Aufgabenheft 2015

Registrierung und Abgabe von Antworten:
www.mathekalender.de/matheon
bis 31. Dezember 2015

DIGITALER MATHEON KALENDER

Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

3TU.AMI

Inhaltsverzeichnis

1 Anonymität des Netzes

Autor: Christian Hercher (Friedrich-Schiller-Universität Jena)

Aufgabe:

Rudolph ist aufgebracht! Im Sozialen Netzwerk Rentierbuch hat sich jemand über seine rote Nase lustig gemacht. Das geht ja nun gar nicht! Aber klar, die Leute verstecken sich dort nur hinter irgendwelchen Pseudonymen. Dann lästert es sich einfach...Und selbst der „Zwang“, den der Betreiber des Netzwerks offiziell fordert, dass man sich mit einem realen Namen anmelden solle, kann ja nur schwer kontrolliert werden.

Er weiß nur, dass ein Nutzer namens „Aphrodite“ derjenige war, der sich zu einem Kommentar über seine Nase hat hinreißen lassen. Nur, wer versteckt sich dahinter?

Doch Rudolph ist nicht dumm. Er sieht genau, wer dort mit wem redet und staunt nicht schlecht. Insgesamt neun Personen, die er real aus seinem Umfeld kennt, kommunizieren da miteinander. Und sie haben sich illustre Namen gegeben: Dort reden Hermes, Zeus, Aphrodite, Hera, Poseidon, Demeter, Athene, Artemis und Ares miteinander. Bilden die sich ein, sie wären auf dem Olymp?

Aber Rudolph bekommt noch mehr heraus. Er sieht nämlich, wer dort mit wem befreundet ist:

Hermes mit Zeus, Poseidon und Artemis,
Zeus mit Hermes, Athene, Hera, Demeter, Aphrodite und Artemis,
Athene mit Zeus, Poseidon und Demeter,
Hera mit Zeus und Ares,
Poseidon mit Hermes, Athene und Ares,
Demeter mit Zeus und Athene,
Aphrodite mit Zeus und Artemis,
Artemis mit Hermes, Zeus und Aphrodite sowie
Ares mit Hera und Poseidon.

(Ok, manche altgriechischen Sagen müssen wohl nun umgeschrieben werden...)

„Ha, jetzt hab' ich euch!“, denkt sich Rudolph. Denn er kennt seine Pappenheimer sehr genau und weiß, dass

Anna mit Inka, Jordan und Pieter,
Quinten mit Norbert und Inka,
Pieter mit Inka,
Geronimo mit Oliver,
Norbert mit Jordan,
Hieronymo mit Geronimo,
Oliver mit Jordan und Inka sowie
Inka mit Hieronymo und Geronimo
befreundet ist; und natürlich auch jeweils umgekehrt.
Daneben gibt es keine weiteren freundschaftlichen Beziehungen zwischen den Rentieren im „Real Life“.

Rudolph hat zudem festgestellt, dass man sich weder auf die Geschlechtsangaben im Profil des Rentierbuchs, noch, was durch die Nutzernamen suggeriert wird, verlassen kann...

Unter der Annahme, dass im Netzwerk genau die gleichen Freundschaften wie in der realen Welt geschlossen wurden, welches Rentier hat dann Rudolph als besonders schüchtern („Der bekommt immer so schnell eine rote Nase und fängt an zu stottern, wenn er eine Rentierdame sieht“) bezeichnet?

Antwortmöglichkeiten:

1. Pieter
2. Jordan
3. Inka
4. Oliver
5. Anna
6. Geronimo
7. Norbert
8. Quinten
9. Hieronymo
10. Das lässt sich nicht eindeutig bestimmen.

Projektbezug:

Die Frage nach der Deanonymisierung in z.B. Sozialen Netzwerken besitzt durchaus eine gewisse Brisanz, da Werbekunden oder App-Anbieter leicht - wie hier in der Aufgabenstellung - an die Daten, welche Benutzerkonten miteinander verbunden sind, herankommen.

Das Problem, welches sich im Allgemeinen dahinter verbirgt, ist, einen Isomorphismus zwischen zwei isomorphen Graphen zu finden, d.h. eine Umbenennung der Knoten (Nutzernamen in die realen Namen) zu finden, die die (Nicht-)Freundschaftsbeziehungen genau erhält, d.h. zwei Personen genau dann befreundet sind, wenn es ihre Nutzerkonten im Sozialen Netzwerk auch waren.

Ob dieses Problem (für beliebige Graphen) schwer (d.h., ob es NP-vollständig) ist, ist bisher unbekannt. Jedoch ist auch kein effizienter Algorithmus bekannt, der dieses Problem löst.

Konzentriert man sich aber auf skalenfreie Graphen, wie sie z.B. in Sozialen Netzwerken entstehen (weil es dort z.B. einige wenige Personen mit vielen Freunden/Followern gibt, mehr mit einer mittleren Zahl und viele, die vergleichsweise wenige Freunde/Follower besitzen - dies bezieht sich hier alles auf den Vergleich zu z.B. "Lady Gaga" und ähnlich stark vernetzten Benutzerkonten), dann ist dieses Problem nun sehr schnell und effizient lösbar.

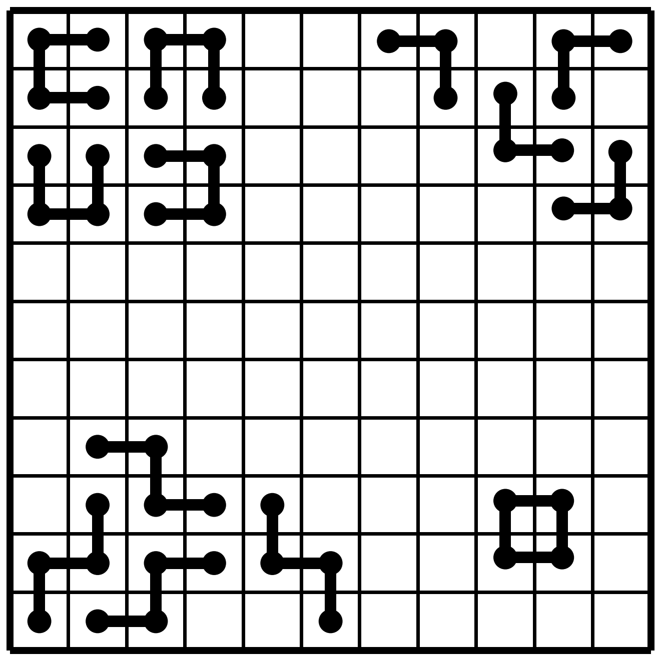
Der Lehrstuhl I für Theoretische Informatik an der Fridrich-Schiller-Universität Jena beschäftigt sich unter Anderem mit den Eigenschaften solcher Graphen und wie man ihre besondere Struktur ausnutzen kann um Dinge möglich zu machen, die im Allgemeinen vielleicht doch zu schwer für einen Angriff sind.

2 Mondrian

Autor: Hajo Broersma (Universiteit Twente)

Aufgabe:

Der Malwichtel Mondrian hat quadratische Weihnachtskarten entworfen und in 121 kleine Quadrate unterteilt. Nun beginnt Mondrian, die kleinen Quadrate mit vier verschiedenen Kringeltypen zu verzieren:
Mit C-Kringeln (links oben abgebildet), Z-Kringeln (links unten), O-Kringeln (rechts unten) oder mit L-Kringeln (rechts oben).



Mondrian zeichnet am liebsten hübsche C-Kringel, prächtige Z-Kringel und bezaubernde O-Kringel. Die kleinen, anspruchslosen, einfältigen L-Kringel hingegen mag der Malwichtel gar nicht gerne. Er vermeidet sie, so weit das möglich ist.

Auf diese Weise verziert Mondrian eine der leeren Weihnachtskarten. Jedes der 121 Quadrate bedeckt er hierbei mit genau einem Eckpunkt solch eines Kringels .
Frage: Was ist die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln, die Mondrian dabei verwenden muss?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 3.
2. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 7.
3. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 11.
4. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 15.
5. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 19.
6. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 23.
7. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 27.
8. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 31.
9. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 35.
10. Die kleinstmögliche Zahl an L-Kringeln beträgt 39.

