle eine Zahl zwischen 1 und 9999 mit mindestens zwei verschiedenen Ziffern.
2. Füge Nullen vor der Zahl hinzu, um vier Ziffern zu erhalten.
3. Durch Umstellen der Ziffern bilde die höchste und die niedrigste Zahl.
4. Subtrahiere die niedrigste Zahl von der höchsten Zahl.
5. Schreibe diese Zahl auf und befolge damit erneut die Anweisungen ab Schritt 2.

„Das wird alles sein, was du brauchst, um den Tresor zu öffnen", sagte Priita mit einem Grinsen im Gesicht. Aapo gerät in Panik, da er denkt, dass es ewig dauern wird, einen Code herauszufinden! Aber Priita ist optimistisch und lächelt ihn an.
Angenommen, Priita hat recht und die Menge der gültigen Codes, die den von Priita beschriebenen Eigenschaften entsprechen, existiert, wie viele gültige Codes gibt es dann?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 10.

Lösung

Die richtige Antwort lautet: 1.

Die Idee dieser Aufgabe ist, dass wir trotz einer unendlichen Schleife von Anweisungen irgendwann zu einer bestimmten Zahl konvergieren, d.h. das erneute Anwenden von Priitas Anweisungen auf diese Zahl im Algorithmus ändert sie nicht. Diese Zahl ist der Code, den sie für den Safe ausgewählt hat.
Wir behaupten, dass 6174 die einzige vierstellige Zahl ist, bei der nicht alle Ziffern gleich sind und die die Ziffer 6 enthält (tatsächlich kann man zeigen, dass es die einzige vierstellige Zahl neben 0000 ist), die sich unter Priitas Anweisungen nicht ändert. Wir nennen eine solche Zahl einen *Fixpunkt*.
Zunächst ist es leicht zu sehen, dass sich 6174 nach Anwendung der Schritte 2 bis 5 nicht ändert. Das Umordnen in Schritt 3 ergibt 7641 und 1467; das Subtrahieren in Schritt 4 ergibt $7641 - 1467 = 6174$.
Als Nächstes zeigen wir, dass 6174 der einzige Fixpunkt ist. Wir verwenden einen Überstrich, wenn wir uns auf die Ziffern einer Zahl beziehen, und nicht auf die Zahl selbst.
Sei $x_0 := \overline{abcd}$ eine vierstellige Zahl mit Ziffern a, b, c, d, so dass die Anwendung von Priitas Anweisungen auf x_0 wieder zu x_0 führt. Seien a_1, a_2, a_3, a_4 eine Umsortierung der Ziffern a, b, c, d derart, dass a_1, a_2, a_3, a_4 aufsteigend sortiert sind. In mathematischer Formulierung bedeutet das

$$\begin{gathered} a_1, a_2, a_3, a_4 = a, b, c, d \\ \text{und } 9 \geq a_4 \geq a_3 \geq a_2 \geq a_1 \geq 0. \end{gathered}$$

Dann ist die höchste Zahl, die wir mit diesen vier Ziffern bilden können, $\overline{a_4a_3a_2a_1}$ und die niedrigste ist $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Das Subtrahieren der niedrigeren $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ von der höheren $\overline{a_4a_3a_2a_1}$ ergibt die folgende Gleichung:

$$x_0 = 1000(a_4 - a_1) + 100(a_3 - a_2) + 10(a_2 - a_3) + (a_1 - a_4) \tag{3}$$

Angenommen $a_2 = a_3$, dann gilt

$$\begin{aligned} x_0 &= 1000(a_4 - a_1) + 100(a_3 - a_2) + 10(a_2 - a_3) + (a_1 - a_4) \\ &= 1000(a_4 - a_1) + (a_1 - a_4). \end{aligned}$$

Da wir annehmen, dass $x_0 \neq \overline{0000}$ und $a_4 > a_1$ ist, folgt

$$x_0 = \overline{(a_4 - a_1 - 1)99(10 + a_1 - a_4)}. \tag{4}$$

Daher muss x_0 zwei Ziffern haben, die gleich 9 sind, und diese müssen die letzten Ziffern in der Reihenfolge sein, also $a_4 = a_3 = 9$. Aufgrund der Annahme $a_2 = a_3$ folgt, dass $a_2 = a_3 = a_4 = 9$ ist. Einsetzen von $a_4 = 9$ in Gleichung (4) ergibt $x_0 = \overline{(8 - a_1)99(a_1 + 1)}$. Es folgt, dass $9 = a_1 + 1$, weil a_1 die kleinste Ziffer ist und alle anderen Ziffern 9 sind. Also gilt $a_1 = 8$. Andererseits ist $a_1 = 8 - a_1$, da $8 - a_1$ kleiner als 9 ist und somit nicht a_2, a_3

oder a_4 entsprechen kann. Insbesondere folgt daraus $a_1 = 4$ was ein Widerspruch ist. Daher ist die Annahme $a_2 = a_3$ falsch und wir schlussfolgern $a_2 < a_3$.
Als Nächstes betrachten wir die Gleichungen, die wir für jede Ziffer durch $a_2 < a_3$ erhalten, und zwar:

$$\begin{aligned} a &= a_4 - a_1 \\ b &= a_3 - a_2 - 1 \\ c &= a_2 - a_3 + 9 \\ d &= a_1 - a_4 + 10 \end{aligned}$$

Addition der 1. und 4. sowie der 2. und 3. Gleichung ergibt $a + d = 10$ und $b + c = 8$.
Beachte, dass die Zahl, die wir durch Befolgen der Anweisungen erhalten, nur von den Ziffern der Zahl abhängt, mit der wir angefangen haben, und nicht von der Zahl selbst. Daher ignorieren wir zunächst die Reihenfolge der Ziffern und betrachten nur alle möglichen Paarungen von Zahlen a, b, c, d, die $a + d = 10$ und $b + c = 8$ erfüllen. In mathematischer Schreibweise heißt das

$$\{a, d\} \in \Big\{\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}\Big\},$$

und ähnlich

$$\{b, c\} \in \Big\{\{0, 8\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4, 4\}\Big\}.$$

Unter Verwendung der Bedingung, dass eine der Ziffern eine 6 ist, haben wir nur neun Optionen für $\overline{a_4a_3a_2a_1}$ und $\overline{a_1a_2a_3a_4}$:

1. 8640, 0468
2. 7641, 1467
3. 6642, 2466
4. 6543, 3456
5. 6444, 4446
6. 9621, 1269
7. 8622, 2268
8. 7632, 2367
9. 6552, 2556

Subtrahieren wir jeweils die größere von der kleineren Zahl, so erhalten wir neun mögliche Kandidaten. Im nächsten Schritt machen wir eine Iteration von den Kandidaten und beobachten, dass nur das Paar 7641, 1467 wieder die gleichen Ziffern ergibt. Subtraktion dieser beiden Zahlen führt nämlich zu 6174. Damit ist 6174 der einzige Fixpunkt.

Wir behaupten außerdem, dass durch die Durchführung von Priitas Routine mit einer beliebigen vierstelligen Zahl, die mindestens zwei verschiedene Ziffern enthält, wir schließlich nach höchstens 7 Schritten die Zahl 6174 erhalten werden. Der Beweis für diese Behauptung geht an dieser Stelle über das Ziel hinaus, weshalb wir interessierte Schüler bitten, danach zu suchen: „Kaprekars Routine“. Daher können wir unter der Annahme der Richtigkeit von Priitas Behauptung feststellen, dass Aapo, egal welche Zahl er wählt, irgendwann die Zahl 6174 erhalten wird und danach keine andere Zahl mehr durch erneutes Anwenden von Priitas Anweisungen erhalten wird.

16 Das Schafhotel

Autor: Matthew Maat (Universiteit Twente)
Projekt: Combining algorithms for parity games and linear programming

Illustration:Zyanya Santaurio

Aufgabe

Mit dem Klang des Engelschores noch in ihrer Erinnerung nachhallend, machen sich die Hirten Ananias, Benjamin, Caius und David auf den Weg nach Bethlehem. Zuvor müssen sie jedoch ihre Schafe in einem Schafhotel abgeben, da sie große Herden verschiedener Schafsarten haben. Alle vier gehen zu unterschiedlichen Hotels. Die Standardregeln für Schafhotels im ersten Jahrhundert lauten wie folgt:

1. Es dürfen so viele Zimmer benutzt werden, wie man möchte.
2. Es ist nicht erlaubt, zwei verschiedene Schafsarten über genau denselben Satz von Zimmern zu verteilen. Zum Beispiel, wenn alle schwarzen Schafe auf Zimmer 1 und

2 verteilt werden, können alle weißen Schafe in Zimmer 1 verweilen oder es können die weißen Schafe auf Zimmer 1, 2 und 3 aufgeteilt werden, aber die weißen Schafe dürfen nicht ebenfalls genau auf Zimmer 1 und 2 aufgeteilt werden. Ebenso ist es beispielsweise nicht erlaubt, alle schwarzen und alle weißen Schafe nur auf Raum 1 zu verteilen.

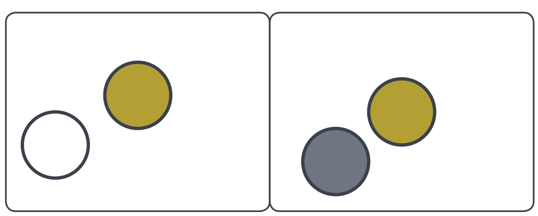
3. Für jede Schafsart x und y gibt es eine Art z (die auch x oder y sein kann), sodass folgendes für jedes Zimmer gilt: Entweder gibt es keine Schafe der Art x, y oder z in diesem Zimmer, oder es gibt Schafe der Art z in diesem Zimmer und auch Schafe der Art x und/oder y.

4. Der Preis wird durch das Zimmer mit den meisten Schafsarten bestimmt. Gezahlt werden so viele Goldstücke, wie es Schafsarten in diesem Zimmer gibt.

Als Beispiel betrachten wir einen Hirten mit schwarzen (s), weißen (w) und braunen (br) Schafen und erfüllen die Regeln wie folgt (vgl. Abb. 1):

- Zu Regel 1: Der Hirte benutzt zwei Zimmer.
- Zu Regel 2: Er platziert alle weißen Schafe in Zimmer 1, alle schwarzen Schafe in Zimmer 2 und teilt die braunen Schafe auf Zimmer 1 und 2 auf.
- Zu Regel 3 (vgl. Tabelle in Abb. 1): Wenn x für schwarze und y für weiße Schafe steht, dann wählen wir für z braune Schafe. (Vertauschen wir die Rollen von x und y so wählen wir trotzdem die gleiche Schafsart als z. Nach dieser Konvention wird auch die Tabelle in Abb. 1 nur verkürzt dargestellt.)

  Wenn x für schwarze oder weiße Schafe steht und y für braune Schafe, dann wählen wir auch z als braune Schafe.
- Zu Regel 4: Das Zimmer mit den meisten Schafsarten enthält in diesem Fall zwei Schafsarten. Also bezahlt der Hirte zwei Gold.



x, y	s, w	w, br	s, br
z	br	br	br

Abbildung 1: Die günstigste Aufteilung für einen Hirten mit 3 Schafsarten. Oben: Die Aufteilung auf die Räume. unten: Die dazugehörige Tabelle mit der Abbildung $x, y \mapsto z$.

Nun ist bekannt, dass Ananias 4 Schafsarten hat, Benjamin 5, Caius 6 und David 7. Jeder Hirte findet aufgrund seiner Erfahrung mit den Regeln schnell die Verteilung der Schafe, die für ihn am wenigsten kostet. Es stellt sich heraus, dass jeder von ihnen nur 3 Zimmer für eine günstigste Aufteilung benötigt. Ananias zahlt A Gold, Benjamin zahlt B Gold, Caius zahlt C Gold und David zahlt D Gold. Was ist $A + B + C + D$?

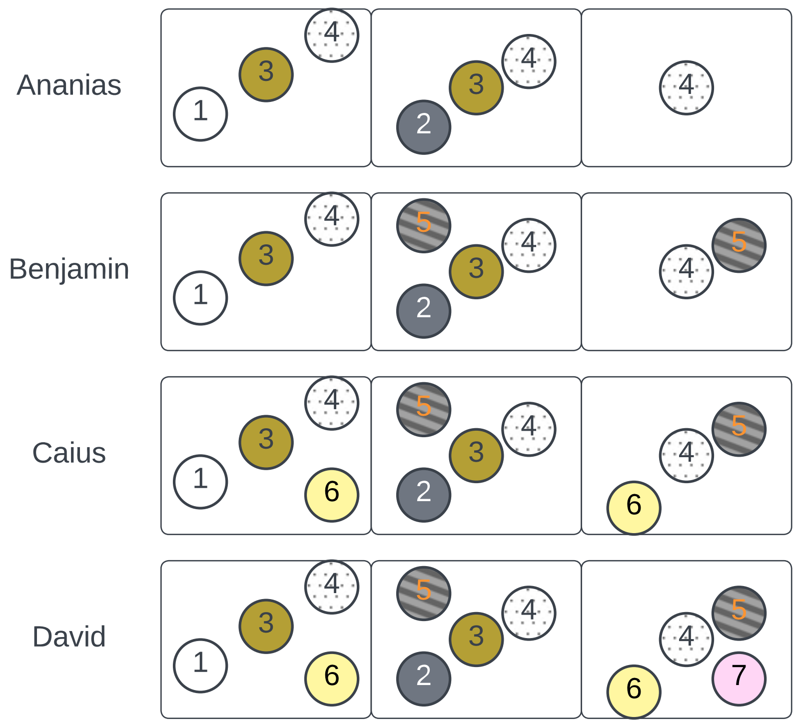
Antwortmöglichkeiten:

1. 13
2. 14
3. 15
4. 16
5. 17
6. 18
7. 19
8. 20
9. 21
10. 22

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Wir behaupten, dass die Verteilung in Abbildung 2 oben optimal bezüglich der Gesamtkosten der Hirte ist, also $3+4+4+4=15$ Gold der niedrigste Gesamtpreis ist. Eine Zuordnung $x, y \mapsto z$, die zeigt, dass Regel 3 mit dieser Verteilung niemals verletzt wird, befindet sich in gekürzter Form darunter.



x,y	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
z	3	3	4	4	6	6	3	4	5	4	5

x,y	3,4	3,5	3,6	3,7	4,5	4,6	4,7	5,6	5,7	6,7
z	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6

Abbildung 2: **Oben:** Günstigste Aufteilung der Schafe auf 3 Zimmer für jeden Hirten. **Unten:** Tabelle einer gültigen Zuordnung $x, y \mapsto z$ in gekürzter Form: Wenn x, y auf z abgebildet wird, dann wird auch y, x auf z abgebildet und alle Paare mit $x = y$ werden auf x abgebildet, d.h. $x, x \mapsto x$. Man beachte außerdem, dass die Zuordnung für alle Hirten gültig ist, d.h. um beispielsweise die Zuordnung für Benjamin zu erhalten, können alle Einträge mit den Ziffern 6 und 7 ignoriert werden.

Bevor wir mit dem Beweis fortfahren, dass die obige Verteilung tatsächlich optimal ist, wollen wir noch kurz erklären wie man auf die obige Lösung kommen kann. Die entscheidende Beobachtung ist, dass es nur eine Möglichkeit (bis auf Umbenennung der Räume und Schafsarten) gibt Davids 7 Schafsarten so aufzuteilen, dass Regel 2 erfüllt ist. Ausgehend von dieser Verteilung, kann man anschließend die Verteilungen für die anderen Hirten finden indem man jedes mal eine passende Schafsart entfernt.

