

3 Gesellige Wichtel

Autor*in: Tobias Paul (HU Berlin)

Projekt: *The Impact of Dormancy on the Evolutionary, Ecological and Pathogenic Properties of Microbial Populations* (EF 4-7)



Illustration: Friederike Hofmann

Aufgabe

Wie jedes Jahr müssen auch in dieser Vorweihnachtszeit viele Geschenke von den Weihnachtswichteln gefertigt werden. Zum Leid des Weihnachtsmannes findet sich allerdings kaum noch qualifiziertes Personal und so gibt es in diesem Jahr nur 12 Wichtel, die sich um die Geschenkproduktion kümmern können. „Wenn jedes meiner Helferlein ein Geschenk pro Tag schafft, werden wir trotzdem ohne große Probleme fertig“, murmelt der Weihnachtsmann in seinen Bart. So legt er am Abend an jede Werkbank Bastelmaterial und weist die zwölf Wichtel an, dass jeder sein zugeteiltes Geschenk am nächsten Tag fertigstellen möge.

Am nächsten Morgen kommen die Wichtel alle nacheinander in die Werkstatt. Zuerst kommt Wichtel Arvo und beginnt fleißig, sein Geschenk zu bearbeiten. Als Wichtel Bjame als nächstes fröhlich hereinspaziert, sieht er, wie Arvo schon dabei ist, seine Arbeit zu erledigen. Da Wichtel gesellige Quatschbacken sind, hat er große Lust, ein Gespräch mit Arvo zu beginnen. Das

würde aber dazu führen, dass Bjame sein eigenes Geschenk heute nicht anfangen und fertigstellen könnte – Arvo dagegen wäre von der Plauderei nicht weiter abgelenkt und könnte seine Aufgabe weiter bearbeiten. Innerlich zerrissen entscheidet sich Bjame mit gleicher Wahrscheinlichkeit dafür, entweder seiner Arbeit nachzugehen oder mit Arvo zu reden.

Der dritte Wichtel Cortie hat nun ebenfalls die Qual der Wahl: Soll er mit Arvo quatschen, mit Bjame reden oder seiner zugewiesenen Arbeit nachgehen? Unabhängig davon, wie sich Bjame zuvor entschieden hat, entscheidet sich Cortie gleichverteilt für eine der drei Möglichkeiten. (Wichtel sind hier im Übrigen gar nicht zimperlich und haben keine Probleme damit, Gespräche zu unterbrechen oder sich unterbrechen zu lassen.)

So geht es immer weiter, bis der zwölfte und letzte Wichtel Lasse ankommt und entscheiden muss, ob er genug Disziplin hat, um sich auf sein Geschenk zu konzentrieren, oder ob er sich doch lieber zu einem der anderen elf Wichtel gesellt. Die Entscheidung dafür mit wem oder was er sich beschäftigt, trifft auch er wieder gleichverteilt über alle elf anderen Wichtel und sein Geschenk und unabhängig davon, wie sich die Wichtel vor ihm entschieden haben.

Schon fleißig arbeitende Wichtel werden durch Gespräche nicht bei ihrer Arbeit unterbrochen und können ihr Geschenk, wie vom Weihnachtsmann geplant, fertigstellen. Andererseits fängt kein Wichtel, der sich bei seiner Ankunft in der Werkstatt für ein Gespräch mit einem anderen Wichtel entschieden hat, später noch mit seiner Arbeit an.

Und so sind manche Wichtel fleißig, manche hingegen vergessen die Zeit beim Plaudern. Der Weihnachtsmann kommt am Abend vorbei, um nach dem Rechten zu schauen und sieht das ganze Durcheinander: Nicht einmal annähernd so viele Geschenke wie geplant sind fertig geworden!

Wird es so noch möglich sein, bis Heiligabend alle Geschenke anzufertigen? Um das herauszufinden, möchte der Weihnachtsmann berechnen,

- (a) wie viele Geschenke im Durchschnitt pro Tag fertig werden (gerundet auf ganze Geschenke) und
- (b) wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass an einem Tag nur ein einziges Geschenk fertig wird.

Welche Antwort ist korrekt?

Antwortmöglichkeiten:

1. (a) 3 und (b) $\frac{1}{24}$
2. (a) 3 und (b) $\frac{1}{12}$
3. (a) 3 und (b) $\frac{1}{6}$
4. (a) 4 und (b) $\frac{1}{24}$
5. (a) 4 und (b) $\frac{1}{12}$
6. (a) 4 und (b) $\frac{1}{6}$
7. (a) 5 und (b) $\frac{1}{24}$
8. (a) 5 und (b) $\frac{1}{12}$
9. (a) 5 und (b) $\frac{1}{6}$
10. (a) 6 und (b) $\frac{1}{24}$

Projektbezug:

In unserem Projekt EF 4-7 *The Impact of Dormancy on the Evolutionary, Ecological and Pathogenic Properties of Microbial Populations* beschäftigen wir uns unter anderem mit Biodiversität und genetischer Vielfalt. Die Geschenke aus der Aufgabe entsprechen in diesem Kontext genetischen Mutationen in einem klassischen Modell, dem *Kingman-Koaleszenten*. Somit ist die Frage nach der Anzahl der Geschenke schlichtweg die Frage nach der Anzahl der (verschiedenen) Mutationen in einer Probe aus 12 Individuen. Diese lassen sich explizit bestimmen. Wie es für Mathematiker*innen üblich ist, interessieren wir uns für das asymptotische Verhalten der Anzahl der Mutationen für $n \rightarrow \infty$ in einem komplexeren Modell für seltene Mutationen, dem *Seed-Bank-Koaleszenten*. Hierbei beschreibt n die Größe der untersuchten Population.