MATH+ KALENDER

Aufgaben und Lösungen
2022

www.mathekalender.de

Inhaltsverzeichnis

1 Schokoladentafeln

Autor*in: N. Alexia Raharinirina (ZIB)

Projekt: *The Evolution of Ancient Egyptian – Quantitative and Non-Quantitative Mathematical Linguistics* (EF 5-4)

Illustration: Till Hausdorf

Aufgabe

Um die Elfen Ra, Geb und Bastet mit genug Wegzehrung für ihre nächste Reise nach Schneedorf auszustatten, verteilt der Weihnachtsmann Schokoladentafeln in drei Säcke: einen roten, einen grünen und einen blauen. Er beschließt, die Schokoladentafeln über mehrere Runden hinweg nacheinander in die Säcke zu stecken, und beginnt damit, r Tafeln in den roten, g Tafeln in den grünen und b Tafeln in den blauen Sack zu legen. In jeder Runde packt er dann doppelt so viele Schokoladentafeln in die jeweiligen Beutel wie in der Runde davor.

Nach zwei Runden enthält der rote Sack 3 Schokoladentafeln, der grüne 6 und der blaue 9. In der letzten Runde packt der Weihnachtsmann 32 Tafeln in den roten Sack, γ Tafeln in den grünen und β Tafeln in den blauen.

Wie viele Schokoladentafeln hat der Weihnachtsmann insgesamt in alle drei Säcke getan?

Antwortmöglichkeiten:

1. 189
2. 270
3. 378
4. 458
5. 570
6. 657
7. 745
8. 803
9. 926
10. 1034

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Let's denote the number of chocolate bars put in the red, green, and blue bag in the n^{th} round by

$$r(n), \quad g(n), \quad b(n),$$

respectively. Santa's rule for placing the chocolate bars into the bags is equivalent to the following equations

$$x(n) = 2 \cdot x(n-1), \quad \text{where } x \in \{r, g, b\} \quad \text{and } n \geq 2. \tag{1}$$

Recursively, we obtain explicit formulae for the number of chocolate bars that are put in each bag in the n^{th} round:

$$x(n) = 2 \cdot x(n-1) = 2 \cdot 2 \cdot x(n-2) = \ldots = 2^{n-1} \cdot x(1). \tag{2}$$

Hence, the total number of chocolate bars in each bag after the n^{th} round amounts to

$$\begin{aligned} X(n) &:= x(1) + x(2) + \ldots + x(n-1) + x(n) \\ &= x(1) + 2 \cdot x(1) + 4 \cdot x(1) + \ldots + 2^{n-2} \cdot x(1) + 2^{n-1} \cdot x(1) \\ &= \left(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1}\right) \cdot x(1) \\ &= (2^n - 1) \cdot x(1) \end{aligned} \tag{3}$$

After the second round, the total number of chocolate bars in each bag is given by

$$\begin{aligned} 3 &= R(2) = (2^2 - 1) \cdot r(1) = 3 \cdot r(1), \\ 6 &= G(2) = (2^2 - 1) \cdot g(1) = 3 \cdot g(1), \\ 9 &= B(2) = (2^2 - 1) \cdot b(1) = 3 \cdot b(1). \end{aligned}$$

Thus, we find that

$$r(1) = 1, \quad g(1) = 2, \quad b(1) = 3. \tag{4}$$

Furthermore, we know that in the last round, denoted by n_{last}, Santa put 32 chocolate bars into the red bag, i. e.

$$r(n_{last}) = 32 = 2^5 \cdot 1 = 2^{6-1} \cdot r(1).$$

Using equation (2) and (4), we get $n_{last} = 6$; which means that there were overall six rounds. By (3), the amount of chocolate bars in each bag after six rounds is

$$X(6) = (2^6 - 1) \cdot x(1) = (64 - 1) \cdot x(1) = 63 \cdot x(1).$$

Therefore, the total number of chocolate bars in all three bags is

$$R(6) + G(6) + B(6) = 63 \cdot r(1) + 63 \cdot g(1) + 63 \cdot b(1) = 63 \cdot (1 + 2 + 3) = 63 \cdot 6 = \mathbf{378}.$$

2 Bogenmatik

Autor*innen: Hajo Broersma und Pim van ’t Hof (Universiteit Twente)
Projekt: 4TU.AMI

Illustration: Till Hausdorf

Aufgabe

Es ist ein offenes Geheimnis, dass alle Elfen, die für den Weihnachtsmann arbeiten, gerne Bogenschießen, Mathematik aber nicht leiden können. Um ihre Begeisterung für Mathematik zu steigern, hat der Weihnachtsmann die drei Elfen Archy, Bowy und Curvy zu einer Kombination aus Bogenschießen und Mathematik eingeladen.

Der Weihnachtsmann hat dafür eine runde Zielscheibe aufgestellt. Die Elfen bekommen jeweils fünf Pfeile und müssen diese nacheinander mit ihrem Bogen auf die Zielscheibe schießen. Die Zielscheibe besteht aus einem kreisförmigen Zentrum und drei konzentrischen, um das Zentrum herum angeordneten Ringen, wie in Abbildung 1 dargestellt.

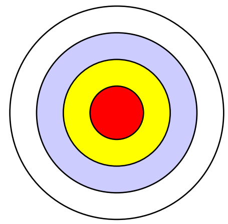


Abbildung 1: Die kreisförmige Zielscheibe.

Dem Zentrum und jedem der Ringe ist jeweils eine feste Punktzahl für jeden Pfeil zugeordnet, der das entsprechende Zielgebiet trifft. Die Elfen wissen, dass diese Punktzahl aus der unendlichen Menge von Werten

$$\{5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$$

ausgewählt wurden. Jede Punktzahl ist also ein positives Vielfaches von 5 und kann beliebig groß sein. Die genauen Punktzahlen sind nur dem Weihnachtsmann bekannt, nicht aber den Elfen. Die Elfen wissen jedoch Folgendes: Beginnend mit dem äußersten Ring steigt die Punktzahl strikt an, sodass schließlich das Zentrum die höchste Punktzahl aller vier Zielbereiche hat.

Nachdem ein Elf alle fünf Pfeile auf die Zielscheibe geschossen hat, gibt der Weihnachtsmann die Gesamtpunktzahl bekannt, ohne die Punktzahlen, die die einzelnen Pfeile erzielt haben, zu nennen. Der Weihnachtsmann fordert die Elfen auf, durch geschicktes Schießen auf die Scheibe, so viele Informationen wie möglich über die Punktzahl des Zentrums zu erhalten. Wenn es einem der Elfen zum Beispiel gelänge, alle fünf Pfeile in das Zentrum zu schießen, könnten die Elfen aus der vom Weihnachtsmann verkündeten Gesamtpunktzahl sofort den genauen Wert des Zentrums erschließen. Leider sind die Elfen nicht so treffsicher, obwohl es allen dreien gelingt, das Zentrum mindestens einmal zu treffen.

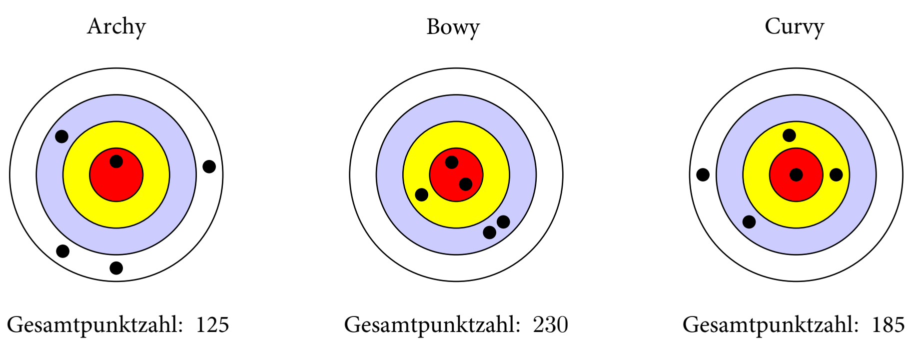


Abbildung 2: Die Punkte, an denen die Pfeile von Archy, Bowy und Curvy das Ziel getroffen haben sowie die entsprechenden Gesamtpunktzahlen der drei Elfen.

Die schwarzen Punkte in Abbildung 2 zeigen die Stellen an, an denen die Pfeile der drei Elfen die Zielscheibe getroffen haben. Die erste Zielscheibe zeigt an, dass Archy den äußeren Ring mit drei Pfeilen, den nächsten Ring mit einem Pfeil und das Zentrum mit einem Pfeil getroffen hat. Der Weihnachtsmann verrät, dass Archys Gesamtpunktzahl 125 beträgt. Aus der zweiten Zielscheibe geht hervor, dass Bowy mit einer Gesamtpunktzahl von 230 der bessere

Bogenschütze ist. Schließlich, nachdem auch Curvys fünf Pfeile das Ziel getroffen haben, wie auf der dritten Zielscheibe dargestellt, verrät der Weihnachtsmann eine Gesamtpunktzahl von 185 für Curvy.

Mit diesen drei Gesamtergebnissen ist es den Elfen leider nicht möglich, den genauen Wert des Zentrums zu bestimmen. Die obigen Angaben schränken jedoch die Anzahl der möglichen Punktzahlen erheblich ein.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 2.
2. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 3.
3. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 4.
4. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 5.
5. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 6.
6. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 7.
7. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 8.
8. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 9.
9. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 10.
10. Die Anzahl der möglichen Punktwerte für das Zentrum reduziert sich auf genau 11.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Aus der Annahme und den gegebenen Gesamtpunktzahlen lässt sich auf verschiedene Weise ableiten, dass die Zahlen $60, 65, 70, 75, 80$ die einzigen fünf möglichen Punktzahlen für das Zentrum sind. Hier zeigen wir einen möglichen Ansatz dafür.

Wir bezeichnen mit x_1, x_2, x_3, x_4 die Punktzahlen des äußeren (ersten) Rings, des zweiten Rings, des dritten Rings bzw. des Zentrums. Aus den drei Teilabbildungen von 2 und den ermittelten Gesamtpunktzahlen ergeben sich die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} + x_4 &= 125 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 230 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 185 \end{aligned}$$

Wenn man mit diesen Gleichungen etwas herumspielt, kann man die exakten Werte für x_3 und x_1 ableiten. Eine Möglichkeit dafür ist, die dritte Gleichung mit dem Faktor 3 zu multiplizieren und anschließend die erste und zweite Gleichung vom Ergebnis wieder zu subtrahieren. So erhalten wir die folgende Gleichung:

$$5x_3 = 555 - 125 - 230 = 200.$$

Folglich erhalten wir $x_3 = 40$. Setzt man $x_3 = 40$ in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir:

$$2x_2 + 40 + 2x_4 = 230,$$

was zu $x_2 + x_4 = 95$ führt. Setzen wir nun $x_2 + x_4 = 95$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir:

$$3x_1 + 95 = 125,$$

was zu $x_1 = 10$ führt. Setzen wir $x_1 = 10$ und $x_3 = 40$ in alle drei Gleichungen ein, erhalten wir dreimal dieselbe Gleichung:

$$x_2 + x_4 = 95.$$

Das bedeutet, dass wir die genauen Werte für x_2 oder x_4 nicht bestimmen können. Informationen, die wir noch nicht verwendet haben, sind, dass alle x_i positive Vielfache von 5 sein müssen, und dass $10 = x_1 < x_2 < x_3 = 40 < x_4$ gelten muss. Dies zeigt, dass x_2 nur die Werte $15, 20, 25, 30, 35$ annehmen kann. Zusammen mit der Gleichung $x_2 + x_4 = 95$ ergibt sich, dass x_4 nur die **fünf Werte** $60, 65, 70, 75, 80$ annehmen kann. Man kann durch Einsetzen leicht überprüfen, dass alle Paare $(15, 80)$, $(20, 75)$, $(25, 70)$, $(30, 65)$, $(35, 60)$ für (x_2, x_4) die richtigen Gesamtpunktzahlen ergeben.

3 Gesellige Wichtel

Autor*in: Tobias Paul (HU Berlin)

Projekt: *The Impact of Dormancy on the Evolutionary, Ecological and Pathogenic Properties of Microbial Populations* (EF 4-7)

Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Wie jedes Jahr müssen auch in dieser Vorweihnachtszeit viele Geschenke von den Weihnachtswichteln gefertigt werden. Zum Leid des Weihnachtsmannes findet sich allerdings kaum noch qualifiziertes Personal und so gibt es in diesem Jahr nur 12 Wichtel, die sich um die Geschenkeproduktion kümmern können. „Wenn jedes meiner Helferlein ein Geschenk pro Tag schafft, werden wir trotzdem ohne große Probleme fertig“, murmelt der Weihnachtsmann in seinen Bart. So legt er am Abend an jede Werkbank Bastelmaterial und weist die zwölf Wichtel an, dass jeder sein zugeteiltes Geschenk am nächsten Tag fertigstellen möge.

Am nächsten Morgen kommen die Wichtel alle nacheinander in die Werkstatt. Zuerst kommt Wichtel Arvo und beginnt fleißig, sein Geschenk zu bearbeiten. Als Wichtel Bjame als nächstes fröhlich hereinspaziert, sieht er, wie Arvo schon dabei ist, seine Arbeit zu erledigen. Da Wichtel

gesellige Quatschbacken sind, hat er große Lust, ein Gespräch mit Arvo zu beginnen. Das würde aber dazu führen, dass Bjame sein eigenes Geschenk heute nicht anfangen und fertigstellen könnte – Arvo dagegen wäre von der Plauderei nicht weiter abgelenkt und könnte seine Aufgabe weiter bearbeiten. Innerlich zerrissen entscheidet sich Bjame mit gleicher Wahrscheinlichkeit dafür, entweder seiner Arbeit nachzugehen oder mit Arvo zu reden.
Der dritte Wichtel Cortie hat nun ebenfalls die Qual der Wahl: Soll er mit Arvo quatschen, mit Bjame reden oder seiner zugewiesenen Arbeit nachgehen? Unabhängig davon, wie sich Bjame zuvor entschieden hat, entscheidet sich Cortie gleichverteilt für eine der drei Möglichkeiten. (Wichtel sind hier im Übrigen gar nicht zimperlich und haben keine Probleme damit, Gespräche zu unterbrechen oder sich unterbrechen zu lassen.)
So geht es immer weiter, bis der zwölfte und letzte Wichtel Lasse ankommt und entscheiden muss, ob er genug Disziplin hat, um sich auf sein Geschenk zu konzentrieren, oder ob er sich doch lieber zu einem der anderen elf Wichtel gesellt. Die Entscheidung dafür mit wem oder was er sich beschäftigt, trifft auch er wieder gleichverteilt über alle elf anderen Wichtel und sein Geschenk und unabhängig davon, wie sich die Wichtel vor ihm entschieden haben.

Schon fleißig arbeitende Wichtel werden durch Gespräche nicht bei ihrer Arbeit unterbrochen und können ihr Geschenk, wie vom Weihnachtsmann geplant, fertigstellen. Andererseits fängt kein Wichtel, der sich bei seiner Ankunft in der Werkstatt für ein Gespräch mit einem anderen Wichtel entschieden hat, später noch mit seiner Arbeit an.

Und so sind manche Wichtel fleißig, manche hingegen vergessen die Zeit beim Plaudern. Der Weihnachtsmann kommt am Abend vorbei, um nach dem Rechten zu schauen und sieht das ganze Durcheinander: Nicht einmal annähernd so viele Geschenke wie geplant sind fertiggeworden!

Wird es so noch möglich sein, bis Heiligabend alle Geschenke anzufertigen? Um das herauszufinden, möchte der Weihnachtsmann berechnen,

(a) wie viele Geschenke im Durchschnitt pro Tag fertig werden (gerundet auf ganze Geschenke) und

(b) wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass an einem Tag nur ein einziges Geschenk fertig wird.

Welche Antwort ist korrekt?

Antwortmöglichkeiten:

1. (a) 3 und (b) $\frac{1}{24}$
2. (a) 3 und (b) $\frac{1}{12}$
3. (a) 3 und (b) $\frac{1}{6}$
4. (a) 4 und (b) $\frac{1}{24}$
5. (a) 4 und (b) $\frac{1}{12}$
6. (a) 4 und (b) $\frac{1}{6}$
7. (a) 5 und (b) $\frac{1}{24}$
8. (a) 5 und (b) $\frac{1}{12}$
9. (a) 5 und (b) $\frac{1}{6}$
10. (a) 6 und (b) $\frac{1}{24}$

Projektbezug:

In unserem Projekt EF 4-7 *The Impact of Dormancy on the Evolutionary, Ecological and Pathogenic Properties of Microbial Populations* beschäftigen wir uns unter anderem mit Biodiversität und genetischer Vielfalt. Die Geschenke aus der Aufgabe entsprechen in diesem Kontext genetischen Mutationen in einem klassischen Modell, dem *Kingman-Koaleszenten*. Somit ist die Frage nach der Anzahl der Geschenke schlichtweg die Frage nach der Anzahl der (verschiedenen) Mutationen in einer Probe aus 12 Individuen. Diese lassen sich explizit bestimmen. Wie es für Mathematiker*innen üblich ist, interessieren wir uns für das asymptotische Verhalten der Anzahl der Mutationen für $n \to \infty$ in einem komplexeren Modell für seltene Mutationen, dem *Seed-Bank-Koaleszenten*. Hierbei beschreibt n die Größe der untersuchten Population.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Wir nummerieren die Wichtel Arvo, Bjame, Cortie, ... und Lasse der Reihe nach von 1 bis 12 durch und setzen $n_i = 1$ mit $i \in \{1, \ldots, 12\}$, falls Wichtel i sich dafür entscheidet, sein Geschenk zu bearbeiten, und $n_i = 0$ anderenfalls.

Für den Wichtel i beträgt die Wahrscheinlichkeit, sein zugewiesenes Geschenk zu bearbeiten, laut Aufgabenstellung:

$$\mathbb{P}(n_i = 1) = \frac{1}{i}.$$

Der Wichtel i stellt also im Durchschnitt $\frac{1}{i}$ Geschenke pro Tag fertig. Alle Wichtel zusammen stellen demnach

$$\sum_{i=1}^{12} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{12} = \frac{86\,021}{27\,720} \approx 3{,}1032 \approx 3$$

Geschenke her. Im Durchschnitt werden also pro Tag (gerundet) **3** Geschenke fertig.

Da Arvos Geschenk auf jeden Fall fertig wird, können wir das Ereignis „nur ein Geschenk wird fertig" übersetzen in

$$n_1 = 1, \quad n_i = 0 \text{ für } i \geq 2,$$

d. h. Arvos Geschenk wird fertig und alle anderen Wichtel entscheiden sich für eine gesellige Plauderei. Wir können $\mathbb{P}(n_1 = 1,\ n_i = 0 \text{ für } i \geq 2)$ nun sehr einfach berechnen, da die Entscheidungen der Wichtel unabhängig voneinander sind:

$$\mathbb{P}(n_1 = 1,\ n_i = 0 \text{ für } i \geq 2) = \mathbb{P}(n_1 = 1) \cdot \prod_{i=2}^{12} \mathbb{P}(n_i = 0) = \mathbb{P}(n_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(n_2 = 0) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(n_{12} = 0),$$

wobei $\mathbb{P}(n_i = 0)$ gerade die Gegenwahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(n_i = 1)$ ist:

$$\mathbb{P}(n_i = 0) = 1 - \mathbb{P}(n_i = 1) = 1 - \frac{1}{i} = \frac{i-1}{i}.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(n_1 = 1,\ n_i = 0 \text{ für } i \geq 2) = \mathbb{P}(n_1 = 1) \cdot \prod_{i=2}^{12} \mathbb{P}(n_i = 0) &= 1 \cdot \prod_{i=2}^{12} \frac{i-1}{i} \\
&= 1 \cdot \frac{2-1}{2} \cdot \frac{3-1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{11-1}{11} \cdot \frac{12-1}{12} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur ein einziges Geschenk fertig wird, beträgt also $\mathbf{\frac{1}{12}}$.

4 Geschenkeversand

Autor*in: Clara Stegehuis (Universiteit Twente)
Projekt: European Women in Mathematics – The Netherlands (EWM-NL)

Illustration: Till Hausdorf

Aufgabe

Ada Lovelace war eine der ersten Informatikerinnen und ist eine alte Freundin des Weihnachtsmanns. Sie war auch eine der Ersten, die erkannte, dass Computer nicht nur schwierige Gleichungen lösen und Zahlen approximieren können, sondern auch zur Implementierung von Algorithmen verwendet werden können. Nun braucht der Weihnachtsmann Adas Hilfe, um einen Algorithmus für die folgende schwierige Aufgabe zu entwickeln.

Der Weihnachtsmann verpackt und verschickt Geschenke, die in einer endlichen Reihe in seinem Lagerraum liegen. Die Geschenke können *nur dann* verschickt werden, wenn sie ordentlich verpackt sind (P). Bei einigen Geschenken ist jedoch das Verpackungsmaterial beschädigt (D).

Wenn der Weihnachtsmann ein ordentlich verpacktes Geschenk verschickt, ändern die benachbarten Geschenke ihren Status:

- P→D: Wenn das Geschenk ordentlich verpackt war, schafft es der Weihnachtsmann – tollpatschig, wie er nun einmal ist – dies zu beschädigen.
- D→P: Wenn das Geschenk beschädigt war, dann reparieren es die Weihnachtswichtel, die dem Weihnachtsmann immer zur Seite stehen, sodass es anschließend wieder ordentlich verpackt ist.

Die Geschenke werden eines nach dem anderen verschickt. Sobald ein Geschenk verschickt wurde, hinterlässt es eine Lücke in der Reihe, wodurch zwei kürzere Reihen entstehen. Die Geschenke, die rechts und links der Lücke liegen, werden nicht als nebeneinanderliegend betrachtet. Die ersten beiden Sendungen des gestrigen Tages sind unten abgebildet:

$$\begin{array}{cccccccc} & \mathrm{D} & \mathrm{P} & \color{blue}{\mathrm{D}} & \color{red}{\mathrm{P}} & \color{blue}{\mathrm{P}} & \mathrm{D} & \mathrm{P} \\ \hookrightarrow & \mathrm{D} & \color{blue}{\mathrm{P}} & \color{red}{\mathrm{P}} & - & \mathrm{D} & \mathrm{D} & \mathrm{P} \\ \hookrightarrow & \mathrm{D} & \mathrm{D} & - & - & \mathrm{D} & \mathrm{D} & \mathrm{P} \end{array}$$

Die Anfangsreihe im Beispiel besteht aus sieben Geschenken. Im ersten Schritt wird das 4. Geschenk (in rot) gesendet. Daher ändert sich der Status der beiden benachbarten Pakete (in blau) von D nach P bzw. P nach D. Im zweiten Schritt wird das 3. Paket (wieder in rot) versendet. Da es nur einen Nachbarn (wieder in blau) hat, wird nur der Status dieses Nachbarn von P nach D geändert.

Der Weihnachtsmann möchte natürlich alle Pakete einer beliebigen Reihe verschicken, d. h. er möchte, dass der obige Prozess für eine beliebige Reihe von Geschenken mit einer leeren Reihe endet. Obwohl *der Weihnachtsmann die Reihenfolge, in der er die Geschenke verschickt, frei wählen kann*, bleibt er manchmal nur auf beschädigten Geschenken sitzen (die er nicht verschicken kann). Der Weihnachtsmann glaubt, dass seine Freundin Ada Lovelace in der Lage ist, einen Algorithmus zu entwickeln, der sein Versandproblem löst.

Für welche Anfangsreihen von Geschenken gibt es einen Versandalgorithmus, der mit einer leeren Reihe endet?

Antwortmöglichkeiten:

1. Für jede Anfangsreihe von Geschenken, die mindestens ein ordentlich verpacktes Geschenk enthält.
2. Für jede Anfangsreihe von Geschenken, die mindestens ein ordentlich verpacktes Geschenk enthält, und bei der ordentlich verpackte Geschenke nur neben beschädigten liegen.
3. Für jede Anfangsreihe von Geschenken, die mindestens ein ordentlich verpacktes Geschenk enthält, und bei der beschädigte Geschenke nur neben ordentlich verpackten liegen.
4. Für jede Anfangsreihe von Geschenken mit einer ungeraden Anzahl von ordentlich verpackten Geschenken.
5. Für jede Anfangsreihe von Geschenken, die mindestens ein ordentlich verpacktes Geschenk sowie eine ungerade Anzahl beschädigter Geschenke enthält.
6. Für jede Anfangsreihe von Geschenken mit einer ungeraden Anzahl von Geschenken und mindestens einem ordentlich verpackten Geschenk.
7. Für jede Anfangsreihe von Geschenken mit einer geraden Anzahl von ordentlich verpackten Geschenken.
8. a
9. Für jede Anfangsreihe von Geschenken mit ordentlich verpackten Geschenken an beiden Enden dieser Reihe.
10. Für jede Anfangsreihe von Geschenken, die mindestens ein ordentlich verpacktes Geschenk enthält und bei der mindestens drei beschädigte Geschenke nebeneinander liegen.

Projektbezug:

EWM-NL ist der nationale Verband der Frauen, die im Bereich Mathematik in den Niederlanden arbeiten. EWM-NL wurde 2013 gegründet und hat mehrere hundert Mitglieder aus dem akademischen Bereich, der Industrie und der Gesellschaft im Allgemeinen. EWM-NL organisiert mehrere Veranstaltungen pro Jahr, die in der Regel allen offen stehen, bietet Stipendien zur Karriereförderung an und unterhält ein Mentorennetzwerk.

Mehr Informationen: https://www.ewmnetherlands.nl/home/mission/

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Wir werden beweisen, dass

4. Für jede Anfangsreihe von Geschenken mit einer ungeraden Anzahl von ordentlich verpackten Geschenken.

die korrekte Antwortmöglichkeit ist.

Nehmen wir zunächst an, dass es **nur ein ordentlich verpacktes Geschenk** gibt. Wenn es sich am Ende der Reihe befindet, führt das Versenden von diesem Geschenk zu einer kürzeren Reihe mit einem ordentlich verpackten Geschenk an einem Ende, da sein beschädigter Nachbar repariert wird. Nun kann der Weihnachtsmann dieses reparierte Paket verschicken, was zu einer noch kürzeren Reihe von Geschenken mit einem ordentlich verpackten Geschenk an einem Ende führt. Nach und nach kann der Weihnachtsmann alle Geschenke verschicken:

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{P} & \mathrm{D} & \mathrm{D} & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} \\ \hookrightarrow & - & \mathrm{P} & \mathrm{D} & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} \\ \hookrightarrow & - & - & \mathrm{P} & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} \\ \vdots & & & & & & \\ \hookrightarrow & - & - & - & - & \cdots & \mathrm{P} \\ \hookrightarrow & - & - & - & - & \cdots & - \end{array}$$

Befindet sich das Paket nicht an einem der Enden der Reihe, führt das Versenden des Pakets zu zwei neuen Reihen, die mit einem richtig verpackten Geschenk beginnen oder enden. Nun kann der Weihnachtsmann die beiden Reihen getrennt behandeln und nacheinander alle Pakete wie im obigen Fall verschicken:

$$\begin{array}{cccccccccc} & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} & \mathrm{D} & \mathrm{P} & \mathrm{D} & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} \\ \hookrightarrow & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} & \mathrm{P} & - & \mathrm{P} & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} \end{array}$$

Nehmen wir nun an, es gibt **eine ungerade Anzahl von ordentlich verpackten Geschenken, die größer als 1 ist**. Der Weihnachtsmann kann zuerst das erste ordentlich verpackte Geschenk von links verschicken. Daraus ergeben sich zwei kürzere Reihen: Eine auf der linken Seite mit nur einem ordentlich verpackten Geschenk am Ende, und eine auf der rechten Seite. Da die linke Reihe vollständig verschickt werden kann (wie oben gezeigt), konzentrieren wir uns jetzt auf die rechte Reihe, die eine ungerade Anzahl von ordentlich verpackten Geschenken enthält. Diese Anzahl ist höchstens genauso groß wie die Anzahl der ordentlich verpackten Geschenke der Anfangsreihe. Dies wird durch die folgende Argumentation verständlich:

Fall 1. Rechts neben dem ersten ordentlich verpackten Geschenk befindet sich ein beschädigtes Geschenk. Nachdem wir das erste ordentlich verpackte Geschenk verschickt haben, erhalten wir eine kürzere Reihe rechts davon, die die gleiche Anzahl von richtig verpackten Geschenken enthält wie die Anfangsreihe:

$$\begin{array}{cccccccl} & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} & \mathrm{D} & \mathrm{P} & \mathrm{D} & \text{weitergehende Reihe mit gerader \# P} \\ \hookrightarrow & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} & \mathrm{P} & - & \mathrm{P} & \text{weitergehende Reihe mit gerader \# P} \end{array}$$

Case 2. Rechts neben dem ersten ordentlich verpackten Geschenk befindet sich noch ein ordentlich verpacktes Geschenk. Nachdem wir das erste abgeschickt haben, erhalten wir eine kürzere Reihe rechts davon, die zwei richtig verpackte Geschenke weniger enthält:

$$\begin{array}{ccccccl} & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} & \mathrm{D} & \mathrm{P} & \mathrm{P} \quad \text{weitergehende Reihe mit ungerader \# P} \\ \hookrightarrow & \mathrm{D} & \cdots & \mathrm{D} & \mathrm{P} & - & \mathrm{D} \quad \text{weitergehende Reihe mit ungerader \# P} \end{array}$$

Wir werden diese neue Reihe auf der rechten Seite nun wie oben behandeln. Nach und nach werden wir immer kürzere Reihen mit einer nicht ansteigenden, ungeraden Anzahl von ordentlich verpackten Geschenken erhalten. Daher werden wir schließlich mit einer Reihe enden, die nur ein einziges ordentlich verpacktes Geschenk enthält, das dann ohne Weiteres versandt werden kann.