Nun müssen wir noch zeigen, dass wir die Schafe nicht auf günstigere Weise verteilen können. Um das Argument zu erleichtern, sagen wir, dass der Schafstyp x eine *Teilmenge* des Typs y ist, wenn es Schafe vom Typ y in jedem Raum gibt, der Schafe vom Typ x hat. Wir sagen außerdem, dass Typ z die *Vereinigung* der Typen x und y ist, wenn z genau der Schafstyp ist, der durch Regel 3 vorgeschrieben ist, d.h. die Schafe vom Typ z sind genau in den Räumen, die Schafe vom Typ x oder y enthalten.
Wir beginnen mit Ananias und seinen 4 Schafsarten. Angenommen, Ananias kann seine Schafe so aufteilen, dass er nur 2 Gold zahlen muss. Wähle zwei beliebige verschiedene Arten x und y, $x \neq y$. Nach Regel 3 gibt es ein z, das die Vereinigung von x und y ist. Angenommen $z \neq x$ (wenn $z = x$ ist, können wir x und y vertauschen), dann ist Art x eine Teilmenge von Art z. Die Räume mit Schafen der Art x haben also mindestens zwei Arten, da sie bereits x und z enthalten. Jetzt betrachten wir die anderen beiden Arten neben x und z, sagen wir r und s. Wenn von Art r Schafe in Räumen sind, die keine Schafe der Art z haben, dann muss die Vereinigung von r und z von den Arten r, z verschieden sein und kann nicht x sein. Aber dann muss die Vereinigung auch Schafe in den Räumen haben, in denen Schafe von x sind, also haben wir drei Arten im selben Raum, was ein Widerspruch ist. Die Schafe der Art r können also nur in Räumen sein, in denen die Art z ist, und natürlich nicht dort, wo x ist (da sonst dort wieder drei Schafsarten wären). Angenommen, die Schafe der Art r sind nicht in allen Räumen, in denen die Art z, aber nicht die Art x ist. Dann ist die Vereinigung von r und x von z verschieden. Denn es gibt mindestens einen Raum mit Schafen der Art z, der nicht die Arten x oder r enthält. Somit haben wir wieder drei Arten von Schafen in den Räumen mit x-Schafen. Die Schafe der Art r müssen also genau in den Räumen von z, aber ohne x, sein. Aber dasselbe gilt für s. Dann verstoßen die Arten r und s jedoch gegen Regel 2. Daher können wir schlussfolgern, dass es nicht möglich für Ananias ist nur 2 Gold zu zahlen.
Nun zu Benjamin. Wir stellen fest, dass wir in unserem Beweis für vier Schafsarten immer drei Arten x, y und z finden konnten, sodass x eine Teilmenge von y ist, und y eine Teilmenge von z ist; dies gilt also auch für fünf Arten. Angenommen, r und s seien die verbliebenen zwei Schafsarten (also sind r und s nicht x, y oder z). Nehmen wir weiter an, dass Benjamin nur 3 Gold bezahlen muss. Da es bereits 3 Schafsarten in den Räumen mit Art x gibt, kann es in diesen Räumen keine weiteren Arten geben. Daher müssen r und s in Räumen ohne Art x sein. Was kann dann die Vereinigung von x und r sein? Es kann nicht s sein, weil es dann einen Raum mit sowohl x als auch s gäbe. Die Vereinigung muss also y oder z sein. Dasselbe gilt für die Vereinigung von x und s: sie muss y oder z sein. Das bestimmt jedoch schon die Räume für die Arten r und s: eine von ihnen ist in den Räumen, die die Art z haben, aber nicht x; und die andere ist in den Räumen mit y, aber nicht x. Aber jetzt enthalten die Räume, die Schafe der Art y und z, aber nicht der Art x haben, auch die beiden Arten r und s: also vier Schafsarten insgesamt. Wir kommen zu dem Schluss, dass 3 Goldstücke für Benjamin nicht ausreichen. Da die Aufteilung der Schafe mit mehr Arten schwieriger wird, folgt, dass auch Caius und David nicht mit 3 Gold auskommen.

17 Die bunten Weihnachtsgeschenke

Autor: Lukas Protz
Projekt: MATH+

Illustration:Friederike Hofmann

Aufgabe

Zur Entlastung der Elfen bei der Färbung von Geschenkverpackungen, die in der Form eines Würfels sind, hat der eifrige Elf Eifi eine Maschine gekauft. Diese soll die Färbungen für die Elfen übernehmen. So eifrig wie Eifi ist, hat er auch schon alle Deckel für die Geschenkverpackungen mit der Maschine anfertigen lassen. Sie sind alle mit gelben Sternen auf dunkelblauem Hintergrund gefärbt.

Leider hat Eifi vergessen vorher den Weihnachtsmann zu fragen, ob die Elfen die Maschine überhaupt benutzten dürfen. Dieser ist nämlich nicht begeistert darüber, dass die Deckel der Geschenke alle gleich aussehen. Damit er beim Austeilen der Geschenke an Weihnachten möglichst schnell das richtige findet, hätte er am liebsten, dass alle Geschenke unterschiedlich aussehen. Auch findet er bunte Geschenke viel schöner als einfarbige.

Eifi versucht den Weihnachtsmann zu beruhigen. Dazu zeigt er ihm, dass die Maschine jede der übrigen fünf Seiten eines Geschenks zufällig färben kann. Für die Färbung stehen sogar neun unterschiedliche Farben zur Verfügung.

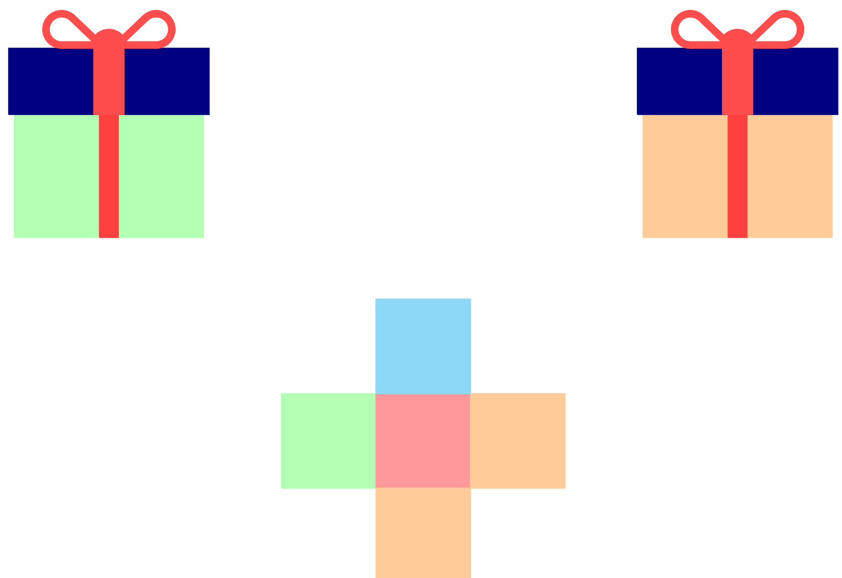
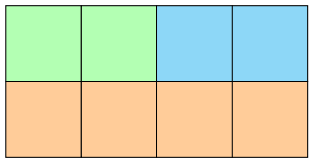
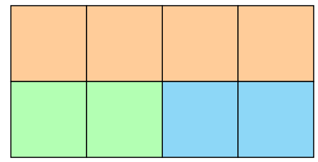


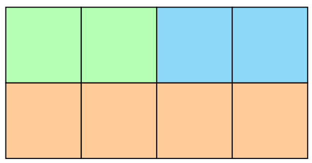
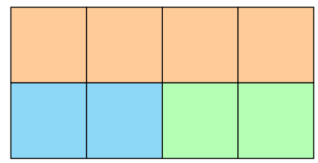
Abbildung 1: Ein bereits verpacktes Geschenk. oben links: Das Geschenk von einer Seite, oben rechts: Das gleiche Geschenk von der gegenüberliegenden Seite, unten: Der Netzplan der Geschenkverpackung ohne Deckel.

Der Weihnachtsmann ist davon jedoch nicht überzeugt. Es könnte trotzdem passieren, dass ein Geschenk nur in einer oder zwei Farben gefärbt wird. Daher macht er Eifi ein Angebot. Er soll zunächst bestimmen, wie viel unterschiedliche Färbungen der Verpackung ohne Deckel es mit den neun Farben gibt. Dabei sind zwei Geschenke unterschiedlich gefärbt, falls sie sich nicht nur durch Spiegelungen oder Drehungen voneinander unterscheiden. Sei a der Anteil aller Färbungen, bei denen die Anzahl der Seiten, die die gleiche Farbe wie eine andere Seite haben, höchstens zwei beträgt. Die Elfen dürfen die Maschine benutzen, wenn der Anteil a größer als $0,7$ ist. Ansonsten müssen sie wie immer alle Geschenke selbst einfärben, damit immer alle Seiten eine unterschiedliche Farbe haben. Wie hoch ist der Anteil a der Geschenke mit höchstens zwei gleichfarbigen Seiten?

Erklärung von Spiegelung und Drehung
Um das Konzept der Spiegelung zu erklären, betrachten wir zwei 2×4 Gitter:

Diese Gitter sind nicht verschieden, da sie sich nur durch eine Spiegelung zwischen den beiden Reihen unterscheiden.
Um das Konzept der Drehung zu erklären, betrachten wir erneut zwei 2×4 Gitter:

Diese Gitter sind nicht verschieden, da sie sich nur um eine Drehung mit Drehwinkel π (oder $180°$) unterscheiden.

Antwortmöglichkeiten:

1. $a \leq 0,1$
2. $0,1 < a \leq 0,2$
3. $0,2 < a \leq 0,3$
4. $0,3 < a \leq 0,4$
5. $0,4 < a \leq 0,5$
6. $0,5 < a \leq 0,6$
7. $0,6 < a \leq 0,7$
8. $0,7 < a \leq 0,8$
9. $0,8 < a \leq 0,9$
10. $0,9 < a$

Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Um die Lösung zu bestimmen, zählen wir systematisch alle möglichen unterschiedlichen Färbungen. Um dies zu tun, unterscheiden wir nach der Anzahl der verwendeten Farben. Dazu modellieren wir den Würfel als das Netz seiner Seiten ohne den Deckel (wie im Beispiel). Außerdem wollen wir noch anmerken, dass sich zwei Würfel im Raum nur dann durch eine Rotation oder Spiegelung unterscheiden, wenn ihre Netze in der Ebene sich durch eine Rotation oder Spiegelung unterscheiden.

1. Nur eine Farbe wird verwendet. In diesem Fall gibt es nur eine Möglichkeit den Karton zu färben. Da es neun unterschiedliche Farben gibt, erhalten wir neun verschiedene Geschenke.

2. Genau zwei Farben werden verwendet. Wir behaupten, dass es insgesamt fünf unterschiedliche Färbungsmöglichkeiten gibt (bis auf Drehungen und Spiegelungen). Um die Aufteilung der Farben besser beschreiben zu können, verwenden wir die Schreibweise $1-4$, wenn eine Seite in der einen Farbe und die übrigen vier Seiten in der anderen Farbe gefärbt werden. Ähnlich bedeutet dann $2-3$, dass zwei Seiten in einer Farbe und drei in der anderen gefärbt werden. Die fünf Möglichkeiten sind in Abbildung 2 zu sehen.

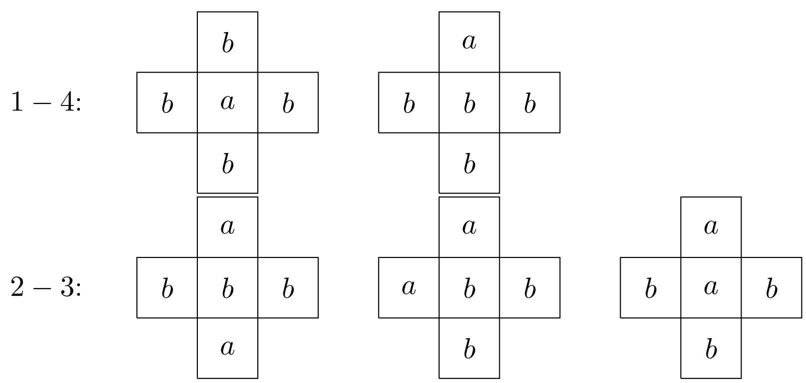


Abbildung 2: Die fünf Möglichkeiten ein Geschenk mit zwei Farben zu färben. Als Platzhalter für die Farben wurden Kleinbuchstaben verwendet.

Die Anzahl der Möglichkeiten zwei Farben auszusuchen ist dann $9 \cdot 8$, wodurch sich eine Gesamtanzahl von $5 \cdot 9 \cdot 8$ möglichen Geschenken für diesen Fall ergibt. Die Farben müssen hierbei nacheinander ausgesucht werden, damit wir entscheiden können welche Farbe auf weniger Geschenkseiten benutzt wird. Würden wir die Farben stattdessen gleichzeitig aussuchen, hätten wir keine Möglichkeit mehr die Farbaufteilung zu bestimmen.

3. Genau drei Farben werden verwendet. Wir verwenden dieselbe Schreibweise wie oben. Die Optionen für diesen Fall sind $1-1-3$ oder $1-2-2$, siehe Abbildung 3.

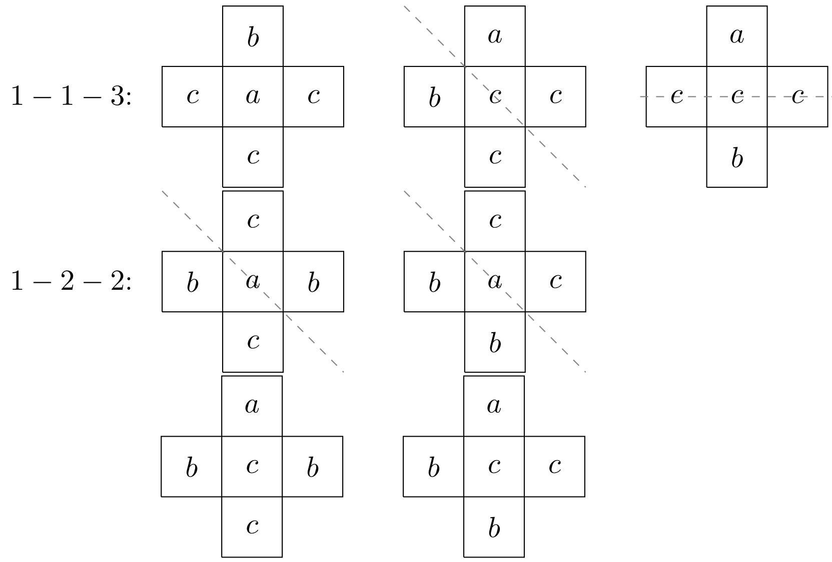


Abbildung 3: Die sieben Möglichkeiten ein Geschenk mit drei Farben zu färben.

Bei allen Fällen, ausgenommen dem ersten und den letzten beiden, gibt es jeweils eine Spiegelung (grau gestrichelt), die zwar die Namen der Farben vertauscht, aber nicht die Aufteilung der Farben an sich. Deswegen gibt es für diese Möglichkeiten nicht $9 \cdot 8 \cdot 7$ Färbungen (Anzahl Möglichkeiten, drei Farben aus den neun Farben in Reihenfolge auszusuchen), sondern nur halb so viele. Insgesamt ergeben sich also $\left(\frac{4}{2} + 3\right) \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ Färbungen.

4. Es werden genau vier Farben verwendet. In diesem Fall gibt es nur die Option $1 - 1 - 1 - 2$, siehe Abbildung 4.

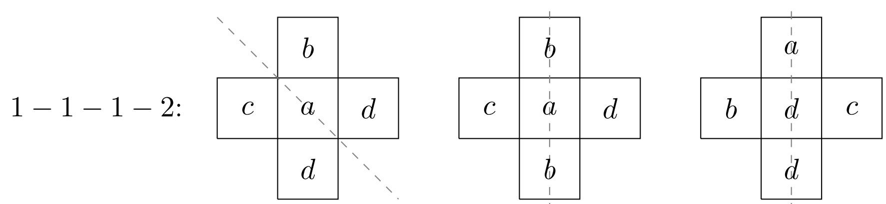


Abbildung 4: Die drei Möglichkeiten ein Geschenk mit vier Farben zu färben.