3 Wo bleibt der Lift?

Autor: Rudi Pendavingh (TU Eindhoven)

Aufgabe:

„Schon wieder dieser Grinch!“ schimpft der Weihnachtsmann. Er will nämlich in seinem neuen Verwaltungsgebäude sieben Lifte einbauen lassen, und der Grinch hat den Auftrag dafür übernommen.
Wie konnte das nur passieren? Im Vertragswerk gibt es nun einen kleingedruckten Absatz, der besagt, dass jeder dieser Lifte nur in sechs verschiedenen Etagen, die jedoch nicht notwendigerweise aufeinanderfolgend sein müssen, anhalten darf.
„Nur in sechs verschiedenen Etagen!“ schimpft der Weihnachtsmann. Nun ja, er hätte den Vertrag wohl genauer durchlesen sollen. „Alles halb so schlimm“, tröstet ihn der Planungswichtel Plato. „Durch geschickte Planung können wir zumindest sicherstellen, dass man von jeder Etage aus jede andere Etage durch eine Fahrt mit nur einem Lift erreichen kann. Hätte das Gebäude mehr Etagen, und sei es auch nur eine einzige Etage mehr, so wäre nicht einmal dies für uns möglich.“
„Ohne Umzusteigen?! Mit nur einem Lift!“ ruft der Weihnachtsmann erleichtert und ist beruhigt. Wir aber wollen wissen: Wenn das Erdgeschoss als eine Etage gezählt wird, wie viele Etagen hat dann dieses neue Verwaltungsgebäude?

Antwortmöglichkeiten:

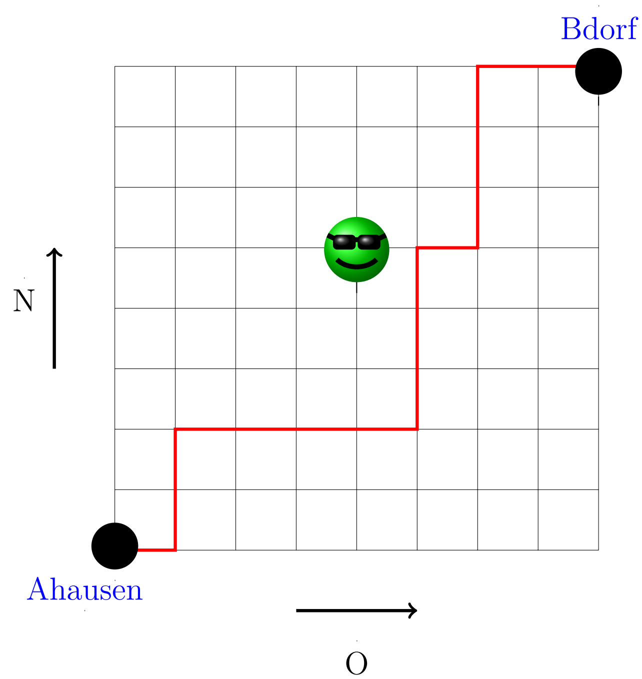
1. 11 Etagen
2. 12 Etagen
3. 13 Etagen
4. 14 Etagen
5. 15 Etagen
6. 16 Etagen
7. 17 Etagen
8. 18 Etagen
9. 19 Etagen
10. 20 Etagen

4 Der Weihnachtsmann und der Grinch

Autor: Wilhelm Stannat (TU Berlin)

Aufgabe:

Auch der Weihnachtsmann geht mit der Zeit und hat seinen alten Rentierschlitten durch einen modernen Elektroschlitten ersetzt. Leider scheint die Technik noch etwas unausgereift zu sein und die Lenkung ist defekt. Daher kann der Weihnachtsmann auf seinem Weg von Ahausen nach Bdorf nur entweder nordwärts oder ostwärts fahren.
Auf seinem Weg lauert der böse Grinch, um dem Weihnachtsmann die Geschenke zu entreißen. Ein möglicher Weg des Weihnachtsmanns sieht folgendermaßen aus:



Wie groß ist der Anteil p aller Wege, auf denen der Weihnachtsmann auf den

Grinch stößt unter allen möglichen Wegen, auf denen der Weihnachtsmann von Ahausen nach Bdorf mit seinem Elektroschlitten gelangen kann?

Hierbei sind die möglichen Wege durch obiges Bild begrenzt. Die Wege können nur auf den im Bild vorgegebenen Gitterlinien verlaufen.
Insgesamt kann der Weihnachtsmann 8 km in den Norden sowie 8 km in den Osten von Ahausen aus fahren. Und Richtungswechsel sind nur bei ganzen Kilometern erlaubt. Der Grinch befindet sich von Ahausen aus gesehen 4 km östlich und 5 km nördlich. Er verbleibt dort.

Antwortmöglichkeiten:

1. $0 \leq p < 0.1$
2. $0.1 \leq p < 0.2$
3. $0.2 \leq p < 0.3$
4. $0.3 \leq p < 0.4$
5. $0.4 \leq p < 0.5$
6. $0.5 \leq p < 0.6$
7. $0.6 \leq p < 0.7$
8. $0.7 \leq p < 0.8$
9. $0.8 \leq p < 0.9$
10. $0.9 \leq p < 1$

Projektbezug:

Kombinatorische Probleme dieser Art ergeben sich auf natürliche Weise bei der Untersuchung diskreter stochastischer Prozesse auf Gittern. Von Interesse sind insbesondere Asymptotiken, wie in diesem Beispiel etwa das asymptotische Verhalten des gesuchten Anteils für große Quadrate. Dazu mehr in der Lösung.

5 Bummelstreik

Autor: Martin Hoefer (Max Planck Institut)

Aufgabe:

Der Weihnachtsmann fährt heute eine 240 Kilometer lange Piste ab. Er hat an seinem Schlitten ein neues TumTum Navigationssystem angebracht. Nach der ersten Fahrtstunde beginnt das TumTum plötzlich zu plappern: "Unter der Annahme, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit für den Rest dieser Reise gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit für den bereits zurückgelegten Teil der Reise ist, beträgt die verbleibende Reisezeit drei Stunden."

Die Rentiere mögen das TumTum nicht und treten in einen sechsstündigen Bummelstreik. Der Schlitten gleitet immer langsamer dahin, während das TumTum weiterplappert und wieder und wieder und wieder und immer wieder (die ganzen folgenden sechs Stunden hindurch) sagt: "Unter der Annahme, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit für den Rest dieser Reise gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit für den bereits zurückgelegten Teil der Reise ist, beträgt die verbleibende Reisezeit drei Stunden"

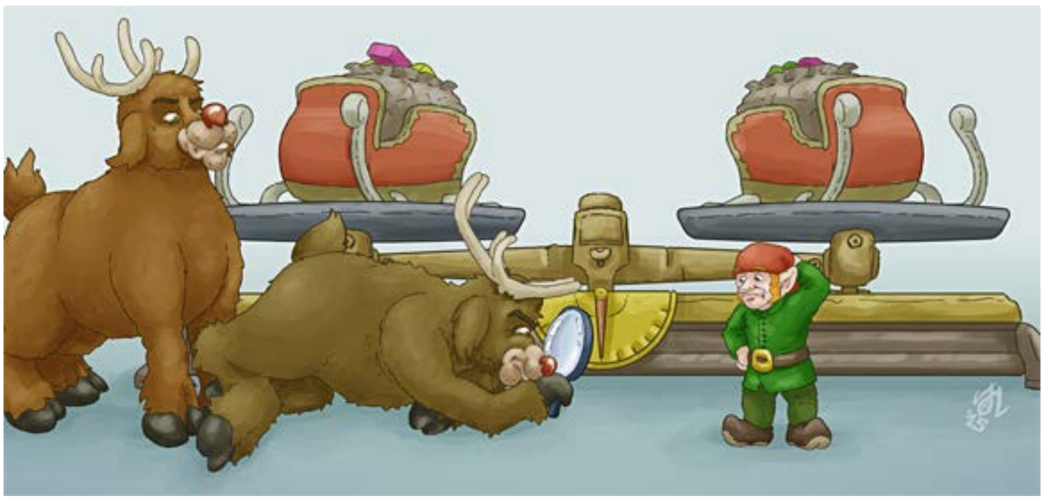
Wie viele Kilometer legt der Schlitten während des Bummelstreiks zurück?