Wir werden nun zeigen, dass wir eine Reihe, die eine gerade Anzahl von ordentlich verpackten Geschenken enthält, niemals vollständig verschicken können.

Angenommen, wir haben **eine gerade Anzahl von ordentlich verpackten Geschenken**. Durch ein ähnliches Argument wie oben können wir zeigen, dass der Versand eines ordentlich verpackten Geschenks zu einer kürzeren Reihe mit einer ebenfalls geraden Anzahl ordentlich verpackter Geschenke führt. Unabhängig davon, wie wir die Geschenke versenden, werden wir also niemals nur ein einziges richtig verpacktes Geschenk zum Versenden übrig haben.

Nun können wir zwei einfache Gegenbeispiele zu den übrigen neun Aussagen an:

- Die Anfangsreihe D P D P D liefert ein Gegenbeispiel zu den Antworten 1, 2, 3, 5, 6 und 7.
- Die Anfangsreihe P D D D P P P liefert ein Gegenbeispiel zu den Antworten 8, 9 und 10.

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde von einem Problem aus James Tantons Buch „Solve this!“ adaptiert. Mehr Informationen: `https://www.jamestanton.com/`

5 Lichter an!

Autor*in: Lotte Weedage (Universiteit Twente)
Projekt: 4TU.AMI

Illustration: Frauke Jansen

Aufgabe

In Heimatdorf des Weihnachtsmannes nehmen die Elfen das Schmücken sehr ernst. Jedes Jahr wird das Weihnachtsdorf mit roten und grünen Lichtern geschmückt. Um genau zu sein, muss jedes Haus mit genau zwei Lichtern geschmückt sein: *Entweder* mit zwei roten Lichtern *oder* mit zwei grünen Lichtern. Ein Haus mit einem grünen und einem roten Licht zu schmücken ist verboten.

Der kleine Elf Alfie will sein eigenes Haus schmücken und entscheidet sich für zwei rote Lichter. In seinem Haus hat er eine Schachtel mit 4 grünen und 4 roten Lichtern gefunden. Alfie weiß, dass genau die Hälfte der Lichter in der Schachtel rot und die andere Hälfte grün ist, aber es gibt ein Problem: Er ist farbenblind und kann den Unterschied zwischen den roten und den grünen Lichtern nicht erkennen. Da Alfie nicht zum ersten Mal mit diesem Problem konfrontiert wird, ist er vorbereitet und benutzt seine Rote-Farben-Test-Maschine (RFTM).

Die RFTM hat zwei Behälter: Wenn Alfie ein Licht in jeden der Behälter legt, gibt das Gerät genau dann einen Ton von sich, wenn beide Lichter rot sind.

Alfie testet Lichterpaare in der RFTM, bis er ein Geräusch hört. Wenn Alfie bei seinem ersten Versuch zufällig zwei rote Lichter auswählt, hört er nach dem ersten Test ein Geräusch und ist fertig. Im ungünstigsten Fall sind jedoch mehr Versuche nötig, bevor die RFTM ein Geräusch macht.

Wie viele Versuche muss Alfie mindestens durchführen, um zu *garantieren*, dass die RFTM einen Ton von sich gibt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 4
2. 5
3. 6
4. 7
5. 8
6. 9
7. 10
8. 14
9. 16
10. 28

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Wir bezeichnen die acht Lichter A, B, C, D, E, F, G und H. Im besten Fall testen wir zwei Lichter, sagen wir A und B, und sie sind beide rot. Dann sind wir nach nur einem Test fertig. Wir suchen jedoch nach der minimalen Anzahl von Tests, die wir durchführen müssen, um sicher zu sein, dass wir zwei rote Lichter finden (d. h. die minimale Anzahl von Tests im schlimmsten Fall).

Zunächst zeigen wir, dass im ungünstigsten Fall nicht mehr als sieben Tests erforderlich sind:

Dazu teilen wir die acht Lichter in drei Gruppen ein: ABC, DEF und GH. Wir beginnen mit der ersten Gruppe und testen alle Lichter untereinander, was auf drei Vergleiche hinausläuft: AB, BC und AC. Wenn wir Glück haben und die RFTM einen Ton von sich gibt, sind wir fertig (nach drei Tests). Andernfalls wissen wir, dass sich in der ersten Gruppe ABC höchstens ein rotes Licht befindet, sodass sich in den Gruppen DEF und GH mindestens drei rote Lichter befinden müssen.

Wir fahren mit der zweiten Gruppe DEF von drei Lichtern fort und testen alle Paare, d. h. wir führen die drei Tests DE, EF und DF durch. Auch hier sind wir fertig (und haben höchstens sechs Tests durchgeführt), wenn die RFTM ein Geräusch macht. Wenn wir Pech haben und die RFTM schweigt, gibt es höchstens ein rotes Licht in der Gruppe DEF. Es gibt also mindestens zwei rote Lichter in der Gruppe GH. Dann müssen aber beide Lichter der Gruppe GH rot sein. Wenn man sie in die RFTM steckt, wird ertönt das gewünschte Signal.

Wir wissen also, dass sieben Vergleiche (AB, BC, AC, DE, EF, DF und GH) ausreichen, um sicher zu sein, dass die RFTM ein Geräusch erzeugt.

Aber wie können wir beweisen, dass sieben Vergleiche die *minimale* Anzahl von Tests sind, die wir durchführen müssen, um sicher zu sein, dass die RFTM ein Geräusch macht? Hierfür verwenden wir einen graphentheoretischen Ansatz.

Wir betrachten die acht Lichter in Alfies Box als *Knoten* eines Graphen. Wenn Alfie ein Lichterpaar testet, zeichnen wir eine Linie (eine *Kante*) im Graphen zwischen den beiden entsprechenden Knoten. Der Graph in Abbildung 3 ist ein Beispiel für eine Situation, in der Alfie sechs Tests durchgeführt hat.

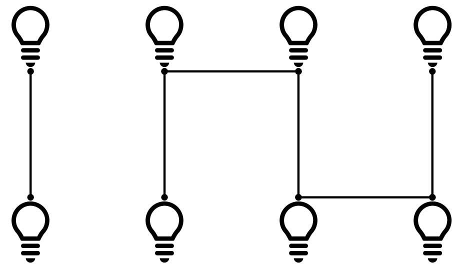


Abbildung 3: Ein Diagramm mit acht Knoten, die den Lichtern entsprechen, und sechs Kanten, die den sechs Tests mit der RFTM entsprechen.

Abbildung 4 zeigt, dass, wenn Alfie Pech hat, keiner dieser sechs Tests ein Geräusch erzeugt hätte. Schließlich gibt es keine Kante zwischen den Knoten, die den roten Lichtern entsprechen; wir sagen, dass die roten Lichter in Abbildung 4 eine *stabile Menge* der Größe 4 bilden.

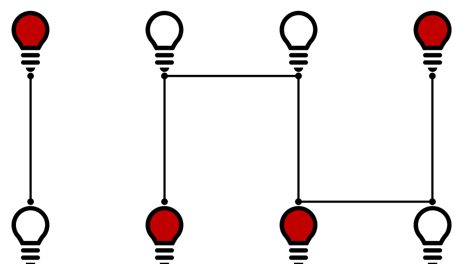


Abbildung 4: Da es keine Kante zwischen den vier roten Lichtern gibt, bilden diese vier Knoten eine *stabile*.

Die Frage ist, ob wir die sechs Kanten so hätten zeichnen können, dass es in dem resultierenden Graphen keine stabile Menge der Größe 4 gibt. Durch das Ausprobieren mehrerer Möglichkeiten, können wir uns vielleicht davon überzeugen, dass dies nicht möglich ist: Egal, wie wir die sechs Kanten zwischen den acht Knoten ziehen, es wird immer eine stabile Menge der Größe 4 im resultierenden Graphen geben.

Um dies formal zu beweisen, nehmen wir an, dass G ein Graph mit acht Knoten und sechs Kanten sei. Sei S eine *größtmögliche* stabile Menge in G, d. h. es gibt keine stabile Menge in G, die *mehr* Knoten als S enthält. Wenn S mindestens vier Knoten enthält, dann sind wir fertig. Angenommen S enthält höchstens drei Knoten. Dann gibt es mindestens fünf Knoten von G, die nicht in S enthalten sind. Bezeichnen wir diese Menge von Knoten mit T. Für jeden Knoten in T gibt es mindestens eine Kante zwischen diesem Knoten und den Knoten in S – andernfalls würde das Hinzufügen des Knotens zu S zu einer satbilen Menge mit *mehr* Knoten als S führen, was nach der Definition von S nicht möglich ist. Es gibt also mindestens fünf Kanten zwischen S und T. Da G insgesamt genau sechs Kanten hat, gibt es höchstens eine Kante, die Knoten in T verbindet. Da T aber mindestens fünf Knoten enthält, muss es vier davon geben, die eine stabile Menge bilden. Dies beweist, dass G eine stabile Menge der Größe 4 enthält.

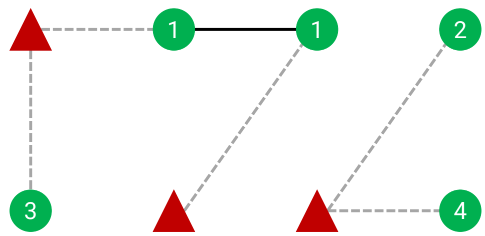


Abbildung 5: Beispielhafte Situation für den Beweis: S enthält höchstens drei Knoten (rote Dreiecke), und T enthält mindestens fünf Knoten (grüne Kreise). Alle Knoten in T müssen eine gemeinsame Kante (grau, gestrichelt) mit einem Knoten aus S haben. Das sind mindestens fünf Kanten, sodass nur eine Kante (schwarz, durchgezogen) übrig bleibt, die Knoten in T verbindet. Daher gibt es eine stabile Menge von vier Knoten in T.

Wir schlussfolgern, dass sechs Tests nicht ausreichen, um zu garantieren, dass die RFTM ein Geräusch macht, was bedeutet, dass sieben Tests die richtige Antwort ist.

6 Stürmischer Heimweg

Autor*in: Marvin Lücke (ZIB)

Projekt: *Concentration Effects and Collective Variables in Agent-Based Systems* (EF 4-8)

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Aufgabe

Damit alle Weihnachtsgeschenke rechtzeitig fertig werden, arbeitet der fleißige Weihnachtself Gilfi konzentriert in der Geschenkfabrik des Weihnachtsmanns. Eines Abends vergisst er völlig die Zeit: „Oh, je! Jetzt ist es schon 18:50 Uhr und ich habe doch meiner Wichtelfamilie versprochen, dass ich pünktlich zum Abendessen um 19:00 Uhr zu Hause bin!“ Schnell macht sich Gilfi auf den Weg. Doch als er die Geschenkfabrik verlässt, erschreckt er sich: Ein gewaltiger Sturm ist über dem Nordpol aufgezogen!

Der kleine Elf schreitet mutig mit einer Geschwindigkeit von 100 Metern pro Minute voran. So wird er die 500 Meter bis zu seinem Zuhause bald schaffen. Doch in jeder Minute wird Gilfi mit Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ von einer Sturmböe erfasst und 200 Meter zurück nach hinten gewirbelt. Folglich kommt er in jeder Minute *entweder* seinem Ziel um 100 Meter näher *oder* er ist davon 200 Meter weiter entfernt als zuvor.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit $q \in [0, 1]$ schafft es Gilfi, pünktlich zum Abendessen zu Hause zu sein?

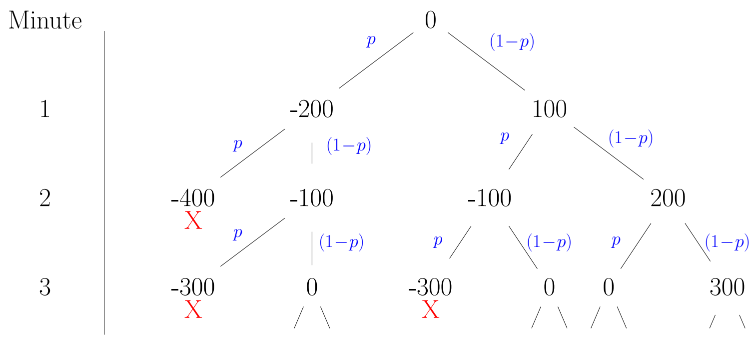
Antwortmöglichkeiten:

1. $q < 0{,}1$
2. $0{,}1 \leq q < 0{,}2$
3. $0{,}2 \leq q < 0{,}3$
4. $0{,}3 \leq q < 0{,}4$
5. $0{,}4 \leq q < 0{,}5$
6. $0{,}5 \leq q < 0{,}6$
7. $0{,}6 \leq q < 0{,}7$
8. $0{,}7 \leq q < 0{,}8$
9. $0{,}8 \leq q < 0{,}9$
10. $0{,}9 \leq q$

Lösung

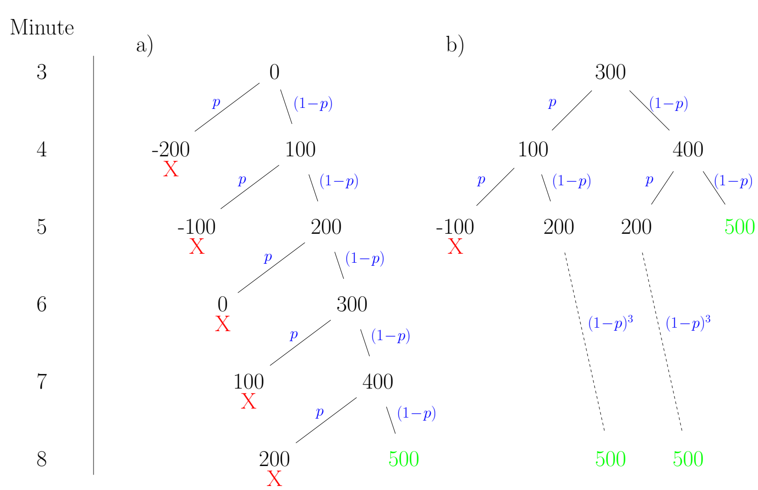
Die richtige Antwort ist: 4.

Am einfachsten lässt sich die Aufgabe durch Hinschreiben des Ereignisbaums lösen. Nach der ersten Minute kann der Elf beispielsweise entweder 100 Meter geschafft haben (mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$) oder -200 Meter (mit Wahrscheinlichkeit p):



Wir sind an den Szenarien interessiert, in denen es der Elf pünktlich nach Hause schafft. Das große rote X im Ereignisbaum bedeutet, dass der Elf es nicht mehr schaffen kann. Ist er beispielsweise nach 2 Minuten bei -400 Metern, so könnte er in den verbleibenden 8 Minuten höchstens 800 Meter zurücklegen und am Ende bei 400 Metern landen – er schafft also nicht nach Hause. Daher brauchen wir die darauf folgenden Äste gar nicht mehr zu betrachten.

Nach 3 Minuten ist der Elf in drei Szenarien bei 0 Metern. Anstatt nun drei mal den gleichen Teilbaum in das obige Bild zu malen, schauen wir uns dieses Szenario getrennt in der untenstehenden Abbildung a) an. Der andere Fall, dass der Elf nach 3 Minuten bei 300 Metern ist, ist in b) abgebildet:



Wir sehen, dass es nur sechs Szenarien gibt, in denen der Elf pünktlich nach Hause kommt.

Wenn wir die Kodierung

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{der Elf legt in Minute } k \text{ -200 Meter zurück} \\ 0, & \text{der Elf legt in Minute } k \text{ 100 Meter zurück} \end{cases}$$

verwenden, so sind diese sechs Szenarien durch $(\xi_1, \xi_2, \dots) =$

- $(0,0,0,0,0)$ mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)^5$,
- $(0,1,0,0,0,0,0,0)$ mit Wahrscheinlichkeit $(1-p) \cdot p \cdot (1-p)^6 = p \cdot (1-p)^7$,
- $(0,0,1,0,0,0,0,0)$ mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)^2 \cdot p \cdot (1-p)^5 = p \cdot (1-p)^7$,
- $(1,0,0,0,0,0,0,0)$ mit Wahrscheinlichkeit $p \cdot (1-p)^7$,
- $(0,0,0,0,1,0,0,0)$ mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)^4 \cdot p \cdot (1-p)^3 = p \cdot (1-p)^7$,
- $(0,0,0,1,0,0,0,0)$ mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)^3 \cdot p \cdot (1-p)^4 = p \cdot (1-p)^7$

gegeben. Die gesamte Wahrscheinlichkeit q, mit der der Elf pünktlich ankommt, ergibt sich nun aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten der sechs Szenarien:

$$q = (1-p)^5 + 5 \cdot p \cdot (1-p)^7 = \frac{4}{5}^5 + 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}^7 = \frac{4}{5}^5 + \frac{4}{5}^7 = \frac{25 \cdot 4^5 + 4^7}{5^7} = \frac{41.984}{78.125} \approx 0{,}54.$$

7 Geschenkewürfel

Autor*in: Rosa Schritt (HU Berlin, Immanuel-Kant-Gymnasium Berlin)
Projekt: Berliner Netzwerk mathematisch naturwissenschaftlich profilierter Schulen

Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Santas Wichtel sollen 27 würfelförmige Geschenke im Lagerhaus verstauen. Ein Teil der Geschenke ist grün verpackt, die anderen rot. Santa möchte, dass sein Lagerhaus ordentlich, aber auch hübsch aussieht. Deshalb gibt er den Wichteln die folgende Aufgabe:

„Liebe Wichtel, bitte setzt die 27 Geschenke zu einem großen 3x3x3-Geschenkewürfel zusammen. Dabei soll auf jeder der sechs Seitenflächen des großen Würfels ein Muster entstehen, das in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein grünes und zwei rote Geschenke enthält. Das wird das hübscheste Lagerhaus, das wir je hatten!!!"

Die Wichtel fangen an zu überlegen, wie sie den Geschenkewürfel konstruieren sollen. Nach einer Weile ruft ein Wichtel: „Wir haben zu viele grüne Geschenke, um den großen Würfel, so wie vom Weihnachtsmann verlangt, zu bauen!"

Ein anderer Wichtel hat eine Idee: „Wenn wir das Muster so verändern, dass in jeder Zeile und jeder Spalte genau *zwei* grüne Geschenke enthalten sind, dann können wir den großen Würfel mit den 27 vorhandenen Geschenken bauen.“ Siehe Abbildung 6.

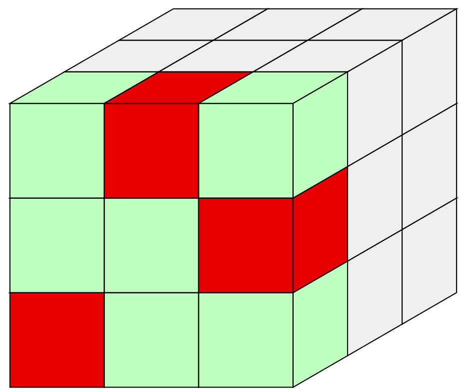


Abbildung 6: Der große Würfel aus 27 kleinen quadratischen Geschenken sowie ein mögliches zulässiges Muster aus grünen und roten Geschenken für die vordere Seite.

Was ist die kleinstmögliche bzw. die größtmögliche Anzahl von grünen Geschenken im Lager der Weihnachtswichtel?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 10, die größtmögliche ist 13.
2. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 10, die größtmögliche ist 15.
3. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 12, die größtmögliche ist 15.
4. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 12, die größtmögliche ist 17.
5. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 14, die größtmögliche ist 17.
6. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 14, die größtmögliche ist 19.
7. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 16, die größtmögliche ist 19.
8. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 16, die größtmögliche ist 21.
9. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 18, die größtmögliche ist 21.
10. Die kleinstmögliche Anzahl an grünen Geschenken ist 18, die größtmögliche ist 23.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Um zu zeigen, dass 16 die kleinstmögliche und 19 die größtmögliche Anzahl an grünen Würfeln ist um das Muster des Weihnachtsmannes zu bauen, geben wir zuerst ein zulässiges Muster mit 16 bzw. 19 grünen Würfeln an. Anschließend zeigen wir, dass es kein zulässiges Muster mit weniger als 16 bzw. mehr als 19 grünen Würfeln geben kann.

Wir beobachten zunächst, dass es bis auf Kongruenz zwei mögliche Muster für eine Außenseite gibt, siehe Abbildung 7:

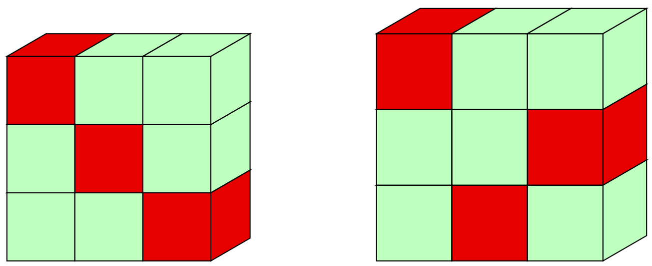


Abbildung 7: Die beiden bis auf Kongruenz zulässigen Muster für eine Außenseite des Geschenkewürfels.

Damit lässt sich nun leicht überprüfen, dass wir gemäß Abbildung 8 einen zulässigen Geschenkewürfel bauen können, der 16 grüne Würfel besitzt:

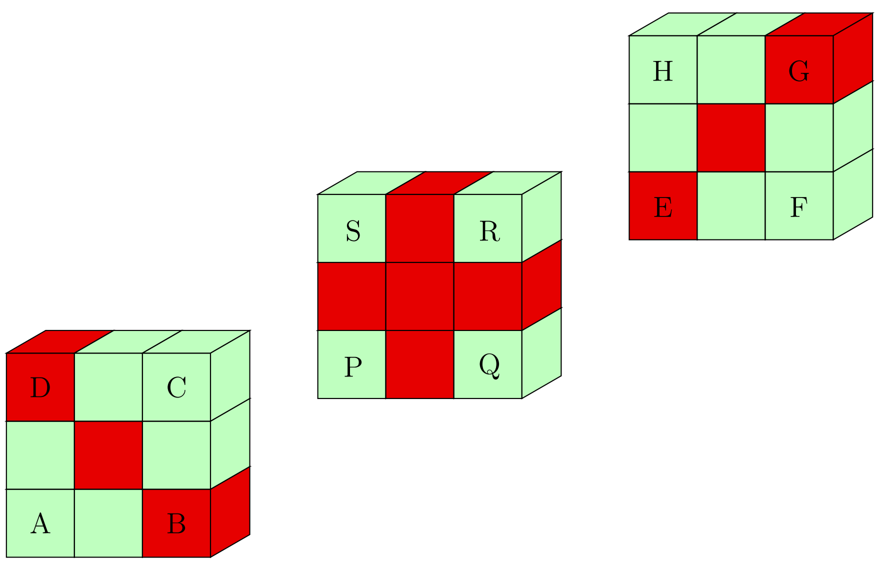


Abbildung 8: Eine mögliche Zusammensetzung des Geschenkewürfels mit 16 grünen Würfeln, zerlegt in drei Schichten: Die vordere Schicht mit den Eckwürfeln A, B, C, D; die mittlere Schicht mit den Eckwürfeln P, Q, R, S und die hintere Schicht mit den Eckwürfeln E, F, G, H.

Ebenso zeigt Abbildung 9, dass wir auch mit 19 grünen Würfeln einen zulässigen Geschenkewürfel bauen können:

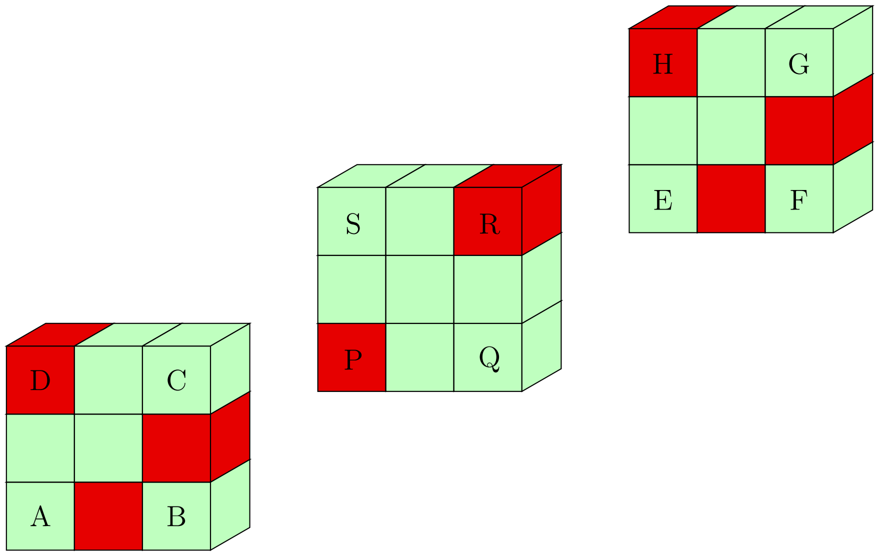


Abbildung 9: Eine mögliche Zusammensetzung des Geschenkewürfels mit 19 grünen Würfeln, zerlegt in drei Schichten analog zu Abbildung 8.

Als nächstes zeigen wir per Widerspruch, dass das Muster mit weniger als 16 grünen Würfeln nicht gebaut werden kann:
Nehmen wir also an, es gäbe eine zulässige Zusammensetzung mit weniger als 16 grünen Würfeln. Daraus folgt, dass diese Zusammensetzung mindestens 12 rote Würfel besitzt. In der vorderen und in der hinteren Schicht wären jeweils genau drei rote Würfel. Außerdem wäre möglicherweise der den Mittelpunkt des Geschenkewürfels enthaltende kleine Würfel rot. Unter den acht Würfeln, die die Randlinie des Quadrates begrenzt durch die Eckwürfel P, Q, R, S, ausfüllen (vgl. Abbildung 8), befänden sich daher mindestens $12 - 3 - 3 - 1 = 5$ rote Würfel. Unter ihnen könnte es nur 4 geben, die keiner der Eckwürfel P, Q, R oder S sind. Also müsste mindestens einer der Eckwürfel rot sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass P rot ist. Es verbleiben noch mindestens $5 - 1 = 4$ rote Würfel. Von ihnen dürfte nach Voraussetzung keiner mehr auf dem Streckenzug SPQ liegen. Das führt zu einem Widerspruch, da für diese mindestens 4 roten Würfel nur noch 3 Plätze frei wären; womit die untere Schranke von 16 grünen Würfeln bewiesen ist.

Zuletzt zeigen wir, analog zum vorherigen Beweis, dass wir das Muster des Weinachtmannes nicht mit mehr als 19 grünen Würfeln bauen können. Angenommen also es gäbe solch eine Zusammensetzung mit mehr als 19 grünen Würfeln, und demnach mit weniger als 8 roten Würfeln. In der vorderen sowie in der hinteren Schicht müssen jeweils drei rote Würfel enthalten sein. Somit verbliebe höchstens ein roter Würfel für die mittlere Schicht. Nach Voraussetzung bräuchte aber die Reihe mit den Eckwürfeln P, Q, sowie die mit den Eckwürfeln R, S, einen roten Würfel. Da die beiden Reihen disjunkt sind, reicht ein roter Würfel nicht um diese Voraussetzung zu erfüllen; womit auch die obere Schranke von 19 grünen Würfeln bewiesen ist.

8 Der Kanal

Autor*in: Attila Karsai (TU Berlin)

Projekt: *Strukturierte Steuerung und Regelung von port-Hamiltonschen Netzwerkmodellen* (SFB/TRR 154, Projekt B03)

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Aufgabe

Knecht Ruprecht wurde in diesem Jahr eine wichtige Aufgabe zugewiesen. Er ist dafür verantwortlich, die Städte A, B und C mit Geschenken zu versorgen. Abb. 10 zeigt uns die Anordnung der Städte, welche alle auf einer geraden Linie in Richtung Osten liegen. Die Städte A und B liegen hierbei 5 Kilometer auseinander, die Städte B und C sogar 15 Kilometer:

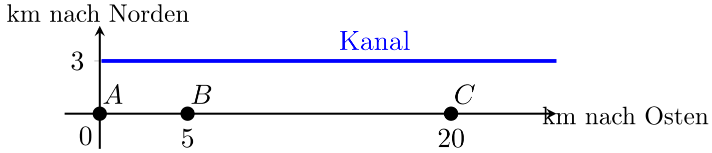


Abbildung 10: Lage der Städte und des zugefrorenen Kanals.