In jedem Fall gibt es diesmal eine Spiegelung, die die Farbnamen aber nicht die Farbaufteilung vertauscht. Daher gibt es insgesamt $\frac{3}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ Färbungen.

5. Genau fünf Farben werden verwendet. Das heißt jede Seite wird in einer anderen Farbe bemalt. Insgesamt erhält man durch Spiegelungen und Drehungen acht symmetrische Versionen. Dadurch ergeben sich $\frac{1}{8} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ Färbungen.

Addieren wir alle Färbungsmöglichkeiten der einzelnen Fälle erhalten wir 9315. Die Anzahl der Färbungen, bei denen höchstens zwei Seiten die gleiche Farbe haben erhalten wir durch Addition der Möglichkeiten aus den letzten beiden Fällen. Sie beträgt 6426. Damit ergibt sich

$$a = 0,6899\dots$$

Also müssen die Elfen leider doch alle Geschenke selbst bemalen, es sei denn Eifi besorgt nächstes Jahr nicht nur die Deckel, sondern sogar alle Geschenkverpackungen vorzeitig...

18 Stammbaum der Elfen

Autor: Andrei Comăneci (TU Berlin)
Projekt: Graduiertenkolleg „Facets of Complexity“ (GRK 2434)

Illustration: Zyanya Santaurio

Aufgabe

Die jungen Weihnachtselfen haben kürzlich in der Elfenschule das faszinierende Konzept der Evolution und die Klassifizierung der Elfen in einen großen Stammbaum kennengelernt. Die Elfen sind schon immer bekannt gewesen für ihren festlichen Geist und ihre Hingabe Santa Claus zu helfen, aber jetzt sind sie begierig darauf, ihre eigene Geschichte zu erkunden. Ihnen wurde beigebracht, wie sich die Elfen im Laufe der Zeit entwickelt und sich an verschiedene Klimazonen und Umgebungen angepasst haben.
Zum Beispiel zeigt Abbildung 1 die evolutionäre Geschichte von vier Elfenfamilien. Weihnachts- und Schneeelfen sind am engsten miteinander verwandt und teilen einen gemeinsamen Vorfahren von vor 2 Millionen Jahren. Andererseits sind Mondelfen am wenigsten eng

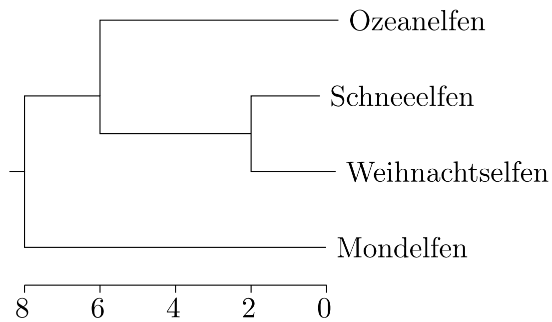


Abbildung 1: Stammbau der Elfen. Die X-Achse zeigt die Zeit in Millionen Jahren an.

mit den anderen verwandt, da ihr gemeinsamer Vorfahre mit jeder anderen Spezies 8 Millionen Jahren zurückliegt. Die Zeiten der jüngsten gemeinsamen Vorfahren sind in Tabelle 1 zusammengefasst und dienen zur Messung der Unterschiede zwischen den Elfenfamilien.

	O	S	W	M
Ozeanelfen (O)	0	6	6	8
Schneeelfen (S)	6	0	2	8
Weichnachtselfen (W)	6	2	0	8
Mondelfen (M)	8	8	8	0

Tabelle 1: Dissimilaritätsmatrix der Elfenfamilien

Zehn junge Elfen wollten mehr über ihre evolutionäre Geschichte erfahren, also suchten sie im Archiv des Nordpols nach dem „Großen Buch der Elfenevolution“. Leider wurde dieses alte Buch im Laufe der Jahre schwer beschädigt, was zum Verlust vieler Informationen führte. Die Dissimilaritätsmatrix war jedoch größtenteils intakt. Die wenigen fehlenden Einträge sind in Tabelle 2 mit W, X, Y und Z markiert.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0	8	8	8	8	8	8	8	8
B	8	0	5	**Y**	**Z**	7	7	7	**W**
C	8	5	0	1	7	7	7	7	7
D	8	**Y**	1	0	7	7	7	7	7
E	8	**Z**	7	7	0	1	4	4	4
F	8	7	7	7	1	0	4	4	4
G	8	7	7	7	4	4	0	**X**	2
H	8	7	7	7	4	4	**X**	0	1
I	8	**W**	7	7	4	4	2	1	0

Tabelle 2: Dissimilaritätsmatrix mit fehlenden Einträgen

Die kleinen Elfen erkannten, dass nicht jeder Wert für die fehlenden Einträge gültig sein konnte, und es möglich ist, den Stammbaum aus der Matrix zu rekonstruieren, sobald sie die vollständige Matrix haben. Nachdem sie einige Möglichkeiten in Betracht gezogen hatten, schlug jeder der zehn Elfen potenzielle Werte für die fehlenden Einträge vor. Allerdings ist nur einer ihrer Vorschläge eine gültige Option. Welcher der zehn Elfen lag richtig?

Antwortmöglichkeiten:

1. W = 7, X = 1, Y = 7, Z = 7
2. W = 8, X = 1, Y = 1, Z = 7
3. W = 7, X = 2, Y = 5, Z = 5
4. W = 7, X = 2, Y = 1, Z = 7
5. W = 8, X = 1, Y = 5, Z = 7
6. W = 8, X = 1, Y = 7, Z = 7
7. W = 7, X = 2, Y = 1, Z = 5
8. W = 7, X = 1, Y = 5, Z = 5
9. W = 7, X = 2, Y = 5, Z = 7
10. W = 8, X = 1, Y = 5, Z = 5

Anmerkung: Ein Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine Menge von Knoten und E eine Menge von Kanten bezeichnet. Ein Zyklus in einem Graphen ist eine Folge von verschiedenen Knoten $v_1, \dots, v_n$ mit $n \geq 3$, so dass $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\} \in E$. Ein Baum ist ein Graph ohne Zyklen, und ein gewurzelter Baum ist ein Baum mit einem ausgezeichnetem Knoten, der sog. Wurzel.

Projektbezug:

Phylogenetische Bäume (auch im üblichen Sprachgebrauch Stammbäume genannt) sind ein Mittel zur Darstellung der evolutionären Geschichte der untersuchten Spezies (für weitere Details könnte man zum Beispiel die Website: http://tolweb.org/tree/ konsultieren). Die Matrixdarstellung ist eine alternative Möglichkeit, die Beziehungen zwischen den Spezies zu betrachten. In einem Projekt der TU Berlin konzentrieren wir uns darauf, phylogenetische Bäume mithilfe der tropischen Geometrie zu analysieren. Fehlende Daten sind in der Praxis häufig, daher ist das Ausfüllen der fehlenden Einträge ein gängiger Schritt in der Vorverarbeitung.

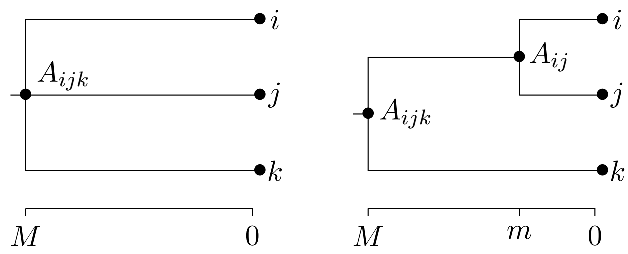


Abbildung 2: Die zwei verschiedenen Stammbäume die man für drei Arten erhalten kann.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Definieren wir einen Graphen, der als Knoten die Menge der elf Arten (A, ..., I) und die Menge der paarweise jüngsten gemeinsamen Vorfahren (jgV) enthält. Ein Vorfahre ist durch eine Kante mit seinem direkten Nachfahren verbunden. Dieser Graph ist ein gewurzelter Baum, dessen Wurzel der jüngste gemeinsame Vorfahre aller Elfentypen ist.

Wählt man drei verschiedene Arten aus und betrachtet die auf sie beschränkte Evolutionsgeschichte, erhält man einen der beiden Fälle aus Abbildung 2. Wir bezeichnen sie im Folgenden mit i, j und k und den jgV von i und j mit A_{ij} sowie den zugehörigen Eintrag in der Dissimilaritätsmatrix mit d_{ij}. Analog dazu definieren wir A_{ik}, A_{jk} und d_{ik}, d_{jk}. Mit A_{ijk} bezeichnen wir den jgV von allen drei Arten.
Zunächst stellen wir fest, dass zwei der Vorfahren A_{ij}, A_{jk}, A_{ik} gleich sein müssen, denn ansonsten enthält der Graph den Zyklus $i, A_{ij}, j, A_{jk}, k, A_{ik}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A_{ik} = A_{jk}$ (ansonsten benennen wir die Namen der Arten um, sodass die Aussage stimmt). Analog erhalten wir, dass $A_{ik} = A_{jk} = A_{ijk}$ gelten muss. Damit ergeben sich die zwei in Abbildung 2 dargestellten Situationen, indem unterschieden wird, ob A_{ij} gleich A_{ijk} ist oder nicht.

1. Falls $A_{ij} = A_{ik} = A_{jk} = A_{ijk}$ gilt, befinden wir uns im Szenario auf der linken Seite. Der jüngste gemeinsame Vorfahre (jgV) für jedes Paar der ausgewählten Arten ist derselbe. Mit anderen Worten, die Dissimilaritäten d_{ij}, d_{ik} und d_{jk} sind alle gleich M (wie in Abb. 2 definiert).

2. Falls $A_{ij} \neq A_{ik} = A_{jk} = A_{ijk}$ gilt, befinden wir uns im Szenario auf der rechten Seite. In Bezug auf die Dissimilaritätsmatrix bedeutet dies, dass d_{ij} einen kleineren Wert als d_{ik} hat, wobei letzterer gleich d_{jk} ist.

Für beide Fälle gilt, dass der für drei verschiedene Arten i, j und k höchste Wert unter d_{ij}, d_{ik} und d_{jk} zweimal auftritt. Eine Dissimilaritätsmatrix mit dieser Eigenschaft, die für jedes Tripel $\{i, j, k\}$ gilt, wird *ultrametrisch* genannt. Wir machen Gebrauch von dieser Eigenschaft, um die fehlenden Einträge zu ergänzen.

Der Eintrag W steht für den Abstand zum jgV von B und I. Um die obige Eigenschaft anzuwenden, müssen wir eine andere Art S finden, so dass $d_{\mathrm{BS}} \neq d_{\mathrm{IS}}$ gilt. Betrachten wir

zum Beispiel $S = \mathrm{C}$, so haben wir $d_{\mathrm{BC}} = 5 < 7 = d_{\mathrm{IC}}$. Die obige Eigenschaft besagt, dass das Maximum der Werte $d_{\mathrm{BI}} = W$, $d_{\mathrm{BC}} = 5$ und $d_{\mathrm{IC}} = 7$ zweimal angenommen wird, was nur bei W = 7 der Fall ist.
Wir verfahren ähnlich um die anderen Werte zu erhalten:

- betrachten wir das Tripel $\{\mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{I}\}$, so erhalten wir X = 2: das Maximum von X, 1 und 2 muss zweimal angenommen werden;
- betrachten wir das Tripel $\{\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, so erhalten wir Y = 5: das Maximum von Y, 1 und 5 muss zweimal angenommen werden;
- betrachten wir das Tripel $\{\mathrm{B}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\}$, so erhalten wir Z = 7: das Maximum von Z, 1 und 7 muss zweimal angenommen werden.

Die daraus resultierende, vollständige Dissimilaritätsmatrix ist in Tabelle 3 aufgeführt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0	8	8	8	8	8	8	8	8
B	8	0	5	5	7	7	7	7	7
C	8	5	0	1	7	7	7	7	7
D	8	5	1	0	7	7	7	7	7
E	8	7	7	7	0	1	4	4	4
F	8	7	7	7	1	0	4	4	4
G	8	7	7	7	4	4	0	2	2
H	8	7	7	7	4	4	2	0	1
I	8	7	7	7	4	4	2	1	0

Tabelle 3: Vollständige Dissimilaritätsmatrix

Wenn wir die Werte der Dissimilaritätsmatrix kennen, können wir schließlich den Baum rekonstruieren. Wir gehen dabei Schritt für Schritt vor. Zunächst fügen wir den jüngsten gemeinsamen Vorfahren (jgV) für Elfenarten mit der Dissimilarität eins hinzu. Aus der Tabelle können wir ablesen, dass $d_{CD} = d_{EF} = d_{HI} = 1$. Siehe Abbildung 3.

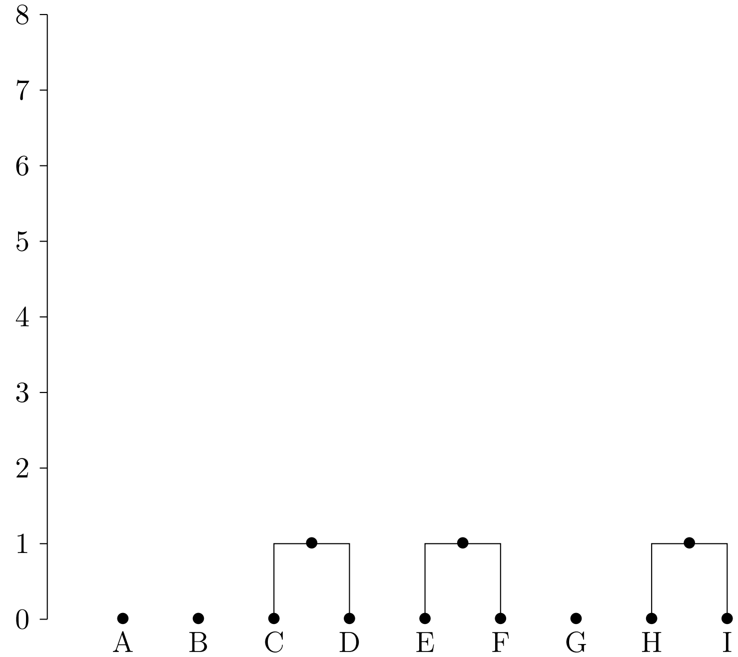


Abbildung 3: Teil des Stammbaums bei Betrachtung der Dissimilaritäten gleich eins.

Als nächstes schauen wir uns alle Dissimilaritäten gleich zwei an. Aus der Tabelle geht hervor, dass $d_{GH} = d_{GI} = 2$ gilt, also tragen wir den jgV von G, H und I auf Höhe 2 ein und verbinden ihn mit dem jgV von H und I, der auf Höhe 1 liegt. Siehe Abbildung 4.

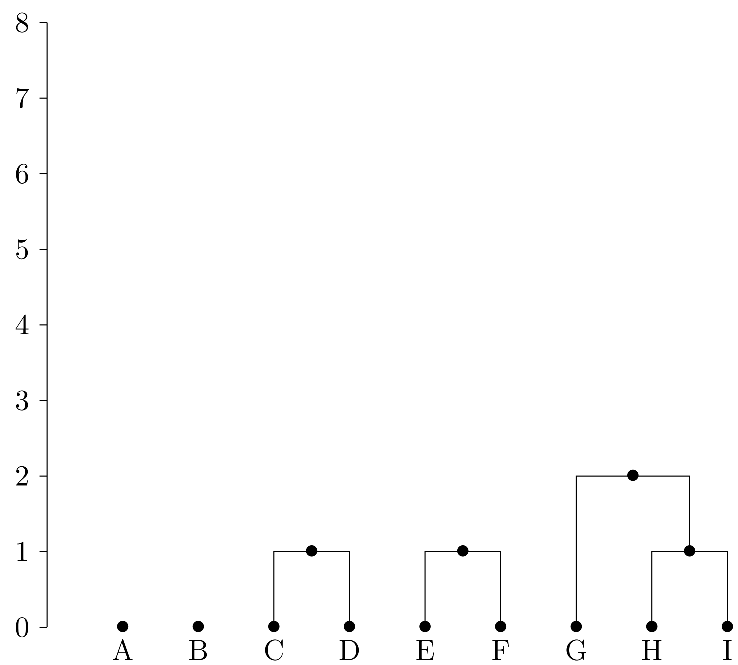


Abbildung 4: Teil des Stammbaums nach Eingabe von Dissimilaritäten von höchstens zwei

Wir setzen diesen Prozess fort und erhalten den vollständigen Baum, der in Abbildung 5 dargestellt ist.