Antwortmöglichkeiten:

1. 101 Kilometer
2. 102 Kilometer
3. 103 Kilometer
4. 104 Kilometer
5. 105 Kilometer
6. 106 Kilometer
7. 107 Kilometer
8. 108 Kilometer
9. 109 Kilometer
10. 110 Kilometer

6 Gleichgewicht

Autorin: Judith Keijsper (TU Eindhoven)



Aufgabe:

Die Rentiere des Weihnachtsmanns sind heute übel gelaunt. Als der Weihnachtsmann seine beiden Schlitten mit Paketen bepackt, maulen ihn die Rentiergespanne an: „Wir fordern Gleichbehandlung! Wir fordern Chancengleichheit! Beide Schlitten müssen genau gleich schwer bepackt werden! Wir fordern gleiche Arbeitslast!"
Die N Pakete sind $1, 2, 3, 4, \ldots, N$ Kilogramm schwer. Der Weihnachtsmann ruft den Arithmetikwichtel Arithbert zur Hilfe, und nach einer kurzen ma-

thematischen Analyse bepacken Weihnachtsmann und Arithbert die beiden Schlitten.
„Und?“, fragt der Weihnachtsmann die Rentiere. „Beide Ladungen sind exakt gleich schwer. Seid ihr nun zufrieden?“ Na, das hätte er wohl besser nicht gefragt. „Nein!“, schreien die Rentiere. „Wir sind natürlich nicht zufrieden! Da sind zu viele Pakete auf den Schlitten. Wir fordern, dass Du vier Pakete wegnimmst! Von jedem Schlitten zwei! Wir fordern leichtere Arbeit!“
„Gut, dann nehme ich halt von jedem Schlitten zwei Pakete weg“, sagt der Weihnachtsmann. „Das ist nicht viel Aufwand.“ Aber Arithbert schüttelt den Kopf: „Egal welche Pakete Du wegnimmst, die beiden Ladungen sind danach immer verschieden schwer. Wir werden auch andere Pakete umpacken und von einem Schlitten zum anderen schleppen müssen.“
„Und ohne Umpacken können wir die Ladungen nicht gleich schwer machen?“, fragt der Weihnachtsmann. „Nein“, sagt Arithbert. „Das ist mathematisch unmöglich.“

Und wir fragen Euch: Welchen Wert hat N?

Antwortmöglichkeiten:

1. $N = 100$
2. $N = 103$
3. $N = 104$
4. $N = 107$
5. $N = 108$
6. $N = 111$
7. $N = 112$
8. $N = 115$
9. $N = 116$
10. $N = 119$

7 Twelve points go to ...

Autor: Falk Ebert (ehemaliger Leiter des Matheon-Kalenders)
Projekt: Falk Ebert ist vor vier Jahren vom Forschungszentrum Matheon in den Schuldienst gewechselt und seitdem immer noch überzeugt, dass Mathematik mehr ist als nur Rechnen.

Aufgabe:

Was machen Rentiere eigentlich, wenn sie nicht gerade einen alten Mann mit Schlitten voller Geschenke durch die Gegend ziehen? Richtig! Sie langweilen sich. Und diese Langeweile gipfelte im letzten Mai in dem PSC - dem Polarvision Song Contest. Insgesamt vier Rentiere haben die gnadenlose Vorrunde überstanden und waren in das Finale gekommen. Die Finalist_innen tragen die Namen: Amalthea, Blitzen, Conchita und Dalek. Nach ihren fulminanten Darbietungen wurden die Teilnehmer_innen von einer vierköpfigen Jury bewertet und erhielten von jedem Jurymitglied Punkte, die addiert zu einer Gesamtbewertung des Auftritts führten. Jedes Jurymitglied verteilte jeweils für den besten Beitrag p_1 Punkte, p_2 Punkte gab es für die zweitbeste Darbietung, p_3 Punkte für die drittbeste und p_4 Punkte gab es für den von dem jeweiligen Jurymitglied als am schlechtesten eingeschätzten Beitrag.

Dabei unterscheiden sich die unabhängigen Meinungen der Jurymitglieder sehr. Zum Beispiel haben zwei Jurymitglieder an Amalthea den ersten Platz vergeben, eines hat sie als drittbeste bewertet und ein Mitglied fand ihren Beitrag sogar am schlechtesten.
Hier die Auflistungen dieser Einzelbewertungen der Jurymitglieder zu allen vier Finalist_innen:

Amalthea:	$2 \times$ Platz 1, $1 \times$ Platz 3, $1 \times$ Platz 4
Blitzen:	$1 \times$ Platz 1, $2 \times$ Platz 2, $1 \times$ Platz 3
Conchita:	$1 \times$ Platz 1, $3 \times$ Platz 4
Dalek:	$2 \times$ Platz 2, $2 \times$ Platz 3

Die Veranstalter des PSC verwendeten zunächst das alte Punktesystem des Grand Prix Eurovision de la Chanson aus dem Jahre 1962. Bei diesem bekam der beste Beitrag $p_1 = 3$ Punkte und jede schlechtere Platzierung erhielt genau einen Punkt weniger: $p_k = 4-k, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Durch dieses System der Punktevergabe gewann Blitzen den PSC mit 8 Punkten, was zu großem Jubel bei den Blitzen-Fans führte. Die Fans der anderen Kandidat_innen reagierten jedoch mit einem Schlitt-storm und forderten andere Bepunktungssysteme ein, um ihre Favoriten vorne zu sehen. Monatelang wurde um die ideale Punkteverteilung gestritten. Während das eigentliche Ergebnis des PSC mittlerweile unwichtig geworden ist, wird selbst jetzt im Dezember noch heiß diskutiert, wie man die Punkte hätte vergeben sollen. Einig sind sich aber alle, dass für ein neues Bepunktungssystem folgenden Aussagen gleichzeitig gelten müssten:

1. $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$
2. Die Bepunktungen sollen ganze Zahlen größer oder gleich 0 sein.
3. Die Bepunktungen sollen so gewählt werden, dass keine Gleichstände auftreten.

Unter der Voraussetzung, dass alle drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind: Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es ist tatsächlich möglich, ein Bewertungssystem zu finden, das ohne Gleichstände auskommt.
2. Amalthea hat stets mehr Gesamtpunkte als Conchita.
3. Blitzen hat stets mehr Gesamtpunkte als Dalek.
4. Wenn Blitzen und Conchita ihre Gesamtpunkte addieren, haben sie stets mehr Punkte, als die beiden anderen Teilnehmer_innen jeweils einzeln erreichen können.
5. Dalek kann bestenfalls auf Platz 2 in der Gesamtwertung kommen.
6. Conchita kann bestenfalls auf Platz 3 in der Gesamtwertung kommen.
7. Blitzen erreicht entweder Platz 1 oder Platz 2 in der Gesamtwertung.
8. Amalthea kann schlimmstenfalls auf Platz 2 in der Gesamtwertung kommen.
9. Conchita belegt nur dann nicht den letzten Platz in der Gesamtwertung, wenn Dalek den letzten Platz hat.
10. In den meisten Fällen gewinnt Blitzen in der Gesamtwertung.