Ruprecht ist gerade mit der Geschenkelieferung in Stadt A fertig geworden und möchte – um den Weihnachtsmann zu beeindrucken – so schnell wie möglich mit den Lieferungen in B und C fertig werden. Leider hat es in der letzten Nacht stark geschneit, weshalb die Verbindungsstraßen zwischen den Städten unter einer dicken Schneedecke begraben sind. Durch den tiefen Schnee kommt Ruprecht nun viel langsamer voran als zuvor. Aber Ruprecht kennt die Region von früheren Besuchen und weiß daher, dass 3 Kilometer nördlich von Stadt A ein Kanal liegt, welcher schnurgerade in Richtung Osten verläuft. Abb. 10 zeigt auch diesen Kanal. Aufgrund der eisigen Temperaturen ist der Kanal aktuell zugefroren und mit Schlittschuhen befahrbar.

Wenn er durch den dichten Schnee stapft, schafft es Ruprecht mit viel Mühe 5 Kilometer in der Stunde zurückzulegen. Auf dem zugefrorenen Kanal kommt Ruprecht mit Hilfe seiner Schlittschuhe 25 Kilometer in der Stunde voran.

Unsere Fragen an euch:

(a) Nutzt Ruprecht auf dem *schnellsten* Weg von A nach B den zugefrorenen Kanal?

(b) Nutzt Ruprecht auf dem *schnellsten* Weg von B nach C den zugefrorenen Kanal?

(c) Benötigt Ruprecht länger als eine Stunde für den *schnellsten* Weg von A nach B?

(d) Benötigt Ruprecht weniger als 1,8 Stunden für den *schnellsten* Weg von B nach C?

Antwortmöglichkeiten:

1. (a) nein, (b) nein, (c) nein, (d) nein.
2. (a) nein, (b) nein, (c) nein, (d) ja.
3. (a) nein, (b) nein, (c) ja, (d) nein.
4. (a) nein, (b) nein, (c) ja, (d) ja.
5. (a) nein, (b) ja, (c) nein, (d) nein.
6. (a) nein, (b) ja, (c) nein, (d) ja.
7. (a) nein, (b) ja, (c) ja, (d) nein.
8. (a) nein, (b) ja, (c) ja, (d) ja.
9. (a) ja, (b) ja, (c) nein, (d) nein.
10. (a) ja, (b) ja, (c) nein, (d) ja.

Projektbezug:

Ein Teilgebiet der mathematischen Optimierung befasst sich mit *optimaler Steuerung*. Solche Steuerprobleme treten in einer Vielzahl praktischer Anwendungen auf, diese reichen von der Wirtschaft über Robotik bis hin zur Steuerung des Stromnetzes eines ganzen Landes. In vielen Fällen kann beobachtet werden, dass die optimale Steuerung einen Zusatzweg in Kauf nimmt, um Kosten zu verringern. Dieses Phänomen nennt man *Turnpike-Phänomen.* Der Name erinnert an eine Beobachtung aus dem Alltag: Legt man eine lange Strecke mit dem Auto zurück, so ist es fast immer schneller einen Umweg über eine Autobahn (engl. „turnpike“) in Kauf zu nehmen, anstatt die ganze Zeit langsam auf der Landstraße fahren zu müssen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Bei jeder Entscheidung den Weg anzutreten gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder der direkte Weg ist der schnellste, oder es gibt einen Weg, der zeitweise über den Kanal verläuft und der schneller ist. Einen noch schnelleren Weg, der weder schnurgerade noch zeitweise über den Kanal verläuft, kann es nicht geben.

Für eine gegeben schnurgerade Strecke in Richtung Osten mit der Länge ℓ Kilometern betrachten wir also zwei Zeiten:

- Die Zeit $z_{\text{direkt}}(\ell)$, die benötigt wird, wenn der direkte Weg verwendet wird, sowie
- die Zeit $z_{\text{Kanal}}(\ell)$, die für den zeitlich kürzesten Weg, der zeitweise über den Kanal verläuft, benötigt wird.

Die Formel für $z_{\text{direkt}}(\ell)$ ist einfach zu bestimmen, da man die benötigte Zeit durch Teilen der Länge durch die Geschwindigkeit errechnen kann. Da Ruprecht beim direkten Weg mühsam durch den Schnee stapfen muss, beträgt seine Geschwindigkeit hier 5 Kilometer pro Stunde. Daher gilt

$$z_{\text{direkt}}(\ell) = \frac{\ell}{5} \text{ Stunden.}$$

Um einen Ausdruck für $z_{\text{Kanal}}(\ell)$ zu erhalten, müssen wir uns ein wenig mehr anstrengen: Zunächst können wir annehmen, dass ein Weg, der zeitweise über den Kanal verläuft, eine Form wie in Abbildung 11 hat, das heißt symmetrisch zum Mittelpunkt der Strecke ist.

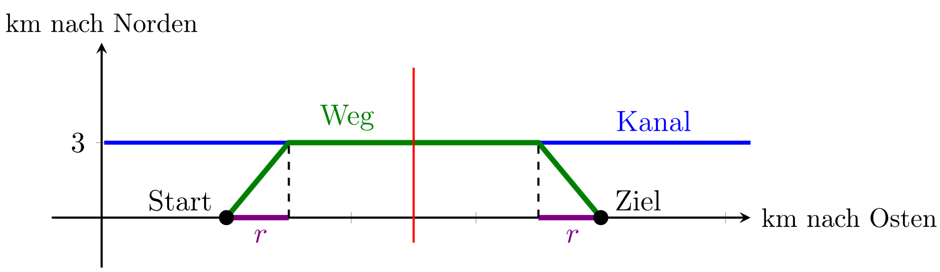


Abbildung 11: Form eines Weges der zeitweise über den Kanal verläuft.

Die Länge des Weges hängt also von der Strecke r ab und wir können sie mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Auf dem Teil des Weges, der auf der Hypothenuse des Dreiecks liegt, kann Ruprecht sich nur mit 5 Kilometern pro Stunde bewegen. Dieser Teil (der halben Strecke) hat eine Länge von $\sqrt{r^2+3^2}$ Kilometern, die in $(\sqrt{r^2+3^2})/5$ Stunden zurückgelegt werden können. Der verbleibende Teil (der halben Strecke) hat die Länge $\frac{\ell}{2} - r$. Auf diesem Teil ist Ruprecht 25 Kilometer pro Stunde schnell, sodass er für die Strecke $(\frac{\ell}{2} - r)/25$ Stunden benötigt. Insgesamt ist die benötigte Zeit bei einem Weg über den Kanal bei gegebener Länge r also

$$z_{\text{Kanal}}(\ell, r) = 2\left(\frac{\sqrt{r^2+3^2}}{5} + \frac{\frac{\ell}{2} - r}{25}\right) \text{ Stunden.}$$

Diese Zeit hängt noch von r ab. Sollte Ruprecht einen Weg über den Kanal einschlagen, nimmt er natürlich das r, welches ihm die kürzeste Wegzeit liefert. Folglich ist

$$z_{\text{Kanal}}(\ell) = \min_{r \geq 0} \; z_{\text{Kanal}}(\ell, r).$$

In der Problemstellung sind die Längen $\ell_1 = 5$ und $\ell_2 = 15$ gegeben. Wir wollen jetzt also entscheiden, ob

$$z_{\text{Kanal}}(\ell_i) < z_{\text{direkt}}(\ell_i)$$

für $i = 1$ oder $i = 2$ gilt.

Für eine Strecke von 5 Kilometern ist

$$z_{\text{direkt}}(\ell_1) = \frac{5}{5} \text{ Stunden} = 1 \text{ Stunde}.$$

Für den Umweg über den Kanal müsste Ruprecht

$$\sqrt{r^2 + 3^2} \geq 3 \text{ Kilometer}$$

durch den tiefen Schnee stapfen, um den Kanal überhaupt zu erreichen, und dann noch einmal mindestens 3 Kilometer für den Weg zurück. Für diese mindestens 6 Kilometer benötigt er aber schon mindestens $6/5 = 1{,}25$ Stunden – also in jedem Fall mehr als auf dem direkten Weg. Somit folgt

$$z_{\text{Kanal}}(\ell_1) > 1 \text{ Stunde} = z_{\text{direkt}}(\ell_1).$$

Der direkte Weg ist von A nach B also der (zeitlich) kürzere. Dieser Weg dauert eine Stunde. Die Antworten auf die Fragen (a) und (c) sind also nein.

Für eine Strecke von 15 Kilometern ist

$$z_{\text{direkt}}(\ell_2) = \frac{15}{5} \text{ Stunden} = 3 \text{ Stunden}$$

$$z_{\text{Kanal}}(\ell_2) = \min_{r \geq 0} \; 2\left(\frac{\sqrt{r^2 + 3^2}}{5} + \frac{\frac{15}{2} - r}{25}\right) \text{ Stunden.}$$

Wir zeigen zunächst, dass die Funktion

$$f(r) = 2\left(\frac{\sqrt{r^2 + 3^2}}{5} + \frac{\frac{15}{2} - r}{25}\right)$$

von *oben* durch eine Funktion $F(r)$ beschränkt ist, deren Minimum wir sehr leicht berechnen können: Dazu bemerken wir zunächst, dass die erste binomische Formel uns

$$\sqrt{r^2 + 3^2} \leq \sqrt{r^2} + \sqrt{3^2} = r + 3$$

liefert, da $r > 0$ gilt. Somit erhalten wir für alle $r > 0$

$$\begin{aligned} f(r) = 2\left(\frac{\sqrt{r^2 + 3^2}}{5} + \frac{\frac{15}{2} - r}{25}\right) &\leq 2\left(\frac{r + 3}{5} + \frac{\frac{15}{2} - r}{25}\right) \\ &= \tfrac{2}{15}\left(5r + 15 + \tfrac{15}{2} - r\right) = \tfrac{2}{15}\left(4r + \tfrac{45}{2}\right) \\ &= \tfrac{8}{25}\, r + \tfrac{9}{5} =: F(r). \end{aligned}$$

Da wir gezeigt haben, dass $f(r) \leq F(r)$ für alle $r > 0$ gilt, muss auch

$$\min_{r \geq 0} f(r) \leq \min_{r \geq 0} F(r) = F(0) = \tfrac{9}{5}\text{ Stunden} = 1{,}8\text{ Stunden}$$

gelten. Folglich ist

$$z_{\text{Kanal}}(\ell_2) \leq 1{,}8\text{ Stunden} \leq 3\text{ Stunden} = z_{\text{direkt}}(\ell_2).$$

Der zeitlich kürzeste Weg von B nach C führt also über den zugefrorenen Kanal. Dieser Weg dauert weniger als 1,8 Stunden. Die Antworten auf die Fragen (b) und (d) sind somit ja.

9 Wunschzetteloptimierung

Autor*innen: Max Klimm, Martin Knaack (TU Berlin)
Projekt: *Kombinatorische Netzwerk-Flussmethoden für instationäre Gasflüsse und Gasmarkt-Probleme* (SFB/TRR 154, Projekt A07)

Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Zu Weihnachten schicken alle Kinder dem Weihnachtsmann ihren Wunschzettel mit einer Liste von Dingen, die sie gerne hätten.

Der Weihnachtsmann hat für jedes Kind einen Geschenkesack vorbereitet, dessen Größe davon abhängt, wie brav das Kind im vergangenen Jahr war. Wenn der Weihnachtsmann den Sack packt, dann arbeitet er die Wunschlisten der Kinder jeweils von oben nach unten ab. Genauer:

- Der Weihnachtsmann versucht zunächst den ersten Gegenstand auf der Liste einzupacken, danach den zweiten, und so weiter bis zum Ende der Liste.
- Immer wenn ein Gegenstand in den Sack passt, kommt er hinein, andernfalls wird er nicht eingepackt und der Weihnachtsmann macht mit den anderen Gegenständen der Liste der Reihe nach weiter.

- Eine Menge von Gegenständen passt genau dann in den Sack, wenn die Summe ihrer Größen kleiner oder gleich der Größe des Sackes ist.

Nasti, Manu, Jona und Uli wünschen sich dieses Jahr die folgenden Gegenstände zu Weihnachten, die bei ihnen jeweils eine gegebene Freude auslösen:

	Größe	Freude
Warme Socken	2	4
Kerze	4	5
Pudelmütze	6	8
Flöte	24	20
Wollpullover	16	10

Die Kinder kennen die Größe und die Freude der Gegenstände, wissen aber *nicht*, wie groß der Sack sein wird, den der Weihnachtsmann für sie auswählt. Natürlich wollen alle vier die gesamte Freude der Geschenke in ihrem Sack maximieren. Sie haben allerdings unterschiedliche Strategien verwendet, um ihren Wunschzettel zu schreiben. Die Wunschzettel der Kinder sehen folgendermaßen aus:

Nastis Wunschzettel

1. Flöte
2. Wollpullover
3. Pudelmütze
4. Kerze
5. Warme Socken

Manus Wunschzettel

1. Warme Socken
2. Kerze
3. Pudelmütze
4. Wollpullover
5. Flöte

Jonas Wunschzettel

1. Warme Socken
2. Pudelmütze
3. Kerze
4. Flöte
5. Wollpullover

Ulis Wunschzettel

1. Flöte
2. Pudelmütze
3. Kerze
4. Warme Socken
5. Wollpullover

Der Weihnachtsmann hat uns verraten, dass alle Kinder einen Geschenkesack derselben Größe bekommen und dass diese Größe eine positive ganze Zahl ist. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Je größer der Geschenkesack desto größer ist die gesamte Freude von Nastis Geschenken.
2. Die gesamte Freude von Nastis Geschenken ist immer mindestens so groß wie die von Manu.
3. Die gesamte Freude von Nastis Geschenken ist immer mindestens so groß wie die von Uli.
4. Die gesamte Freude von Manus Geschenken ist immer mindestens so groß wie die von Jona.
5. Die gesamte Freude von Manus Geschenken ist immer mindestens so groß wie die von Uli.
6. Die gesamte Freude von Jonas Geschenken ist immer mindestens so groß wie die von Nasti.
7. Die gesamte Freude von Jonas Geschenken ist immer mindestens so groß wie die von Manu.
8. Die gesamte Freude von Ulis Geschenken ist immer mindestens so groß wie die von Nasti.
9. Die gesamte Freude von Ulis Geschenken ist immer mindestens so groß wie die von Jona.
10. Keine der Aussagen 1 bis 9 ist korrekt.

Projektbezug:

Das Projekt beschäftigt sich mit der Kapazitätsauslastung in Wasserstoffnetzwerken. Die Gegenstände entsprechen dann Buchungen im Netzwerk und deren Freude dem wirtschaftlichen Nutzen des jeweiligen Wasserstofftransports. Durch die nicht-lineare Gasphysik und die Komplexität des Wasserstoffnetzes sind die Bedingungen, welche Gegenstände gepackt werden können, wesentlich komplizierter als in dieser Aufgabe. Wie die Gegenstände auch noch dann so gepackt werden können, dass die gesamte Freude maximiert wird, ist Forschungsgegenstand des Projekts.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

In der nachfolgenden Tabelle ist die Freude von Nasti, Manu, Jona bzw. Uli in Abhängigkeit der Geschenkesackgröße dargestellt:

Größe	Nasti	Manu	Jona	Uli
0 - 1	0	0	0	0
2 - 3	4	4	4	4
4 - 5	5	4	4	5
6 - 7	8	9	9	8
8 - 9	12	9	12	12
10 - 11	13	9	12	13
12 - 13	17	17	17	17
14 - 15	17	17	17	17
16 - 17	10	17	17	17
18 - 19	14	17	17	17
20 - 21	15	17	17	17
22 - 23	18	17	17	17
24 - 25	20	17	17	20
26 - 27	24	17	17	24
28 - 29	25	27	27	25
30 - 31	28	27	27	28
32 - 33	32	27	27	32
34 - 35	33	27	27	33
36 - 37	37	27	37	37
38 - 39	37	27	37	37
40 - 41	30	27	37	37
42 - 43	34	27	37	37
44 - 45	35	27	37	37
46 - 47	38	27	37	37
48 - 49	42	27	37	37
50 - 51	43	27	37	37
52 - ∞	47	47	47	47

Anhand dieser Werte können wir nun die Behauptungen überprüfen:

1. ist falsch: Bei Größe 14 Nastis Freude 17 und bei Größe 16 ist Nastis Freude 10.
2. ist falsch: Bei Größe 6 ist Nastis Freude 8 und Manus Freude 9.
3. ist falsch: Bei Größe 16 ist Nastis Freude 10 und Ulis Freude 17.
4. ist falsch: Bei Größe 8 ist Manus Freude 9 und Jonas Freude 12.
5. ist falsch: Bei Größe 4 ist Manus Freude 4 und Ulis Freude 5.
6. ist falsch: Bei Größe 4 ist Jonas Freude 4 und Nastis Freude 5.

7. ist richtig. Jona und Manu haben immer die gleichen Geschenke im Sack, bis auf folgende Größen:

   Von 8 bis 11 (nur ganzzahlig) hat Manu Socken und Mütze (Freude 9) und Jona Kerze und Mütze (Freude 12) im Sack.

   Von 36 bis 51 (nur ganzzahlig) hat Manu Wollpullover und die drei kleinen Geschenke (Freude 27) und Jona Flöte und die drei kleinen Geschenke (Freude 37) im Sack.

8. ist falsch: Bei Größe 22 ist Ulis Freude 17 und Nastis Freude 18.

9. ist falsch: Bei Größe 6 ist Ulis Freude 8 und Jonas Freude 9.

10. ist falsch, denn Aussage 7 ist korrekt.

10 Wahlen am Nordpol

Autor*in: Emil Junker (HU Berlin)

Illustration: Frauke Jansen

Aufgabe

In der Geschenkeverpackungsabteilung des weihnachtlichen Verwaltungsbüros am Nordpol arbeiten die zehn Elfen Arne, Bea, Coco, Dante, Enzo, Fina, Greta, Henri, Ida und Joris.

Jedes Jahr vor Weihnachten wird aus den Reihen der Angestellten der Geschenkeverpackungsabteilung das sogenannte Verpackungskomitee gebildet. Das Verpackungskomitee ist dafür zuständig, das sachgemäße Einpacken und Verzieren aller Weihnachtsgeschenke zu überwachen. Für die Elfen ist es einerseits eine große Ehre, Teil des Verpackungskomitees zu sein. Sie dürfen dann nämlich entscheiden, welche Farben und Muster für das Geschenkpapier verwendet werden. Andererseits ist die Arbeit im Verpackungskomitee auch mit jeder Menge Stress und Überstunden verbunden, weshalb nicht alle unbedingt Lust darauf haben. Um diesem Umstand gerecht zu werden, ist ein spezielles Verfahren für die Wahl der Mitglieder des Verpackungskomitees vorgeschrieben:

Die zehn Elfen der Abteilung erhalten jeweils einen Wahlzettel, auf den sie die Namen aller Elfen schreiben, die ihrer Meinung nach im Komitee sein sollen. Alle Elfen dürfen beliebig viele Namen auf ihre Zettel schreiben – jeden Namen allerdings höchstens ein Mal. Es ist auch erlaubt, den eigenen Namen auf den Zettel schreiben, falls man selbst Mitglied des Komitees sein möchte.

Nachdem alle Elfen ihre Wahlzettel ausgefüllt haben, beginnt die öffentliche Auszählung. Dabei gelten die folgenden Regeln:

1. Elfen, die ihren eigenen Namen auf ihren Stimmzettel schreiben, werden genau dann ins Komitee gewählt, wenn sie noch von *mindestens drei anderen* Elfen vorgeschlagen werden.
2. Elfen, die ihren eigenen Namen nicht auf ihren Stimmzettel schreiben, werden genau dann ins Komitee gewählt, wenn sie ~~noch~~ von *mindestens fünf anderen* Elfen vorgeschlagen werden.

Es ist ein offenes Geheimnis, dass der Weihnachtsmann nicht besonders viel von diesem Wahlverfahren hält. Am liebsten würde er allein entscheiden, aus welchen Elfen sich das Verpackungskomitee zusammensetzt. Aber es ist nun mal Vorschrift, dass die Elfen selbst darüber abstimmen. Der Weihnachtsmann will dennoch sichergehen, dass unter den Mitgliedern des Verpackungskomitees wenigstens ein paar fähige Köpfe sind. Einen Tag vor dem Wahltermin fragt er alle zehn Abteilungselfen, wen sie für das Komitee wählen werden, und erhält folgende Antworten:

(a) Arne möchte, dass das Komitee aus ihm selbst, Dante, Greta und Joris besteht.

(b) Bea sagt, sie wird nur sich selbst als Mitglied vorschlagen.

(c) Coco hat vor Arne, Bea und Joris als Mitglieder des Komitees zu wählen.

(d) Dante ist der Ansicht, dass das Komitee aus Coco, Enzo und Greta bestehen sollte.

(e) Enzo sagt, er wird sich selbst, Fina, Henri und Joris wählen.

(f) Fina ist der Meinung, dass Dante, Greta und Joris das Komitee bilden sollten.

(g) Greta möchte das Komitee mit sich selbst, Coco, Enzo und Henri besetzen.

(h) Henri hat vor sich selbst, Dante, Greta und Joris für das Komitee vorzuschlagen.

(i) Ida findet, dass nur sie selbst, Coco und Joris als Mitglieder geeignet sind.

(j) Joris plant Bea, Enzo, Henri und Ida für das Komitee zu wählen.

„Oh nein“, denkt der Weihnachtsmann, nachdem er die Antworten eingeholt hat. „So wie es aussieht, werden am Ende viel zu wenige kompetente Elfen im Komitee sein. Das gefährdet die rechtzeitige Auslieferung der Geschenke! Da muss ich unbedingt einschreiten!“

Zum Glück kennt der Weihnachtsmann seine Angestellten genau und weiß, wie er sie manipulieren kann – nämlich indem er sie mit leckeren Nussplätzchen aus der Weihnachtsbäckerei besticht. Bestochene Elfen werden jeweils genau so wählen, wie der Weihnachtsmann es ihnen vorschreibt. *Nicht* bestochene Elfen werden am Wahltag genau so wählen wie zuvor angekündigt, d. h. wie in Liste (a)–(j) angegeben.

Der Weihnachtsmann möchte, dass das Verpackungskomitee aus den Elfen Arne, Coco, Dante, Enzo und Henri besteht. Die Elfen Bea, Fina, Greta, Ida und Joris hingegen will der Weihnachtsmann *nicht* im Komitee haben.

Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Elfen, die der Weihnachtsmann bestechen *muss*, um dieses Ziel zu erreichen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die kleinstmögliche Anzahl an Elfen, die der Weihnachtsmann bestechen muss, ist 1.
2. Die kleinstmögliche Anzahl an Elfen, die der Weihnachtsmann bestechen muss, ist 2.
3. Die kleinstmögliche Anzahl an Elfen, die der Weihnachtsmann bestechen muss, ist 3.
4. Die kleinstmögliche Anzahl an Elfen, die der Weihnachtsmann bestechen muss, ist 4.
5. Die kleinstmögliche Anzahl an Elfen, die der Weihnachtsmann bestechen muss, ist 5.
6. Die kleinstmögliche Anzahl an Elfen, die der Weihnachtsmann bestechen muss, ist 6.
7. Die kleinstmögliche Anzahl an Elfen, die der Weihnachtsmann bestechen muss, ist 7.
8. Die kleinstmögliche Anzahl an Elfen, die der Weihnachtsmann bestechen muss, ist 8.
9. Der Weihnachtsmann muss niemanden bestechen. Wenn alle Elfen so abstimmen wie angekündigt, besteht das Verpackungskomitee bereits aus den vom Weihnachtsmann gewünschten Mitgliedern.
10. Das Ziel des Weihnachtsmanns ist unmöglich zu erreichen, egal wie viele Elfen er besticht.

Projektbezug:

Im Rahmen seiner Master-Arbeit beschäftigte sich Emil Junker mit sogenannten *Group-Identification-Problemen.* Dabei betrachtet man eine Menge von Individuen (in unserem Beispiel die Elfen) und möchte ermitteln, welche Teilmenge davon auf eine bestimmte Weise „qualifiziert“ ist. Jedes Individuum in der Menge hat eine Meinung dazu, welche Individuen qualifiziert sind und welche nicht. Anschließend gibt mehrere verschiedene Regeln, die man zur Auswertung benutzen kann. Konkret beschäftigte er sich mit der Manipulierbarkeit von Group Identifications durch *bribery*- oder *control*-basierte Angriffe. Dabei versucht ein außenstehendes Individuum (der Weihnachtsmann), ein bestimmtes Ziel zu erreichen; zum Beispiel dass am Ende der Auswertung bestimmte Individuen als qualifiziert eingestuft werden. Dieses Ziel kann es etwa durch Bestechung von Individuen oder durch Hinzufügen von zusätzlichen wahlberechtigten Individuen versuchen zu erreichen. Für Emil Junker ist insbesondere die Durchführbarkeit und die Berechnungskomplexität solcher Angriffe von Interesse.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Analysieren wir zunächst die Ausgangslage. Zur Vereinfachung verwenden wir die folgende Notation:

- Wenn eine Elfe X den Namen von Elfe Y auf seinen Zettel schreibt, sagen wir dazu *X qualifiziert Y*.
- Wenn eine Elfe X den Namen von Elfe Y *nicht* auf seinen Zettel schreibt, sagen wir dazu *X disqualifiziert Y*.

Gemäß den Regeln (1) und (2) benötigt eine Elfe, die sich selbst qualifiziert, drei weitere Qualifizierungen von anderen Elfen, um gewählt zu sein. Eine Elfe, die sich selbst disqualifiziert, benötigt fünf Qualifizierungen von anderen Elfen, um gewählt zu sein.

Wenn der Weihnachtsmann niemanden besticht, ist die Lage wie folgt (s. Abb. 12):

- Arne (A) qualifiziert sich selbst und erhält nur eine Qualifizierung von Coco. Arne ist somit nicht Mitglied des Komitees.
- Bea (B) qualifiziert sich selbst und erhält nur zwei Qualifizierungen von Coco und Joris. Bea ist somit nicht Mitglied des Komitees.
- Coco (C) disqualifiziert sich selbst und erhält drei Qualifizierungen von Dante, Greta und Ida. Coco ist somit nicht Mitglied des Komitees.
- Dante (D) disqualifiziert sich selbst und erhält drei Qualifizierungen von Arne, Fina und Henri. Dante ist somit nicht Mitglied des Komitees.
- Enzo (E) qualifiziert sich selbst und erhält drei Qualifizierungen von Dante, Greta und Joris. Enzo ist somit gewähltes Mitglied des Komitees.
- Fina (F) disqualifiziert sich selbst und erhält eine Qualifizierungen von Enzo. Fina ist somit nicht Mitglied des Komitees.
- Greta (G) qualifiziert sich selbst und erhält vier Qualifizierungen von Arne, Dante, Fina und Henri. Fina ist somit gewähltes Mitglied des Komitees.
- Henri (H) qualifiziert sich selbst und erhält drei Qualifizierungen von Enzo, Greta und Joris. Henri ist somit gewähltes Mitglied des Komitees.
- Ida (I) qualifiziert sich selbst und erhält eine Qualifizierung von Joris. Ida ist somit nicht Mitglied des Komitees.
- Joris (J) disqualifiziert sich selbst und erhält sechs Qualifizierungen von Arne, Coco, Enzo, Fina, Henri und Ida. Joris ist somit gewähltes Mitglied des Komitees.

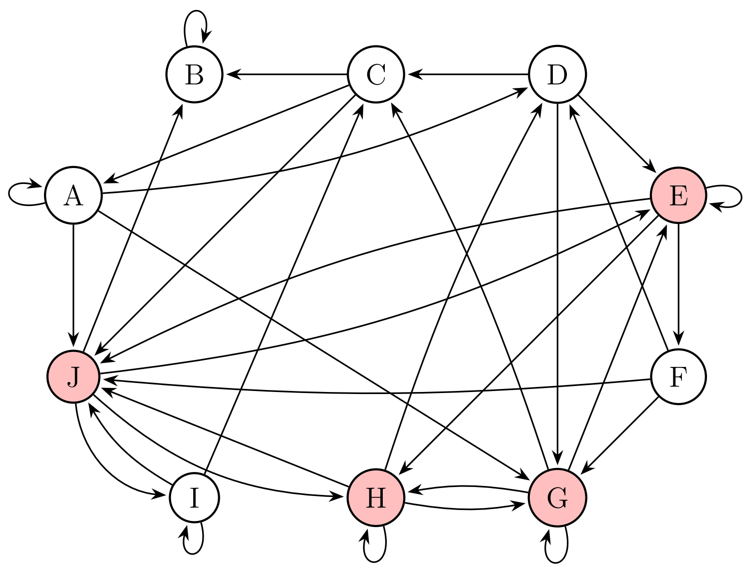


Abbildung 12: Übersicht über die Ausgangslage. Ein Pfeil von einer Elfe X zu einer Elfe Y bedeutet: X qualifiziert Y. Elfen, deren Felder hellrot hinterlegt sind, sind gemäß den Regeln im Komitee.