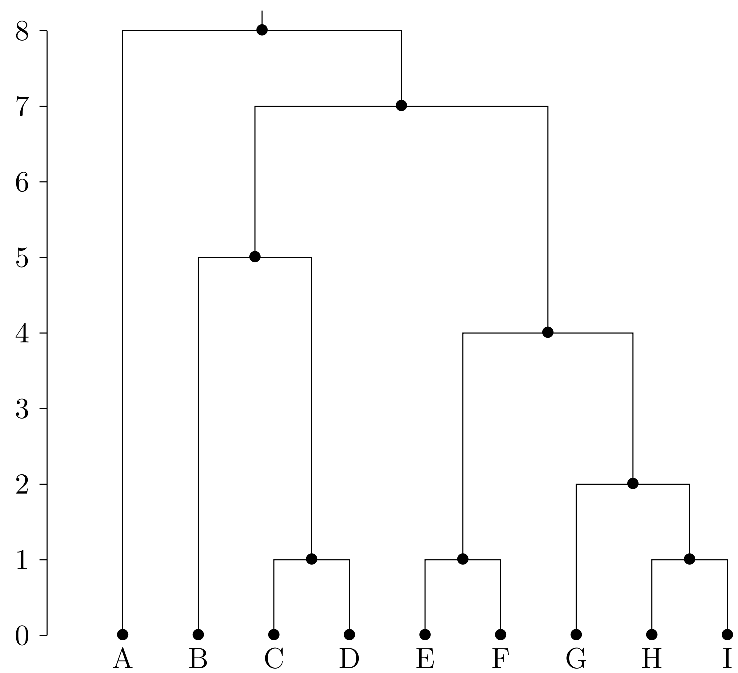


Abbildung 5: Stammbaum entsprechend der Lösung

Im Allgemeinen kann der Stammbaum aus der Matrix mit Hilfe einer beliebigen hierarchischen Clustermethode rekonstruiert werden, wie sie in dem Buch [3] beschrieben werden. Man könnte auch versuchen, den Baum aus der unvollständigen Matrix zu rekonstruieren. Eine Methode dafür, die ähnlich wie das hierarchische Clustering funktioniert, wird in [2] beschrieben.

Literatur

[1] Comăneci, A.; Joswig, M. "Tropical medians by transportation". *Math. Program.* (2023). https://doi.org/10.1007/s10107-023-01996-8

[2] Farach, M.; Kannan, S.; Warnow, T. "A robust model for finding optimal evolutionary trees". *Algorithmica* **13**, 155–179 (1995). https://doi.org/10.1007/BF01188585

[3] Jain, A.; Dubes, R. "Algorithms for clustering data". Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. (1988).

19 Dreiecksspiel

Autor*innen: Hajo Broersma, Jesse van Rhijn (University of Twente)
Projekt: 4TU.AMI

Illustration: Vira Raichenko

Aufgabe

In ihrer Freizeit spielen einige der Elfen des Weihnachtsmanns gerne ein Spiel, das sie „Fortgeschrittenes Tauziehen“ nennen. Bei diesem Spiel werden die Elfen in zwei (möglicherweise ungleich große) Teams aufgeteilt, die sich durch gelbe und blaue Hüte unterscheiden. Alle teilnehmenden Elfen stehen in einem Kreis und verbinden sich untereinander mit Seilen, sodass je zwei Elfen durch ein Seil verbunden sind. Jedes Team versucht das andere Team durch Ziehen an den Seilen auf ihre Seite zu ziehen.

Die Seile, die für dieses Spiel verwendet werden, können eine von zwei Farben haben, rot oder grün. Allerdings hat die Farbe eines Seils keine Bedeutung für das Spiel und kann beliebig gewählt werden. Eine zuschauende Elfe bemerkt, dass es manchmal, besonders wenn viele Elfen teilnehmen, vorkommt, dass drei Elfen aus einem Team alle untereinander mit Seilen der gleichen Farbe verbunden sind. Wir nennen dies ein *perfektes Dreieck*, siehe Abbildung 1 für ein Beispiel.

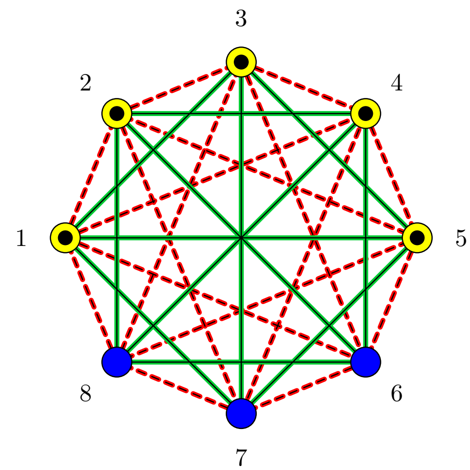


Abbildung 1: Ein Beispiel für ein fortgeschrittenes Tauziehspiel mit acht Elfen. Grüne Seile sind als durchgezogene Linien, rote Seile als gestrichelte Linien gezeichnet. Blaue Punkte stellen Elfen mit einem blauen Hut dar, gelbe Punkte (mit schwarzem Punkt in der Mitte) stellen Elfen mit einem gelben Hut dar. Die Elfen 1, 3 und 5 bilden ein perfektes Dreieck: Sie sind paarweise miteinander durch grüne Seile verbunden, und jeder von ihnen trägt einen gelben Hut.

Was ist die kleinste Anzahl von Elfen, die an einem fortgeschrittenen Tauziehen teilnehmen müssen, damit es garantiert ein perfektes Dreieck gibt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Sechs Elfen.
2. Sieben Elfen.
3. Acht Elfen.
4. Neun Elfen.
5. Zehn Elfen.
6. Elf Elfen.
7. Zwölf Elfen.
8. Dreizehn Elfen.
9. Vierzehn Elfen.
10. Solch eine Zahl existiert nicht (wir können Farben immer so zuweisen, dass wir ein perfektes Dreieck vermeiden).

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Betrachten wir zunächst eine etwas einfachere Frage: Wenn drei Elfen durch gleichfarbige Seile verbunden sind, nennen wir dies ein *monochromatisches Dreieck*. Wie in der Aufgabe definiert, ist ein *perfektes Dreieck* dann ein *monochromatisches Dreieck* in dem jede Elfe die gleiche Hutfarbe trägt. Wir beginnen mit den Beweis, indem wir per Widerspruch zeigen, dass sechs Elfen ausreichen, um zu garantieren, dass es ein monochromatisches Dreieck gibt.

Wir nehmen also an, dass wir sechs Elfen haben ohne ein einziges monochromatisches Dreieck unter ihnen. Betrachte eine Elfe e. Diese Elfe ist mit allen anderen Elfen durch insgesamt fünf Seile verbunden. Mindestens drei dieser Seile haben dieselbe Farbe, zum Beispiel grün. Betrachte die drei Elfen e_1, e_2 und e_3 auf der anderen Seite dieser Seile. Wenn zwei dieser drei Elfen durch ein grünes Seil verbunden sind, dann bilden sie ein monochromatisches (grünes) Dreieck zusammen mit e. Wir können also annehmen, dass diese drei Nachbarn von e untereinander durch rote Seile verbunden sind. Dann aber bilden e_1, e_2 und e_3 selbst ein monochromatisches (rotes) Dreieck. Es genügen also sechs Elfen, um ein monochromatisches Dreieck zu finden.

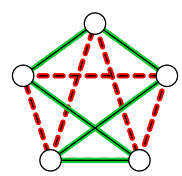


Abbildung 2: Eine Färbung der Seile zwischen fünf Elfen, die kein monochromatisches Dreieck enthält.

Andererseits, wenn es nur fünf Elfen gibt, dann ist es einfach, eine Färbung der Seile zu finden, die monochromatische Dreiecke vermeidet, siehe Abbildung 2. Daraus schließen wir also, dass sechs die minimale Anzahl von Elfen ist, die wir brauchen um die Existenz eines monochromatischen Dreiecks zu garantieren.

Nun zeigen wir, dass elf Elfen ausreichen, um die Existenz eines perfekten Dreiecks zu garantieren. Mit elf Elfen, muss es mindestens sechs Elfen geben, die die gleiche Hutfarbe tragen. Aus dem vorherigen Ergebnis wissen wir, dass es unter diesen sechs Elfen ein monochromatisches Dreieck geben muss. Ein monochromatisches Dreieck zwischen Elfen, die die gleiche Hutfarbe tragen, ist aber ein perfektes Dreieck nach Definition. Also genügen tatsächlich elf Elfen.

Der letzte Schritt besteht darin zu zeigen, dass wir mit zehn Elfen Hüte und Seile so färben können, dass es kein perfektes Dreieck gibt. Zunächst teilen wir die zehn Elfen in zwei Fünferteams auf und geben allen Elfen des einen Teams blaue Hüte, und allen Elfen des anderen Teams gelbe Hüte. Dann verbinden wir die Elfen innerhalb eines Teams wie in Abbildung 2 miteinander, und verbinden zwei Elfen aus verschiedenen Teams auf beliebige Weise miteinander. Jedes perfekte Dreieck müsste vollständig aus Elfen aus einer der beiden Teams bestehen. Da die Färbung in Abbildung 2 kein monochromatisches Dreieck enthält, gibt es kein perfektes Dreieck unter den zehn Elfen mit dieser Zuordnung.

20 Santas Digitales Dilemma

Autor: Christoph Graczyk (ZIB)
Projekt: IOL

Illustration: Christoph Graczyk

Aufgabe

Inmitten des endlosen Schnees und der funkelnden Sterne des Nordpols vollzog der Weihnachtsmann eine moderne Wendung. Um weltweit besser erreichbar zu sein, richtete er einen dedizierten E-Mail-Posteingang für die herzlichen Weihnachtswünsche der Kinder ein. Das Verfassen personalisierter Antworten auf Millionen von E-Mails scheint jedoch selbst für den Weihnachtsmann zu weit zu gehen.
Die Elfen, immer bereit, den Weihnachtsmann zu unterstützen, beriefen einen Notfallrat ein, um das Problem zu lösen. Die jüngeren Elfen, wie Elvin, befürworteten den Einsatz moderner Technikwunder wie Large Language Models. „Stellt euch vor", rief er aus, „automatisches Kartenschreiben mit dem neuen Computer, den wir für E-Mails verwenden!" Aber der Weihnachtsmann zögerte, besorgt darüber die persönliche Note zu verlieren, die seine Karten ausmachte.
Hier schlug Elara, die älteste der Elfen, einen Mittelweg vor. „Warum verwenden wir nicht etwas Ähnliches wie ein Bigram Model? Es ist die Grundlage von sprachgenerierenden Werkzeugen. Es kann helfen, die einführenden und abschließenden Sätze der Karten auszuwählen, basierend auf unserer reichen Geschichte personalisierter Karten. Auf diese Weise könnte der Weihnachtsmann immer noch die Hauptbotschaft verfassen. Das Modell würde nur Santas eigene Phrasen als Vokabular verwenden, um die Karten zu generieren, anstatt nur die einzelnen Buchstaben des Alphabets, die in diesen Modellen sonst verwendet werden."
Elaras Idee war einfach. Durch die Analyse vergangener Karten könnten sie vorhersagen, wie wahrscheinlich es ist, dass eine Phrase erscheint, basierend auf den vorherigen Phrasen. Dadurch würde die Essenz von Santas Botschaften bewahrt und der Prozess beschleunigt werden. Um dies zu demonstrieren, tauchte Elara in die Archive ein und zog eine zufällige Stichprobe von 10.000 Karten heraus.
Jede Karte, die der Weihnachtsmann schrieb, hatte typischerweise die gleiche Struktur: einen **Eröffnungssatz** gefolgt von seiner persönlichen Botschaft, dann einem **Abschlusswunsch** und einem **Abschiedssatz** vor Santas Unterschrift. Elara analysierte die Proben aus den Archiven akribisch. Nachfolgend sind einige exemplarische Statistiken für die Häufigkeit der Verwendung bestimmter Phrasen aufgeführt.

Eröffnungssätze:

- „Wenn der Winterwind flüstert" - 220 Vorkommen.
- „Unter dem schimmernden Nordlicht" - 180 Vorkommen.

Abschlusswünsche: Die Auswahl des Abschlusswunsches hängt nur von den **gegebenen** Eröffnungssätzen ab:

- Für Karten, die mit „Wenn der Winterwind flüstert" beginnen:
  - Anfänge:
    - „Eine Schneeflocke hallt durch die frostige Luft und" - 70 Vorkommen.
    - „In der einzigartigen Reise jeder Schneeflocke" - 150 Vorkommen.
  - Enden:
    - „spielt eine Melodie aus Freude und Hoffnung." - 100 Vorkommen.
    - „ist die Geschichte von tausend Sternen." - 120 Vorkommen.

- Für Karten, die mit „Unter dem schimmernden Nordlicht“ beginnen:
  - Anfänge:
    - „Wenn der Kamin leise knistert,“ - 80 Vorkommen.
    - „Mit der Ruhe einer winterlichen Nacht,“ - 100 Vorkommen.
  - Enden:
    - „möge dein Herz fröhlich und leicht sein.“ - 90 Vorkommen.
    - „lass, Wärme und Geborgenheit in deinem Herzen wohnen.“ - 90 Vorkommen.

Abschiedssatz:

- „Aus dem Winterwunderland“ - 245 Vorkommen.
- „Mit festlicher Fröhlichkeit“ - 155 Vorkommen.

Jedoch übersah Elvin in seiner Aufregung einen entscheidenden Aspekt des Modells. Im Gegensatz zum tatsächlichen Bigram-Modell, das die Wahrscheinlichkeit der Phrasen in Abhängigkeit von der vorherigen Phrase lernt, war Elvins Modell viel einfacher. Sein Modell wählt Phrasen auf Grundlage ihrer relativen Häufigkeit aus, mit dem zusätzlichen Kriterium, dass der Beginn der Abschlusswünsche vom Eröffnungssatz abhängt. Aber anders als Elara erklärt hatte, behandelt sein Modell die gegebenen Enden der Abschlusswünsche unabhängig von den gegebenen Anfängen der Abschlusswünsche. Dieser Fehler könnte zur Erstellung ungewöhnlicher oder sogar sinnloser Kombinationen führen. Für den Weihnachtsmann waren die schlimmsten dieser Kombinationen die, die ein fehlendes Subjekt im Abschlusswunsch haben.

Frage:
Mit dem auf der Stichprobe basierenden Modell und unter Berücksichtigung von Elvins Versäumnis, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Karte, die der Weihnachtsmann in diesem Jahr erstellt hat,

- mit einem der gegebenen Eröffnungssätze beginnt,
- einen grammatikalisch inkorrekten Abschlusswunsch enthält, bei dem das Subjekt fehlt,
- und mit einem der gegebenen Abschiedssätze endet?