8 Leichter als Luft

AutorInnen:
Antje Bjelde (TU Berlin), Felix Fischer (TU Berlin), Max Klimm (TU Berlin)

Aufgabe

RUMMS! Die Rentiere Karli und Winny sind beim Eislaufen auf dem zugefrorenen See zusammengekracht und müssen einige Tage das Bett hüten. Ausgerechnet kurz vor Weihnachten! Der Weihnachtsmann beruft eine Krisensitzung mit den anderen Rentieren ein. “Was sollen wir nur machen?”, jammert Jona, “Der Geschenkeschlitten ist zu schwer für uns, wenn die beiden nicht mitziehen.”. “Ich habe eine Idee!”, ruft der Weihnachtsmann nach einigen Minuten gedrückten Grübelns. “Wir hatten doch noch...”, und schon läuft er Richtung Lager. Nach einer Weile des Kramens kommt er mit einigen großen Kartons wieder. “Hier, das ist die Lösung: Luftballons! Wir können sie mit Helium aufblasen, das trägt einiges des Gewichts der Geschenke. Wir haben sie in verschiedenen Volumina.” Tatsächlich steht auf jeder Kiste, wie viele Ballons mit welchem Volumen in der Kiste sind. Aber, oh weh: die Etiketten an den Ballons selbst, welcher Ballon welches Volumen genau hat, sind abgegangen.

Natürlich wollen der Weihnachtsmann und seine Rentiere möglichst viel Helium in den Ballons haben, damit sie möglichst viele Geschenke transportieren können. Wenn sie die Ballons allerdings zu weit aufblasen, platzen diese. Um eine Strategie zu entwickeln, beginnen sie mit einem Karton mit zwei Ballons, angegeben sind als Volumina $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$. “Wir könnten beide Ballons auf $\frac{1}{8}$ aufblasen!”, lautet der Vorschlag von Friis, “dann platzt sicher kein Ballon!”. “Ja, aber dann haben wir nur ein Gesamtvolumen von $\frac{1}{4}$”, argumentiert Jascha, “wir können auch zunächst versuchen, einen Ballon auf $\frac{1}{4}$ aufzublasen. Falls das klappt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ der Fall ist, wissen wir, dass dieser Ballon der $\frac{1}{4}$-Ballon ist. Dann können wir den anderen auf $\frac{1}{8}$ aufblasen, und haben insgesamt ein Volumen von $\frac{3}{8}$. Falls das nicht klappt und der erste Ballon platzt, muss er der $\frac{1}{8}$-Ballon gewesen sein - dann können wir aber den anderen auf $\frac{1}{4}$ aufblasen, und haben immer noch als Gesamtvolumen $\frac{1}{4}$. Beide Fälle sind gleich wahrscheinlich, also erwarten wir mit dieser Strategie ein Volumen von $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$.”.

Die anderen Rentiere sind beeindruckt und überlegen nun, wie sie die Ballons optimal aufblasen können. Hierzu überlegen sie sich einige Begriffe:

Strategie: Eine Vorgehensweise, bei der für jede mögliche Situation genau festgelegt ist, welcher Ballon im nächsten Schritt wie weit aufgeblasen wird, oder ob man fertig ist mit aufblasen. Jascha beschreibt eine Strategie.

erwarteter Gewinn: Das Volumen, welches wir für eine bestimmte Strategie erwarten zu bekommen. Jaschas Strategie liefert uns einen erwarteten Gewinn von $\frac{5}{16}$.

optimale Strategie: Eine Strategie, für welche der erwartete Gewinn mindestens so groß ist wie für jede andere Strategie für diesen Karton. Jaschas Strategie ist sogar optimal.

Endzustand: Ein Zustand der Ballons, bei dem man beschließt, nicht weiter aufzublasen; nur die nicht geplatzten Ballons werden mit ihren aktuellen Volumina angegeben. Jaschas Endzustände sind $\{\frac{1}{4}\}$ und $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$, beide treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf.

optimaler Endzustand: Ein Endzustand, bei welchem jedes weitere Aufblasen der Ballons den erwarteten Gewinn nicht mehr steigern kann. Falls wir zwei Ballons mit Volumen 2 und 3 haben, so ist $\{2, 2\}$, also insgesamt ein Volumen von 4, ein optimaler Endzustand. Wir können versuchen, einen Ballon noch weiter aufzublasen. Falls das klappt, so haben wir den Endzustand $\{2, 3\}$ mit einem Gesamtvolumen von 5, aber falls das nicht klappt, weil ein Ballon bei mehr als 2 platzt, so können wir zwar den anderen sicher auf 3 aufblasen, haben dann aber nur den Endzustand $\{3\}$. Insgesamt erwarten wir also $\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 4$ als erwarteten Gewinn, wenn wir weiter aufblasen. Wir konnten den erwarteten Gewinn also durch Aufblasen nicht steigern, somit ist der Endzustand $\{2, 2\}$ in diesem Fall optimal. Auch $\{2, 3\}$ und $\{3\}$ wären optimale Endzustände.

Standardkarton der Größe k: Ein Karton mit Ballons der Volumina

$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{k}\}$.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es existiert eine Strategie für Standardkartons, bei welcher kein Ballon zerplatzt und der erwartete Gewinn 1 ist.

2. Jede optimale Strategie für Standardkartons hat einen erwarteten Gewinn von mindestens 1.

3. Für einen Standardkarton der Größe 3 existiert eine Strategie, welche $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ als möglichen, optimalen Endzustand hat.

4. Für einen Standardkarton der Größe 3 existiert eine Strategie, welche $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ als möglichen, optimalen Endzustand hat.

5. Jede optimale Strategie in Standardkartons der Größe 2 hat in jedem optimalen Endzustand den Ballon mit Volumen 1 komplett aufgeblasen.

6. Es gibt keine Strategie in Standardkartons der Größe 2, welche mehr als $\frac{5}{4}$ als erwarteten Gewinn erreicht.

7. Es gibt eine Strategie für Standardkartons der Größe 3, welche einen erwarteten Gewinn ergibt, welcher echt größer als der größtmögliche erwartete Gewinn für Standardkartons der Größe 2 ist.

8. Ein Standardkarton der Größe 2, bei welchem das Etikett noch an dem Ballon mit Volumen $\frac{1}{2}$ hängt, hat einen kleineren optimalen erwarteten Gewinn als ein Karton mit Ballonvolumina $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$.

9. Für einen Standardkarton der Größe 4, bei welchem man bereits einen Ballon auf Volumen 1 aufgeblasen hat, ein Ballon mit Volumen $\frac{1}{2}$ geplatzt ist, und man zwei Ballons auf je Volumen $\frac{1}{4}$ aufgeblasen hat, hat man einen optimalen Endzustand erreicht.

10. Für einen Standardkarton der Größe 4, bei welchem man bereits einen Ballon auf Volumen 1 aufgeblasen hat, ein Ballon mit Volumen $\frac{1}{3}$ geplatzt ist, und man zwei Ballons auf je Volumen $\frac{1}{4}$ aufgeblasen hat, hat man noch keinen optimalen Endzustand erreicht.

9 Streik der Geschenkeverpacker

Autor: Stephan Schwartz (Zuse Institut Berlin)

Aufgabe

Es ist ein eiskalter Morgen am Nordpol und das Geschenkeverpacken in der Wichteleinheit G sollte auf Hochtouren laufen. Es sollte...
Die Wichtel haben die Arbeit jedoch gänzlich niedergelegt, da ihr Vorarbeiter, Oberwichtel Ottokar, die Arbeit schwänzt. Ottokar hat beschlossen, den beschaulichen Morgen im Eisheckenlabyrinth (siehe Abbildung 1) zu verbringen, anstatt zu arbeiten. Der Weihnachtsmann ist alles andere als begeistert, als er von der Arbeitsniederlegung hört. Er muss es schaffen, Ottokar so schnell wie möglich wieder zur Arbeit zu bekommen, denn sonst drohen Geschenke unverpackt ausgeliefert zu werden.
Der Weihnachtsmann weiß genau, dass Ottokar es ihm nicht leicht machen wird, weil er sich ohne Pause im Irrgarten bewegt. Von einer Station zu einer benachbarten Station braucht er genau eine Minute. Immer wenn Ottokar an eine Station kommt, so wählt er sofort gleichverteilt unter allen abgehenden Gängen seinen nächsten Gang und läuft weiter. Dabei kann es auch passieren, dass er den gleichen Gang nimmt, aus dem er gekommen ist.
Der Weihnachtsmann schaut noch einmal auf seinen Überwachungsmonitor vom Heckenlabyrinth. Genau! Dort, auf Station Nummer 10, ist Ottokar gerade. Ohne zu zögern macht sich der Weihnachtsmann auf den Weg. “In meinem Alter werde ich diesem Halunken aber nicht hinterherhetzen. Ich suche mir eine schöne Station und da warte ich dann, dass er dorthin kommt.” denkt er sich. Der Weihnachtsmann benötigt zwei Minuten, bis er sich an

eine beliebige Station des Labyrinths gebeamt hat. In diesen zwei Minuten bewegt sich Ottokar natürlich weiter im Labyrinth. Doch wohin sollte sich der Weihnachtsmann beamen, damit er Ottokar möglichst früh antrifft? Genauer gefragt: Welche Aussage über den möglichen Standort des Weihnachtsmanns ist die richtige, wenn es darum geht die erwartete Zeit zu minimieren, bis Ottokar ebenfalls an diese Stelle kommt?