Wenn der Weihnachtsmann nicht eingreift, besteht das Komitee also aus Enzo, Greta, Henri und Joris. Der Weihnachtsmann muss nun dafür sorgen, dass Arne, Coco und Date in das Komitee hineingewählt werden und dass Greta und Joris nicht in das Komitee gewählt werden.

Damit eine Elfe X in das Komitee gewählt wird, müssen genügend andere Elfen bestochen werden, X zu qualifizieren. Dafür kommen natürlich nur Elfen in Frage, die X bisher noch nicht qualifizieren. Darüber hinaus kann auch X bestochen werden, sich selbst zu qualifizieren (falls das nicht schon der Fall sein sollte).

Damit eine Elfe X nicht in das Komitee gewählt wird, müssen genügend andere Elfen bestochen werden, X zu disqualifizieren. Dafür kommen natürlich nur Elfen in Frage, die X bisher qualifiziert haben. Darüber hinaus kann auch X bestochen werden, sich selbst zu disqualifizieren (falls das nicht schon der Fall sein sollte).

Mit diesem Wissen, können wir nun Folgendes feststellen (s. Abb. 13):

- Damit Arne Mitglied des Komitees wird, müssen noch zwei andere Elfen bestochen werden, Arne zu qualifizieren.
- Damit Coco Mitglied des Komitees wird, müssen zwei andere Elfen bestochen werden, Coco zu qualifizieren, oder Coco muss bestochen werden, sich selbst zu qualifizieren.
- Damit Dante Mitglied des Komitees wird, müssen zwei andere Elfen bestochen werden, Dante zu qualifizieren, oder Dante muss bestochen werden, sich selbst zu qualifizieren.
- Damit Greta nicht ins Komitee gewählt wird, müssen zwei andere Elfen bestochen werden, Greta zu disqualifizieren, oder Greta muss bestochen werden, sich selbst zu disqua-

lifizieren.

- Damit Joris nicht ins Komitee gewählt wird, müssen zwei andere Elfen bestochen werden, Joris zu disqualifizieren.

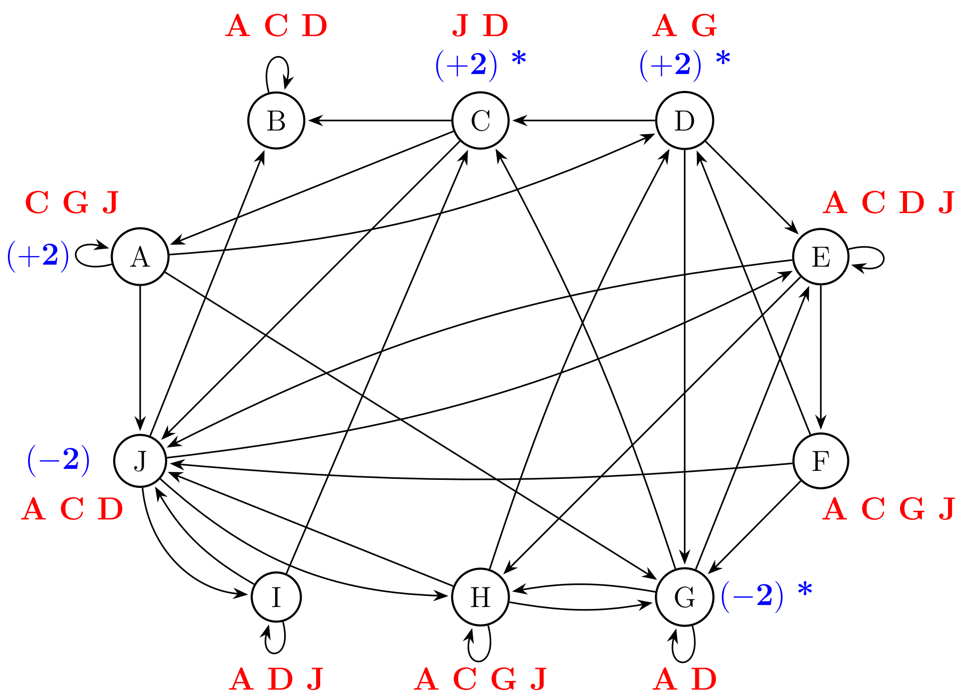


Abbildung 13: Die Zahl in blau gibt jeweils an, wie viele zusätzliche Qualifizierungen (positiv) oder Disqualifizierungen (negativ) der Weihnachtsmann einer Elfe verschaffen muss, um sein Ziel zu erreichen. Ein * bedeutet, dass der Weihnachtsmann alternativ auch die Elfe selbst bestechen kann. In rot sind die Elfen aufgelistet, denen der Weihnachtsmann eine zusätzliche (Dis)qualifizierung verschaffen könnte, wenn er die entsprechenden Elfe bestechen würde.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie der Weihnachtsmann die obigen Bedingungen erfüllen kann, indem er drei Wichtel besticht. Wir geben hier eine an (s. Abb. 14):

Schritt 1: Der Weihnachtsmann besticht Coco und sorgt dafür, dass die Elfe sich selbst qualifiziert (damit ist Coco nun im Komitee). Außerdem sorgt er dafür, dass Coco Joris disqualifiziert (damit hat Joris jetzt nur noch fünf Qualifizierungen), und dass Coco Dante qualifiziert (damit hat Dante jetzt vier Qualifizierungen).

Schritt 2: Der Weihnachtsmann besticht Greta und sorgt dafür, dass die Elfe sich selbst disqualifiziert (damit Greta sie nun nicht mehr im Komitee). Außerdem sorgt er dafür, dass Greta Arne und Dante qualifiziert (damit hat Arne jetzt zwei Qualifizierungen, zusätzlich zur eigenen; und Dante hat jetzt fünf Qualifizierungen und ist somit im Komitee).

Schritt 3: Der Weihnachtsmann besticht Ida und sorgt dafür, dass Ida Arne qualifiziert (damit hat Arne jetzt drei Qualifizierungen, zusätzlich zur eigenen und ist somit im Komitee). Außerdem sorgt er dafür, dass Ida Joris disqualifiziert (damit hat Joris jetzt nur noch vier Qualifizierungen und ist nicht mehr im Komitee).

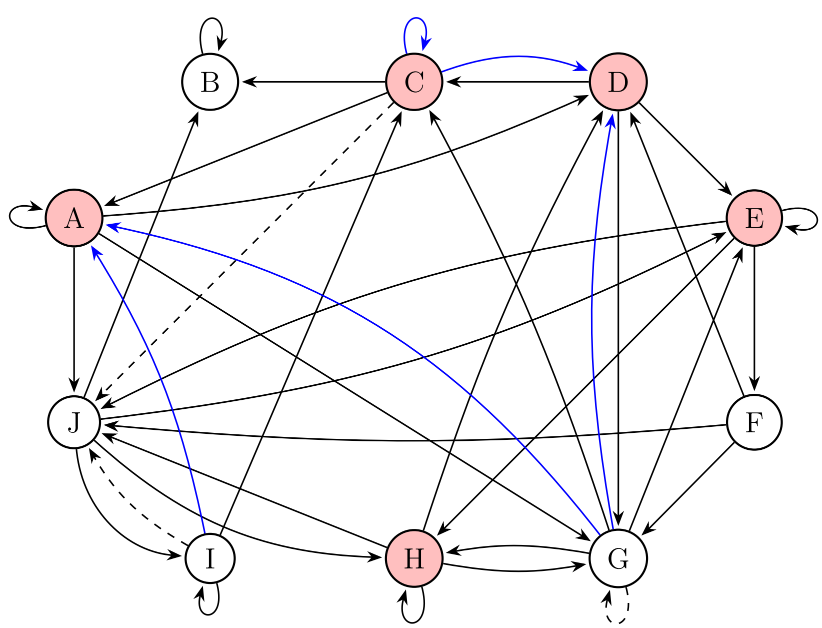


Abbildung 14: Die Situation nachdem Coco, Greta und Ida bestochen wurden. Die blauen Pfeile sind neu dazugekommen, die gestrichelten Pfeile sind weggefallen.

Jetzt zeigen wir noch, dass es nicht ausreicht, nur zwei Elfen zu bestechen. Nehmen wir an, es gäbe eine Möglichkeit, die obigen Bedingungen zu erfüllen, indem man nur zwei Elfen besticht. Wir unterscheiden vier Fälle, und führen sie jeweils zu einem Widerspruch:

Fall 1: Einer der beiden bestochenen Elfen ist Greta.

Da Joris von Greta bereits in der Ausgangslage disqualifiziert wird, können wir Joris durch die Bestechung von Greta keine zusätzliche Disqualifizierung verschaffen. Joris braucht also immer noch zwei weitere Disqualifizierungen. Da wir bereits Greta bestochen haben, können wir allerdings nur noch eine weitere Elfe bestechen. Folglich ist es unmöglich, Joris die zwei benötigten Disqualifizierungen zu verschaffen.

Fall 2: Einer der beiden bestochenen Elfen ist Dante.

Da Joris von Dante bereits in der Ausgangslage disqualifiziert wird, braucht Joris also immer noch zwei weitere Disqualifizierungen. Wie in Fall 1 ist dies unmöglich.

Fall 3: Einer der beiden bestochenen Elfen ist Coco.

Da Greta von Coco bereits in der Ausgangslage disqualifiziert wird, können wir Greta durch die Bestechung von Coco keine zusätzliche Disqualifizierung verschaffen. Greta braucht also immer noch zwei weitere Disqualifizierungen oder muss sich selbst disqualifizieren. Da wir bereits Coco bestochen haben, können wir nur noch eine weitere Elfe bestechen. Folglich müssen wir Greta bestechen, sich selbst zu disqualifizieren. Dadurch wird Joris aber immer noch von mindestens fünf Elfen qualifiziert (nämlich von Arne, Enzo, Fina, Henri und Ida) und wäre somit Mitglied des Komitees.

Fall 4: Weder Coco, noch Dante, noch Greta sind unter den beiden bestochenen Elfen.

In diesem Fall benötigen Arne, Coco und Dante jeweils zwei zusätzliche Qualifizierungen, und Greta und Joris benötigen jeweils zwei zusätzliche Disqualifizierungen. Es ist leicht zu sehen, dass es unmöglich ist, mit nur zwei Bestechungen allen fünf Elfen jeweils zwei zusätzliche (Dis)qualifizierungen zu verschaffen.

11 Heißhunger

Autor*innen: Christian Hercher, Michael Schmitz (Europa-Universität Flensburg)

Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Das Wichtelmädchen Selma hat einen schönen Adventskalender, der mit oberleckeren Süßigkeiten gefüllt ist. An einer Hakenleiste hängen Päckchen, die mit den Zahlen von 1 bis 24 beschriftet sind, allerdings *in zufälliger Reihenfolge.* Jeden Morgen entnimmt Selma dem Päckchen mit der passenden Nummer seinen gut gepolsterten Inhalt, und hängt es wieder verschlossen an seinen Haken.

In der Nacht vom 10. auf den 11. Dezember aber passiert es: Selma erwacht mit Heißhunger und schleicht durch das schlafende Haus zu ihrem Adventskalender, nimmt im Dunkeln *zufällig* vier Päckchen ab und kehrt mit diesen scheinbar unentdeckt in ihr Zimmer zurück. Weil sich in den Päckchen nur Kleinigkeiten befinden, kann Selma in der Dunkelheit nicht anhand des Gewichts merken, ob sie leere oder gefüllte Päckchen klaubt. Nachdem sie die erbeuteten Päckchen geplündert hat, verschließt Selma diese wieder fein säuberlich und bringt sie im Dunkeln zurück an die vier leeren Haken. Sie achtet dabei *nicht* darauf, welches Päckchen sie an welchen Haken zurückhängt.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Selma bei ihrem Raub nur leere Päckchen erwischt?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die vier Nummern der erbeuteten Päckchen direkt aufeinanderfolgende Zahlen?

Selmas Mutter hat nachts etwas gehört und schöpft Verdacht. Beim kritischen Betrachten des Adventskalenders könnte sie bemerken, dass sich nicht alle Päckchen am selben Haken befinden wie noch am Tag zuvor. Hängen zufällig alle Päckchen richtig, so merkt die Mutter garantiert nichts und Selma hat nichts zu befürchten. Befinden sich genau k Päckchen am falschen Platz, so findet es Selmas Mutter nur gerecht, dass Selma $k \cdot 20\,\%$ ihrer Nikolaussüßigkeiten zurückgeben muss.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau drei Päckchen am falschen Haken hängen?

(d) Wie viele Päckchen befinden sich nach einer solchen Aktion im Durchschnitt wieder an ihrem alten Platz (d. h. was ist der *Erwartungswert* der Anzahl der richtig zurück gehängten Päckchen)?

(e) Welchen Anteil ihrer Nikolaussüßigkeiten muss Selma im Durchschnitt zurückgeben?

Antwortmöglichkeiten:

1. (a) 0,02 (b) 1/506 (c) 1/3
2. (a) 0,02 (b) 0,002 (d) 5/4
3. (a) 120/253 (b) 0,002 (e) 1
4. (a) 5/253 (c) 1/3 (d) 1
5. (a) 5/253 (c) 0 (e) 3/5
6. (a) 120/253 (d) 1 (e) 60 %
7. (b) 0,002 (c) 1/2 (d) 2
8. (b) 0,002 (c) 1/3 (e) 1
9. (b) 1/253 (d) 2 (e) 3/5
10. (c) 0 (d) 5/4 (e) 1

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Wir bestimmen für alle Teilaufgaben die gesuchten Wahrscheinlichkeiten:

(a) Insgesamt gibt es $\binom{24}{4}$ Möglichkeiten, 4 der 24 Päckchen auszuwählen, und es gibt $\binom{10}{4}$ Möglichkeiten, aus den 10 leeren Päckchen 4 auszuwählen. Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\binom{10}{4}}{\binom{24}{4}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} = \frac{5}{253}.$$

(b) Es gibt 21 verschiedene Auswahlen von 4 direkt aufeinanderfolgenden Zahlen, nämlich: $\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \ldots, \{21, 22, 23, 24\}$. Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{21}{\binom{24}{4}} = \frac{21 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} = \frac{1}{506}$$

(c) Wir bezeichnen die ursprünglichen Positionen der abgenommenen Päckchen mit a, b, c, d. Es gibt insgesamt $4! = 24$ mögliche *Permutationen* (d. h. Anordnungen) der Päckchen a, b, c, d, diese sind:

$$\begin{array}{llllll}
(a,b,c,d), & (a,b,d,c), & (a,c,b,d), & (a,c,d,b), & (a,d,b,c), & (a,d,c,b),\\
(b,a,c,d), & (b,a,d,c), & (b,c,a,d), & (b,c,d,a), & (b,d,a,c), & (b,d,c,a),\\
(c,a,b,d), & (c,a,d,b), & (c,b,a,d), & (c,b,d,a), & (c,d,a,b), & (c,d,b,a),\\
(d,a,b,c), & (d,a,c,b), & (d,b,a,c), & (d,b,c,a), & (d,c,a,b), & (d,c,b,a).
\end{array}$$

Hängen genau drei Päckchen nach dem Wiederaufhängen an der falschen Stelle, bedeutet das, dass genau ein Päckchen an der richtigen Stelle hängt. Hängt z. B. a an der korrekten Stelle, dann gibt es nur zwei Möglichkeiten, dass keines der drei übrigen Postionen ebenfalls korrekt hängt, nämlich (a, d, b, c) und (a, c, d, b) (oben in blau). Da außer a auch b (oben in rot), c (oben in grün) oder d (oben in cyan) an der korrekten Stelle hängen kann, gibt es insgesamt $4 \cdot 2 = 8$ mögliche Permutationen der Päckchen a, b, c, d, bei denen genau ein Päckchen an seinem ursprünglichen Platz steht. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

(d) Wir bestimmen den Erwartungswert der richtig zurückgehängten Päckchen. Dieser Wert gibt an, wie viele Päckchen im Durchschnitt wieder richtig zurückgehängt werden. Dazu berechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeiten p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, dass genau 0, 1, 2, 3 bzw. 4 Päckchen richtig zurückgehängt wurden und benutzen dafür die oben aufgestellte Liste aller 24 möglichen Anordnungen der zurückgehängten Päckchen:

0) In den neun Fällen

$$\begin{gathered}
(b,a,d,c), (b,c,d,a), (b,d,a,c),\\
(c,a,d,b), (c,d,a,b), (c,d,b,a),\\
(d,a,b,c), (d,c,a,b), (d,c,b,a)
\end{gathered}$$

hängt keines der vier Päckchen an der richtigen Stelle, d. h. $p_0 = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

1) In (c) haben wir bereits berechnet, dass $p_1 = \frac{1}{3}$ gilt.
2) In den sechs Fällen

$$(a, b, d, c), (a, c, b, d), (a, d, c, b), (b, a, c, d), (c, b, a, d), (d, b, c, a)$$

hängen genau zwei Päckchen am richtigen Haken, d. h. $p_2 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.
3) Es kann nicht sein, dass sich nur genau drei Päckchen am richtigen Platz befinden, da dann automatisch auch das vierte Päckchen am richtigen Platz hängt, d. h. $p_3 = 0$.
4) Natürlich gibt es nur eine Anordnung, in der sich alle Päckchen an ihrem ursprünglichen Platz (a, b, c, d) befinden, d. h. $p_4 = \frac{1}{24}$.

Insgesamt erhalten wir also als Erwartungswert

$$\begin{aligned} E &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 \\ &= 0 \cdot \tfrac{3}{8} + 1 \cdot \tfrac{1}{3} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \tfrac{1}{24} \\ &= 0 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + 0 + \tfrac{1}{6} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Anmerkung: Interessanterweise erhält man auf analoge Weise, dass der Erwartungswert der zufälligen Anzahl richtig zurückgehängter Päckchen für eine beliebige Anzahl entwendeter Päckchen stets gleich 1 ist.

(e) Da im Mittel ein Päckchen richtig zurückgehängt wurde, befinden sich im Durchschnitt drei Päckchen an der falschen Position. Da die Entdeckungswahrscheinlichkeit proportional von der Anzahl der falsch platzierten Päckchen abhängt, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Selmas Untat entdeckt wird, also $3 \cdot 20\% = 60\%$.

12 Die Elfen in der Weihnachtsbäckerei

Autor*innen: Sarah Hiller, Rupert Klein (FU Berlin)

Projekt: *A Mathematical Theory of Responsibility in Complex Multi-Agent Decision Problems with Uncertainties* (EF 5-3)

Illustration: Frauke Jansen

Aufgabe

Wie die Weihnachtsbäckerei schon wieder aussieht! Die Elfen sind auf Hochtouren damit beschäftigt, Plätzchen zu backen; das Mehl staubt durch die Küche und der Zuckerguss tropft von den Lebkuchenhäusern. Der Weihnachtsmann kommt in die Backstube und teilt den zehn Backelfen mit: „Mindestens eine von euch hat Teig an der Mütze kleben!“

Die Elfen schauen sich gegenseitig an. Sie können jeweils alle anderen Elfen sehen, aber nicht sich selbst. Da der Weihnachtsmann und die Elfen grundehrliche Wesen sind, sagen sie immer die Wahrheit; und das wissen auch alle übereinander. Außerdem sind die Backelfen logisch hochbegabt und werden mit den ihnen zur Verfügung stehenden Informationen immer blitzschnell die richtigen Überlegungen anstellen.

- „Wenn ihr wisst, ob ihr Teig an der Mütze habt, dann tretet einen Schritt nach vorne!“ fährt der Weihnachtsmann fort. Keine der Elfen rührt sich.
- „Wenn ihr wisst, ob ihr Teig an der Mütze habt, dann tretet einen Schritt nach vorne!“ wiederholt der Weihnachtsmann Wort für Wort. Wieder bleiben alle Elfen stehen.
- Als der Weihnachtsmann sich ein weiteres Mal Wort für Wort wiederholt, treten manche, aber nicht alle, Elfen nach vorne.
- Bei der nächsten Wiederholung von „Wenn ihr wisst, ob ihr Teig an der Mütze habt, dann tretet einen Schritt nach vorne!“ treten schließlich alle restlichen Elfen nach vorne.

Seit der Weihnachtsmann in die Backstube gekommen ist, haben die Elfen nicht miteinander geredet oder sonst irgendwelche heimlichen Informationen ausgetauscht. Zu wissen, ob man Teig an der Mütze hat, bedeutet *entweder*, man weiß, dass man Teig an der Mütze hat, *oder* man weiß, dass man keinen Teig an der Mütze hat.

Wie viele Elfen haben Teig an ihrer Mütze kleben?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 10

Projektbezug:

Diese Aufgabe ist ein gängiges Problem im Feld der *Dynamic Epistemic Logic* (DEL), in der die Entwicklung von privatem und allgemeinem Wissen z. B. durch öffentliche Mitteilungen untersucht wird.

Motiviert durch die Klimawandelforschung zielt das Projekt EF 5-3 *A Mathematical Theory of Responsibility in Complex Multi-Agent Decision Problems with Uncertainties* darauf ab, das Konzept der moralischen Verantwortung, sowohl rück- als auch vorausschauend, in interaktiven Entscheidungsszenarien mit mehreren Agenten und mit verschiedenen Ebenen der Unsicherheit zu formalisieren. Wir verwenden dabei in unserem Projekt auch Methoden der DEL, um Unwissenheit abzubilden, die für die Zuweisung von Verantwortung relevant ist.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Wir betrachten die Situation zunächst für wenige schmutzige Elfen und schließen dann auf den allgemeinen Fall.

Fall 1: Unter den zehn Elfen befindet sich **genau eine dreckige Elfe**.

Wir nennen diese Elfe Dorothy. Dorothy sieht neun andere Elfen, die allesamt sauber sind. Somit weiß Dorothy nach der ersten Aussage des Weihnachtsmanns („Mindestens eine von euch hat Teig an der Mütze kleben!“) sofort, dass sie selbst dreckig sein muss und kann nach der ersten Frage nach vorne treten.

Nennen wir eine der neun sauberen Elfen Susie. Susie sieht zu Beginn die dreckige Elfe Dorothy und acht saubere Elfen. Nach der ersten Aussage des Weihnachtsmannes kann Susie also nicht sicher sein, ob es insgesamt eine oder zwei Elfen mit Teig an der Mütze gibt. Nachdem aber Dorothy auf die Frage hin direkt nach vorne tritt, weiß Susie, dass Dorothy neun saubere Elfen sieht und somit auch Susie selbst sauber sein muss – sonst wäre Dorothy ja in der Situation, in der Susie tatsächlich, und wäre noch unsicher. Susie kann also nach der zweiten Frage ebenfalls einen Schritt nach vorne treten.

Dasselbe gilt natürlich auch für alle anderen sauberen Elfen, sodass alle sauberen Elfen nach der zweiten Frage gemeinsam nach vorne treten können.

Fall 2: Unter den zehn Elfen befinden sich **genau zwei dreckige Elfen**.

Nennen wir diese beiden dreckigen Elfen Dorothy und Dobby. Dorothy sieht acht saubere Elfen und Dobby. Sie weiß also nicht, ob es es insgesamt eine oder zwei dreckige Elfen gibt. Als Dobby jedoch nach der ersten Frage des Weihnachtsmannes nicht nach vorne tritt, weiß Dorothy, dass Dobby mindestens einen anderen dreckigen Elfen sehen muss – sie selbst. Somit weiß Dorothy im zweiten Schritt, dass sie dreckig sein muss und tritt nach vorne. Dasselbe gilt für Dobby.

Nennen wir wieder einen der sauberen Elfen Susie. Susie sieht sieben saubere Elfen sowie Dorothy und Dobby. Sie weiß also nicht, ob insgesamt zwei oder drei der Elfen dreckig sind. Nachdem aber Dorothy und Dobby in der zweiten Runde vorgetreten sind, weiß sie, dass diese beiden acht saubere Elfen gesehen haben müssen, da sie ja sonst noch nicht hätten wissen können, dass sie selbst dreckig sind. Somit muss Susie sauber sein und kann in der nächsten Runde nach vorne treten. Dasselbe gilt auch wieder für alle anderen sauberen Elfen.

...

Fall n: Unter den zehn Elfen befinden sich **genau n dreckige Elfen**.

So können wir die Argumentation iterativ immer weiter fort führen, und sehen also, dass wenn n Elfen Teig an ihrer Mütze haben, die dreckigen Elfen in Runde n vortreten, und die sauberen Elfen eine Runde später, in Runde n+1.

Da in unserem Beispiel die ersten Elfen in Runde 3 und die restlichen Elfen in Runde 4 vorgetreten sind, wissen wir nun, dass genau drei Elfen Teig an ihrer Mütze kleben haben.

MATH+ KALENDER

13 Das Schokoladenspiel

Autor*innen: Olaf Parczyk, Silas Rathke (FU Berlin)
Projekt: *Learning Extremal Structures in Combinatorics* (EF 1-12)

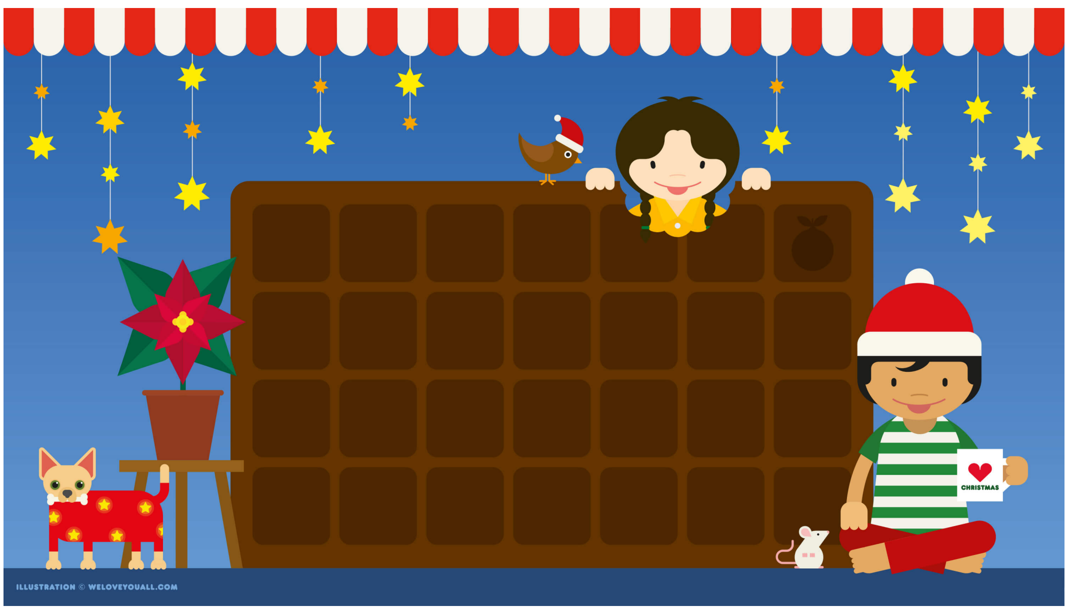


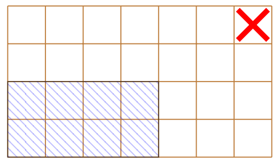
Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Die Intelligenzwichtel Atto und Bilbo haben sich eine große Tafel Schokolade mit n Spalten und m Zeilen besorgt, wobei m und n positive ganze Zahlen sind. Mit (i, j) bezeichnen wir das Stückchen in der i-ten Spalte und der j-ten Zeile der Schokolade. Das Stückchen (n, m) ist mit Orangengelee gefüllt und somit ekelhaft (diese Tatsache muss nicht bewiesen werden).

Atto und Bilbo spielen nun folgendes Spiel: Sie machen abwechselnd Züge, wobei *Atto beginnt*. Ein Zug besteht darin, ein noch vorhandenes Stück (i, j) auszuwählen und alle Stückchen (i', j') mit $i' \leq i$ und $j' \leq j$ aufzuessen. Wer das Stückchen (n, m) mit dem Orangengelee essen muss, der verliert.

Beispiel: Ein möglicher Zug für $n = 7$ und $m = 4$ könnte wie folgt aussehen. Wenn ein Spieler in seinem Zug das Stückchen $(4, 2)$ aussucht, muss er die blau schraffierten Stückchen essen:



Das Stückchen $(7, 4)$ mit dem Orangengelee ist mit einem roten X markiert. In diesem Beispiel könnte ein Spielverlauf, bei dem Atto am Ende verliert, also möglicherweise wie folgt aussehen (siehe Abbildung 15):

1. Atto (blau) startet mit dem Stückchen $(4, 2)$.
2. Anschließend wählt Bilbo (orange) das Stückchen $(3, 4)$.
3. Nun wählt Atto $(6, 4)$.
4. Danach sucht sich Bilbo $(7, 3)$ aus.
5. Schließlich muss Atto in seinem letzten Zug das Stückchen $(7, 4)$ mit dem Orangengelee essen.