Hinweis: Bei dem Imperativsatz „..., lass Wärme und Geborgenheit in deinem Herzen wohnen.“ darf angenommen werden, dass ein Subjekt (implizit) gegeben ist.
Die beiden falschen Sätze sind:

- „Wenn der Kamin leise knistert, ist die Geschichte von tausend Sternen“(„Wer oder was ist die Geschichte von tausend Sternen?“)
- „Mit der Ruhe einer winterlichen Nacht, ist die Geschichte von tausend Sternen“(„Wer oder was ist die Geschichte von tausend Sternen?“)

Antwortmöglichkeiten:

1. 6.075%
2. 2.73375%
3. 0.0216%
4. 0.00972%
5. 0.243%
6. 0.436%
7. 0.78%
8. 10.45%
9. 3.34%
10. 0.89%
11. 100%

Projektbezug:

Das IOL-Forschungslabor widmet sich der Erkundung der Schnittstelle von mathematischer Optimierung und maschinellem Lernen mit dem Schwerpunkt auf der Entwicklung innovativer Techniken für das Lernen und die Optimierung. Durch die Integration dieser beiden Bereiche strebt die Gruppe an, neue Ansätze zur Lösung komplexer Probleme zu schaffen, die die Stärken sowohl der Optimierung als auch des maschinellen Lernens nutzen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Um die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zu berechnen, müssen wir zunächst alle möglicherweise generierten Sätze konstruieren.
Zuerst generieren wir alle Kombinationen für Kartenöffnungen mit **„Wenn der Winterwind flüstert“:**

1. „Eine Schneeflocke hallt durch die frostige Luft und spielt eine Melodie aus Freude und Hoffnung.“
2. „Eine Schneeflocke hallt durch die frostige Luft und ist die Geschichte von tausend Sternen.“
3. „In der einzigartigen Reise einer jeden Schneeflocke spielt eine Melodie aus Freude und Hoffnung.“
4. „In der einzigartigen Reise einer jeden Schneeflocke ist die Geschichte von tausend Sternen.“

Als Nächstes generieren wir alle Kombinationen, die mit **„Unter dem schimmernden Nordlicht“** beginnen:

1. „Wenn der Kamin leise knistert, möge dein Herz fröhlich und leicht sein.“
2. „Wenn der Kamin leise knistert, lass, Wärme und Geborgenheit in deinem Herzen wohnen.“
3. „Mit der Ruhe einer winterlichen Nacht, möge dein Herz fröhlich und leicht sein.“
4. “Mit der Ruhe einer winterlichen Nacht, lass, Wärme und Geborgenheit in deinem Herzen wohnen.“

Für die Kreuzkombinationen, die durch einen Fehler in Elvins Programmierung entstehen, erhalten wir 8 neue Kombinationen:

1. „Eine Schneeflocke hallt durch die frostige Luft und möge dein Herz fröhlich und leicht sein.“
2. „Eine Schneeflocke hallt durch die frostige Luft und lass, Wärme und Geborgenheit in deinem Herzen wohnen.“
3. „In der einzigartigen Reise einer jeden Schneeflocke möge dein Herz fröhlich und leicht sein.“
4. „In der einzigartigen Reise einer jeden Schneeflocke lass, Wärme und Geborgenheit in deinem Herzen wohnen.“
5. „Wenn der Kamin leise knistert, spielt eine Melodie aus Freude und Hoffnung.“

6. „Wenn der Kamin leise knistert, ist die Geschichte von tausend Sternen.“ (Grammatikalisch inkorrekt: fehlendes Subjekt)
7. „Mit der Ruhe einer winterlichen Nacht, spielt eine Melodie aus Freude und Hoffnung.“
8. „Mit der Ruhe einer winterlichen Nacht, ist die Geschichte von tausend Sternen.“ (Grammatikalisch inkorrekt: fehlendes Subjekt)

Die Endung **„...ist die Geschichte von tausend Sternen.“**, kombiniert mit einem der Anfänge von **„Unter dem schimmernden Nordlicht,“** führt zu einem fehlerhaften Satz mit einem fehlenden Subjekt. Daher erhalten wir die Antwort, indem wir einfach die Wahrscheinlichkeit dieser beiden Kombinationen mit der Wahrscheinlichkeit einer der Abschiedsphrasen zu erhalten, multiplizieren.

Man beachte, dass der Ereignisraum in jedem Fall unterschiedlich ist. Der Eröffnungssatz stammt aus den Stichprobendaten, die aus 10000 Karten bestehen. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, eine Karte mit dem Anfang „Unter dem schimmernden Nordlicht“ zu ziehen, gegeben durch:

$$P(\text{„Unter dem schimmernden Nordlicht“}) = \frac{180}{10000}$$

Als Nächstes berechnen wir die Wahrscheinlichkeit des Endes „...ist die Geschichte von tausend Sternen.“, unter Berücksichtigung des Fehlers in Elvins Programmierung. Sie ergibt sich aus der Anzahl der Vorkommen dieses Endes geteilt durch die Gesamtzahl der Endungen für die gegebenen Anfangszeilen (welche 400 ist), d.h.:

$$P(\text{„ist die Geschichte von tausend Sternen.“}) = \frac{120}{400}$$

Schließlich berechnen wir die Wahrscheinlichkeit für einen der gegebenen Abschiedssätze, die aus dem gesamten Ereignisraum von 10000 Karten gezogen werden, und erhalten:

$$P(\text{„Aus dem Winterwunderland“}) = \frac{245}{10000}$$
$$P(\text{„Mit festlicher Fröhlichkeit“})\frac{155}{10000}$$

Damit ergibt sich die endgültige Antwort in Prozent:

$$\frac{180}{10000} \cdot \frac{120}{400} \cdot \frac{245+155}{10000} \cdot 100 = 0,0216\%$$

21 Die humpelnde Eisfußballfeldstabilitätstesterin

Autoren: Olaf Parczyk, Silas Rathke (FU Berlin)
Projekt: EF 1-12

Illustration: Christoph Graczyk

Aufgabe

Dieses Jahr findet die Frauen-Eisfußball-Weltmeisterschaft am Südpol statt. Allerdings wird „Down Under“ nicht so häufig Eisfußball gespielt wie am Nordpol. Deswegen sind die Eis-

fußballstadien dort ein wenig in die Jahre gekommen.
Das musste auch Stadionmeisterin Martina am eigenen Leib erfahren: Kaum ging sie über das Eisfußball-Feld, da brach sie direkt in das Eis ein. Nachdem sie ihre Füße getrocknet und sich von dem Schock erholt hat, beschließt sie, das gesamte Eisfußball-Feld abzugehen, um zu sehen, ob das Eis noch an anderen Stellen instabil ist.
Dazu teilt sie das Feld wie folgt in ein 4×9-Gitter auf:

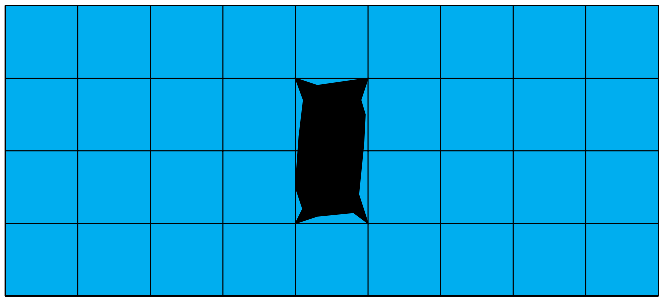


Abbildung 1: Das 4×9 Eisfußball-Feld mit Martinas Einbruchstelle.

Die beiden Quadrate in der Mitte bilden die Stelle, wo sie ins Eis eingebrochen ist. Diese beiden Quadrate kann sie nicht mehr betreten. Alle anderen Quadrate möchte sie aber nun auf Stabilität testen.
Dazu möchte sie auf einem beliebigen Quadrat des Fußballfelds anfangen und möglichst viele Quadrate eins nach dem anderen abgehen, ohne dabei jemals das Spielfeld zu verlassen. Außerdem darf sie kein Quadrat betreten, welches sie vorher schon einmal besucht hat. Nur am Ende möchte sie wieder bei dem Quadrat ankommen, wo sie angefangen hat. Das ist aber die einzige Ausnahme, wo ein Quadrat zwei Mal betreten werden darf.[1]
Es kommt noch erschwerend hinzu, dass sie nach dem Sturz ins Eis humpelt. Das bedeutet, dass sie abwechselnd einen langen und einen kurzen Schritt machen muss. Bei einem langen Schritt muss sie zu einem Quadrat gehen, welches beim Schach einen „Springer-Zug“ entfernt ist. Nach einem langen Schritt landet Martina also auf einem Feld, welches zwei Schritte horizontal und ein Schritt vertikal entfernt ist, oder zwei Schritte Vertikal und ein Schritt horizontal, wie in Abbildung 2 veranschaulicht wird[2]:

[1] Warum sie sich diese bekloppten Regeln überlegt hat, weiß ich leider nicht. Diese Geschichte wurde über mehrere Stellen vom Südpol nach Deutschland überliefert und es kann gut sein, dass sich im Laufe der Zeit einige Details geändert haben.

[2] An dieser Stelle mag sich der kritische Leser zurecht fragen, ob das Eisfußballfeld wirklich so klein ist, dass man mit vier langen Schritten von einem Quadrat ganz links zu einem Quadrat ganz rechts kommen kann. Ja, das ist es. Und wieder weiß ich leider nicht, warum das so ist. Wie gesagt, diese Geschichte wurde schon so häufig erzählt, dass sich die Details möglicherweise geändert haben...

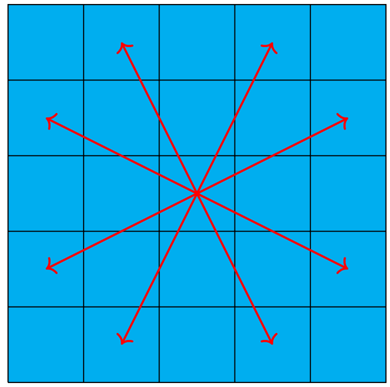


Abbildung 2: Alle Möglichkeiten für einen langen Schritt.

Bei einem kurzen Schritt muss sie zu einem waagerecht oder senkrecht benachbarten Quadrat gehen, wie in Abbildung 3 veranschaulicht wird:

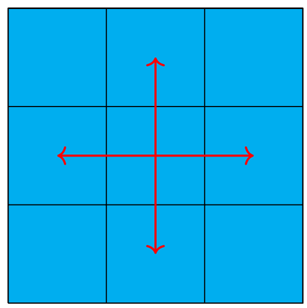


Abbildung 3: Alle Möglichkeiten für einen kurzen Schritt.

Eine mögliche Schrittfolge könnte also wie folgt aussehen:

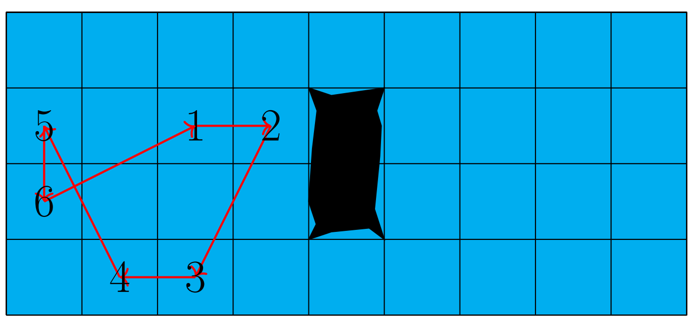


Abbildung 4: Ein möglicher Weg für Martina.

Bei dieser Schrittfolge ist sie sechs Quadrate abgelaufen.

Was ist die größte Zahl an Quadraten, die sie mit einer Schrittfolge ablaufen kann?

Alle Bedingungen zusammengefasst:

- Das Feld hat zwei Löcher, die nicht betreten werden dürfen.
- Martina darf ihr Startfeld beliebig wählen.
- Sie macht abwechselnd einen langen und einen kurzen Schritt.
- Sie betritt kein Feld doppelt, außer das Startfeld, auf dem sie ihre Schrittfolge beendet.

Antwortmöglichkeiten:

1. 34
2. 33
3. 32
4. 31
5. 30
6. 29
7. 28
8. 27
9. 26
10. Weniger als 26

Projektbezug:

Im Projekt „Learning Extremal Structures in Combinatorics“ verwenden wir Ansätze aus dem Bereich der künstlichen Intelligenz und des maschinellen Lernens, um neue Konstruktionen für Graphen mit bestimmten Eigenschaften zu finden.
Die vorliegende Aufgabe lässt sich gut als extremales Problem in der Graphentheorie formulieren, ähnlich wie die Probleme, die wir in diesem Projekt studieren.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.
Wir beweisen zunächst, dass Martina nicht 33 oder mehr Quadrate ablaufen kann.
Wenn man das Spielfeld wie ein Schachbrett einfärbt, dann merkt man, dass sowohl bei einem langen Schritt als auch bei einem kurzen Schritt die Quadratfarben von dem Start- und dem Zielfeld verschieden sind. Da wir am Ende bei unserem ersten Quadrat wieder ankommen müssen, zeigt dies insbesondere, dass jede Schrittfolge eine gerade Anzahl an Quadraten ablaufen muss. Deswegen ist es unmöglich, dass Martina genau 33 Felder abläuft.
Wir müssen jetzt noch ausschließen, dass Martina alle 34 Felder ablaufen kann. Dies zeigen wir per Widerspruch.

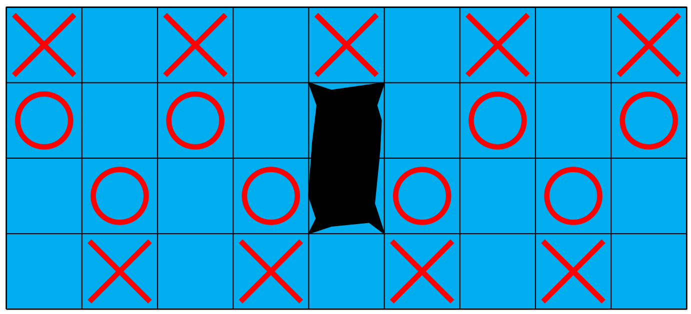


Abbildung 5: Nicht alle X-Felder können auf dem Weg von Martina liegen.

Angenommen, es gibt eine Schrittfolge, bei der Martina jedes Feld genau einmal besucht. Betrachte jedes zweite Feld in der ersten und vierten Zeile, so wie in Abbildung 5 mit einem roten X markiert. Da diese Felder alle dieselbe Farbe in der Schachbrett-Färbung haben, werden alle X-Felder durch einen langen Schritt erreicht oder alle X-Felder werden durch einen kurzen Schritt erreicht. Im ersten Fall laufen wir die Schrittfolge einfach rückwärts ab. Dann besuchen wir immer noch jedes Quadrat genau einmal, nur jetzt erreichen wir alle X-Felder durch einen kurzen Schritt.
Wir können also annehmen, dass alle X-Felder durch einen kurzen Schritt erreicht werden. Das heißt aber, dass nach einem X-Feld immer ein langer Schritt erfolgt. Wir können so aber nur die Felder erreichen, die durch einen Kreis markiert sind. Da es mehr X-Felder als Kreis-Felder sind und jedes X-Feld sein eigenes Kreis-Feld als Nachfolger braucht, zeigt dies, dass es keine Schrittfolge geben kann, die jedes Feld genau einmal besucht.
Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass 32 Felder abgelaufen werden können. Dies zeigt die folgende Abbildung 6[3]:

[3]Bevor der kritische und geschätzte Leser nun schnaubend fragt, wie man bitte auf so eine Schrittfolge kommen soll, hier ein paar Hinweise: Der Beweis oben zeigt, dass man eins der X-Felder nicht abdecken kann. Die anderen X-Felder müssen 1-zu-1 einem Kreis-Feld zugeordnet werden, das durch einen langen Schritt erreichbar ist. Dann macht man das gleiche für die anderen Felder, die noch keinen Kreis oder X haben. Auch hier muss man die Felder der ersten und vierten Zeile 1-zu-1 den Feldern der zweiten und dritten Zeile zuordnen. Wenn man das macht, hat man schon alle langen Schritte gefunden. Jetzt muss man diese langen Schritte nur noch durch kurze Schritte miteinander zu einer Schrittfolge verbinden. Mit ein bisschen rumprobieren, erhält man schließlich eine Schrittfolge wie die hier angegebene.

30	3	4	7	8			19	20
29	32	25	26		12	11	16	15
2	31	6	5		9	22	21	18
1	28	27	24	23	10	13	14	17

Abbildung 6: Ein möglicher Weg von Martina mit 32 Feldern, wobei der Weg bei 1 startet und aufsteigend durchschritten wird.