Hinweis: Es kann vorausgesetzt werden, dass die optimale Positionierung des Weihnachtsmanns eindeutig ist. Außerdem sollte ausgenutzt werden, dass genau eine Antwort korrekt ist.

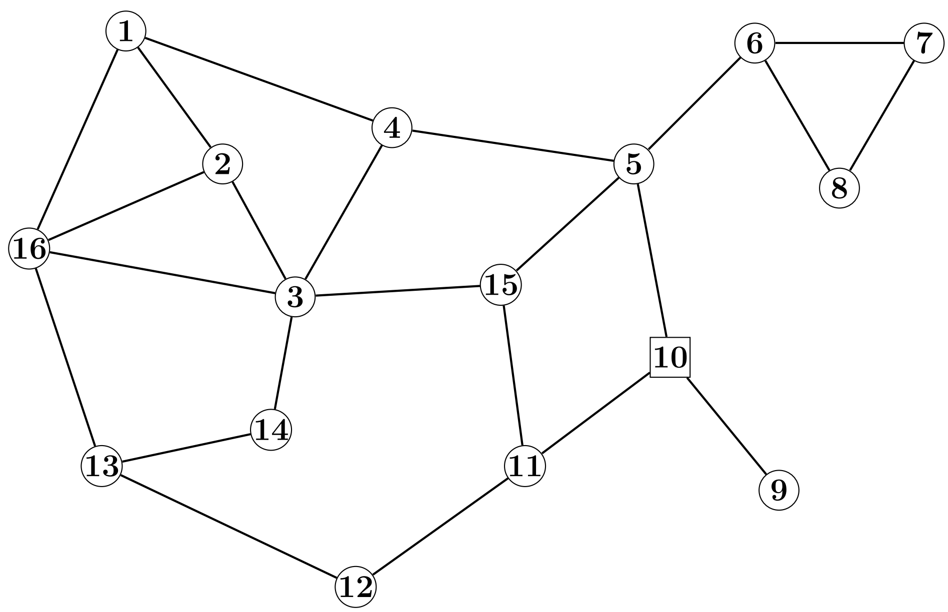


Abbildung 1: Plan des Heckenlabyrinths

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Position 11 ist besser als die Position 15.
2. Die Position 5 ist optimal.
3. Die Position 7 ist besser als die Position 8.
4. Die Position 10 ist optimal.
5. Die Positionen 6 und 4 sind gleich gut.
6. Die Position 4 ist am schlechtesten.
7. Die Position 15 ist besser als die Position 5.
8. Die Position 11 ist optimal.
9. Die Position 5 ist schlechter als die Position 10.
10. Die Position 15 ist optimal.

Projektbezug:
In einem laufenden Projekt zwischen dem Zuse Institut Berlin (ZIB) und dem Bundesamt für Güterverkehr (BAG) optimieren wir mit mathematischen Methoden die Mautkontrolle von LKWs auf deutschen Autobahnen. Speziell geht es darum, an welchen Stellen im Autobahnnetz sich ein mobiles Kontrollteam aufhalten sollte, um Mautpreller effizient zu erwischen.

10 Schneeburg

Autoren:
Hajo Broersma (Universiteit Twente), Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Aufgabe:

Endlich hat es geschneit! Die zwanzig Wichtel Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo, Frodo, Gumbo, Harpo, Izzo, Jacco, Kuffo, Loco, Mirko, Nemmo, Onno, Puzzo, Quibo, Rambo, Saxxo und Tebbo haben vier Schneeburgen gebaut und eine Schneeballschlacht veranstaltet. Die Burg im Norden war mit neun Wichteln besetzt, in der Westburg saßen sieben Wichtel, in der Südburg waren drei Wichtel, und die Ein-Mann-Burg im Osten wurde von einem einzigen Wichtel verteidigt. Über den Verlauf der Schneeballschlacht ist bekannt:

- Jeder Wichtel traf genau drei andere Wichtel.
- Jeder Wichtel traf keinen Wichtel aus seiner eigenen Burg.

Hier ist eine vollständige Tabelle aller Schneeballtreffer:

1.	Atto:	Dondo, Gumbo, Saxxo	11.	Kuffo:	Nemmo, Puzzo, Tebbo
2.	Bilbo:	Espo, Kuffo, Saxxo	12.	Loco:	Atto, Chico, Quibo
3.	Chico:	Harpo, Jacco, Saxxo	13.	Mirko:	Harpo, Jacco, Quibo
4.	Dondo:	Atto, Quibo, Rambo	14.	Nemmo:	Dondo, Jacco, Loco
5.	Espo:	Bilbo, Nemmo, Puzzo	15.	Onno:	Atto, Chico, Mirko
6.	Frodo:	Jacco, Loco, Tebbo	16.	Puzzo:	Jacco, Loco, Tebbo
7.	Gumbo:	Harpo, Nemmo, Rambo	17.	Quibo:	Bilbo, Mirko, Saxxo
8.	Harpo:	Loco, Onno, Quibo	18.	Rambo:	Espo, Jacco, Tebbo
9.	Izzo:	Harpo, Kuffo, Onno	19.	Saxxo:	Frodo, Kuffo, Loco
10.	Jacco:	Bilbo, Frodo, Saxxo	20.	Tebbo:	Espo, Gumbo, Nemmo

Welche der folgenden Aussagen trifft auf diese Schneeballschlacht zu?

Antwortmöglichkeiten:

1. Atto und Bilbo waren beide in der Westburg.
2. Chico und Dondo waren beide in der Nordburg.
3. Espo war in der Westburg und Frodo in der Ostburg.
4. Gumbo war in der Ostburg und Harpo in der Südburg.
5. Izzo und Jacco waren beide in der Südburg.
6. Kuffo war in der Nordburg und Loco in der Westburg.
7. Mirko und Nemmo waren beide in der Ostburg.
8. Onno war in der Südburg und Puzzo in der Nordburg.
9. Quibo war in der Ostburg und Rambo in der Nordburg.
10. Saxxo war in der Westburg und Tebbo in der Südburg.

11 Die Uhr mit dem roten Knopf

Autor: Onno Boxma (TU Eindhoven)

Aufgabe:

Knecht Ruprecht besitzt eine seltsam verschnörkelte alte Uhr mit den Zahlen 1 bis 12 auf dem Ziffernblatt. Die Uhr hat nur einen einzigen Zeiger und auf der Rückseite hat sie einen großen roten Knopf. Wenn Ruprecht den Zeiger auf 12 stellt und den roten Knopf drückt, so passiert folgendes:
Mit Wahrscheinlichkeit von 1/2 springt der Zeiger auf die Zahl 1 (den Nachbarn von 12 im Uhrzeigersinn) und mit Wahrscheinlichkeit von 1/2 springt der Zeiger auf die Zahl 11 (den Nachbarn von 12 gegen den Uhrzeigersinn). Der Zeiger verweilt für eine Sekunde auf der neuen Zahl, und springt danach mit Wahrscheinlichkeit von jeweils 1/2 zu einer der beiden nun benachbarten Zahlen (im und gegen den Uhrzeigersinn) weiter. Und dann wird dieser Schritt immer wiederholt:
Nach einer Sekunde auf der neuen Zahl springt der Zeiger mit Wahrscheinlichkeit von jeweils 1/2 zu einer der beiden ihr benachbarten Zahlen.