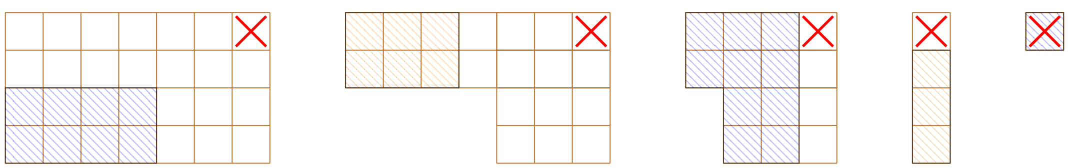


Abbildung 15: Ein möglicher Spielverlauf bei einer Tafel der Größe 7×4.

Abhängig von m und n gibt es entweder eine Strategie, mit der Atto sicher gewinnen kann, oder eine Strategie, mit der Bilbo sicher gewinnen kann.

Wenn wir m und n unabhängig und zufällig aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 10^6\}$ wählen, wobei alle Zahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt werden, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit p, dass Atto eine Gewinnstrategie besitzt?

Antwortmöglichkeiten:

1. $p < 10\%$
2. $10\% \leq p < 20\%$
3. $20\% \leq p < 30\%$
4. $30\% \leq p < 40\%$
5. $40\% \leq p < 50\%$
6. $50\% \leq p < 60\%$
7. $60\% \leq p < 70\%$
8. $70\% \leq p < 80\%$
9. $80\% \leq p < 90\%$
10. $90\% \leq p \leq 100\%$

Projektbezug:

Im Projekt EF 1-12 *Learning Extremal Structures in Combinatorics* verwenden wir Ansätze aus dem Bereich der künstlichen Intelligenz und des maschinellen Lernens um neue Strukturen mit bestimmten Eigenschaften zu finden. Dies hilft uns auch dabei neue Gewinnstrategien für kombinatorische Spiele zu finden, ganz ähnlich zu dem aus dieser Aufgabe.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Interessanterweise hat nach dem Wissensstand der Autoren bisher noch kein Mensch eine explizite Gewinnstrategie für alle möglichen (m, n) angeben können. Wir wissen aber, dass fast immer Atto eine Gewinnstrategie besitzen muss:

Behauptung: Für $(m, n) = (1, 1)$ hat Bilbo eine Gewinnstrategie. In allen anderen Fällen hat Atto sie.

Beweis:

1. Falls $(m, n) = (1, 1)$, kommt Atto bereits im ersten Zug zwangsweise in den zweifelhaften Genuss von ekelhaftem Orangengelee.

2. Sei nun $(m, n) \neq (1, 1)$. Wir wollen beweisen, dass nun Atto eine Gewinnstrategie hat. Wir nehmen nun aber für einen *Widerspruchsbeweis* an, dass Bilbo eine Gewinnstrategie hat. Das heißt, egal wie Atto zieht, Bilbo hat immer einen Antwortzug, der ihn zum Sieg führen wird.

   Insbesondere hat Bilbo eine Antwort, wenn Atto im ersten Zug das Feld $(1, 1)$ wählt. Sei (i, j) ein solcher Antwortzug von Bilbo auf Attos Zug $(1, 1)$, der ihn zum Sieg führen wird. Das heißt aber auch, dass Atto in seinem ersten Zug hätte (i, j) wählen und somit gewinnen können.

   Dies ist ein Widerspruch und somit kann es für $(m, n) \neq (1, 1)$ keine Gewinnstrategie für Bilbo geben.

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{10^6 \cdot 10^6 - 1}{10^{12}} = \frac{999\,999\,999\,999}{1\,000\,000\,000\,000} = 0{,}999999999999.$$

14 Magische Rentierzucht

Authors: Christian Kuchler, Falk Hante (HU Berlin)
Project: *Decision-Making for Energy Network Dynamics* (AA 4-7)

Artwork: Friederike Hofmann

Aufgabe

Um die Weihnachtsgeschenke in der ganzen Welt zu verteilen, nutzt der Weihnachtsmann seinen Zauberschlitten. Jedes Jahr wird der Schlitten von einer Herde magischer Rentiere gezogen. Aufgrund der schweren Last können die Rentiere den Schlitten nur einmal ziehen und gehen danach in den Ruhestand. Deshalb muss der Weihnachtsmann jedes Jahr eine neue Rentierherde züchten.

Zu diesem Zweck benutzt der Weihnachtsmann ein spezielles Gehege, in dem sich die aktuelle Population nach jedem Tag auf magische Weise verdoppelt. Das Gehege ist von einem Zaun umgeben. Dieser Zaun hat derzeit eine Länge von 112 Metern und kann nicht verlängert werden, weil alle Elfen in den Werkstätten gerade Weihnachtsgeschenke herstellen müssen. Außerdem muss der Weihnachtsmann aufgrund neuer Vorschriften zur artgerechten Haltung von Rentieren das Gehege in Form eines Rechtecks anlegen (siehe Abb. 16) und dafür sorgen, dass jedes einzelne Rentier mindestens 3 Quadratmeter Platz hat. Diese Vorschriften werden von der Abteilung für Rentierschutz durchgesetzt, deren Inspektionen *jederzeit* stattfinden können.

Der Zuchtprozess selbst kann nicht unterbrochen werden, wenn er einmal begonnen hat. Der Weihnachtsmann beginnt die Zucht immer mit Rudolph, seinem berühmtesten und beliebtesten Rentier.

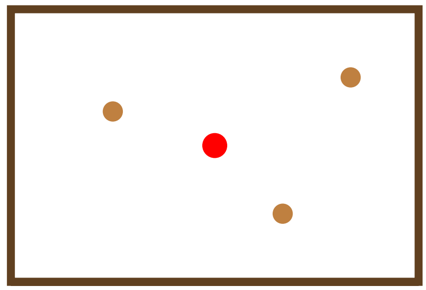


Abbildung 16: Das rechteckige Gehege, Rudolf (rot) und drei seiner Nachkommen (braun).

An welchem Tag sollte der Weihnachtsmann mit der Aufzucht beginnen, um die Anzahl der Rentiere am 24. Dezember zu maximieren und dabei jederzeit alle oben genannten Vorschriften einzuhalten?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1. Dezember
2. 6. Dezember
3. 10. Dezember
4. 12. Dezember
5. 14. Dezember
6. 16. Dezember
7. 18. Dezember
8. 20. Dezember
9. 22. Dezember
10. 24. Dezember

Projektbezug:

Die Entwicklung hin zu nachhaltigen Energienetzen unter Berücksichtigung der Komplexität, die sich aus der Integration von eher unsteten erneuerbaren Energieressourcen ergibt, stellt Netzbetreiber vor große Herausforderungen. Die Forschung des Projekts AA 4-7 *Decision-Making for Energy Network Dynamics* befasst sich mit grundlegenden Fragen der Steuerung und Optimierung im Zusammenhang mit dieser Anwendung. Die oben gestellte Aufgabe ist ein Beispiel für ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Das Problem ist ein *Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen* und lässt sich wie folgt darstellen:

$$\text{Maximiere } 2^z \text{ für } z \in \mathbb{N}_0, \text{ sodass } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 2x + 2y = P, \\ 3 \cdot 2^z \leq xy. \end{cases}$$

Dabei bezeichnen die Variablen x und y die horizontale bzw. vertikale Länge des Zauns. Der Parameter $P > 0$ beschreibt den vorgegebenen Umfang des Zauns. In unserem Fall wird er mit 112 Metern angegeben. Die Unbekannte z gibt die Anzahl der Bruttage an.

Es ist ersichtlich, dass die Fläche des Geheges die Rentierpopulation des Weihnachtsmannes einschränkt. Daher ist es sinnvoll, zunächst seine Fläche xy zu maximieren:

$$\text{Maximiere } xy \text{ für } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ so dass } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 2x + 2y = P. \end{cases}$$

Zuerst eliminieren wir eine Variable: $2x + 2y = P$ ist äquivalent zu $y = \frac{P}{2} - x$ und reduziert unser Problem auf:

$$\text{Maximiere } x \cdot \left(\frac{P}{2} - x\right) \text{ für } x \in \mathbb{R}, \text{ so dass } \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{P}{2} - x \geq 0. \end{cases}$$

Die Funktion $A(x) = x \cdot \left(\frac{P}{2} - x\right) = -x \cdot \left(x - \frac{P}{2}\right)$ ist quadratisch in x. Ihr globales Maximum liegt also bei $x_{max} = \frac{P}{4}$ mit einem Wert von

$$A(x_{max}) = \frac{P}{4} \cdot \left(\frac{P}{2} - \frac{P}{4}\right) = \frac{P}{4} \cdot \frac{P}{4} = \frac{P^2}{16}.$$

Tatsächlich ist $x_{max} = \frac{P}{4}$ eine gültige Lösung, da

$$x_{max} = \frac{P}{4} \geq 0 \quad \text{and} \quad \frac{P}{2} - x_{max} = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4} = x_{max} \geq 0.$$

Man beachte, dass diese Lösung mit der bekannten Eigenschaft, dass ein Quadrat die Fläche eines Rechtecks mit einem gegebenen Umfang maximiert, in Einklang steht.

Für den gegebenen Parameter $P = 112$ erhalten wir $x_{max} = \frac{112}{4} = 28$ und

$$A = x_{max}^2 = 28^2 = 784.$$

Deshalb kann das Ursprungsproblem auf folgendes reduziert werden:

$$\text{Maximiere } 2^z \text{ für } z \in \mathbb{N}_0 \text{ so dass } 2^z \leq \frac{784}{3} = 261 + \frac{1}{3}.$$

Die Zielfunktion 2^z ist monoton steigend. Wir suchen also die größte Zahl $z \in \mathbb{N}_0$, sodass $2^z \leq \frac{784}{3}$ gilt. Da $2^8 = 256$, aber $2^9 = 512$, ist diese größte Zahl durch $z_{max} = 8$ gegeben und wir erhalten den folgenden Zuchtplan:

Tag	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.
Population	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Es lässt sich sagen, dass der Weihnachtsmann, wenn er am 16. Dezember mit der Zucht beginnt, am 24. Dezember die Rentierpopulation unter Einhaltung aller Vorschriften maximieren wird. Am Ende wird er 256 Rentiere haben.

15 Verlorene Wunschzettel

Autor*in: Svenja M. Griesbach
Projekt: *Information Design for Bayesian Networks* (AA3-9)

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Aufgabe

Um sich für den 24. Dezember fit zu machen, war der Weihnachtsmann ein paar Tage in den Bergen wandern. Als er an der Haupthütte mit der roten Tür angekommen ist, fällt ihm jedoch auf, dass er in einer der kleineren Hütten ein paar Wunschzettel verbummelt hat. Diese muss er natürlich schnell wiederfinden. Leider weiß er nicht mehr genau, in welcher der sechs Hütten er die Wunschzettel vergessen hat; er weiß nur, dass sie auf jeden Fall in einer der Hütten liegen müssen. Da der Weihnachtsmann während seiner Wanderung nicht in allen Hütten pausiert hat, kann er immerhin zwei der sechs Hütten ausschließen. Bei den anderen vier Hütten kann er wenigstens die Wahrscheinlichkeit angeben, mit der die Wunschzettel dort jeweils liegen.

Der Weihnachtsmann ruft umgehend Rudolf mit seinem superschnellen Schlitten zu Hilfe, denn er hat keine Zeit zu verlieren. Als die beiden sich gerade auf die Socken machen wollen, sehen sie, dass hoher Schnee die Pisten blockiert. Die Pisten müssen also zunächst geräumt werden, bevor sie mit dem Schlitten befahren werden können. Dafür steht nur ein einziges magisches Räumfahrzeug zur Verfügung, dass die Pisten *nacheinander, allerdings in völlig beliebiger Reihenfolge* räumen kann. Zusätzlich zur Räumung der einzelnen Pisten vergeht also keine Zeit. Auf seiner Landkarte (s. Abb. 17) kann der Weihnachtsmann ablesen, wie lange es jeweils dauert, die Pisten zu räumen. Sobald eine Piste vom hohen Schnee befreit ist, können der Weihnachtsmann und Rudolf in ihrem blitzschnellen Schlitten von einem Ende dieser Piste zum anderen düsen, ohne Zeit zu verlieren.

Die beiden starten in der Haupthütte mit der roten Tür. Sobald der Weihnachtsmann die Wunschzettel in einer der Hütten gefunden hat, brechen sie die Suche und auch die Räumung der Pisten ab.

In welcher Reihenfolge sollte der Weihnachtsmann die Pisten räumen lassen, damit er die Wunschzettel *im Durchschnitt* möglichst schnell findet?

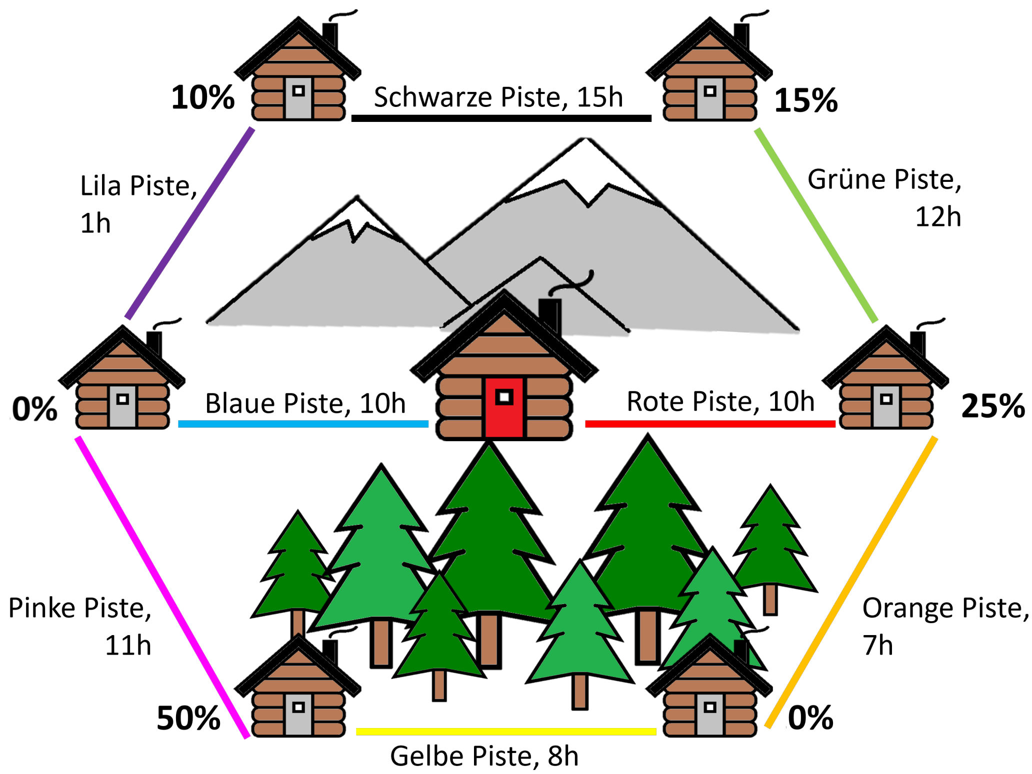


Abbildung 17: Die Landkarte des Weihnachtsmanns. Eingezeichnet sind die Haupthütte mit der roten Tür, die umgebenen Hütten (jeweils mit der Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Wunschzettel dort liegen) sowie die Pisten (mit der jeweiligen Räumungsdauer) zwischen den Hütten.

Antwortmöglichkeiten:

1. blau, pink, rot, grün, lila
2. blau, pink, lila, rot, grün
3. blau, lila, schwarz, grün, pink
4. blau, lila, pink, rot, grün
5. blau, rot, lila, grün, pink
6. rot, grün, orange, gelb, blau, lila
7. rot, blau, lila, pink, grün
8. rot, blau, pink, lila, grün
9. rot, orange, gelb, grün, blau, lila
10. rot, orange, gelb, blau, lila, schwarz

Projektbezug:

Das mathematische Problem hinter diesem Rätsel nennt sich *Expanding Search*, dabei kann die Suche jederzeit an einem beliebigen zuvor erreichten Knotenpunkt eines Graphen fortgesetzt werden.

Im Projekt AA 3-9 *Information Design for Bayesian Networks* betrachten wir ganz ähnliche Netzwerke wie die Landkarte des Weihnachtsmanns: *Bayes'sche Netzwerke* sind gerichtete Graphen, die aus gewichteten Kanten (hier die Pisten mit der Räumungsdauer) und Knoten (hier die Hütten) mit einer bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung (hier repräsentiert durch die Verlustwahrscheinlichkeiten) bestehen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Da es sich hierbei um ein sogenanntes *NP-schweres Problem* handelt, führt nichts daran vorbei, alle Möglichkeiten auszutesten. Als Beispiel: die genaue Rechnung für die Reihenfolge aus Antwortmöglichkeit 1 sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für blaue Piste}\\
&+\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für pinke Piste}\\
&+\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für rote Piste}\\
&+\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für grüne Piste}\\
&+\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für lila Piste}\\
&= 100\% * 10\,\text{h}\\
&+ (100\% - 0\%) * 11\,\text{h}\\
&+ (100\% - 50\%) * 10\,\text{h}\\
&+ (100\% - 50\% - 25\%) * 12\,\text{h}\\
&+ (100\% - 50\% - 25\% - 15\%) * 1\,\text{h}\\
&= 100\% * 10\text{h} + 100\% * 11\text{h} + 50\% * 10\text{h} + 25\% * 12\text{h} + 10\% * 1\,\text{h}\\
&= 29{,}1\text{h}
\end{aligned}$$

Wir behaupten, dass 9 die richtige Antwortmöglichkeit ist, und rechnen zuerst dessen Erwartungswert aus:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für rote Piste}\\
&+\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für orange Piste}\\
&+\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für gelbe Piste}\\
&+\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für grüne Piste}\\
&+\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für blaue Piste}\\
&+\mathbb{P}(\text{Zettel bisher nicht gefunden}) * \text{ Zeit für lila Piste}\\
&= 100\% * 10\,\text{h}\\
&+ (100\% - 25\%) * 7\,\text{h}\\
&+ (100\% - 25\%) * 8\,\text{h}\\
&+ (100\% - 25\% - 50\%) * 12\,\text{h}\\
&+ (100\% - 25\% - 50\% - 15\%) * 10\,\text{h}\\
&+ (100\% - 25\% - 50\% - 15\%) * 1\,\text{h}\\
&= 100\% * 10\text{h} + 75\% * 8\text{h} + 75\% * 7\text{h} + 25\% * 12\text{h} + 10\% * 10\text{h} + 10\% * 1\,\text{h}\\
&= 25{,}35\,\text{h}
\end{aligned}$$

Nun müssen wir zeigen, dass es keine bessere Reihenfolge gibt. Dafür zeigen wir, dass der Erwartungswert für jeder anderen Reihenfolge (nicht nur für die in den Antwortmöglichkeiten aufgezählten Reihenfolgen) echt größer als 25,35 h ist.

Um die Anzahl der Möglichkeiten zu reduzieren, machen wir zunächst die folgenden Beobachtungen:

1. Wenn wir einen Pfad entlanggehen, der, schon bevor er alle Hütten besucht hat in denen die Wunschzettel liegen könnten, einen Erwartungswert größer als 25,35 h hat, müssen wir nicht mehr alle Erwartungswerte der Reihenfolgen die sich aus diesem Pfad ergeben berechnen, da der Erwartungswert bzgl. der Addition monoton steigend ist.

2. Wenn eine Reihenfolge Pisten enthält, die – wenn diese weggelassen werden – trotzdem alle Hütten, in denen die Wunschzettel sein könnten, besucht, kann sie nicht optimal sein.

Zuletzt berechnen wir die Erwartungswerte aller noch übrigen Reihenfolgen:

Reihenfolge	Dauer
1. blau, pink, rot, ...	26 h
blau, pink, gelb, orange, ...	28,5 h
blau, pink, gelb, lila, ...	25,5 h
blau, pink, lila, schwarz, ...	27,5 h
2. blau, pink, lila, rot, ...	25,5 h
blau, lila, schwarz, rot, ...	32 h
3. blau, lila, schwarz, grün, ...	33,5 h
blau, lila, schwarz, pink, ...	32,75 h
blau, lila, rot, grün, ...	27,8 h
blau, lila, rot, schwarz, ...	29,75 h
blau, lila, rot, orange, gelb, ...	29,75 h
blau, lila, rot, orange, schwarz, ...	34,3 h
blau, lila, rot, orange, grün, ...	32,35 h
blau, lila, rot, pink, ...	27,15 h
blau, lila, pink, schwarz, ...	26,9 h
blau, lila, pink, gelb, orange, ...	26,9 h
blau, lila, pink, gelb, rot, ...	28,1 h
blau, lila, pink, gelb, schwarz, ...	30,1 h
blau, lila, pink, rot, schwarz	27,15 h
4. blau, lila, pink, rot, grün	26,7 h
blau, rot, pink, ...	28,25 h
blau, rot, orange, gelb, ...	31,25 h
blau, rot, orange, grün, ...	34,25 h
blau, rot, orange, lila, ...	26 h
blau, rot, lila, schwarz, ...	30,5 h
5. blau, rot, lila, grün, ...	28,55 h
blau, rot, lila, pink, ...	27,9 h
blau, rot, lila, orange, gelb, ...	30,5 h
blau, rot, lila, orange, schwarz, ...	35,03 h
blau, rot, lila, orange, grün, ...	33,1 h
blau, rot, grün, ...	29 h

Reihenfolge	Dauer
8. rot, blau, pink, ...	25,75 h
rot, blau, orange, gelb, ...	28,75 h
rot, blau, orange, grün, ...	31,75 h
rot, blau, orange, pink, ...	31 h
rot, blau, orange, lila, schwarz, ...	33,25 h
rot, blau, orange, lila, grün, ...	31,3 h
rot, blau, orange, lila, gelb, ...	28,7 h
rot, blau, lila, schwarz, ...	28 h
rot, blau, lila, grün, ...	26,05 h
7. rot, blau, lila, pink, ...	25,4 h
rot, blau, lila, orange, gelb, ...	28 h
rot, blau, lila, orange, schwarz, ...	32,55 h
rot, blau, lila, orange, grün, ...	30,6 h
rot, blau, grün, ...	26,5 h
rot, grün, schwarz, ...	28 h
rot, grün, blau, schwarz, ...	34 h
rot, grün, blau, lila, ...	25,6 h
rot, grün, blau, pink, ...	31,6 h
rot, grün, blau, gelb, ...	29,8 h
6. rot, grün, orange, gelb, ...	29 h
rot, orange, blau, gelb, ...	28,75 h
rot, orange, blau, lila, schwarz, ...	33,25 h
rot, orange, blau, lila, grün, ...	31,3 h
rot, orange, blau, lila, gelb, ...	28,7 h
rot, orange, blau, grün, ...	31,75 h
rot, orange, grün, schwarz, ...	31,25 h
rot, orange, grün, blau, ...	30,25 h
rot, orange, grün, gelb, ...	29,05 h
rot, orange, gelb, grün, schwarz	25,75 h
9. rot, orange, gelb, grün, blau, lila	**25,35 h**
rot, orange, gelb, grün, pink, lila	25,45 h
rot, orange, gelb, pink, lila, schwarz	26,5 h
rot, orange, gelb, pink, lila, grün	26,05 h
rot, orange, gelb, pink, grün, ...	27 h
10. rot, orange, gelb, blau, lila, schwarz	26,25 h
rot, orange, gelb, blau, lila, grün	25,8 h
rot, orange, gelb, blau, grün, ...	26,75 h

16 Am Weihnachtsbaume die Lichter brennen

Autor*innen: Susanne Brinkhaus (HU Berlin, Käthe-Kollwitz-Gymnasium)
Christoph Werner (HU Berlin)
Projekt: *Schule@DecisionTheatreLab*
(BUA-Experimentallabor für Wissenschaftskommunikation)

Illustration: Frauke Jansen

Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat sich in diesem Jahr einen Weihnachtsbaum mit ganz besonderer Beleuchtung ausgesucht. Der Weihnachtsbaum ist in insgesamt 40 kleine Quadrate eingeteilt und in jedem Quadrat befindet sich genau ein Licht, das entweder leuchtet oder nicht leuchtet (s. Abb. 18).

Das Besondere: Die Lichter am Baum können sich gegenseitig anzünden. Ein noch nicht leuchtendes Licht wird angezündet, wenn schon in *mindestens* zwei waagerecht oder senkrecht benachbarten Feldern Lichter brennen (s. Abb. 18). Die neu angezündeten Lichter können anschließend selbst weitere Lichter anstecken. Ein Licht kann nicht über diagonal benachbarte Felder angezündet werden. Außerdem brennt ein einmal leuchtendes Licht immer weiter, geht also nicht wieder aus.

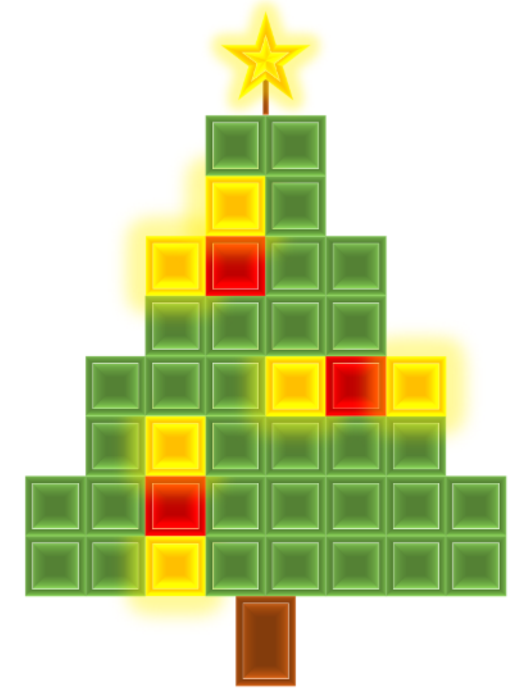


Abbildung 18: Der Weihnachtsbaum des Weihnachtsmanns. Ein Beispiel mit leuchtenden Lichtern (gelbe Felder) und den von diesen angezündete Lichtern (rote Felder).

Was ist die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter am Weihnachtsbaum des Weihnachtsmannes, die dazu führt, dass schließlich alle Lichter am Baum leuchten?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 6.
2. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 7.
3. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 8.
4. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 9.
5. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 10.
6. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 11.
7. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 12.
8. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 13.
9. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 14.
10. Die kleinstmögliche Anzahl bereits leuchtender Lichter ist 15.

Projektbezug:

Die Funktionsweise des Weihnachtsbaums entspricht der eines *zellulären Automaten*. In gewisser Weise eine Verallgemeinerung solcher zellulären Automaten sind *agentenbasierte Modelle*, mit deren Hilfe sich komplexe dynamische Systeme, in denen globale Eigenschaften vom Verhalten vieler einzelner Agenten abhängen, modellieren lassen. Im von MATH+ und der BUA geförderten Projekt *Schule@DecisionTheatreLab* werden solche agentenbasierten Modelle zu gesellschaftlich relevanten Themen mathematisch beleuchtet und als Ausgangspunkt für politische Diskussionen herangezogen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Wir wollen zeigen, dass wir zu Beginn mindestens acht leuchtende Quadrate benötigen, um den gesamten Baum nach und nach komplett zu beleuchten. In Abbildung 19 sehen wir eine Startkonfiguration mit acht leuchtenden Quadraten, die tatsächlich den gesamten Baum nach 28 Schritten erleuchtet. Die Reihenfolge der Erleuchtung ist am Ende der Lösung in Abbildung 20 gegeben.

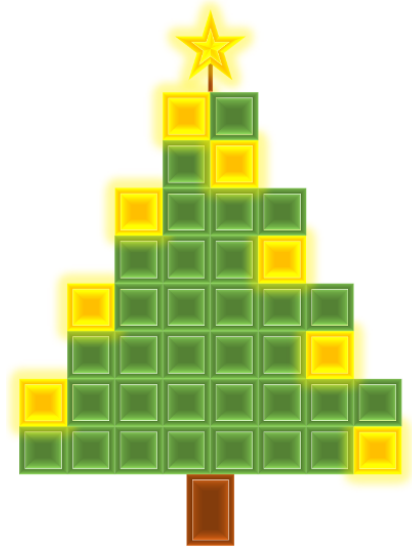
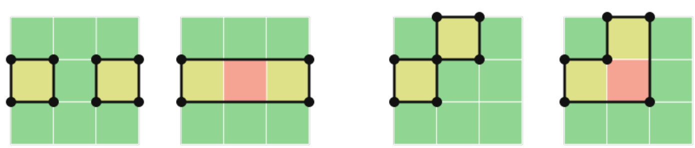


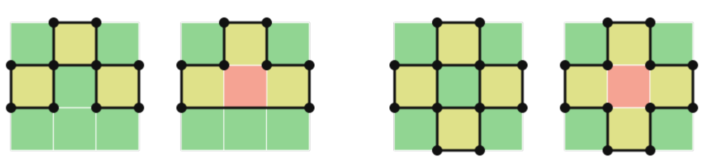
Abbildung 19: Eine mögliche Startkonfiguration, die dazu führt, dass am Ende alle Felder leuchten.