22 Licht aus

Autor: Nikola Sadovek (FU Berlin)
Projekt: BMS und MATH+

Illustration: Vira Raichenko

Aufgabe

Die Wichtel waren sehr fleißig in ihren Werkstätten, wo sie alle Geschenke hergestellt und verpackt haben. Jetzt ist es an der Zeit, die Geschenke von den Werkstätten zum Haus des Weihnachtsmanns auf einem Schlitten zu bringen, damit er sie später an die Kinder verteilen kann.

Da ihre Arbeit in den Werkstätten erledigt ist, ist es an der Zeit, dass die Wichtel das Licht ausschalten, bevor sie schließen. Das Beleuchtungssystem in jeder Werkstatt besteht aus $n \geq 7$ Glühbirnen, die in einer Reihe ausgerichtet sind und von links nach rechts von 1 bis n nummeriert sind. Jede Glühbirne kann in einem von zwei Zuständen sein: eingeschaltet oder ausgeschaltet.

Aufgrund eines technischen Fehlers werden beim Betätigen des Schalters an Glühbirne k zusätzlich zur Änderung des Zustands dieser Birne (ausgeschaltet wird eingeschaltet und umgekehrt) auch die Zustände der drei Glühbirnen direkt links davon (nummeriert durch die Indizes $k-3$, $k-2$, $k-1$, die größer als null sind) und der drei Glühbirnen direkt rechts davon (nummeriert durch die Indizes $k+1, k+2$ und $k+3$, die höchstens n sind) geändert. Wenn beispielsweise der Schalter an der Glühbirne $k = 2$ gedrückt wird, ändern sich nur die Zustände der Glühbirnen $1, 2, 3, 4$ und 5. Siehe Abbildung 1 für eine Veranschaulichung.

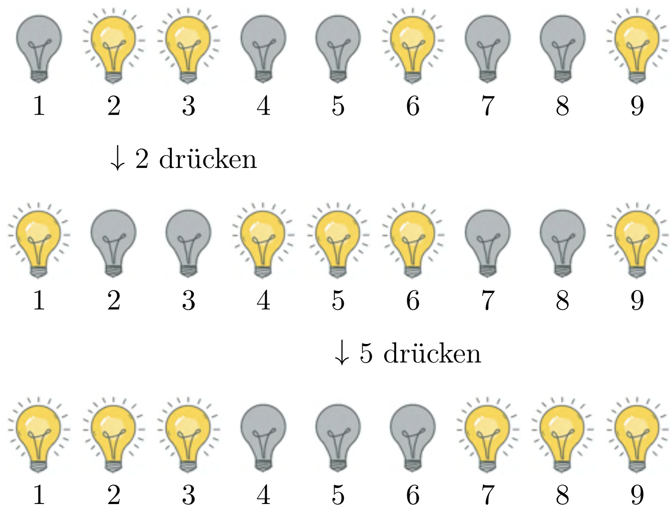


Abbildung 1: Für $n = 9$ ist oben der Anfangszustand von n Glühbirnen in einer Werkstatt dargestellt. Die Glühbirnen $2, 3, 6$ und 9 sind eingeschaltet (durch dargestellt), während der Rest ausgeschaltet ist (durch dargestellt). Die mittlere und die untere Reihe zeigen die Zustände der Glühbirnen nach dem Drücken des Schalters an den Glühbirnen 2 und 5.

Die Wichtel möchten alle Glühbirnen in jeder Werkstatt ausschalten, indem sie eine Abfolge solcher Aktionen ausführen (Glühbirnen einschalten und ausschalten). Für welche Werte von $n \geq 7$ können die Wichtel dies sicher tun? Dabei soll es möglich sein für jeden möglichen Anfangszustand, der die Bedingung für n erfüllt.

Antwortmöglichkeiten:

1. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 2 oder 3 haben.
2. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 4 oder 6 haben.
3. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 0 oder 2 haben.
4. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 2 oder 4 haben.
5. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 1 oder 4 haben.

6. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 3 oder 5 haben.
7. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 1 oder 3 haben.
8. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 0 oder 1 haben.
9. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 0 oder 3 haben.
10. Genau für die Werte von $n \geq 7$, die bei der Division durch 7 den Rest 5 oder 6 haben.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Zuerst formulieren wir die Frage um. Wir fragen uns, für welche Werte $n \geq 7$ die Elfen alle Lichter ausschalten können, wenn zu Beginn nur eine einzige Glühbirne eingeschaltet ist. Dies ist tatsächlich eine äquivalente Frage, da die Elfen für jede gegebene Anordnung das Verfahren für jede eingeschaltete Glühbirne wiederholen können. Daher werden wir uns nur auf den Fall einer einzigen eingeschalteten Glühbirne konzentrieren und diesen Prozess kurz als „Ausschalten einer einzelnen Glühbirne“ bezeichnen.

Wir führen folgende Notation ein: Wenn zwei Zahlen a und b denselben Rest bei der Division durch eine Zahl k haben, schreiben wir $a \equiv_k b$. Zum Beispiel ist a durch k teilbar genau dann, wenn $a \equiv_k 0$ ist. Wir teilen den Beweis in zwei Teile.

1. Wenn $n \equiv_7 0$ oder $n \equiv_7 1$ gilt, dann ist n eine Lösung.
In diesem Teil zeigen wir, dass, wenn $n \equiv_7 0$ oder $n \equiv_7 1$ ist, die Elfen „jede einzelne Glühbirne ausschalten können“.
Zeigen wir zunächst, dass, wenn für ein bestimmtes $n \geq 7$ die Elfen die einzige eingeschaltete Glühbirne ausschalten können, sie dies auch für $n + 7$ Glühbirnen tun können.
Nehmen wir an, dass $1 \leq k \leq n$ die eingeschaltete Glühbirne ist (ansonsten enumerieren wir die Glühbirnen von rechts nach links um). Durch Anwenden unserer Annahme auf die Glühbirnen $1, \dots, n$ gibt es eine Folge von Zügen, die auf die n Glühbirnen angewendet werden können, sodass danach alle ausgeschaltet sind.
Während dieses Vorgangs könnte der Zustand einiger der Glühbirnen $n + 1, n + 2, n + 3$ geändert worden sein. Für jede eingeschaltete Glühbirne kann die folgende Prozedur angewendet werden: Wenn die Glühbirne $n + i$ eingeschaltet wurde, für $1 \leq i \leq 3$, kann sie ausgeschaltet werden, indem zunächst der Schalter der Glühbirne $n + i + 3$ und danach der von Glühbirne $n + i + 4$ gedrückt wird. Dies beeinflusst nicht den Zustand der Glühbirnen $1, \dots, n$.

Als Nächstes werden wir zeigen, dass wir für $n = 7$ und $n = 8$ „jede einzelne Glühbirne ausschalten können“.

- Nehmen wir an, dass $n = 7$ gilt und $1 \leq k \leq 4$ der Index der eingeschalteten Glühbirne ist. Wenn $k = 4$ ist, kann dies geschehen, indem die Schalter der Glühbirnen $1, 4$ und 7 gedrückt werden. Wenn $k < 4$ ist, kann sie ausgeschaltet werden, indem die Schalter der Glühbirnen $k + 3$ und $k + 4$ gedrückt werden. Siehe Abbildung 2 für ein Beispiel.

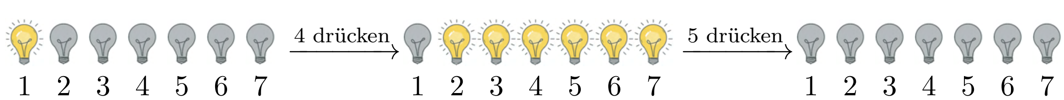


Abbildung 2: Für $n = 7$ wird durch das Drücken der Schalter der Glühbirnen 4 und 5 die erste Glühbirne ausgeschaltet.

- Nehmen wir nun an, dass $n = 8$ gilt und $1 \leq k \leq 4$ der Index der eingeschalteten Glühbirne ist. Wenn $k = 1$ ist, kann dies geschehen, indem die Glühbirnen $1, 5$ und 8 gedrückt werden. Wenn $k > 1$ ist, kann sie ausgeschaltet werden, indem die Glühbirnen $k + 3$ und $k + 4$ gedrückt werden. Siehe Abbildung 3 für ein Beispiel.

Abbildung 3: Für $n = 8$ wird durch Drücken der Schalter der Glühbirnen 6 und 7 die dritte Glühbirne ausgeschaltet.

Damit haben wir gezeigt, wie für jeden beliebigen Anfangszustand mit $n = 7$ oder $n = 8$ Glühbirnen alle Glühbirnen ausgeschaltet werden können. Da wir auch gezeigt haben, dass die Wichtel dies dann auch in einer Reihe von $n + 7$ Glühbirnen machen können, ist der erste Teil des Beweises abgeschlossen.

2. Wenn weder $n \equiv_7 0$ noch $n \equiv_7 1$ gilt, dann ist n keine gültige Lösung. Wir werden zeigen, dass, wenn $n \equiv_7 2, 3$ oder 4 ist, die Elfen niemals „die erste Glühbirne ausschalten“ können, und im Fall von $n \equiv_7 5$ oder 6 niemals „die vierte Glühbirne“.
Wir beobachten folgendes: Wenn der Schalter einer Glühbirne zweimal betätigt wird, hat dies den gleichen Effekt wie das Nichtbetätigen des Schalters. Daher können wir annehmen, dass der Schalter der Glühbirne k für $1 \leq k \leq n$ genau a_k Mal betätigt wird, wobei $a_k \in \{0, 1\}$.
Die Beweisidee besteht darin, zunächst die Glühbirne 1 zu betrachten und zu zählen, wie oft ihr Zustand geändert wird. Indem wir dies weiter fortsetzen (bis zur Glühbirne $n - 3$), erhalten wir wertvolle Informationen über die Anzahl der Zustandsänderungen a_k für jede Glühbirne k und kommen zu einem Widerspruch indem wir die restlichen Glühbirnen betrachten.

Wir zeigen nun, dass wenn $n - 2$, $n - 3$ oder $n - 4$ durch 7 teilbar ist, wir niemals die „erste Glühbirne ausschalten“ können.
Angenommen, für ein $n \geq 7$ können wir die „erste Glühbirne ausschalten“. Der Zustand der ersten Glühbirne wird geändert, wenn die Elfen einen der Schalter der Glühbirnen 1, 2, 3 oder 4 betätigen. Da der Zustand der ersten Glühbirne eine ungerade Anzahl von Malen geändert werden muss, erhalten wir

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv_2 1. \tag{5}$$

Betrachten wir Glühbirne 2. Ihr Zustand wird jedes Mal geändert, wenn die Elfen einen der Schalter der Glühbirnen $1, 2, 3, 4$ oder 5 betätigen. Somit erhalten wir

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv_2 0.$$

Daher folgt aus (5), dass $a_5 = 1$. Ähnlich erhalten wir durch das betrachten von Glühbirne 3 und 4, dass $a_6 = a_7 = 0$ gilt.

Daraus folgt für Glühbirne 5, dass

$$a_2 + \cdots + a_8 = a_2 + a_3 + a_4 + 1 + a_8 \equiv_2 0$$

gelten muss und wir können aus (5) schlussfolgern, dass $a_8 = a_1$ gilt. Wenn man diesen Prozess fortsetzt bis zur Betrachtung der Glühbirne $n-3$, kann man zeigen, dass $a_{k+7} = a_k$ für $k \leq n-7$ gelten muss. Somit ist die Sequenz der Zahlen a_k mit einer Periode von 7 periodisch. Siehe Abbildung 4 zur Veranschaulichung.

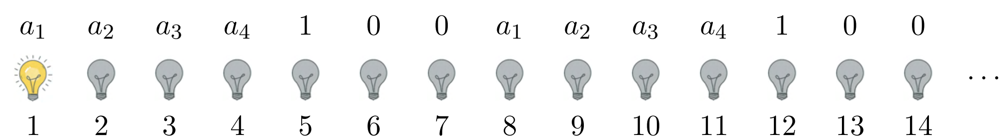


Abbildung 4: Periodizität mit einer Periode von 7 der oben über den Glühbirnen dargestellten Sequenz a_k.

Wir teilen den Beweis nun in drei Fälle auf.

- Wenn $n \equiv_7 2$ ist, erhalten wir durch das Betrachten der Glühbirne n:

$$0 \equiv_2 a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = a_6 + a_7 + a_1 + a_2 = a_1 + a_2. \tag{6}$$

  Andererseits, durch das Betrachten der Glühbirne $n-1$ erhalten wir:

$$0 \equiv_2 a_{n-4} + \cdots + a_n \;=\; a_5 + a_6 + a_7 + a_1 + a_2 \;=\; 1 + a_1 + a_2,$$

  was im Widerspruch zu (6) steht.

- Wenn $n \equiv_7 3$ ist, erhalten wir durch das Betrachten der Glühbirne n:

$$0 \equiv_2 a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = a_7 + a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3. \tag{7}$$

  Andererseits, durch das Betrachten der Glühbirne $n-2$ erhalten wir:

$$0 \equiv_2 a_{n-5} + \cdots + a_n \;=\; a_5 + a_6 + a_7 + a_1 + a_2 + a_3 \;=\; 1 + a_1 + a_2 + a_3,$$

  was im Widerspruch zu (7) steht.

- Wenn $n \equiv_7 4$ ist, erhalten wir durch Betrachten der Glühbirne n:

$$0 \equiv_2 a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \;=\; a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

  was im Widerspruch zu (5) steht.

Analog zu bevor zeigen wir nun, dass, wenn $n-5$ oder $n-6$ durch 7 teilbar ist, wir niemals die „vierte Glühbirne ausschalten“ können.
Angenommen, für ein $n \geq 7$ können wir die „vierte Glühbirne ausschalten“. Durch das Betrachten der ersten Glühbirne erhalten wir

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv_2 0. \tag{8}$$

Durch das Betrachten der Glühbirnen 2 und 3 erhalten wir

$$a_1 + \cdots + a_5 \equiv_2 0 \quad \text{und} \quad a_1 + \cdots + a_6 \equiv_2 0,$$

daher folgt aus (8), dass $a_5 = a_6 = 0$ ist. Durch das Betrachten der Glühbirne 4 erhalten wir

$$a_1 + \cdots + a_7 \;=\; a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_7 \equiv_2 1.$$

Daher folgt aus (8), dass $a_7 = 1$ ist. Betrachten der Glühbirne 5 ergibt

$$a_2 + \cdots + a_8 \;=\; a_2 + a_3 + a_4 + 1 + a_8 \equiv_2 0,$$

daher folgt aus (8), dass $a_8 = 1 - a_1$ ist. Ähnlich wie oben, kann man einsehen, dass die Sequenz a_k „fast periodisch“ mit der Periode 7 ist. Siehe Abbildung 5 zur Veranschaulichung.

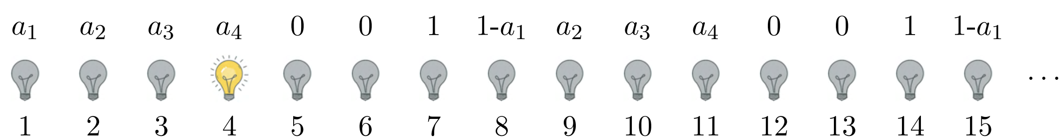


Abbildung 5: „Fast Periodizität“ mit der Periode 7 der oben über den Glühbirnen dargestellten Sequenz a_k.

Genauer gesagt gilt für $1 \leq k \leq n - 7$

$$a_{k+7} = \begin{cases} a_k & \text{falls } k \not\equiv_7 1, \\ 1 - a_1 & \text{falls } k \equiv_7 1. \end{cases}$$

Wir beenden den Beweis, indem wir auf unsere beiden Fälle zurückkommen:

- Wenn $n \equiv_7 5$ ist, ergibt sich durch das Betrachten der Glühbirne $n - 1$, dass

  $$0 \equiv_2 a_{n-4}+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n = (1-a_1)+a_2+a_3+a_4+a_5 \equiv_2 1+a_1+a_2+a_3+a_4,$$

  was ein Widerspruch zu (8) ist.