Der Zeiger springt solange weiter, bis dass er jede der Zahlen von 1 bis 11 mindestens einmal besucht hat. Sobald diese Bedingung erfüllt ist, bleibt der Zeiger stehen. Für $1 \leq i \leq 12$ bezeichnen wir mit $p(i)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger schlussendlich auf der Zahl i stehen bleibt.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Antwortmöglichkeiten:

1. $p(1) + p(2) < p(10) + p(11)$
2. $p(6) < p(5) < p(4) < p(3)$
3. $p(6) > p(5) > p(4) > p(3)$
4. $p(12) > 0$
5. $p(2) + p(3) + p(4) = p(5) + p(6)$
6. $p(3) + p(5) > p(8) + p(11)$
7. $3p(4) < 2p(6)$
8. $p(6) > 1/10$
9. $p(2) = p(6)$
10. $p(1) < 1/16$

12 Weihnachtskugeln in verschiedenen Höhen

Autor: Merlijn Staps (Universiteit Utrecht)

Aufgabe:

Die Wichtel haben mit dem Schmücken des Weihnachtsbaums begonnen. Sie hängen silberne und goldene Weihnachtskugeln in den Baum. Dabei beachten sie nur die jeweiligen Stellen, an denen die zugehörigen Haken der Kugeln im Baum befestigt werden. Als erstes hängen sie den Haken einer goldenen Kugel 50 cm über dem Boden in den Baum. Jeden weiteren Haken hängen sie höher als alle bereits im Baum hängenden ein.
Die Wichtel vereinbaren, dass der Höhenunterschied zwischen dem ersten und dem zweiten Haken größer sein soll als der zwischen dem zweiten und dem dritten, dieser wiederum größer als der zwischen dem dritten und vierten usw.
Der Haken von der zweiten Kugel wird weniger als 60 cm hoch eingehakt.
Außerdem haben die Wichtel folgende Regel aufgestellt: Goldene Kugeln können nur auf Höhen von ganzen Dezimetern eingehakt werden. Also könnte zum Beispiel nur auf 50 cm, 60 cm, 70 cm usw. ein Haken von einer goldenen Kugel hängen.
Die Wichtel hängen 11 goldene Kugeln nach diesen Regeln in den Baum. Wie viele silberne Kugeln benötigen sie dafür mindestens?

Antwortmöglichkeiten:

1. 28 silberne Kugeln
2. 30 silberne Kugeln
3. 32 silberne Kugeln
4. 36 silberne Kugeln
5. 40 silberne Kugeln
6. 42 silberne Kugeln
7. 44 silberne Kugeln
8. 45 silberne Kugeln
9. 48 silberne Kugeln
10. 55 silberne Kugeln

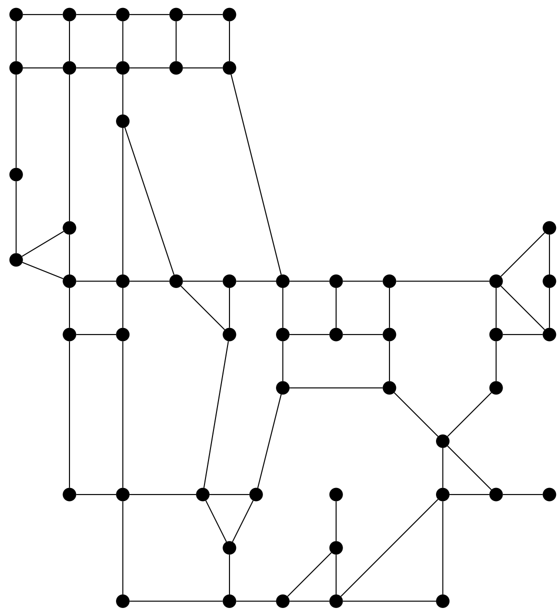
13 Nachbarschaftsstreit unter Wichteln

Autoren: André Nichterlein (TU Berlin), Christian Hercher (FSU Jena)

Aufgabe

Im Planungszentrum der Geschenke-Pack-Fabrik herrscht Panik. Oberwichtel Alpha und Wichtel-Einsatz-Planer Aleph versuchen das Problem zu lösen:
Aleph: „Ahhhh! Was ist hier denn los?! Gestern lief alles noch ganz normal. Und heute? Plötzlich will Anton nicht mehr mit Paula, Friedrich nicht mehr mit Richard, und, und, und arbeiten. Ich habe es versucht! Aber immer, wenn ich zwei dieser Wichtel zusammen einbestellt habe, konnten wir nie 'das Problem' lösen: Vielmehr hielten sie mit ihrem Streit auch alle anderen vom Arbeiten ab! Was war da los auf der gestrigen Weihnachtsfeier?“
Alpha: „Ja, ich habe auch schon davon gehört. Seit gestern Abend streiten sich plötzlich viele Wichtel untereinander. Und das ganz ohne Grund! Ich vermute, da steckt ein Saboteur dahinter: Irgendjemand muss sich am Punsch zuschaffen gemacht haben, der diese Streitkultur ausgelöst hat. Das kann nur der Grinch gewesen sein...“
Aleph: „Der schon wieder! Kann der uns nicht mal wenigstens ein Jahr in Ruhe arbeiten lassen, dieser Miesepeter?“
„Ok, es ist nun einmal so, wie es ist. Wie gehen wir damit um?“
Alpha: „Ganz einfach: Wir schicken ein paar der Wichtel nach Hause, so dass wir nur noch Wichtel in der Fabrik haben, die nicht im Streit miteinander liegen.“
Aleph: „Ich habe mal die Situation, wie sie sich gerade darstellt, aufgemalt: Die Punkte sollen meine Wichtel darstellen und eine Linie ist genau dann

zwischen je zweien gemalt, wenn diese aufgrund ihrer Differenzen nicht mehr zusammenarbeiten können.“



Aleph: „Soll ich jetzt ewig Gruppen zusammen stellen und ausprobieren, ob diese funktionieren? Ich will ja nur möglichst wenige nach Hause schicken müssen.“
Alpha: „Wir müssen uns ein System überlegen nach dem wir die Wichtel aussuchen, die wir nach Hause schicken sollten. Zum Beispiel können wir nach folgender Regel verfahren:
(Regel -1) *Wenn ein Wichtel nur mit einem einzigen weiteren Ärger hat, dann kannst du immer den ersten behalten und den anderen nach Hause schicken. Dadurch löst du potentiell weitere, aber immer mindestens auch den einen Konflikt, der beseitigt werden würde, wenn du den ersten gehen lassen würdest. Also kannst du auch immer gleich ohne nachzudenken den zweiten der beiden nach Hause schicken.*“
Aleph: „Stimmt! Aber leider sind von dieser Vereinfachung nur zwei Wichtel in unserer Fabrik betroffen; das hilft mir nicht viel. Die meisten Wichtel liegen einfach mit zwei oder mehr Wichteln im Streit. Kannst du mir für diese auch etwas vorschlagen?“

Alpha: „Können wir diese Regel nicht einfach auf diese Situation übertragen? Also zum Beispiel:"
(R0) *Wenn ein Wichtel mit genau zwei anderen Wichteln im Streit liegt, so schicke diese beiden Wichtel weg.*
Aleph: „Aber wenn die beiden anderen Wichtel mit niemandem weiter streiten, so schicke ich doch besser den Wichtel weg, der mit den beiden im Streit liegt. In diesem Sinne ist Regel (R0) also nicht richtig."
Alpha: „Das ist wohl wahr. Aber vielleicht kann man die Regel reparieren. Ich habe noch drei weitere Vorschläge:"

(R1) *Wenn ein Wichtel mit genau zwei anderen Wichteln im Streit liegt, welche auch untereinander im Streit liegen, so schicke diese beiden anderen Wichtel weg.*
(R2) *Wenn ein Wichtel mit genau zwei anderen Wichteln im Streit liegt, die nicht miteinander, aber beide noch mit weiteren Wichteln im Streit liegen, so schicke diese beiden Wichtel weg.*
(R3) *Wenn ein Wichtel mit genau zwei anderen Wichteln im Streit liegt, welche auch untereinander im Streit liegen und beide noch mit weiteren Wichteln im Streit liegen, so schicke diese beiden Wichtel weg.*

Aleph: „Aber sind diese Regeln diesmal ‚richtig'- also führen nicht dazu, dass man mehr Wichtel nach Hause schickt, als man müsste? Schaffe ich es überhaupt, ein arbeitsfähiges Team zusammenzustellen?"