Wir müssen nun noch zeigen, dass es keine Startkonfiguration mit weniger als acht leuchtenden Feldern gibt, die den gesamten Baum zum Leuchten bringt. Dafür benutzen wir ein sogenanntes *Invarianzargument*. Wir stellen fest, dass der Umfang aller leuchtenden Felder von einem Schritt zum nächsten nicht zunehmen kann:

- Wenn ein noch nicht leuchtendes Feld durch zwei leuchtende Nachbarfelder angezündet wird, dann bleibt der Umfang des leuchtenden Bereiches konstant:



- Wenn ein noch nicht leuchtendes Feld durch mindestens drei leuchtende Nachbarfelder angezündet wird, dann nimmt der Umfang des leuchtenden Bereiches sogar ab:



Wenn ein einzelnes quadratisches Feld die Seitenlänge 1 hat, dann ist der Umfang des gegebenen Weihnachtsbaums gerade 32. Der Umfang der in der Startkonfiguration leuchtenden Felder muss also ebenfalls mindestens 32 betragen. Dies ist aber erst mit acht (nicht benachbarten) Feldern möglich.

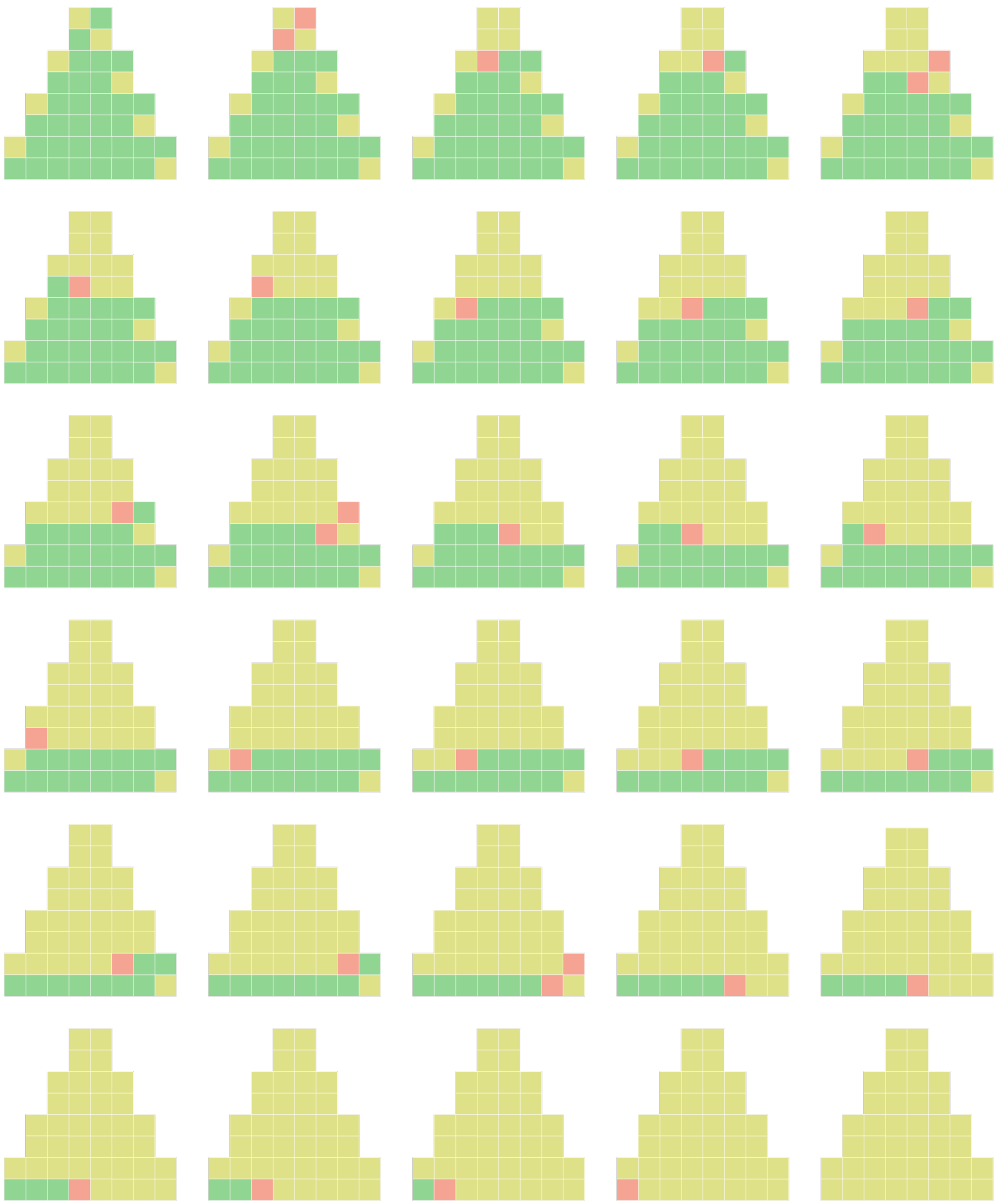


Abbildung 20: Von links nach rechts und von oben nach unten: Die Startkonfiguration aus Abb. 19 (oben links) führt in 28 Schritten dazu, dass schließlich der gesamte Baum leuchtet (unten rechts).

17 Rüpelhafte Rentiere

Autor*in: Jesse van Rhijn (Universiteit Twente)
Projekt: 4TU.AMI

Artwork: Julia Nurit Schönnagel

Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat einen Stall für seine Rentiere, der in neun Gehege unterteilt ist, so wie in Abbildung 21 dargestellt.

Die Elfen des Weihnachtsmanns haben Rentiere mit roten und braunen Nasen bestellt, um die neun Gehege zu füllen. Leider ist etwas schiefgegangen: Statt neun Rentieren haben sie versehentlich zwölf bestellt. Zu allem Überfluss zeigen die Tiere ein starkes Territorialverhalten: Teilen sich die Gehege von zwei braunen Rentieren eine Wand, dann kommt es zum Revierkampf. Dasselbe gilt für die Gehege von zwei roten Rentieren. Glücklicherweise kämpfen zwei Rentiere nicht miteinander, wenn ihre Nasen verschiedene Farben haben. Daher können sich die Gehege eines rotnasigen Rentiers und eines braunnasigen Rentiers eine Wand teilen. Außerdem kommt es nie zu Kämpfen zwischen Rentieren, deren Gehege sich nur in einer Ecke oder gar nicht berühren.

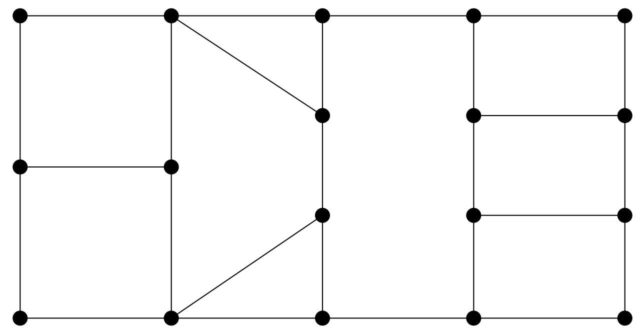


Abbildung 21: Der Rentierstall des Weihnachtsmanns.

Die Elfen können die Gesamtzahl der bereits bestellten Rentiere nicht ändern, sie können aber noch die Anzahl der Rentiere mit roter und brauner Nase wählen, die sie erhalten. Um die zwölf Rentiere unterzubringen, müssen die Elfen nun genau drei neue Gehege innerhalb des bestehenden Stalls schaffen. Dafür wurden sie angewiesen, *genau drei neue gerade Wände* zu bauen. Jede neue Wand muss zwischen zwei Punkten eingezogen werden, an denen schon mindestens zwei Wände zusammentreffen. Diese 18 Punkte sind in Abbildung 21 markiert. Außerdem dürfen die neuen Mauern weder die alten noch andere neue Mauern kreuzen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es die drei neuen geraden Wände zu bauen, so dass jedes der zwölf Rentiere sein eigenes Gehege bekommt, ohne dass es zu Revierkämpfen zwischen den Tieren kommt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Null Möglichkeiten, d. h. es ist nicht möglich die Wände wie gefordert einzuziehen.
2. Eine Möglichkeit.
3. Vier Möglichkeiten.
4. Fünf Möglichkeiten.
5. Sechs Möglichkeiten.
6. Acht Möglichkeiten.
7. Neun Möglichkeiten.
8. Zwölf Möglichkeiten.
9. Vierzehn Möglichkeiten.
10. Sechzehn Möglichkeiten.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Um einen zulässigen neuen Stall zu entwerfen, ist es hilfreich, sich die Punkte anzusehen, an denen sich verschiedene Gehege im Inneren treffen. Dazu betrachten wir beispielhaft den mit B markierten Punkt in Abbildung 22 unten.

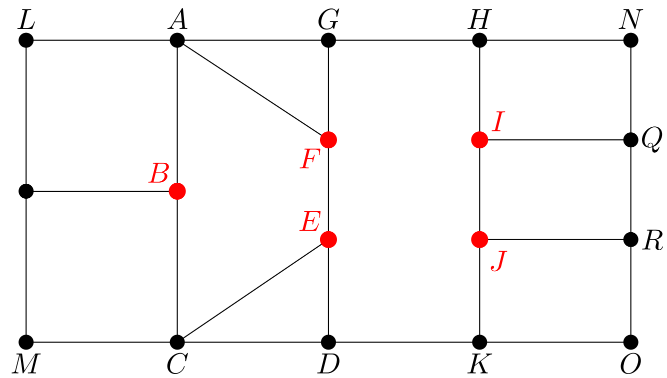


Abbildung 22: Der Originalstall des Weihnachtsmanns. Die Problempunkte B, E, F, I, J sind in rot markiert.

In B treffen drei Gehege aufeinander. Wenn wir versuchen, Rentiere in die leeren Gehege um B zu setzen, stoßen wir sofort auf ein Problem: Nehmen wir zum Beispiel an, wir würden ein rotnasiges Rentier in das große Gehege rechts von B setzen. Da dieses Gehege eine gemeinsame Wand mit den beiden Gehegen links von B hat, müssen wir Rentiere mit brauner Nase in diese beiden Gehege setzen, um zu verhindern, dass die Rentiere mit roter Nase kämpfen. Aber die beiden Gehege links von B haben eine gemeinsame Wand, was wiederum zu einem Konflikt zwischen den beiden braunen Rentieren führt.

Würden jedoch vier Gehege in diesem Punkt zusammentreffen, gäbe es kein Problem: Man weist im Uhrzeigersinn den Gehegen abwechselnd rot- und braunnasige Rentiere zu. Dieses Muster wiederholt sich; immer wenn eine gerade Anzahl von Gehegen in einem inneren Punkt zusammentrifft, d.h. in einem der Punkte B, E, F, I, J, können wir die Rentiere diesen Gehegen zuweisen, ohne einen Konflikt zu riskieren. Eine gültige Lösung ist eine Unterteilung genau dann wenn alle inneren Punkte von einer *geraden* Anzahl von Gehegen umgeben sind.

Mit Hilfe dieser Eigenschaft können wir leicht Wände ziehen, die den Stall konfliktfrei machen. Die nächste Herausforderung besteht darin sicherzustellen, dass wir alle verschiedenen Möglichkeiten zählen und keine doppelt zählen. Dazu gehen wir systematisch vor. Wir beobachten, dass es genau fünf Punkte (B, E, F, I, J) im Inneren gibt, an denen eine ungerade Anzahl von Gehegen zusammentrifft; wir nennen diese die *Problempunkte*. Wir müssen an jedem dieser Problempunkte mindestens eine Wand anbringen.

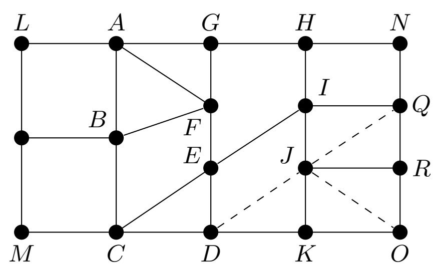
Da es fünf solcher Punkte gibt und wir nur drei Wände bauen dürfen, muss jeder Problempunkt genau eine zusätzliche Wand erhalten. Um dies zu sehen beobachten wir, dass wir nicht zwei Wände an einen Problempunkt anbringen können, da ihn dies wieder zu einem Problempunkt machen würde (ungerade + 2 = ungerade). Wenn wir aber drei Wände an einem Problempunkt befestigen, können die verbleibenden Endpunkte dieser Wände höchstens drei zusätzliche Punkte fixieren, also höchstens vier der fünf Problempunkte.

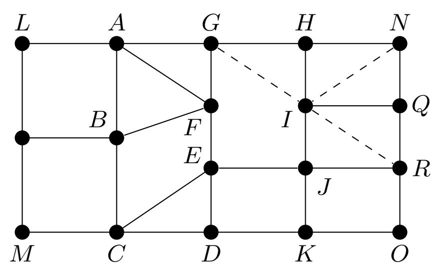
Betrachten wir den Problempunkt B. Wir können ihn auf vier verschiedene Weisen fixieren, nämlich indem wir genau eine der Linien BF, BE, BL und BM zeichnen. Wir betrachten nur die Fälle, in denen wir BF und BL zeichnen, da die Fälle BE und BM zu diesen symmetrisch sind und deshalb die gleiche Anzahl von Möglichkeiten ergeben.

Fall *BF*: Nach dem Zeichnen von BF sind die verbleibenden Problempunkte E, I und J. Wir können zwei weitere Linien zeichnen, sodass eine dieser Linien verwendet werden muss, um zwei Punkte unter $\{E, I, J\}$ zu verbinden. Dies kann auf zwei Arten geschehen: EI, EJ.

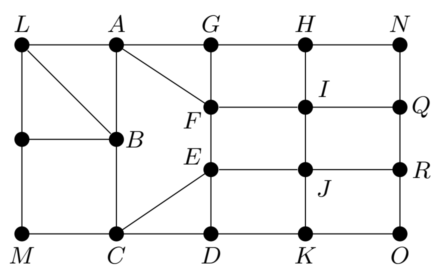
Betrachten wir als erstes den Fall, dass wir EI zeichnen. Dann ist J der einzige Problempunkt, der noch gefixed werden muss. Es gibt drei Möglichkeiten für eine Linie, die den Problempunkt J behebt: JD, JO und JQ.

Betrachten wir nun den Fall EJ. Dann bleiben wieder drei Möglichkeiten für die letzte Linie: IG, IN und IR.





Case *BL*: Nachdem wir BL gezeichnet haben, bleiben wieder zwei Linien übrig, die wir zeichnen müssen. Diesmal bleiben vier Problempunkte übrig, sodass wir die verbleibenden Linien verwenden müssen, um diese Punkte zu verbinden. Es gibt nur eine gültige Möglichkeit, diese Punkte zu verbinden, nämlich die Linien IF und EJ.



Diese beiden Fälle ergeben zusammen sieben Lösungen. Wie bereits erwähnt, ergeben die Fälle, in denen wir BE und BM ziehen, durch Symmetrie ebenfalls sieben Lösungen. Die Gesamtzahl der Lösungen beträgt also vierzehn.

18 Auf und ab

Autor*in: Christian Hercher (Europa-Universität Flensburg)

Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Wichtelin Collean spielt in ihrer Freizeit gern mit natürlichen Zahlen. (Anmerkung der Redaktion: Für Collean gehört die Null *nicht* zu den natürlichen Zahlen.) Dabei ist ihr aufgefallen, dass immer dann, wenn sie eine ungerade natürliche Zahl n betrachtet, deren Dreifaches wieder ungerade ist, d. h. $3n + 1$ ist durch zwei teilbar. Deshalb denkt sie sich folgende zwei Regeln aus, wie sie aus einer natürlichen Zahl n eine weitere errechnen kann:

1. Ist die betrachtete Zahl n gerade, so teilt sie sie durch zwei und erhält als nächste Zahl $\frac{n}{2}$.

   Da das Ergebnis kleiner ist als die Ausgangszahl, nennt Collean dies einen *Verkleinerungsschritt*.

2. Ist die betrachtete Zahl n aber ungerade, so multipliziert sie diese erst mit drei, addiert dann eins und teilt das Ergebnis durch zwei. (Dass dies immer funktioniert, haben wir oben gesehen.) Also erhält sie als nächste Zahl $\frac{3n+1}{2}$.

Hier ist das Ergebnis größer als die Ausgangszahl. Dementsprechend spricht Collean in diesem Fall von einem *Vergrößerungsschritt*.

Auf diese Weise kann Collean, beginnend mit einer beliebigen natürlichen Zahl, immer weitere erhalten. Beginnt sie etwa mit der Zahl 11, so erhält sie als nächste Zahl die 17, dann die 26, die 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2 und schließlich die 1. Dann passiert etwas Seltsames: Nach der 1 erhält sie nach ihren Regeln wieder die 2, dann wieder die 1, dann wieder 2, und so weiter und so fort.

Collean fragt sich, ob dies immer so ist: Gelangt man, egal, mit welcher Zahl man anfängt, irgendwann immer in diese Schleife von 1 zu 2? Jedenfalls deuten alle Beispiele, die sie ausprobiert, in diese Richtung. Ein Beweis ist das aber natürlich noch lange nicht ...

Aber als mathematisch interessierte Wichtelin gibt sie sich mit dem Aufstellen dieser Vermutung natürlich nicht zufrieden. Zwar ist deren Beweis wohl noch außerhalb ihrer Reichweite, aber man kann ja vielleicht einige kleinere Beobachtungen in diesem Kontext machen und diese dann beweisen oder widerlegen. So stellt sie folgende Thesen über ihre beiden Regeln auf:

Behauptung A: Lässt sich eine natürliche Zahl n als $a \cdot 2^k - 1$ (mit natürlichen Zahlen a und k) schreiben, so folgen auf die Zahl n mindestens k *Vergrößerungsschritte* hintereinander.

Behauptung B: Es gibt eine natürliche Zahl n, auf die nur noch *Vergrößerungsschritte* folgen.

Behauptung C: Folgen auf eine ungerade natürliche Zahl n zunächst mindestens ein *Vergrößerungsschritt* und danach direkt hintereinander zwei *Verkleinerungsschritte*, so kann man die so konstruierte Zahl m auch erhalten, indem man mit der Startzahl $\frac{n-1}{2}$ angefängt.

Behauptung D: Wenn es Startzahlen gibt, für welche man nie bei 1 ankommt, dann lässt die kleinste unter ihnen bei Division durch 6 den Rest 1 oder den Rest 3.

Welche der Behauptungen A bis D sind richtig?

Antwortmöglichkeiten:

1. Alle vier Behauptungen sind richtig.
2. A, B und C sind richtig, D ist falsch.
3. A, B und D sind richtig, C ist falsch.
4. A, C und D sind richtig, B ist falsch.
5. B, C und D sind richtig, A ist falsch.
6. A und B sind richtig, C und D sind falsch.
7. B und C sind richtig, A und D sind falsch.

8. A ist richtig, B, C und D sind falsch.
9. D ist richtig, A, B und C sind falsch.
10. Alle vier Behauptungen sind falsch.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Die Behauptungen A, C und D sind alle wahr, während die Behauptung B falsch ist. Um dies einzusehen, widmen wir uns den einzelnen Aussagen und zeigen bzw. widerlegen sie:

Behauptung A ist richtig: Lässt sich eine Zahl als $a \cdot 2^k - 1$ schreiben und ist $k > 0$, so ist die Zahl ungerade und es folgt ein Vergrößerungsschritt. Als Ergebnis erhält man

$$\frac{3 \cdot (a \cdot 2^k - 1) + 1}{2} = \frac{3a \cdot 2^k - 2}{2} = 3a \cdot 2^{k-1} - 1,$$

also eine Zahl von ähnlicher Gestalt; allerdings ist der Exponent der Zweierpotenz um eins kleiner geworden. Falls dieser Exponent größer als Null ist, folgt also wieder ein Vergrößerungsschritt, der den Exponenten der Zweierpotenz wieder um 1 reduziert. Wir können nun so lang Vergrößerungsschritte durchführen, bis der Exponent bis auf Null reduziert ist. Somit folgen auf die Startzahl $a \cdot 2^k - 1$ mindestens k Vergrößerungsschritte und Aussage A ist wahr.

Behauptung B ist falsch: Zunächst stellen wir fest, dass auch die Umkehrung von Aussage A gilt: Wenn auf eine Zahl n direkt k Vergrößerungsschritte folgen, so hat n die Form $a \cdot 2^k - 1$. Somit ist intuitiv klar, dass auf eine Zahl keine unendlich vielen Vergrößerungsschritte folgen können, da wir keine Zahl als $a \cdot 2^\infty - 1$ schreiben können. Anders gesagt, nach ausreichend vielen Vergrößerungsschritten erhalten wir immer eine gerade Zahl. Wir werden die Aussage trotzdem formal durch *Induktion* über k beweisen:

Induktionsanfang: Damit auf eine Zahl *ein* Vergrößerungsschritt folgen kann, muss sie ungerade sein und hat somit die Form $a_1 \cdot 2^1 - 1$ mit $a_1 \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für k, d. h. eine Zahl n, auf die k Vergrößerungsschritte folgen, hat die Form $n = a_k \cdot 2^k - 1$.

Induktionsbehauptung: Die Aussage gelte auch für $k + 1$, d. h. eine Zahl m, auf die $k + 1$ Vergrößerungsschritte folgen, hat die Form $m = a_{k+1} \cdot 2^{k+1} - 1$.

Induktionsbeweis: Sei m eine Zahl, auf die die $k + 1$ Vergrößerungsschritte folgen. Insbesondere folgen auf m demnach k Vergrößerungsschritte und m hat nach Induktionsvoraussetzung die Form $m = a \cdot 2^k - 1$. Nach k Vergrößerungsschritten erhalten wir dann (siehe Beweis von Aussage A) die Zahl

$$\tilde{m} = 3^k \cdot a - 1.$$

Da auf m aber $k + 1$ Vergrößerungsschritte folgen, muss auf $\tilde{m}$ noch ein Vergrößerungsschritt folgen, sodass $\tilde{m}$ nach Induktionsanfang die Form $\tilde{m} = a_1 \cdot 2 - 1$ hat. Es gilt also $3^k \cdot a = a_1 \cdot 2$ und somit muss a durch 2 teilbar sein (da $3^k = 3 \cdots 3$ keinesfalls durch 2 teilbar ist). Wir können a also als $a = \tilde{a} \cdot 2$ und somit m als

$$m = a \cdot 2^k - 1 = \tilde{a} \cdot 2 \cdot 2^k - 1 = \tilde{a} \cdot 2^{k+1} - 1$$

schreiben, wodurch die Behauptung folgt.

Wir wollen mit dieser Aussage zeigen, dass es keine Zahl geben, auf die nur noch Vergrößerungsschritte folgen und führen dafür einen Widerspruchsbeweis: Wie nehmen dazu an, dass auf die Zahl n nur noch Vergrößerungsschritte folgen. Insbesondere folgen auf n einige, sagen wir k Vergrößerungsschritte. Die Zahl n lässt sich demnach als $n = a \cdot 2^k - 1$ schreiben und nach k Vergrößerungsschritten erhält man die Zahl $\tilde{n} = 3^k \cdot a - 1$. Ist a ungerade, dann ist $\tilde{n}$ gerade, sodass auf $\tilde{n}$ ein Verkleinerungsschritt folgt – ein Widerspruch zur Annahme, dass auf n nur Vergrößerungsschritte folgen. Sei a also gerade, d. h. von der Form $a = b \cdot 2^l$. Dabei wählen wir l möglichst groß, d. h. so, dass b nicht durch 2 teilbar ist. Somit hat $\tilde{n}$ die Form $\tilde{n} = 3^k \cdot b \cdot 2^l - 1$. Nach Aussage A folgen auf $\tilde{n}$ demnach l Vergrößerungsschritte und wir erhalten die Zahl

$$\tilde{\tilde{n}} = 3^k \cdot 3^l \cdot b - 1.$$

Die Zahl $\tilde{\tilde{n}}$ ist ungerade, sodass ein Verkleinerungsschritt folgt. Auf n folgen somit $k + l$ Vergrößerungsschritte und dann ein Verkleinerungsschritt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und wir haben bewiesen, dass Behauptung B falsch ist.

Behauptung C ist wahr: Auch hier kann man sich die allgemeine Form, die Startzahlen n haben müssen, damit auf sie erst genau k Vergrößerungs- und direkt danach zwei Verkleinerungsschritte folgen können, konstruieren: Für die k Vergrößerungsschritte wissen wir schon, dass n die Form $n = a \cdot 2^k - 1$ haben muss und dass daraus nach diesen k Vergrößerungsschritten die Zahl $\tilde{n} = a \cdot 3^k - 1$ entsteht. Damit nun auf $\tilde{n}$ direkt zwei Verkleinerungsschritte folgen können, muss $\tilde{n}$ durch 4 teilbar sein bzw. $a \cdot 3^k$ den Rest 1 bei Division durch 4 lassen.
Ist $k = 2l > 0$ gerade, dann können wir 3^k als

$$\begin{aligned}
3^k &= 3^{2l} = (3^2)^l = 9^l = (8+1)^l \\
&= 8^l + a_1 \cdot 8^{l-1} + a_2 \cdot 8^{l-2} + \cdots + a_{l-1} \cdot 8 + 1 \\
&= 8 \cdot (a_1 \cdot 8^{l-2} + a_2 \cdot 8^{l-3} + \cdots + a_{l-1}) + 1 \\
&=: 4c + 1
\end{aligned}$$

schreiben. Daher lässt $3^k = 4c + 1$ bei Division durch 4 den Rest 1 und a muss die Form $a = 4b + 1$ besitzen, sodass

$$a \cdot 3^k = (4b+1) \cdot (4c+1) = 4^2bc + 4b + 4c + 1 = 4(4bc + b + c) + 1$$

ebenfalls den Rest 1 bei Division durch 4 lässt. Demnach hat n in diesem Fall die Gestalt $n = (4b+1) \cdot 2^k - 1$ und nach den k Vergrößerungs- und zwei Vergkleinerungsschritten gelangt man zu

$$\tilde{n} = \frac{(4b+1) \cdot 3^k - 1}{4}.$$

Betrachten wir nun

$$\frac{n-1}{2} = \frac{(4b+1) \cdot 2^k - 1 - 1}{2} = \frac{(4b+1) \cdot 2^k - 2}{2} = (4b+1) \cdot 2^{k-1} - 1,$$

stellen wir fest, dass auf diese Zahl erst einmal $k - 1$ Vergrößerungsschritte folgen, wodurch man die Zahl $(4b+1) \cdot 3^{k-1} - 1$ erhält. Diese Zahl ist offenbar gerade, aber nicht durch 4 teilbar, da 3^{k-1} den Rest 3 bei Division durch 4 lässt, denn 3^{k-1} ist ähnlich wie 3^k von der Gestalt

$$3^{k-1} = 3^{2l-1} = 3 \cdot 3^{2(l-1)} = 3 \cdot 9^{l-1} = 3 \cdot (8+1)^{l-1} =: 4\tilde{c} + 3.$$

Also folgt auf diese Zahl erst ein Verkleinerungsschritt und dann wieder ein Vergrößerungsschritt, mit dem wir

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot \frac{(4b+1)\cdot 3^{k-1}-1}{2}+1}{2} &= \frac{(4b+1)\cdot 3^k - 3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{(4b+1)\cdot 3^k - 3 + 2}{4} \\ &= \frac{(4b+1)\cdot 3^k - 1}{4} = \tilde{n}\end{aligned}$$

ebenfalls zu $\tilde{n}$ gelangen.

Ähnliches folgt auch, wenn $k = 2l+1 > 0$ ungerade ist: In diesem Fall lässt 3^k den Rest 3 bei Division durch 4, da sich 3^k wieder als $3^k = 4c+3$ schreiben lässt. Die Zahl a muss die Form $a = 4b+3$ besitzen, damit

$$a \cdot 3^k = (4b+3)\cdot(4c+3) = 4^2bc + 4\cdot 3\cdot(b+c) + 9 = 4(4bc + 3(b+c) + 2) + 1$$

wieder den Rest 1 bei Division durch 4 lässt. Diesmal hat n die Gestalt $n = (4b+3)\cdot 2^k - 1$, sodass wir nach k Vergrößerungsschritten

$$\tilde{n} = \frac{(4b+3)\cdot 3^k - 1}{4}.$$

erhalten. Starten wir dagegen mit

$$\frac{n-1}{2} = \frac{(4b+3)\cdot 2^k - 1 - 1}{2} = \frac{(4b+3)\cdot 2^k - 2}{2} = (4b+3)\cdot 2^{k-1} - 1,$$

können wir $k-1$ Vergrößerungsschritte ausführen, mit denen wir die Zahl $(4b+3)\cdot 3^{k-1} - 1$ erhalten. Diese Zahl ist wieder gerade, aber nicht durch 4 teilbar (3^{k-1} lässt den Rest 1 bei Division durch 4), sodass wir nach einem Verkleinerungsschritt wieder einen Vergrößerungsschritt machen müssen. Dabei erhalten wir wieder

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot \frac{(4b+3)\cdot 3^{k-1}-1}{2}+1}{2} &= \frac{(4b+3)\cdot 3^k - 3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{(4b+3)\cdot 3^k - 3 + 2}{4} \\ &= \frac{(4b+3)\cdot 3^k - 1}{4} = \tilde{n}.\end{aligned}$$

Wir haben Behauptung C für alle geraden und ungeraden $k > 0$ bewiesen. Die Aussage ist somit wahr.