- Wenn $n \equiv_7 6$ ist, erhalten wir durch das Betrachten der Glühbirne $n - 2$ denselben Widerspruch zu (8):

  $$\begin{aligned} 0 &\equiv_2 a_{n-5} + a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ &= (1 - a_1) + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \equiv_2 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4. \end{aligned}$$

23 Süßigkeiten-Geschenke

Autor: Nikola Sadovek (FU Berlin)
Project: BMS and MATH+

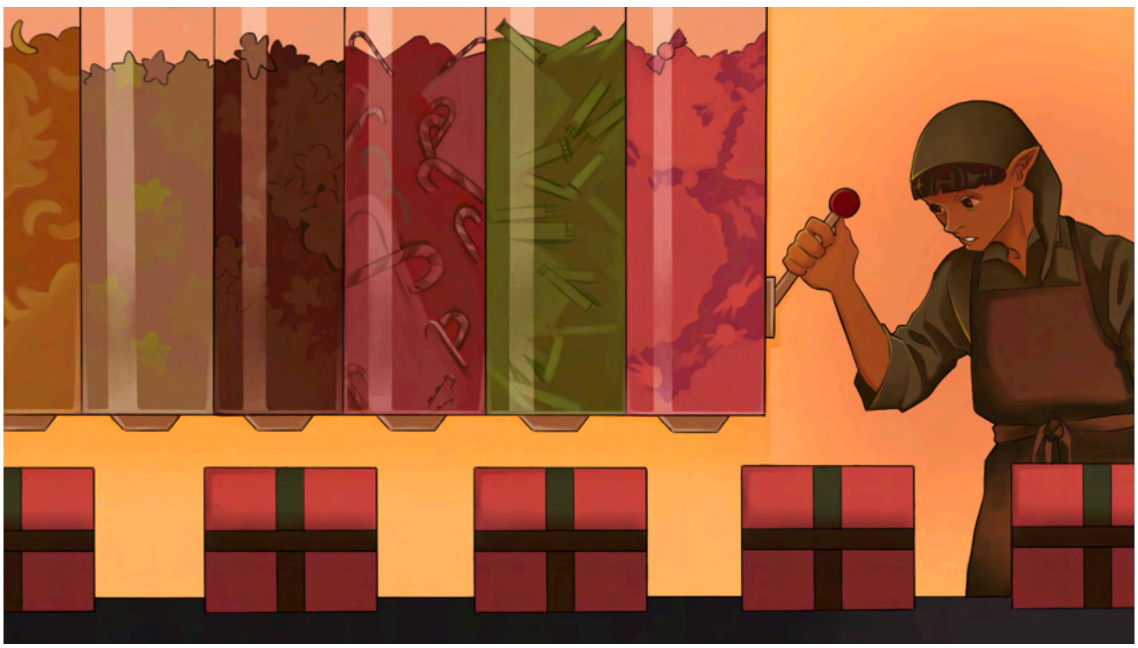


Illustration: Julia Schönnagel

Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist derzeit damit beschäftigt, Geschenke für Kinder zu entwerfen. Jedes Geschenk sollte aus einer oder mehreren der n Arten von Süßigkeiten bestehen, die als $S_1, \dots, S_n$ bezeichnet werden. Der Weihnachtsmann ist begeistert davon, für jedes Kind ein einzigartiges Geschenk zu schaffen und das Teilen von Süßigkeiten unter ihnen zu fördern. Um dies zu erreichen, hat der Weihnachtsmann um die Hilfe der Elfen gebeten.
Genauer gesagt sind die Elfen damit beauftragt, die maximale Anzahl M von Geschenken zu bestimmen, die als $G_1, \dots, G_M$ bezeichnet werden, und die dann an M Kinder verteilt werden sollen, wobei jedes Kind genau ein Geschenk erhält. Die Geschenke werden durch die

enthaltenen n Süßigkeiten $S_1, \ldots, S_n$ definiert und sollten die folgenden beiden Bedingungen erfüllen.

(i) Die Einzigartigkeit der Geschenke ist wesentlich, und der Weihnachtsmann möchte, dass alle Geschenke unterschiedlich sind. Zwei Geschenke P_i und P_j gelten als unterschiedlich, wenn eines davon eine Art von Süßigkeiten enthält, die das andere nicht enthält (obwohl sie einige Arten von Süßigkeiten teilen dürfen).

(ii) Um das Teilen von Süßigkeiten unter den Kindern zu fördern, wünscht sich der Weihnachtsmann, dass jede Kombination von zwei Geschenken alle n Süßigkeiten $S_1, \ldots, S_n$ enthält. Auf diese Weise haben zwei Kinder, die sich entscheiden, ihre Geschenke zu kombinieren, Zugang zu allen Süßigkeiten.

Ein Beispiel für $n = 5$ ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

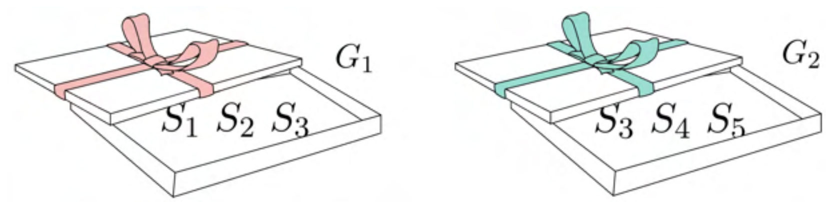


Abbildung 1: Für $n = 5$ erfüllen die Geschenke G_1 und G_2 die Bedingungen (i) und (ii).

Was ist die größte Anzahl M von Geschenken $G_1, \ldots, G_M$, die die Elfen entwerfen können und die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllen?
Bemerkung: Ein leeres Geschenk, welches keine Süßigkeiten enthält, zählt als Geschenk.

Antwortmöglichkeiten:

1. 3
2. 4
3. n
4. $n + 1$
5. $\frac{n(n-1)}{2}$
6. $\frac{n(n-1)}{2} + 1$
7. n^2
8. $n^2 + 1$
9. 2^{n-1}
10. $2^{n-1} + 1$

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4. $n + 1$.

Um zu zeigen, dass eine Konfiguration mit $M = n + 1$ Süßigkeiten möglich ist, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt, betrachten wir folgende Geschenke: für jedes $1 \leq i \leq n$ sei das i-te Geschenk G_i so zusammengesetzt, dass es alle Süßigkeitenarten außer der i-ten Art C_i enthält. Schließlich soll G_{n+1} aus allen n Süßigkeiten bestehen. Es lässt sich überprüfen, dass diese Geschenke unterschiedlich sind und dass jedes Paar von ihnen alle n Süßigkeitenarten enthält.
Man beachte, dass der Weihnachtsmann für $n = 1$ (d.h. es gibt nur eine Süßigkeitenart) ein leeres Geschenk und eines mit Süßigkeit 1 packt, was $n+1 = 2$ Geschenke ergibt. Für $n > 1$ verwendet die oben genannte Konstruktion keine leeren Geschenke.
Nun wollen wir zeigen, dass eine Konfiguration aus $n + 2$ Geschenken, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt, nicht möglich ist. Nehmen wir dafür das Gegenteil an, also seien $G_1, \ldots, G_{n+2}$ solche Geschenke. Da sie unterschiedlich sind, enthält höchstens eines von ihnen alle Süßigkeitenarten. Entsprechend fehlt in den verbleibenden $n+1$ Geschenken jeweils mindestens eine Süßigkeitenart. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit bezeichnen wir diese als $G_1, \ldots, G_{n+1}$. Des Weiteren definieren wir für jedes Geschenk G_k mit $1 \leq k \leq n+1$ die Menge N_k, die die Zahlen i mit $1 \leq i \leq n$ enthält, für die die entsprechende Süßigkeitenart C_i nicht in G_k enthalten ist. In mathematischer Notation schreiben wir:

$$N_k := \big\{ i \in \{1, \ldots, n\} \mid C_i \notin G_k \big\}$$

Mit anderen Worten, N_k enthält die Indizes der Süßigkeitenarten, die nicht in dem Geschenk G_k enthalten sind. Gemäß unserer Annahme sind alle Mengen $N_1, \ldots, N_{n+1}$ nicht leer. Da die Geschenke unterschiedlich sein müssen, sind die Mengen $N_1, \ldots, N_{n+1}$ auch paarweise verschieden. Jedoch können die Mengen N_k gemäß dem Schubfachprinzip als $n + 1$ Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ von n Elementen nicht paarweise disjunkt sein. Es gibt also eine Zahl $1 \leq s \leq n$, die in zwei von ihnen enthalten ist, d.h. es existieren a, b mit $1 \leq a < b \leq n + 1$ sodass $s \in N_a$ und $s \in N_b$. Dies widerspricht der Bedingung (ii), da die Geschenke G_a und G_b beide die s-te Süßigkeit C_s nicht enthalten.

24 Interessante Arbeitsbedingungen

Autorin: Lara Glessen
Projekt: MATH+ Adventskalender

Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist ein ganz interessanter Arbeitgeber, denn die Anzahl der Urlaubstage seiner **neun** Elfen für das nächste Jahr hängt von ihrem Erfolg in einem von ihm jährlich neu ausgedachten Spiel ab. Dieses Jahr hat er sich folgendes Spiel überlegt: Er setzt seinen Elfen nacheinander jeweils eine Mütze, in entweder rot oder blau, auf. Er teilt ihnen nicht mit, wie viele rote und blaue Mützen er verteilt (es könnte also auch sein, dass er nur Mützen in einer Farbe verteilt). Jeder Elf kann die Mützenfarben aller anderen Elfen sehen, aber seine eigene nicht. Das gemeinsame Ziel der Elfen ist, dass möglichst viele von ihnen ihre eigene Mützenfarbe herausfinden, denn der Weihnachtsmann verspricht ihnen allen zusammen so viele Tage Urlaub, wie Elfen ihre eigene Mützenfarbe richtig „raten“.

Seine Spielregeln sind wie folgt: Sobald der erste Elf seine Mütze aufgesetzt bekommen hat, dürfen die Elfen nicht mehr untereinander reden. Nachdem er alle Mützen verteilt hat, ruft er einen Elf nach dem anderen auf (die Reihenfolge ist den Elfen vorher unbekannt). Nachdem ein Elf aufgerufen wurde, muss er sich unmittelbar irgendwo auf der roten Linie im Lagerraum platzieren. Sobald man auf der roten Linie steht, darf man sich nicht mehr bewegen. Wenn der letzte Elf sich aufgestellt hat, müssen die Elfen auf einen Zettel die Farbe schreiben, die sie glauben, dass ihre eigene Mütze hat.
Nachdem er ihnen alle Regeln erklärt hat, und bevor er ihnen die Mützen aufsetzt, gibt er seinen Elfen aber noch Besprechungszeit um gemeinsam eine Strategie auszuarbeiten wie sie sich auf die rote Linie stellen werden. Die Elfen sind zum Glück logisch hochbegabt und arbeiten eine optimale Strategie aus. Wir bezeichnen eine Strategie **A** als optimal, wenn es keine Strategie gibt bei der mehr Elfen als mit Strategie **A** mit hundertpronzentiger Sicherheit die richtige Mützenfarbe aufschreiben.
Was ist die größtmögliche Anzahl von Elfen, die bei einer optimalen Strategie mit Sicherheit ihr Mützenfarbe kennen?

Hinweis: Wir können annehmen, dass sich jeder Elf, der sich in die Reihe stellen möchte, dies an jeder beliebigen Stelle tun kann. Das heißt, er kann sich zwischen jede zwei Elfen „quetschen“ oder neben einen Elf an den Rand stellen.

Antwortmöglichkeiten:

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4
6. 5
7. 6
8. 7
9. 8
10. 9

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir stellen eine Strategie vor, auf die sich die Elfen im Voraus einigen können, mit der am Ende alle neun Elfen ihre Mützenfarbe kennen.
Der erste Elf positioniert sich irgendwo auf der Linie. Jeder Elf k mit $2 \leq k \leq 9,\ k \neq 8$ soll seinem Vorgänger quasi die eigene Mützenfarbe mitteilen und positioniert sich deshalb wie folgt:

1. Wenn Elf $k-1$ eine rote Mütze trägt, positioniert sich Elf k links vom Elf, der bisher am weitesten links steht.
2. Wenn Elf $k-1$ eine blaue Mütze trägt, positioniert sich Elf k rechts vom Elf, der bisher am weitesten rechts steht.

Da wir auch möchten, dass der letzte Elf seine eigene Mützenfarbe kennt, behandeln wir Elf 8 separat:

1. Wenn die Elfen 7 und 9 beide eine rote Mütze tragen, positioniert sich Elf 8 links vom Elf, der bisher am weitesten links steht.
2. Wenn Elf 7 eine rote Mütze trägt und Elf 9 eine blaue, positioniert sich Elf 8 rechts vom Elf, der bisher am weitesten links steht.
3. Wenn die Elfen 7 und 9 beide eine blaue Mütze tragen, positioniert sich Elf 8 rechts vom Elf, der bisher am weitesten rechts steht.
4. Wenn Elf 7 eine blaue Mütze trägt und Elf 9 eine rote, positioniert sich Elf 8 links vom Elf, der bisher am weitesten rechts steht.

Für ein Beispielszenario, in dem sich die Elfen gemäß obiger Strategie aufstellen, siehe Tabelle 4.

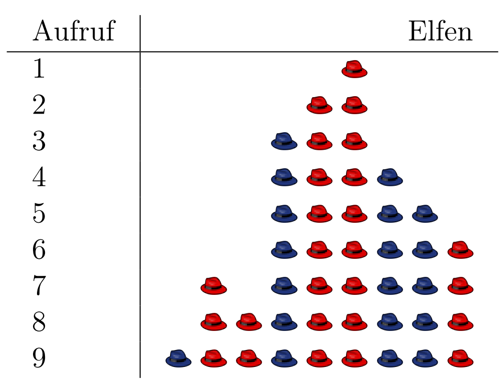


Tabelle 4: Die Aufstellung angenommen der Weihnachtsmann hat 4 blaue und 5 rote Mützen verteilt; und ruft die Elfen in der in der Tabelle suggerierten Reihenfolge auf.

Wie kennen nun alle neun Elfen am Ende ihre Mützenfarbe? Elf k mit $1 \leq k \leq 8$ kann seine Mützenfarbe einfach dadurch ableiten, indem er beobachtet, ob sein Nachfolger $k+1$ sich am linken oder rechten Ende der Reihe positioniert. Elf 7 weiß, dass, wenn Elf 8 einen der beiden linken Plätze einnimmt, seine eigene Mützenfarbe rot sein muss; andernfalls blau. Schließlich beobachtet Elf 9, ob Elf 8 sich an einem der Enden der Reihe positioniert, dann ist seine Mützenfarbe dieselbe wie die von Elf 7. Andernfalls, d.h. wenn Elf 8 zwischen zwei Elfen steht, muss seine Mützenfarbe verschieden von der von Elf 7 sein. Somit kennen am Ende alle Elfen ihre Mützenfarbe kennen.

25 Bonus: Wer im Glashaus sitzt...

Autor: Felix Günther
Projekt: EF 2-1

Illustration: Ivana Martić

Aufgabe

Der Weihnachtsmann möchte seine Schreibstube verschönern und sie mit einem neuen Glasdach versehen. Das Loch in der Decke, auf welches das Glasdach gesetzt werden soll, hat die Form eines regelmäßigen Sechsecks. Dem Weihnachtsmann schweben nun sechs dreieckige Glasplatten vor, die für das Dach kunstvoll zusammengesetzt werden sollen. Dabei ist ihm wichtig, dass das Glasdach sich von außen gut in die Umgebung einpasst. Für den Weihnachtsmann heißt das, dass die Reflexionen des Dachs im Sonnenlicht schön gleichmäßig und keine Brüche aufweisen sollen. Dafür müssen die äußeren Kanten der Glasplatten nicht parallel zu den Kanten des sechseckigen Loches sein, die Platten dürfen auch schräg eingesetzt werden. Aufgrund der kalten Polarnächte ist die Decke des Weihnachtsmannes nämlich sehr dick.