Frage: Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

Antwortmöglichkeiten:

1. Aleph kann ein arbeitsfähiges Team aus 30 oder mehr Wichteln bilden.
2. R1, R2 und R3 sind alle „richtig“.
3. R1 und R2 sind „richtig“, R3 ist nicht „richtig“.
4. R1 und R3 sind „richtig“, R2 ist nicht „richtig“.
5. R2 und R3 sind „richtig“, R1 ist nicht „richtig“.
6. R1 und R2 sind nicht „richtig“, R3 ist „richtig“.
7. R1 und R3 sind nicht „richtig“, R2 ist „richtig“.
8. R2 und R3 sind nicht „richtig“, R1 ist „richtig“.
9. R1, R2 und R3 sind alle nicht „richtig“.
10. Es ist Aleph nicht möglich, auch nur 20 Wichtel zu finden, die miteinander arbeiten können.

Projektbezug:

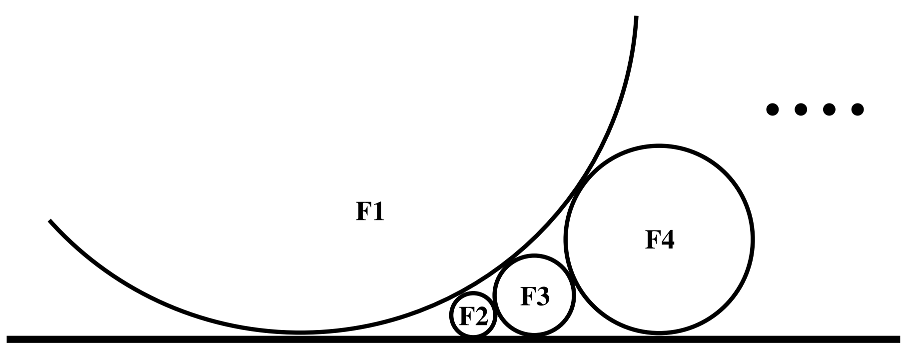
Fasst man die Wichtel als Knoten in einem Graphen auf (siehe Graphentheorie) und zeichnet genau dann eine Kante zwischen je zwei dieser Knoten, wenn die Wichtel nicht miteinander arbeiten können, so sucht man hier nach einer minimalen Knotenüberdeckung (engl. vertex cover): Wie viele Knoten muss man mindestens aussuchen, sodass jede Kante in diesem Graphen mindestens einen Endpunkt in der ausgesuchten Knotenmenge besitzt?
Dieses Problem ist NP-vollständig, d.h. es gibt ziemlich sicher keinen schnellen Algorithmus (d.h. Polynomialzeitalgorithmus), der dieses Problem für alle möglichen Vorgaben löst. Aber wie geht man damit um? In der Praxis stellen sich sehr häufig eben genau solche NP-vollständigen Probleme...
Ein Ansatz ist es „einfache Teile" sofort zu erledigen; und der schwierige Rest (genannt Problemkern), der dann nicht mehr effizient gelöst werden kann, ist dann hoffentlich so klein, dass auch weniger effiziente Algorithmen in zumutbarer Zeit eine Lösung finden können.
Dieser „Preprocessing"-Ansatz ist eine Technik, die mit sehr großem Erfolg in vielen Algorithmen zum Einsatz kommt. Theoretische Untersuchungen zu der Effizienz und den Grenzen dieser Technik finden im Bereich der Parametrisierten Algorithmik statt.

14 Weinkeller

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Aufgabe:

Heute wird der alte Weinkeller aufgeräumt. Im hintersten Gewölbe lagern hunderteins liegende Weinfässer $F_1, \ldots, F_{101}$ in einem unglaublichen Durcheinander. Jedes dieser Fässer ist zylinderförmig; der Radius der Grundfläche von F_j wird mit r_j bezeichnet ($1 \leq j \leq 101$). Die Fässer sind ganz verschieden groß: Zum Beispiel beträgt der Radius r_1 des riesigen Fasses F_1 ganze 10 Meter, während der Radius r_2 des Fasses F_2 bloß 1 Millimeter beträgt. Die liegende Fässer haben alle die Eigenschaft, dass sie sich in der folgend genannten Art und Weise anordnen lassen:
Zuerst rollt Knecht Ruprecht das gewaltige Fass F_1 bis an die Wand und lässt es dort ruhen. Dann rollt ein Nanowichtel das winzige Fass F_2 unter das Fass F_1, bis dass es an F_1 anstößt. Ein Mikrowichtel rollt danach das Fass F_3 heran, sodass es sowohl F_1 als auch F_2 berührt. Ein Milliwichtel rollt sodann das Fass F_4 heran, bis dass es die beiden Fässer F_1 und F_3 berührt. Und so weiter, und so fort: Für $5 \leq j \leq 101$ wird das Fass F_j immer so weit gerollt, bis dass es die beiden Fässer F_1 und F_{j-1} berührt. Die folgende Abbildung zeigt die Situation nach den ersten vier Fässern von der Seite. (Achtung: Diese Skizze ist nicht maßstabsgetreu.)



Wir fragen uns: Wie groß ist denn der Grundflächenradius r_{101} des letzten Fasses F_{101}?

Antwortmöglichkeiten:

1. Ungefähr 10 Zentimeter
2. Ungefähr 20 Zentimeter
3. Ungefähr 50 Zentimeter
4. Ungefähr 1 Meter
5. Ungefähr 10 Meter
6. Ungefähr 20 Meter
7. Ungefähr 50 Meter
8. Ungefähr 100 Meter
9. Ungefähr 1 Kilometer
10. Unendlich groß

15 Schneeflocke

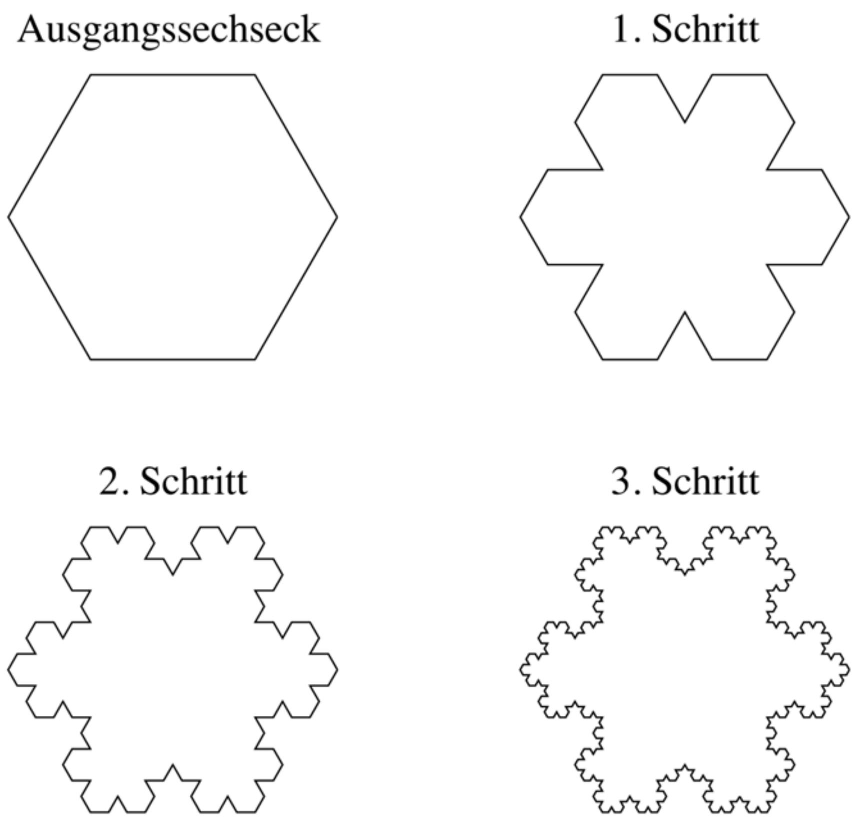
Autor: Oleh Omelchenko (Weierstraß Institut)