Behauptung D ist wahr: Nehmen wir an, dass es Startzahlen gibt, bei denen man nie bei 1 ankommt. Insbesondere gibt es eine kleinste solche Zahl, die wir n nennen. Dann kann n nicht gerade sein, da sonst die folgende Zahl $n/2 < n$ ebenfalls eine Zahl wäre, mit der man nie bei 1 enden würde. Dies ergäbe einen Widerspruch zur Minimalität von n. Die Zahl n ist also ungerade. Weiterhin lässt n bei Division durch 6 nicht den Rest 5, da sie sich sonst als $n = 6m+5$ schreiben ließe. Denn in diesem Fall folgt auf die Startzahl $\tilde{n} = 4m+3 < 6m+5 = n$ nach einem Vergrößerungsschritt

$$\frac{3 \cdot (4m+3)+1}{2} = \frac{12m+9+1}{2} = 6m+5 = n,$$

sodass man auch mit $\tilde{n} < n$ nie 1 erreichen könnte – wiederum ein Widerspruch zur Minimalität von n. Damit kann n bei Division durch 6 also nur den Rest 1 oder 3 lassen. Die Aussage D ist demnach ebenfalls wahr.

Forschungsbezug

Diese Aussagen, insbesondere Aussage C, sind nützlich, um weitere Eigenschaften rund um die *Collatz-Vermutung* zu beweisen: Eventuell existierende andere Schleifen abseits von 1, 2, 1, ... schon Milliarden von Folgengliedern besitzen müssen (s. [1]). Außerdem muss es in diesen Schleifen mehr als 90 aufsteigende und wieder abfallende Passagen geben muss (s. [2]).

[1] C. Hercher. *Über die Länge nicht-trivialer Collatz-Zyklen*, Die Wurzel **6, 7** (2018).

[2] C. Hercher. *There are no Collatz-m-Cycles with* $m \leq 90$, erscheint in: Journal of Integer Sequences. Preprint: https://arxiv.org/pdf/2201.00406.pdf (2022).

19 Der Weihnachtsmann braucht Optimalen Transport

Autor*in: Fabian Altekrüger (HU Berlin)

Projekt: *Convolutional Proximal Neural Networks for Solving Inverse Problems* (EF 3-7)

Illustration: Frauke Jansen

Challenge

Jedes Jahr hat der Weihnachtsmann das gleiche Problem, wenn er und seine Helfer den Transport der Geschenke zu allen Kindern der Welt organisieren... Die Elfen sollen die Geschenke von den Weihnachtsfabriken (F) zu geheimen Lagerhäusern (L) auf allen Kontinenten bringen.

F1: Dieses Jahr wurde ein geheimer Außenposten (F1) im Norden Kanadas genutzt, um 500 Ladungen Geschenke zu produzieren,

F2: da die Hauptfabrik (F2) am Nordpol Produktionsprobleme hatte, so dass dort nur 400 Ladungen Geschenke produziert wurden.

F3: Eine dritte Fabrik (F3) am Südpol produzierte 900 Ladungen Geschenke.

Obwohl die geheimen Lager schon recht gut gefüllt sind, fehlen noch einige Geschenke:

L1: Im Lagerhaus in Nordamerika (L1) fehlen 100 Ladungen.

L2: In Südamerika (L2) fehlen 450 Ladungen.

L3: In Afrika (L3) fehlen 300 Ladungen.

L4: In Australien (L4) fehlen 400 Ladungen.

L5: In Europa (L5) fehlen 200 Ladungen und

L6: in Asien (L6) fehlen noch 350 Ladungen.

Da das Jahr schon anstrengend genug war und der Weihnachtsmann nicht möchte, dass seine Elfen Überstunden machen, suchen sie nach einem optimalen Geschenketransportplan von den Fabriken zu den Lagerhäusern, der die Flugstunden minimiert. Zu diesem Zweck erstellt der Weihnachtsmann eine Tabelle mit den Reisezeiten (in Stunden) von jeder Fabrik zu jedem der Lagerhäuser (siehe Tabelle 1), wobei er berücksichtigt, dass die Fabrik in Kanada (F1) nicht die richtigen Geschenke für die Lagerhäuser in Afrika (L3) und Australien (L4) herstellt:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	2	4	-	-	5	8
F2	7	8	8	11	3	5
F3	8	6	5	4	9	9

Tabelle 1: Die jeweilige Flugdauer von den Fabriken (F) zu den Lagerhäusern (L). Zwischen (F1) und (L3) bzw. (L4) finden keine Flüge statt.

Pro Flug kann nur 1 Ladung von einer Fabrik zu einem Lagerhaus transportiert werden. Die leeren Flugzeuge werden von einem Subunternehmer namens WunderTransport zu einem Pauschalsatz zurück zu den Fabriken geflogen, so dass immer genügend Flugzeuge in jeder Fabrik vorhanden sind und die Dauer dieser Rückflüge nicht in die Flugdauer einfließt, die der Weihnachtsmann minimieren möchte.

Diese Aufgabe scheint jedoch etwas zu kompliziert für den armen alten Weihnachtsmann zu sein... Könnt ihr ihm helfen? Wie lang ist die minimale Gesamtflugdauer, die benötigt wird, um alle Geschenke von den Fabriken zu den geheimen Lagerhäusern zu transportieren?

Antwortmöglichkeiten:

1. 8080 h
2. 8090 h
3. 8100 h
4. 8110 h
5. 8120 h
6. 8130 h
7. 8140 h
8. 8150 h
9. 8160 h
10. 8170 h

Projektbezug

Optimaler Transport (OT) ist eine Theorie, die aus der analytischen Beschreibung des Transportproblems hervorgegangen ist, bei dem Objekte (hier Geschenke) von verschiedenen Angebots- (hier die Fabriken) zu verschiedenen Nachfrageorten (hier Lagerhallen) optimal (d. h. kostenminimierend) verteilt werden sollen. In unserem Beispiel sind die Kosten durch die Flugstunden gegeben.

Im Rahmen des Projekts EF 3-7 *Convolutional Proximal Neural Networks for Solving Inverse Problems* habe ich mich unter anderem mit der *2-ten Wasserstein-Distanz* beschäftigt, die einen Spezialfall des OT-Problems darstellt. Wir benutzen die 2-te Wasserstein-Distanz als Regularisierer in inversen Problemen, um empirische Bildverteilungen miteinander zu vergleichen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Elementarer Lösungsansatz

Das vorliegende Aufgabe ist ein Problem des *Optimalen Transports*; es ist besonders einfach zu lösen, da man bei der Verteilung von Waren von Fabriken zu den *nächsten* Lagerhäusern seiner Intuition folgen kann:

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		100	450	300	400	200	350
F1	500	2	4	-	-	5	8
F2	400	7	8	8	11	3	5
F3	900	8	6	5	4	9	9

1. Wir beginnen mit der Betrachtung des Lagers (L1). Da die nächstgelegene Fabrik (F1) ist, ist es am sinnvollsten, so viele Waren wie möglich von (F1) nach (L1) zu transportieren, d. h. alle 100 Ladungen, die dort benötigt werden. Dies dauert **200 Stunden** und es verbleiben 400 Ladungen in (F1).

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		0	450	300	400	200	350
F1	400	2	4	-	-	5	8
F2	400	7	8	8	11	3	5
F3	900	8	6	5	4	9	9

2. Betrachten wir als nächstes das Lager (L2). Die nächstgelegene Fabrik ist ebenfalls (F1). Daher werden die restlichen 400 Ladungen von (F1) nach (L2) transportiert, was 1600 Stunden dauert. Die zweitnächste Fabrik ist (F3), die (L2) mit den restlichen 50 Ladungen beliefert. Dies dauert 300 Stunden. Insgesamt benötigen wir also 1900 Stunden, um (L2) vollständig zu versorgen.

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		0	0	300	400	0	150
F1	0	2	4	-	-	5	8
F2	400	7	8	8	11	3	5
F3	850	8	6	5	4	9	9

3. Wir fahren mit dem Lager (L3) fort. Die nächstgelegene Fabrik ist (F3), die alle benötigten 300 Ladungen liefert. Dies dauert 1500 Stunden.

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		0	0	0	400	0	150
F1	0	2	4	-	-	5	8
F2	400	7	8	8	11	3	5
F3	550	8	6	5	4	9	9

4. Betrachten wir nun das Lager (L4). Die nächstgelegene Fabrik ist wiederum (F3), die alle benötigten 400 Ladungen liefert. Dies dauert 1600 Stunden.

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		0	0	0	0	0	150
F1	0	2	4	-	-	5	8
F2	400	7	8	8	11	3	5
F3	150	8	6	5	4	9	9

5. Fahren wir mit dem Lager (L5) fort. Die nächstgelegene Fabrik ist (F2), die alle benötigten 200 Ladungen liefern kann. Dies dauert **600 Stunden**.

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		0	0	0	0	0	150
F1	0	2	4	-	-	5	8
F2	200	7	8	8	11	3	5
F3	150	8	6	5	4	9	9

6. Zuletzt konzentrieren Sie sich auf das Lagerhaus (L6). Die nächstgelegene Fabrik ist (F2), die 200 Ladungen liefern kann. Dies dauert 1000 Stunden. Dann brauchen wir weitere 150 Ladungen von (F3), was 1350 Stunden dauert. Insgesamt ergibt sich eine Flugdauer von 1950 Stunden.

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		0	0	0	0	0	0
F1	0	2	4	-	-	5	8
F2	0	7	8	8	11	3	5
F3	0	8	6	5	4	9	9

Summieren wir die Flugdauern aus 1 bis 6, erhalten wir eine Gesamtflugzeit

$$200\,\mathrm{h} + 1900\,\mathrm{h} + 1500\,\mathrm{h} + 1600\,\mathrm{h} + 600\,\mathrm{h} + 2350\,\mathrm{h} = 8150\,\mathrm{h}.$$

Aber ist die Verteilung tatsächlich optimal oder gibt es eine andere Verteilung, die weniger als 8150 h benötigt?

Da die Lager (L1), (L3), (L4) und (L5) von den nächstgelegenen Fabriken beliefert werden, müssen wir für die Optimalitätsprüfung nur (L2) und (L6) berücksichtigen. Wir kehren zu unserer Ausgangskonfiguration zurück

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		100	450	300	400	200	350
F1	500	2	4	-	-	5	8
F2	400	7	8	8	11	3	5
F3	900	8	6	5	4	9	9

und beliefern (L6) von seiner nächsten Fabrik (F2). Dies dauert **1750 Stunden**.

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		100	450	300	400	200	0
F1	500	2	4	-	-	5	8
F2	50	7	8	8	11	3	5
F3	900	8	6	5	4	9	9

Als nächstes stellen wir fest, dass wir keine Zeit sparen, wenn wir das Lager (L1) von anderen Fabriken als (F1) beliefern, da es von (F2) und (F3) nach (L1) viel länger dauert als von (F1) nach (L2) oder (L5). Daher können wir (L2) nicht nur von der nächstgelegenen Fabrik (F1) aus beliefern. Wir transportieren 100 Ladungen von (F1) nach (L1), was **200 Stunden** dauert.

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		0	450	300	400	200	0
F1	400	2	4	-	-	5	8
F2	50	7	8	8	11	3	5
F3	900	8	6	5	4	9	9

Wie im obigen Fall können auch (L3) und (L4) von der nächstgelegenen Fabrik (F3) beliefert werden, dies dauert **1500 Stunden** plus **1600 Stunden** (siehe 3. und 4.).

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
		0	450	0	0	200	0
F1	400	2	4	-	-	5	8
F2	50	7	8	8	11	3	5
F3	200	8	6	5	4	9	9

Für die Versorgung von (L2) und (L5) betrachten wir eine optimale Verteilung für die Fabriken: Wir transportieren

- 50 Ladungen von (F2) nach (L5), was 150 Stunden dauert,
- 150 Ladungen von (F1) nach (L5), was 750 Stunden dauert,
- 250 Ladungen von (F1) nach (L2), was 1000 Stunden dauert, und
- 200 Ladungen von (F3) nach (L2), was 1200 Stunden in Anspruch nimmt.

Wir brauchen also **2000 Stunden**, um (L2) und (L5) zu füllen. Damit erhalten wir auch auch für diesen Transportplan eine Gesamtflugdauer von

$$1750\,\mathrm{h} + 200\,\mathrm{h} + 1500\,\mathrm{h} + 1600\,\mathrm{h} + 3100\,\mathrm{h} = 8150\,\mathrm{h}.$$

Nicht elementarer Lösungsansatz mit Transportmatrizen

Wir wollen eine *Transportmatrix* $P \in \mathbb{R}^{3,6}$ finden, die die Gesamtflugdauer minimiert, wobei der (i, j)-te Eintrag $P_{i,j}$ die Anzahl der Ladungen beschreibt, die von der Fabrik i zum Lager j transportiert werden. Die Gesamtflugdauer ist dabei durch

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6} C_{i,j}P_{i,j},$$

gegeben. Hier ist $C \in \mathbb{R}^{3,6}$ gegeben durch

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \infty & \infty & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 11 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 5 & 4 & 9 & 9 \end{bmatrix};$$

d. h. der (i, j)-te Eintrag $C_{i,j}$ ist gerade die Flugdauer von Fabrik i zum Lager j.

Oben haben wir zuerst die Transportmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 100 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 200 \\ 0 & 50 & 300 & 400 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$

konstruiert, die einer Gesamtflugdauer von

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6} C_{i,j}P_{i,j} &= 2\,\mathrm{h}\cdot 100 + 4\,\mathrm{h}\cdot 400 + 3\,\mathrm{h}\cdot 200 + 5\,\mathrm{h}\cdot 200 + 6\,\mathrm{h}\cdot 50 + 5\,\mathrm{h}\cdot 300 + 4\,\mathrm{h}\cdot 400 + 9\,\mathrm{h}\cdot 150 \\ &= 8150\,\mathrm{h}. \end{aligned}$$

entspricht. Im zweiten Versuch haben wir die Transportmatrix
In our second attempt, we constructed

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 100 & 250 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 350 \\ 0 & 200 & 300 & 400 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hergeleitet und ebenfalls die Gesamtflugdauer von

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6} C_{i,j}\hat{P}_{i,j} &= 2\,\mathrm{h}\cdot 100 + 4\,\mathrm{h}\cdot 250 + 5\,\mathrm{h}\cdot 150 + 3\,\mathrm{h}\cdot 50 + 5\,\mathrm{h}\cdot 350 + 6\,\mathrm{h}\cdot 200 + 5\,\mathrm{h}\cdot 300 + 4\,\mathrm{h}\cdot 400 \\ &= 8150\,\mathrm{h}. \end{aligned}$$

erhalten.

20 Das EisPhone 3,14

Autor*in: Ariane Beier (TU Berlin)
Projekt: MATH+ Schulaktivitäten

Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Der Weihnachtsmann ärgert sich schon einige Jahre darüber, dass sich viele Kinder und Erwachsene jedes Jahr wieder ein neues Handy zu Weihnachten wünschen: „Das ist doch eine solche Verschwendung! Überhaupt nicht nachhaltig!“ Viele Geräte müssen aber tatsächlich einfach deswegen ausgetauscht werden, weil sie beim alltäglichen Gebrauch herunterfallen und kaputtgehen. Der Weihnachtsmann hat daher seine Forschungsabteilung beauftragt, ein neues unzerstörbares Display zu entwickeln. Die Forschungsabteilung am Nordpol ist eine der renommiertesten der Welt und somit ist es nicht verwunderlich, dass sie dem Weihnachtsmann schon nach kurzer Zeit ein Handy mit einem beinahe unkaputtbaren Display aus Eiskristallglas, im Fachjargon *Penguin Glass* genannt, vorstellen kann: Das *EisPhone 3,14* ist nicht nur hübsch anzuschauen, sondern soll auch Stürze aus höchster Höhe unbeschadet überleben.

Die Forschungsabteilung möchte das Gerät dem Weihnachtsmann nun möglichst spektakulär präsentieren und beauftragt zwei findige Elfen damit, herauszufinden, welches die höchste Etage des 141-stöckigen Polarsternturms ist, aus der ein EisPhone fallen kann, ohne dass es kaputtgeht. Zum Experimentieren stellt die Forschungsabteilung ihnen zwei nagelneue EisPhones zur Verfügung. Natürlich kann ein und dasselbe EisPhone mehrmals fallen gelassen werden, solange bis es zerbricht. Da die beiden Elfen zwar brillant, aber nicht sonderlich fit sind, wollen sie das Problem mit so wenig Würfen wie möglich lösen.

Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Würfen, die im schlimmsten Fall benötigt wird, um das höchste Stockwerk des Polarsternturms zu finden, aus dem man ein EisPhone unbeschadet fallen lassen kann?

Antwortmöglichkeiten:

1. 11
2. 12
3. 13
4. 14
5. 15
6. 16
7. 17
8. 18
9. 19
10. 20

Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Wir lösen dieses Problem „rückwärts“: Anstatt direkt die minimale Anzahl von Würfen zu berechnen, die für ein Gebäude mit 141 Stockwerken benötigt wird, bestimmen wir die maximale Anzahl von Stockwerken $F(n)$, für die das Problem mit n Würfen gelöst werden kann.

Wenn der erste Wurf vom Stockwerk n aus erfolgt und das EisPhone zerbricht, müssen die Elfen nacheinander die ersten $n-1$ Stockwerke mit dem zweiten EisPhone testen. Wenn das EisPhone beim ersten Wurf nicht zerbricht, muss der zweite Wurf vom Stockwerk $n+(n-1)$ aus erfolgen. Auf diese Weise sind die Elfen auf die Möglichkeit vorbereitet, dass, falls das EisPhone zerbricht, jedes der $n-2$ Stockwerke vom Stockwerk $n+1$ bis zum Stockwerk $2n-2$ ebenfalls nacheinander getestet werden kann. Wiederholt man dieses Argument für die verbleibenden Würfe, erhält man die folgende Formel $F(n)$:

$$F(n) = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nun müssen wir noch die kleinste Anzahl von Würfen n' berechnen, sodass

$$F(n') = \frac{n'(n'+1)}{2} \geq 141.$$

Diese Zahl ist $n' = 17$, denn $F(n') = F(17) = \frac{17 \cdot 18}{2} = 153$ und $F(16) = \frac{16 \cdot 17}{2} = 136$.

MATH+ KALENDER

21 Streikplanung der Elfen

Autor*in: Lara Glessen (TU Berlin)
Projekt: MATH+ Schulaktivitäten

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Aufgabe

Es ist Dezember und in der Geschenkefabrik des Weihnachtsmannes gibt es viel zu viel zu tun ... Die Arbeitsbedingungen der zehn Elfen, die für ihn arbeiten, sind noch furchtbarer als während des übrigen Jahres. So setzen sie sich zusammen und entschließen sich kurzerhand in den Streik zu treten. Während eine*r der Elfen, Alexis, sich bereit erklärt den Streikplan bis morgen früh auszutüfteln, platzt der Weihnachtsmann herein, zählt eins und eins zusammen und weiß sofort, was die Elfen vorhaben. Da er einen Streik so kurz vor Weihnachten um jeden Preis verhindern möchte, verkündet der Weihnachtsmann, dass ab morgen alle Elfen einzeln in ihren Büros arbeiten müssen und sich nicht mehr miteinander unterhalten dürfen. Daraufhin verlässt er – zufrieden mit sich selbst und in dem Glauben, dass er den geplanten Streik verhindert hat – die Geschenkefabrik.

Doch die Elfen sitzen noch eine Weile zusammen und überlegen hin und her, wie sie den noch zu entwickelnden Streikplan morgen trotzdem untereinander austauschen können. Da sagt Alexis: „Ich hab einen Plan! Wir werden ja alle immer und immer wieder in das Kopierzimmer geschickt. Der Weihnachtsmann wird zwar sicher gehen, dass sich dort niemals mehrere von uns aufhalten, und auch sorgfältig schauen, dass wir dort keine Nachrichten füreinander hinterlassen, aber es gibt in der Wand ein geheimes abschließbares Fach, für das wir doch alle einen Schlüssel besitzen! In dieses werde ich den Streikplan morgen früh vor 6 Uhr herein legen und es anschließend abschließen. Jedes Mal, wenn ich das Schließfach unverschlossen vorfinde, schließe ich es wieder ab. Jetzt müssen wir uns nur noch eine Strategie überlegen, mit der ich sicherstellen kann, dass alle von euch den Plan gelesen haben. Sobald ich das weiß, werde ich nämlich unmittelbar zum sofortigen Streik über die Lautsprecher aufrufen."

Wie sollte Alexis *die übrigen neun Elfen* anweisen, das Fach im Kopierzimmer auf- bzw. abzuschließen, damit Alexis irgendwann mit absoluter Sicherheit weiß, dass alle neun Elfen den Streikplan gesehen haben, obwohl sie die Reihenfolge, in der sie in das Kopierzimmer geschickt werden, *nicht* beeinflussen können?

Antwortmöglichkeiten:

1. Jedes Mal, wenn sie in das Kopierzimmer geschickt werden, schließen sie das Fach auf, falls es abgeschlossen ist. Ansonsten tun sie nichts.
2. Jedes Mal, wenn sie in das Kopierzimmer geschickt werden, schließen sie das Fach ab, falls es aufgeschlossen ist. Ansonsten tun sie nichts.
3. Jedes Mal, wenn sie in das Kopierzimmer geschickt werden, schließen sie das Fach auf, falls es abgeschlossen ist, und ab, falls es aufgeschlossen ist.
4. Wenn sie das erste Mal in das Kopierzimmer geschickt werden, schließen sie das Fach auf und anschließend wieder ab. Ansonsten tun sie nichts.
5. Bei jedem ungeraden Mal, wenn sie in das Kopierzimmer geschickt werden, schließen sie das Fach auf, falls es abgeschlossen ist. Ansonsten tun sie nichts.
6. Bei jedem geraden Mal, wenn sie in das Kopierzimmer geschickt werden, schließen sie das Fach auf, falls es abgeschlossen ist. Ansonsten tun sie nichts.
7. Bei jedem ungeraden Mal, das sie in das Kopierzimmer geschickt werden, schließen sie das Fach ab, falls es aufgeschlossen ist. Ansonsten tun sie nichts.
8. Das erste Mal, wenn sie das Fach abgeschlossen vorfinden, schließen sie es auf. Ansonsten tun sie nichts.
9. Das erste Mal, wenn sie das Fach aufgeschlossen vorfinden, schließen sie es ab. Ansonsten tun sie nichts.
10. Das erste Mal, wenn sie das Fach abgeschlossen vorfinden, schließen sie es auf. Und das erste Mal, wenn sie es aufgeschlossen vorfinden, schließen sie es ab. Ansonsten tun sie nichts.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Fundamental ist, dass nicht alle Elfen die gleiche Rolle haben, sondern dass Alexis eine besondere Rolle spielt. Zunächst zeigen wir, dass Alexis in Szenario 8 zu einem bestimmeten mit absoluter Sicherheit weiß, dass alle anderen neun Elfen im Kopierzimmer waren.

Spielen wir also **Szenario 8** durch: Wenn ein Elf (außer Alexis) das Fach das erste Mal abgeschlossen vorfindet, schließt der Elf es auf; bei allen anderen Gelegenheiten tut er nichts. Immer wenn Alexis das Fach aufgeschlossen vorfindet, schließt Alexis dieses ab. So weiß Alexis beim neunten Mal, dass alle anderen neun Elfen es einmal aufgeschlossen haben müssen, da niemand es mehr als einmal aufschließt. Zu diesem Zeitpunkt kann Alexis also zum Streik aufrufen.

Es bleibt zu zeigen, dass alle anderen Antwortmöglichkeiten keine zielführenden Strategien sind.

Szenarien 2, 7 und 9: Da es keine Elfen gibt, die das Fach jemals aufschließen, passiert gar nichts. Dementsprechend erhält Alexis zu keinem Zeitpunkt Informationen darüber, ob Elfen, oder gar wie viele, schon im Kopierzimmer waren.

Szenarien 3 und 4: In diesen zwei Szenarien wird das Fach zwar auf- und abgeschlossen – jedoch werden die beiden Aktionen immer zusammen bei einem Besuch im Kopierzimmer ausgeführt. Das heißt aber, dass Alexis gar nichts vom Auf- oder Abschließen mitbekommt und demnach, genau wie in den Szenarien 2, 7 oder 9, keine Informationen erhält.

Szenarien 1, 5 und 6: In diesen Szenarien erhält Alexis weiß zwar, dass jemand im Kopierzimmer war, wenn Alexis den Raum betritt und das Fach aufgeschlossen ist. Jedoch kann Alexis nicht wissen, ob immer die gleiche oder verschiedene Elfen das Fach aufschließen. Insbesondere kann Alexis nicht wissen, wann alle Elfen das Fach mindestens ein Mal aufgeschlossen haben.

Szenario 10: Ob Alexis in diesem Szenario genug Informationen erhält, hängt von der Reihenfolge ab, in der die Elfen in das Kopierzimmer geschickt werden. Wir nummerieren die Elfen einfachheitshalber von 1 bis 10 durch, wobei Alexis die Nummer 1 zugeordnet wird, und schauen uns zwei mögliche Reihenfolgen an:

1) 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, 1, 7, 1, 8, 1, 9, 1, 10, 1.
2) 2, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 4, 1, 5, 5, 1, 6, 6, 1, 7, 7, 1, 8, 8, 1, 9, 9, 1, 10, 10, 1.

Im ersten Fall weiß Alexis, nachdem Alexis das neunte Mal das Kopierzimmer betritt, dass alle neun Elfen den Plan im Fach gelesen haben. Im zweiten Fall erhält Alexis jedoch, wie in den Szenarien 3 und 4, überhaupt keine Informationen, weil das Fach immer zugeschlossen ist, wenn Alexis in den Raum kommt. Da die Elfen natürlich nicht wissen, in welcher Reihenfolge sie am nächsten Tag in das Kopierzimmer geschickt werden, müssen sie einen Plan ausarbeiten, der für alle Reihenfolgen funktioniert. Wir haben aber schon eine gefunden, bei der Alexis nicht wissen kann, wann alle Elfen den Plan gelesen haben. Demnach ist auch Antwortmöglichkeit 10 falsch.

22 Ein besonderes Spiel

Autor*innen: Alex McDonough (UC Davis), Ulrich Reitebuch (FU Berlin), Martin Skrodzki (TU Delft)

Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Die Spieleabteilung des Weihnachtsforschungszentrums entwickelt ständig neue Spiele, damit es den Kindern auf der ganzen Welt nicht langweilig wird. In diesem Jahr hat sie sich ein Spiel ausgedacht, das sich speziell an Einzelkinder richtet: Es handelt sich um ein Solitärspiel, das auf einem Brett mit $n \times 3$ Feldern gespielt wird.

Jedes Feld kann genau einen Spielstein aufnehmen. Es gibt drei verschiedene Arten von Spielsteinen und n Spielsteine von jeder Art: Quadrate, Kreise und Rauten. Für jeden Typ sind die n Spielsteine mit den Zahlen 1 bis n beschriftet.

Eine Anordnung von Spielsteinen heißt *stabil*, wenn:

(a) In keiner Reihe befindet sich ein Quadrat rechts von einem Kreis oder einer Raute.
   In keiner Reihe befindet sich ein Kreis rechts von einer Raute.

(b) In den Spalten gelten die in Abbildung 23 dargestellten vertikalen Bedingungen für die Zahlen auf den Spielsteinen:

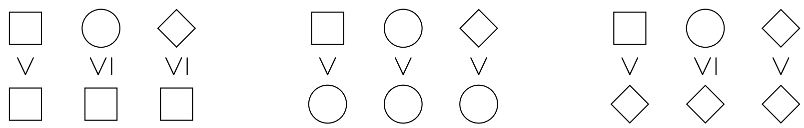


Abbildung 23: Die vertikalen Bedingungen für die Zahlen auf den Spielsteinen.

D. h. die nummerierten Quadrate, Kreise und Rauten müssen so platziert werden, dass die Ungleichungen aus Abbildung 23 erfüllt sind. Beispielsweise:

- Ein Quadrat mit der Zahl i kann sich unterhalb eines Kreises oder einer Raute mit der Zahl j mit $i \leq j$ befinden,
- Dagegen kann ein Kreis mit der Zahl i nur unterhalb einen Quadrats liegen, wenn das Quadrat die Zahl j mit $i < j$ hat.

(c) In Reihen gelten für die Zahlen auf den Spielsteinen die horizontalen Bedingungen aus Abbildung 24, auch wenn die jeweiligen Spielsteine *nicht* direkt nebeneinander liegen:

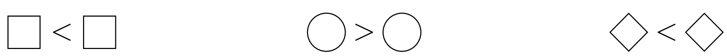


Abbildung 24: Die horizontalen Bedingungen für die Zahlen auf den Spielsteinen.