Für die Umsetzung seines Plans engagiert er das vom Architekturwichtel Theresa und vom Mathematikwichtel Maryna gegründete Architekturbüro MA&TH+. Maryna übersetzt die Anforderungen des Weihnachtsmannes ins Mathematische: „Du möchtest also sechs dreieckige Flächen in der Form eines Sterns anordnen: Sie haben genau einen Punkt in der Mitte gemeinsam und an den Kanten passen sie entsprechend aneinander. Diese Figur nennen wir der Einfachheit halber *Kegel*, auch wenn er nicht sonderlich rund ist. Die Reflexionen des Kegels im Sonnenlicht werden allein durch die Position und Anordnung ihrer Seitenflächen bestimmt. Genauso können wir für jedes der sechs Dreiecke seinen *Normalenvektor* betrachten: Dies ist ein Vektor (Verschiebungspfeil) der Länge 1, der senkrecht auf der jeweiligen Fläche steht und nach außen Richtung Himmel zeigt. Wenn wir benachbarte Normalenvektoren auf der Oberfläche der Kugel mit Radius 1 verbinden, so entsteht ein sphärisches Polygon, welches wir auch *Normalenbild* nennen. Die Reflexionen des Kegels im Sonnenlicht sind genau dann gleichmäßig, wenn sich das Normalenbild nicht selbst überschneidet."

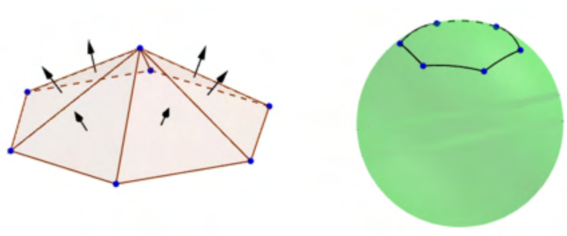


Abbildung 1: Eine Pyramide als Glasdach und ihr Normalenbild

Theresa schlägt eine regelmäßige Pyramide wie in Abbildung 1 als Glasdach vor. Diese Konstruktion habe sich bewährt und erfordert genau die Anforderungen des Weihnachtsmannes – immerhin ist das Normalenbild ein regelmäßiges sphärisches Sechseck und insbesondere frei von Selbstschnitten.

Dem Weihnachtsmann ist dies allerdings zu langweilig. Ihm schwebt eine interessantere Form vor, auch wenn er sie nicht so gut beschreiben kann. Daher zeichnet er verschiedene sphärische Polygone, die er als Normalenbilder spannend fände (siehe Abbildung 2). Auf Anhieb können Maryna und Theresa jedoch nicht sagen, welche von denen zu einem geeigneten Kegel gehören.

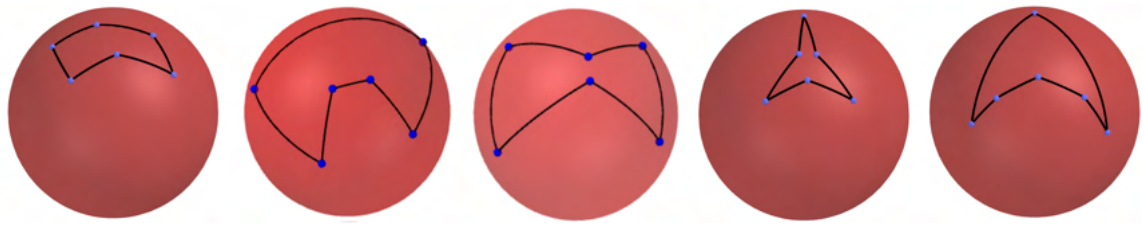


Abbildung 2: Die sphärischen Polygone des Weihnachtsmannes

Maryna und Theresa ziehen sich zur Beratung in ihr Büro zurück. Sie besprechen sich mit ihren Wichtelkolleginnen Aylin und Niveditha. Aylin erinnert sich an einen kürzlich bewiesenen Satz, der für das Problem des Weihnachtsmannes hilfreich sein könnte. Dieser besagt, dass der orientierte Flächeninhalt F des Normalenbilds gleich 2π minus der Summe der an der gemeinsamen Ecke angrenzenden Innenwinkel der Dreiecke entspricht, wobei alle Winkel im Bogenmaß gemessen werden. Die Orientierung des Flächeninhalts ist dabei wie folgt zu verstehen: Gehen wir die Seitenflächen des Kegels gegen den Uhrzeigersinn entlang, so ist der Flächeninhalt seines Normalenbildes positiv, wenn wir das sphärische Polygon gegen den Uhrzeigersinn abschreiten, und negativ, wenn wir das sphärische Polygon im Uhrzeigersinn abschreiten. Zum Beispiel hat das Normalenbild der gleichmäßigen Pyramide einen positiven Flächeninhalt.
Nun meldet sich Niveditha zu Wort: „Der (nicht orientierte) Flächeninhalt eines sphärischen Polygons, welches sich nicht selbst schneidet, lässt sich übrigens ganz einfach über die Winkel des Polygons ausrechnen! Für unser Polygon müssen wir dafür nur die Innenwinkel addieren und vom Ergebnis 4π subtrahieren.“
Mit dieser Hilfestellung fangen Maryna und Theresa motiviert an, herauszufinden, welche sphärischen Polygone des Weihnachtsmanns sich als Normalenbilder eines möglichen Glasdachs realisieren lassen. Nach einer ganzen Weile des Überlegens, finden sie heraus, dass sie die Winkel an der gemeinsamen Ecke des Kegels in Beziehung mit den Innenwinkeln des sphärischen Polygons bringen können. Fasziniert von ihrer Entdeckung gehen sie zu ihren Wichtelkolleginnen und erklären ihnen, was sie herausgefunden haben: „Wenn wir die Seitenflächen des Kegels gegen den Uhrzeigersinn mit f_1 bis f_6 nummerieren, sowie die Winkel an der gemeinsamen Ecke des Kegels mit α_1 bis α_6 passend zu den Namen der Seitenflächen nennen und ebenso die Innenwinkel des sphärischen Polygons mit β_1 bis β_6 bezeichnen, dann können wir zwei Fälle unterscheiden: Entweder der Flächeninhalt des Polygons ist positiv orientiert oder negativ orientiert. Im ersten Fall können wir dann ein Dreieck des Kegels betrachten, z.B. f_3. Die Nachbardreiecke f_2 und f_4 müssen dann entweder auf der gleichen Seite von f_3 sein oder auf unterschiedlichen. Wenn sie auf der gleichen Seite liegen, dann haben wir herausgefunden, dass $\beta_3 = \pi - \alpha_3$ gilt und das $\beta_3 < \pi$, aber wenn sie auf unterschiedlichen Seiten liegen, dann gilt $\beta_3 = 2\pi - \alpha_3$ und β_3 ist ein überstumpfer Winkel. Natürlich gilt das auch für alle anderen Dreiecke f_1, f_2, etc. Wenn der Flächeninhalt des

sphärischen Polygons dagegen negativ orientiert ist und die Nachbardreiecke von z.B. f_3 auf der gleichen Seite liegen, dann gilt $\beta_3 = \pi + \alpha_3$ und β_3 ist ein überstumpfer Winkel, und wenn sie auf unterschiedlichen Seiten liegen, dann gilt $\beta_3 = \alpha_3$ und $\beta_3 < \pi$.“

	F positiv	F negativ
gleiche Seite	$\beta = \pi - \alpha$, $\beta < \pi$	$\beta = \pi + \alpha$, $\beta > \pi$
unterschiedliche Seiten	$\beta = 2\pi - \alpha$, $\beta > \pi$	$\beta = \alpha$, $\beta < \pi$

Aylin und Niveditha schauen sich die Berechnungen von Maryna und Theresa an und stimmen ihnen zu: „Super! Das heißt, ihr müsst jetzt nur noch herausfinden, welche Kombinationen von Dreiecken mit Nachbardreiecken auf der gleichen oder auf unterschiedlichen Seiten möglich sind.“
Welche sphärischen Polygone des Weihnachtsmannes lassen sich als Normalenbilder eines möglichen Glasdachs realisieren? Die Decke des Weihnachtsmannes ist dabei so dick, dass das Glasdach hierdurch keinen nennenswerten Einschränkungen unterliegt. (Ihr dürft für eure Konstruktion also annehmen, dass die Decke unendlich dick ist.)

Antwortmöglichkeiten:

1. Nur das erste.
2. Nur das zweite.
3. Nur das dritte.
4. Nur das vierte.
5. Nur das fünfte.
6. Nur das erste, zweite und dritte.
7. Nur das erste, zweite und fünfte.
8. Nur das zweite und dritte.
9. Alle außer dem ersten.
10. Alle fünf.

Projektbezug:

Im Projekt EF 2-1 „Smooth Discrete Surfaces“ haben wir uns mit aus flachen Polygonen zusammengesetzten Flächen beschäftigt, die sich wie glatte Flächen verhalten. Unsere erste Annahme war, dass das Normalenbild um jede Ecke herum frei von Selbstüberschnitten sein soll. Diese *Diskretisierung* ist aus der klassischen Theorie von glatten Flächen motiviert, bei der das Normalenbild lokal ebenfalls frei von Selbstschnitten ist, sofern die Krümmung an einer Ecke nicht 0 ist. Mittels weiterer Analogien zu glatten Flächen haben wir eine Theorie „glatter diskreter Flächen“ entworfen. Diese Theorie ist für Anwendungen in der Architektur relevant. So möchten Architektinnen geschwungene Glasfassaden konstruieren, aus Kostengründen sind sie aber auf Realisierungen mittels Glasplatten angewiesen. Es ist nämlich recht aufwendig und teuer, Glas im großen Maßstab zu verbiegen. Daher sind sie an polyedrischen Flächen interessiert, die viele Eigenschaften mit glatten Flächen gemeinsam haben – unter anderem sollen die Reflexionen im Sonnenlicht gleichmäßig sein. Ein auf unserer Theorie aufbauender Algorithmus verbessert Entwürfe von Glasflächen in Hinblick auf ihre Reflexionen.
Der in der Aufgabe erwähnte Satz über den orientierten Flächeninhalt des Normalenbildes spielte auch für unsere Arbeit eine wichtige Rolle. Allerdings existierte zuvor kein allgemeiner Beweis dieser Aussage – nur für Spezialfälle wie den konvexen Fall aus Abbildung 1 war ein Beweis bekannt. Wir konnten schließlich einen elementaren Beweis finden, welcher im *American Mathematical Monthly* publiziert wurde:
https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00029890.2023.2263299

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Dank Aylin wissen wir, dass für den orientierten Flächeninhalt F des sphärischen Polygons

$$F = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6)$$

gilt. Auf der anderen Seite wissen wir durch Nivedithas Hinweis, dass der Flächeninhalt des sphärischen Polygons

$$|F| = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_6 - 4\pi$$

beträgt.
Sei nun k die Zahl der Dreiecke f_i, für die die beiden Nachbarflächen auf derselben Seite sind. Dann sind für $6 - k$ Dreiecke die beiden Nachbarflächen auf unterschiedlichen Seiten. Ist das sphärische Polygon positiv orientiert, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6) = F &= \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_6 - 4\pi \\ &= k\pi + (6-k)2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6) - 4\pi. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt aus folgendem Grund: Jeder Winkel β_i lässt sich nach der Aufgabenstellung identifizieren mit $\pi - \alpha_i$, wenn die Nachbardreiecke von f_i auf der gleichen Seite liegen und ansonsten mit $2\pi - \alpha_i$, wenn die Nachbardreiecke auf unterschiedlichen Seiten liegen. Da wir annehmen, dass es k Dreiecke gibt, deren Nachbardreiecke auf derselben Seiten liegen, erhalten wir k mal den Summanden π und $6 - k$ mal den Summanden 2π. In jedem Fall wird jedoch der Winkel α_i subtrahiert, sodass wir die Gleichheit

$$2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6) = k\pi + (6-k)2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6) - 4\pi$$

erhalten. Addieren wir die Winkel α_i auf beiden Seiten und teilen beide Seiten durch π, ergibt sich $2 = k + (6-k) \cdot 2 - 4$, woraus sich $k = 6$ ergibt. Damit sind die Nachbarflächen eines jeden Dreiecks auf der gleichen Seite. Daraus folgt, dass der Innenwinkel β_i kein überstumpfer Winkel sein kann. (Das Normalenbild des Kegels ist in diesem Fall ein konvexes sphärisches Polygon.)
Ist das sphärische Polygon negativ orientiert, so erhalten wir aus der Tabelle

$$\begin{aligned} 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6) = F &= -(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_6 - 4\pi) \\ &= -(k\pi + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6 - 4\pi) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit erhält man ähnlich zum vorherigen Fall Insbesondere gilt $2 = -k + 4$, also $k = 2$. Damit sind für zwei Dreiecke f_i die Nachbarflächen auf der gleichen Seite. Der entsprechende Innenwinkel β_i für diese Seiten muss überstumpf sein. Für die vier übrigen Dreiecke f_j sind die Nachbarflächen auf unterschiedlichen Seiten. Der entsprechende Innenwinkel β_j ist für diese Dreiecke nicht überstumpf. Das Normalenbild des Kegels hat in diesem Fall also vier Ecken mit einem nicht-überstumpfen Winkel und zwei Ecken mit einem überstumpfen Winkel.
Damit können nur das zweite und das dritte sphärische Polygon des Weihnachtsmannes als Normalenbild eines Glasdachs wiedergefunden werden. Diese können tatsächlich realisiert

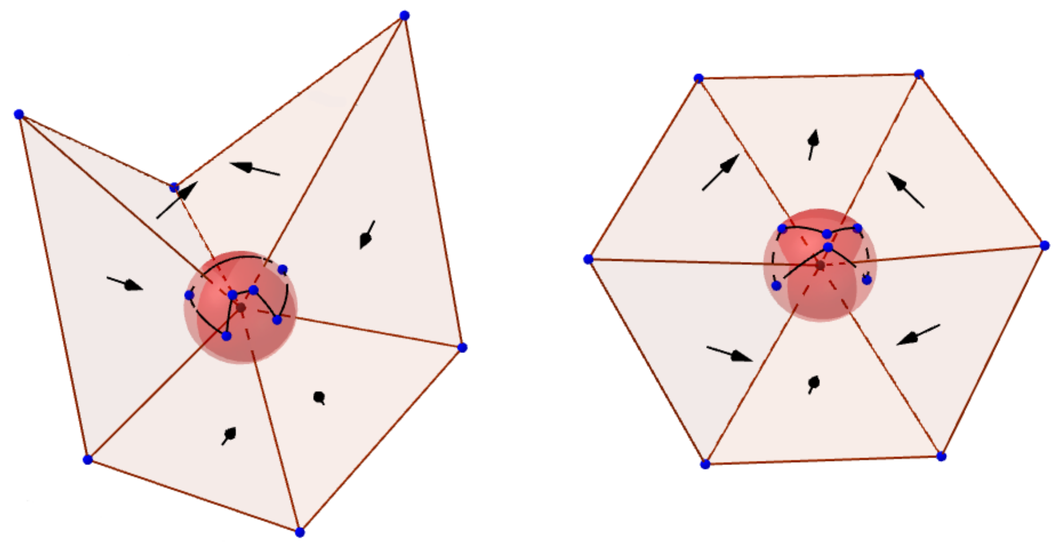


Abbildung 3: Glasdächer, deren Normalenbildern dem zweiten und dritten sphärischen Polygon des Weihnachtsmannes entsprechen.

werden, wie Abbildung 3 zeigt. Dass die Glasdächer auch in die Decke des Weihnachtsmannes eingesetzt werden können liegt daran, dass die beiden Normalenbilder in einer offenen Hemisphäre liegen. Ist der Himmel der Nordpol der Hemisphäre, so könnte ein Glasdach erst dann nicht eingesetzt werden, wenn sein (äußerer) Normalenvektor auf oder unterhalb des Äquators liegt.