Beispiele für eine stabile und eine instabile Anordnung der Spielsteine auf einem Spielbrett der Größe 2×3 sind in Abbildung 25 dargestellt:

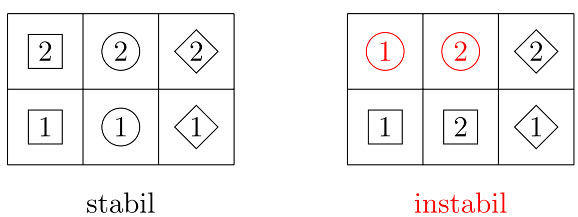


Abbildung 25: Eine stabile und eine instabile Anordnung auf einem Spielbrett der Größe 2×3 Brett. Die linke Anordnung der Spielsteine ist stabil, alle Bedingungen sind erfüllt. Die rechte Anordnung der Spielsteine ist instabil: Während alle Spalten sowie die untere Reihe alle Bedingungen erfüllen, verstößt die obere Reihe gegen Regel (c), da der Kreis mit der größeren Zahl rechts vom Kreis mit der kleineren Zahl platziert ist (rot markiert).

Beachte, dass es zwar Bedingungen für die Zahlen verschiedener Spielsteintypen gibt, wenn sie *vertikal* platziert werden. Die *horizontale* Anordnung der Zahlen aber nur innerhalb eines Typs eingeschränkt ist. Das heißt, wenn zwei Spielsteine desselben Typs in derselben Zeile stehen, müssen sie von links nach rechts entsprechend ihrer Nummern angeordnet werden (auch wenn sie nicht nebeneinander stehen). In Reihen müssen zwei Spielsteine unterschiedlichen Typs nur die Regel (a) erfüllen, unabhängig von ihrer Nummerierung. Das heißt, ein Quadrat mit der Zahl 5 kann links von einem Kreis mit der Zahl 3 stehen.

Frage: Wie viele *stabile* Anordnungen der Spielsteine gibt es auf einem Brett der Größe 4×3?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. $3 \cdot 4$
6. $3! \cdot 4$
7. $4! \cdot 3$
8. $3! \cdot 4!$
9. $(3 \cdot 4)!/3!^4$
10. $(3 \cdot 4)!$

Projektbezug:

Die vorgestellte Aufgabe ist Teil einer offenen Frage in einem aktuellen Kombinatorik-Projekt. In dem Projekt untersuchen wir ein Objekt namens *neighborhood grid*, das mit dem Auffinden von Beziehungen in Datensätzen in Verbindung steht (für mehr Details siehe unseren Artikel unter `https://arxiv.org/abs/1710.03435`). Grob gesagt, beschleunigt die Datenstruktur die Leistung bestimmter Algorithmen zur Teilchen- oder Zellsimulationen, indem sie schnelle, approximative Antworten auf die Frage liefert: Was sind für ein bestimmtes Teilchen oder eine Zelle die nächstgelegenen anderen Teilchen oder Zellen in seiner Umgebung?

Lösung

Die richtige Antwort ist: 1.

Es gibt nur eine stabile Anordnung der Spielsteine. Die Überprüfung dieser Lösung läuft darauf hinaus, alle kombinatorisch möglichen Anordnungen der Spielsteine durchzugehen und zu überprüfen, dass nur eine Lösung gültig ist, nämlich die, alle Quadrate in der linken Spalte, alle Kreise in der mittleren Spalte und alle Rauten in der rechten Spalte zu platzieren, von unten nach oben nummeriert. Neben der brachialen Methode, z. B. mit Hilfe eines Computers, ist es hilfreich, Positionen für bestimmte Spielsteine einzuschränken.

Betrachten wir das Quadrat mit der Nummer 1. Nach Regel 1 muss es links von jedem Kreis oder jeder Raute liegen, d. h. es kann nicht in einer Reihe liegen, in der es sich in der zweiten oder dritten Spalte mit Kreisen oder Rauten daneben befindet. Außerdem müssen die Quadrate in einer Reihe entsprechend von links nach rechts nummeriert sein. Dabei muss das Quadrat links von allen anderen Quadraten liegen, da es die niedrigste verfügbare Nummer hat.
Eine ähnliche Argumentation gilt für die vertikale Anordnung. Quadrate, Kreise und Rauten müssen eine strikte Ungleichung erfüllen, wenn sie unterhalb eines Quadrats platziert werden. Das betrachtete Quadrat hat jedoch die niedrigste verfügbare Nummer. Daher muss es in der untersten Spalte platziert werden. Kombiniert man diese beiden Beobachtungen, so muss das Quadrat in die linke untere Ecke gesetzt werden.

Betrachten wir nun die Raute mit der Nummer 4. Da die Raute die höchste verfügbare Nummer hat, kann nach einer ähnlichen Überlegung wie oben keine Raute rechts von ihr liegen. Außerdem können nach den Regeln 1 und 2 keine Quadrate oder Kreise rechts von ihr liegen. Daher muss die Raute mit dem Label 4 in der rechten Spalte liegen.
Gemäß den vertikalen Regeln aus Abbildung 23 muss eine Raute außerdem eine strikte Ungleichheit zu Quadraten und anderen Rauten erfüllen. Da die Raute mit der Nummer 4 die höchste verfügbare Nummer hat, kann sie entweder in die oberste Reihe oder unter einen Kreis mit der Bezeichnung 4 gesetzt werden.

Man kann nun mit dieser Art von Argumentation fortfahren, indem man z. B. den Kreis mit Nummer 4 platziert, falls er nicht durch die Wahl der Platzierung des Diamanten mit Nummer 4 bereits platziert wurde. Auf diese Weise entsteht ein wachsender Entscheidungsbaum, in dem aufgelistet ist, wo die verbleibenden Spielsteine auf dem Brett platziert werden können.

Abgesehen von der Überprüfung aller Kombinationen anderer möglicher Anordnungen ist noch keine Lösung bekannt, die für allgemeines n gilt (siehe Projektbezug). Wenn man alle Möglichkeiten durchgeht, stellt man fest, dass eine Fortsetzung des stabilen Zustands in Abbildung 25, d. h. die Platzierung aller Quadrate in der linken, aller Kreise in der mittleren und aller Diamanten in der rechten Spalte, nach Nummern geordnet, die einzig mögliche stabile Anordnung ist.

Bezug zur aktuellen Forschung

Die kombinatorische Frage, die wir derzeit untersuchen, ist, ob es für ein beliebiges $n \times m$ Brett eine bestimmte Klasse von Objekten gibt, die nur eine stabile Anordnung zulässt.

Die vorliegende Aufgabe ist ein Spezialfall für $m = 4$ der offenen Frage, die lautet: Gibt es für beliebige n nur eine stabile Anordnung? Bisher konnten wir überprüfen, dass die Antwort für bis zu $n = 7$ ja lautet, was darauf hinausläuft, $21! \approx 5{,}11 \cdot 10^{19}$ verschiedene Anordungen zu überprüfen. Wir vermuten, dass Spielsteine wie in dieser Aufgabe nur eine einzig mögliche Anordnung für n haben, d. h. alle Quadrate in der linken, alle Kreise in der mittleren und alle Rauten in der rechten Spalte. Allerdings können wir das an dieser Stelle nicht beweisen.

Wenn Sie Vorschläge oder Ideen haben, wie man das Problem angehen kann, schreiben Sie an: `m.skrodzki@tudelft.nl`.

23 Robin Hoods neue Pfeile

Autor*in: Jan Marten Sevenster (FU Berlin)

Projekt: *Quiver Representations in Big Data and Machine Learning* (EF 1-16)

Illustration: Till Hausdorf

Aufgabe

Robin Hood hat letztes Jahr zu Weihnachten 32 nagelneue Pfeile geschenkt bekommen, die sorgfältig in einem Köcher geordnet und an bestimmten Punkten befestigt sind (s. Abbildung 26). Heute will Robin hinaus in den verschneiten Sherwood Forest, um die neuen Pfeile endlich auszuprobieren. Als er seinen Bogen und Köcher schultern möchte, stellt er allerdings fest, dass die Spitzen von drei Pfeilen nicht nach unten, sondern gefährlich nach oben schauen. Robin könnte sich also verletzen, wenn er nach den Pfeilen greift.

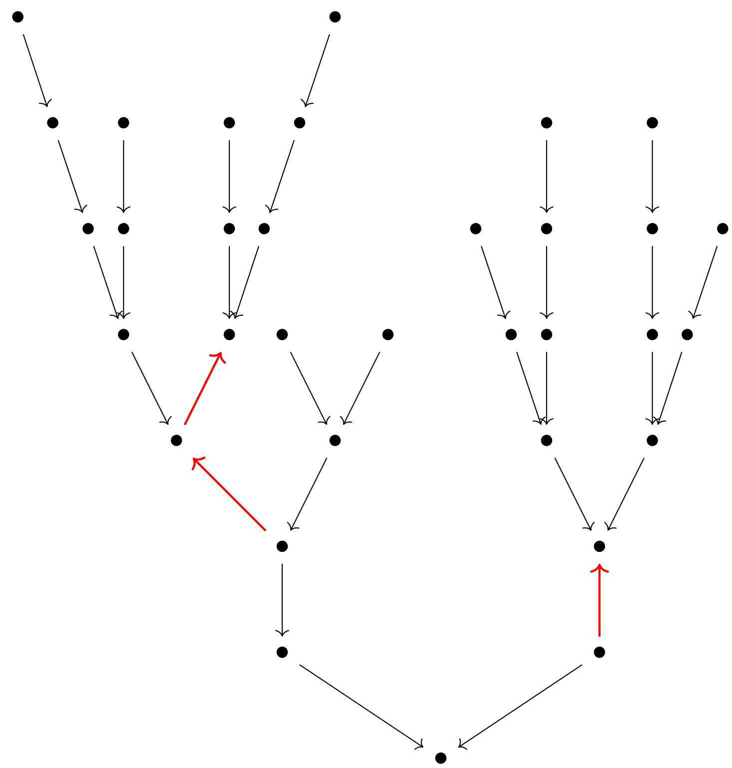


Abbildung 26: Die genaue Anordnung der Pfeile in Robins Köcher. Die roten Pfeile stecken verkehrt herum im Köcher.

Aus Gründen, die nur äußerst erfahrenen Bogenschütz*innen bekannt sind, kann die Ausrichtung der Pfeile im Köcher nur geändert werden, indem man einen Punkt wählt, an dem nur Pfeilspitzen befestigt sind, und muss dann *alle* daran befestigten Pfeile umdrehen (s. Abbildung 27).

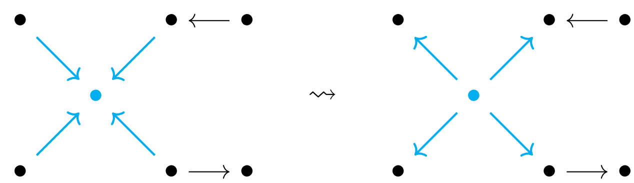


Abbildung 27: Ein Beispiel für eine erlaubte Operation.

Wie lautet die Einerstelle der kleinstmöglichen Anzahl an Operationen, die notwendig sind, damit schließlich alle Pfeile nach unten schauen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Projektbezug:

Köcher-Darstellungen treten in der Beschreibung und Analyse von Big Data oder neuronalen Netzen auf. Im Projekt EF1-16 *Quiver Representations in Big Data and Machine Learning* werden algorithmische und algebro-geometrische Methoden kombiniert, um Köcher-Darstellungen aus Big Data zu klassifizieren und die Geometrie des Modulraums eines neuronalen Netzes zu analysieren. Die in der Aufgabe beschriebenen Operationen sind sogenannte *Bernstein-Gelfand-Ponomarev-Reflexionen.*

Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Die Anzahl der Operationen, die erforderlich sind, um einen Pfeil zu drehen, entspricht der Anzahl der Operationen, die erforderlich sind, um einen Zustand zu erreichen, in dem man eine Operation an dem Punkt durchführen darf, an dem die betreffende Pfeilspitze angebracht ist, plus eine für die Operation, mit dem man die Richtung des Pfeils selbst korrigiert, plus die Anzahl der Operationen, die erforderlich sind, um die Pfeile zu korrigieren, die nach diesen Operationen in die falsche Richtung zeigen.

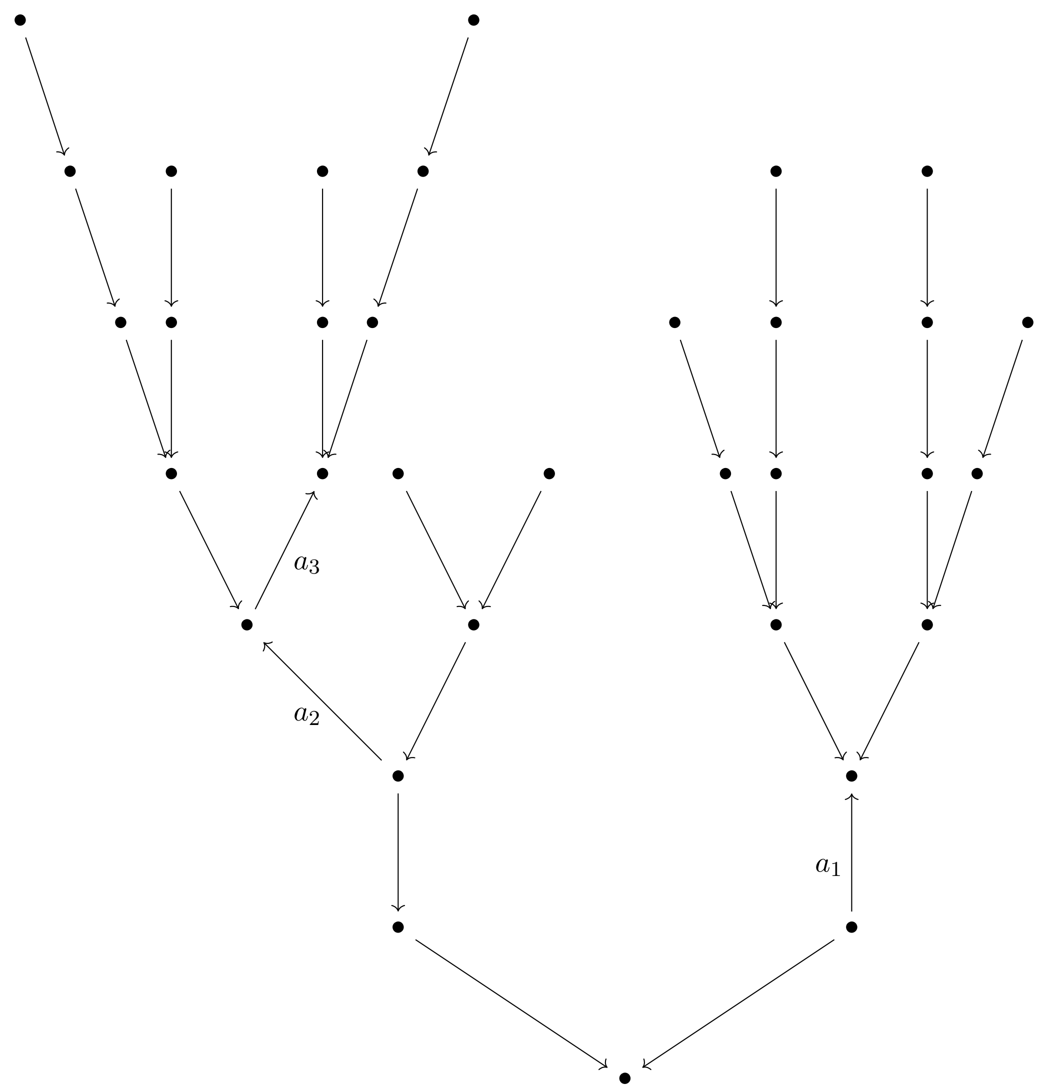


Abbildung 28: Die Pfeile im Köcher.

Die Anzahl der Operationen, die erforderlich sind, um einen Pfeil zu drehen, bei dem alle darüber liegenden Pfeile in die richtige Richtung zeigen, entspricht der Anzahl der Punkte über diesem Pfeil, einschließlich des Punktes, an dem die Pfeilspitze befestigt ist. Dies ist für den Pfeil a_3 in Abbildung 29 dargestellt:

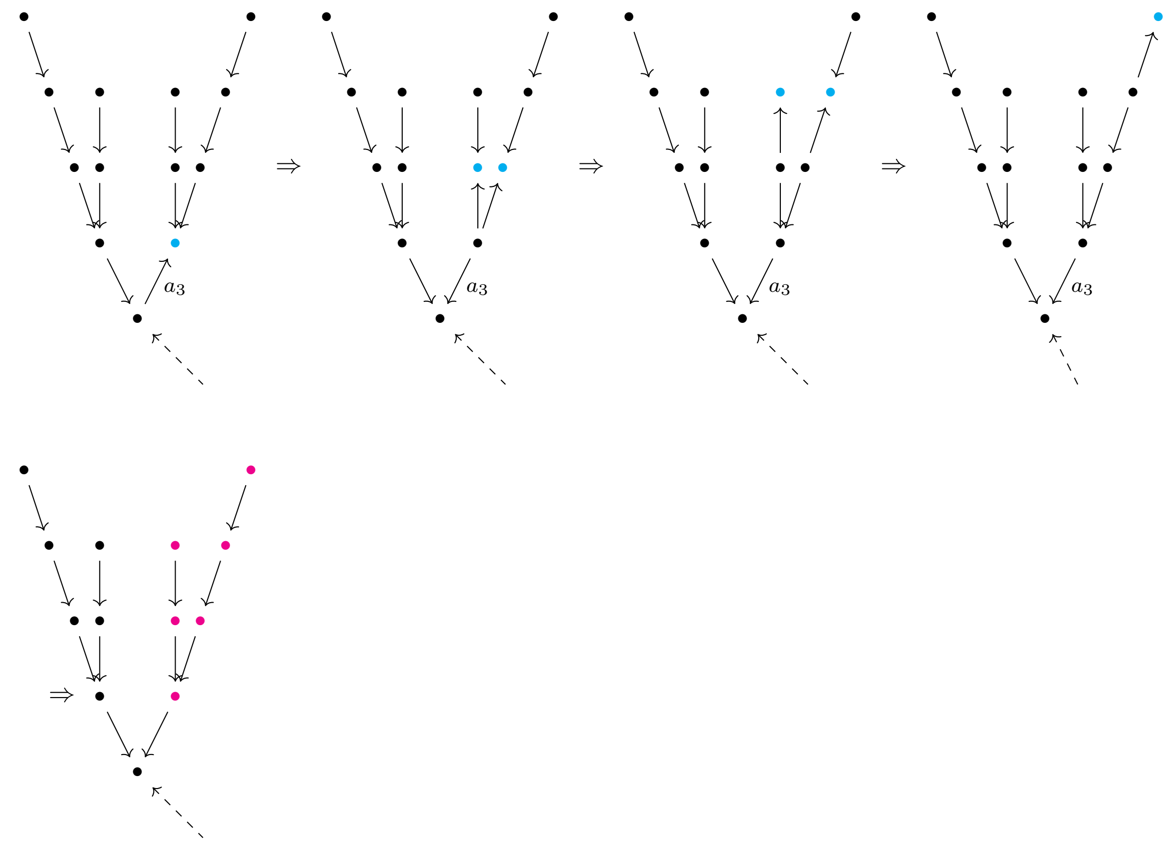


Abbildung 29: Illustration der Korrektur von a_3. Die Punkte, an denen in jedem Schritt eine Operation durchgeführt wird, sind blau markiert. Ausgehend von der ersten Situation führt man eine Operation an dem blau markierten Punkt durch, auf den der Pfeil a_3 zeigt. Die Situation, in der man landet, ist links daneben eingezeichnet. In dieser Situation ist es erlaubt, Operationen an den beiden Punkten oberhalb des Punktes aus dem ersten Schritt durchzuführen, und diese sind nun blau usw. Man beachte, dass diese Operationen erlaubt sind, weil blaue Punkte nur mit Pfeilen verbunden sind, die auf die blauen Punkte zeigen. Es gibt insgesamt sechs blaue Punkte, sodass die Anzahl der Operationen, die erforderlich sind, um a_3 anzupassen und alle anderen Pfeile unversehrt zu lassen, sechs beträgt. Nach dem letzten Schritt gibt es sechs pinke Punkte. An all diesen Punkten wurde genau einmal eine Operation durchgeführt. Um in dieser Abbildung Platz zu sparen, stellt der gestrichelte Pfeil einen Teil des Köchers dar, der für die durchgeführten Operationen nicht relevant ist.

Da wir zunächst a_3 drehen müssen, um a_1 drehen zu dürfen, gilt

$$op_{tot} = op_{a_3} + op_{a_1} + op_{a_2}.$$

Durchzählen der Punkte ergibt

$$op_{tot} = 6 + 13 + 13 = 32.$$

Abbildung 29 überzeugt uns zwar davon, dass $op_{a_3} = 6$ und ebenso $op_{a_1} = 13$ gilt. Um aber einzusehen, dass wir die Orientierung von a_2 tatsächlich nicht auf eine geschicktere Art und

Weise anpassen können, die es uns erlaubt, a_3 und a_2 mit weniger Operationen anzupassen, als es nötig wäre, sie einzeln anzupassen, erinnern wir uns an die Bemerkung im ersten Absatz der Lösung und argumentieren wie folgt:
Wir nennen die Punkte, auf die die Pfeile a_2 und a_3 in der Anfangskonfiguration von Figure 26 zeigen, p_2 bzw. p_3. Um den Pfeil a_2 zu drehen, müssen wir eine Operation entweder an p_2 oder an dem anderen Punkt, mit dem a_3 verbunden ist, durchführen. Um aber einen Zustand zu erreichen, in dem wir eine Operation an diesem anderen Punkt durchführen dürfen, müssen wir den Pfeil a_2 bereits eine ungerade oft umgedreht haben, sodass er in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Dies kann niemals die schnellstmögliche Folge von Operationen ergeben. Wir folgern also, dass wir eine Operation an p_2 durchführen müssen. Da der Pfeil a_3 noch nicht auf den Punkt p_2 zeigt, müssen wir zuerst den Pfeil a_3 umdrehen, damit er in die andere Richtung zeigt, indem wir eine Operation am Punkt p_3 durchführen. Nachdem wir eine Operation an p_3 und damit auch an p_2 durchgeführt haben, ist der Pfeil a_3 gerade (genau zwei) mal umgedreht worden; er zeigt also wieder in die falsche Richtung. Wir dürfen aber an p_3 keine Operation mehr durchführen, da die beiden anderen Pfeile, die mit p_3 verbunden sind, seit der ersten Operation von p_3 wegzeigen. Wir müssen also zunächst einen Zustand erreichen, in dem es erlaubt ist, eine Operation an p_3 durchzuführen. Wenn wir diese Logik für alle Punkte oberhalb von p_3 wiederholen, sehen wir, dass wir immer noch gezwungen sind, die Operationen durchzuführen, die wir durchgeführt hätten, wenn wir zuerst die sechs Operationen durchgeführt hätten, die erforderlich sind, um nur a_3 nach unten zu drehen (dargestellt in Abbildung 29), und uns erst dann um die Ausrichtung von a_2 gekümmert hätten – nur in einer anderen Reihenfolge.

24 Silvesterschmuck

Autor*in: Ariane Beier (TU Berlin)
Projekt: MATH+ Schulaktivitäten

Illustration: Frauke Jansen

Aufgabe

Weihnachtselfe Annelie möchte in diesem Jahr noch hübschen Raumschmuck für ihre Silvesterfeier basteln. Da sie sowohl mathematisch interessiert als auch handwerklich begabt ist, hat Annelie dafür aus zwei Kreisen eine Mondsichel konstruiert (s. Abbildung 30), die sie aussägen und bemalen möchte: Der größere Kreis g ist der Inkreis eines Quadrats $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Der kleinere Kreis k ist der Inkreis des Dreiecks MBC, wobei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ ist.

In ihrer Werkstatt hat Annelie noch genug Holz. Nur die spezielle Feenstaubfarbe muss sie bei WICHTELZON.NP, dem fairen Online-Versandhandel am Nordpol, neu besorgen. Die Feenstaubfarbe ist doch recht teuer und so möchte Annelie nur genau so viel davon kaufen wie sie wirklich benötigt. Dafür berechnet sie den Flächeninhalt der Sichel ganz genau.

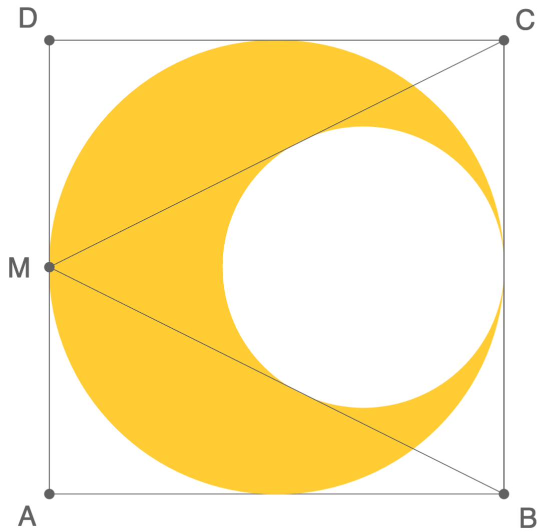


Abbildung 30: Die von Annelie konstruierte Mondsichel.

Es seien

- r_k und A_k der Radius und der Flächeninhalt des kleinen Kreises k sowie
- r_g und A_g der Radius und der Flächeninhalt des großen Kreises g.

Was ist dann die zweite Nachkommastelle von $\frac{A_k}{A_g} + \frac{r_k}{r_g}$?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir zeigen, dass

$$\frac{A_k}{A_g} + \frac{r_k}{r_g} = 1$$

gilt – und zwar unabhängig von der Seitenlänge $a > 0$ des Quadrats $ABCD$.

Zunächst gilt

$$r_g = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad A_g = \frac{\pi}{4}\, a^2.$$

Wir berechnen nun r_k und A_k. Dazu bezeichnen wir den Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks MBC mit K. Seien weiterhin N, O und P die Fußpunkte der Lote von K auf $\overline{BC}$, $\overline{MB}$ bzw. $\overline{MC}$ (siehe Abbildung 31).

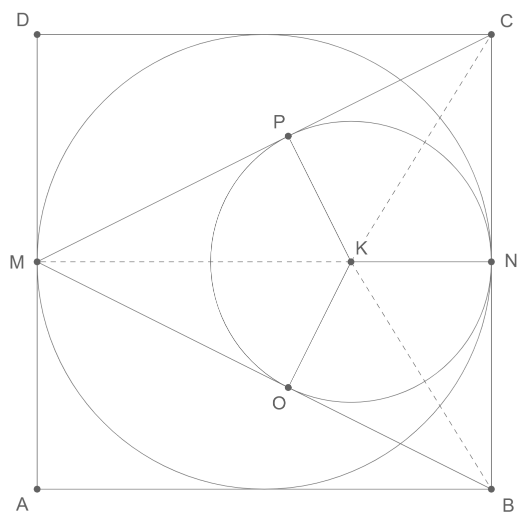


Abbildung 31: Die Mondsichel.

Es gilt also

$$r_k = |\overline{KN}| = |\overline{KO}| = |\overline{KP}|.$$

Da die Kreise g und k achsensymmetrisch bezüglich $\overline{MN}$ sind, gilt

$$|\overline{CN}| = |\overline{NB}| = \frac{a}{2}.$$

Außerdem gilt

$$|\overline{PC}| = |\overline{CN}| = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad |\overline{OB}| = |\overline{NB}| = \frac{a}{2},$$

da die jeweiligen Strecken als Tangentenabschnitte an den kleinen Kreis k von C bzw. B gleich lang sind.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck ABM:

$$|\overline{MB}| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,a$$

und somit

$$|\overline{MO}| = |\overline{MB}| - |\overline{OB}| = \frac{\sqrt{5}}{2}\,a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a.$$

Wenden wir den Satz des Pythagoras nochmals auf das rechtwinklige Dreieck MOK an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\overline{MK}|^2 &= |\overline{MO}|^2 + |\overline{KO}|^2 \\
\big(|\overline{MN}| - |\overline{KN}|\big)^2 &= |\overline{MO}|^2 + |\overline{KO}|^2 \\
(a - r_k)^2 &= \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\,a^2 + r_k^2 \\
a^2 - 2ar_k + r_k^2 &= \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}\,a^2 + r_k^2 \\
-2ar_k &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1\right)a^2 \\
r_k &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\,a
\end{aligned}$$

und somit

$$A_k = \pi r_k^2 = \frac{\pi(3-\sqrt{5})}{8}\,a^2.$$

Die errechneten Werte setzen wir nun in den gesuchten Term ein und erhalten die Gleichung

$$\frac{A_k}{A_g} + \frac{r_k}{r_g} = \frac{\pi(3-\sqrt{5})a^2}{8} \cdot \frac{4}{\pi a^2} + \frac{(\sqrt{5}-1)a}{4} \cdot \frac{2}{a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

die unabhängig vom Wert der Seitenlänge $a > 0$ des Quadrats $ABCD$ gilt.

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde in der Schulrunde der 41. Mathematik-Olympiade für die Klassenstufen 11–13 gestellt. Sie findet sich samt Lösung auch im Buch *Die schönsten Aufgaben der Mathematik-Olympiade in Deutschland* (ISBN 978-3-662-63183-6).