Aufgabe:

Um die Fläche eines sechseckigen Schmuckstückes für den Tannenbaum vollständig zu bemalen, brauchen Elfen genau sechs Tuben mit goldener Farbe. Aber welch Schreck! Diesmal ging eine Tube verloren und die Elfen wissen nicht, was sie tun sollen. Ein Elf schlägt vor, aus dem Sechseck eine schöne Schneeflocke zu machen. Dafür macht er Folgendes:
Er schneidet an jeder Seite des Sechseckes genau in der Mitte ein kleines

gleichseitiges Dreieck aus. Die Seiten der Dreiecke sind so lang wie ein Drittel einer Seite beim Ausgangssechseck. So bekommt er eine neue Figur, die auch gleichlange Seiten hat. Diese Figur ist im 1. Schritt der Abbildung zu sehen.
Dann wiederholt er das Verfahren in analoger Weise und schneidet an jeder Seite der Figur noch ein kleineres Dreieck aus, welches ein Drittel der aktuellen Seitenlänge hat. Diese Figur ist im 2. Schritt der Abbildung zu sehen.

Wie viele Male muss der Elf dieses Verfahren mindestens durchführen, um am Ende mit seinen verbliebenen fünf Farbtuben eine Schneeflocke vollständig bemalen zu können?



Antwortmöglichkeiten:

1. Es reicht, nur den 1. Schritt zu machen
2. Der Elf muss bis zum 2. Schritt gehen
3. Der Elf muss bis zum 3. Schritt gehen
4. Der Elf muss bis zum 4. Schritt gehen
5. Der Elf muss bis zum 5. Schritt gehen
6. Der Elf muss bis zum 6. Schritt gehen
7. Der Elf muss bis zum 7. Schritt gehen
8. Der Elf muss bis zum 8. Schritt gehen
9. Der Elf muss bis zum 9. Schritt gehen
10. Der Elf muss unendlich viele Schnitte machen

Projektbezug:

Wenn wir das oben beschriebene Verfahren unendlich viele Male wiederholen, bekommen wir eine seltsame Figur, die man ein *Fraktal* nennt. Ihre besonderen Eigenschaften sind ein hoher Grad der Selbstähnlichkeit und, was sehr erstaunlich ist, unendliche Grenzenlänge trotz einer endlichen Fläche. In der Mathematik trifft man fraktale Gebilde im Studium von dynamischen Systemen, die ein komplexes Verhalten, sogenannte *seltsame Attraktoren*, erzeugen. Aber Fraktale findet man auch in der Natur. Typische Beispiele aus der Biologie sind die fraktalen Strukturen bei der Züchtung des grünen Blumenkohls Romanesco und bei den Farnen. Eine große Ähnlichkeit mit Fraktalen zeigen auch Küstenlinien und die Trajektorien von der brownschen Molekularbewegung.

16 Die Hochebene Xavia

Autor: Arne Roggensack (Weierstraß Institut)

Aufgabe:

Wie jedes Jahr muss der Weihnachtsmann mit seinem Rentierschlitten beim Ausliefern der Geschenke über die Hochebene Xavia in Chaosland und dabei den zugefrorenen Quadratsee überqueren. Dies ist ein See mit quadratischer Oberfläche der Größe 1×1. Dieser See ist für seine widrigen Windbedingungen bekannt. Der Wind kann an unterschiedlichen Stellen des Sees in verschiedene Richtungen blasen und ist zudem so stark, dass die Rentiere den weiteren Weg des Schlittens nicht mehr beeinflussen können.
Der Weihnachtsmann hat sich aber in den letzten Jahren Notizen gemacht. Daher weiß er, wo der Schlitten abhängig von seiner aktuellen Position (x, y) nach dem nächsten Schritt der Rentiere landet:

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x, 2y) & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ und } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ (2y, 2x-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ (2y-1, 2x) & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ (2x-1, 2y-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ und } \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Um die Geschenke pünktlich abzuliefern, muss der Weihnachtsmann den See überqueren. Er kann nicht drum herum fahren, da das Gelände dort noch unwegsamer ist und er zu viel Zeit verlieren würde. Deshalb möchte der Weihnachtsmann besser verstehen, welchen Weg der Schlitten in Abhänigkeit von seiner Startposition (x_0, y_0) nimmt. Für diesen ersten Schritt können die

Rentiere beliebig viel Anlauf nehmen, so dass der Schlitten jede Position mit den Koordinaten $0 < x_0 < 1$ und $0 < y_0 < 1$ zielgenau erreichen kann. Aber - und das versteht der Weihnachtsmann selber nicht warum - x_0 und y_0 sind immer rationale Zahlen.
Der Weihnachtsmann hat sich folgendes überlegt:

a) Es gibt eine Position (x_0, y_0), wo der Schlitten sich nicht mehr bewegt.

b) Es gibt eine Position (x_0, y_0) von der aus der Schlitten nach einem Schritt an einem anderen Ort landet, aber nach zwei Schritten wieder auf dieser Position (x_0, y_0) steht.

c) Es gibt eine Position (x_0, y_0), von der aus der Schlitten nach einem Schritt an einem anderen Ort landet, aber nach drei Schritten wieder auf dieser Position (x_0, y_0) steht.

d) Es gibt eine Postion (x_0, y_0) mit $x_0 \neq y_0$, von der aus der Schlitten nach einem Schritt an einem anderen Ort landet, aber nach drei Schritten wieder bei (x_0, y_0) steht.

e) Für jede Position (x_0, y_0) kommt der Schlitten nach endlich vielen Schritten wieder bei (x_0, y_0) an.

f) Der Schlitten kann an jeder Stelle des westlichen Ufers des Sees ankommen, d.h. bei allen Koordinaten der Form $(0, y)$ mit $0 < y < 1$.

g) Der Schlitten kann nicht an der nördlichen Seite des Sees ankommen, d.h. bei Koordinaten der Form $(x, 1)$.

h) Zu jeder natürlichen Zahl $n > 1$ gibt es einen Punkt (x_0, y_0), so dass der Schlitten nach genau n Schritten das erste Mal im Punkt $(0, 0)$ ankommt.

i) Zu jeder natürlichen Zahl $n > 1$ gibt es einen Punkt (x_0, y_0), so dass der Schlitten nach n Schritten wieder bei (x_0, y_0) steht, aber nach einem Schritt an einem anderen Ort stand.

Leider sind nicht alle Aussagen wahr. Welche Aussagen sind falsch?

Antwortmöglichkeiten:

1. Nur Aussage a) ist falsch.
2. Nur Aussage e) ist falsch.
3. Nur Aussage h) ist falsch.
4. Nur Aussage i) ist falsch.
5. Die Aussagen c) und d) sind falsch.
6. Die Aussagen c) und i) sind falsch.
7. Die Aussagen e) und g) sind falsch.
8. Die Aussagen e) und i) sind falsch.
9. Die Aussagen f), g) und h) sind falsch.
10. Die Aussagen b), c), d) und i) sind falsch.

17 Weihnachtsstimmung

Autorinnen: Heide Hoppmann (Zuse Institut Berlin),
Marika Karbstein (Zuse Institut Berlin)
Projekt: „Infrastructure design and passenger behaviour in public transport“

Aufgabe

„Ich habe keine andere Idee mehr. Es muss an unserem Weihnachtsgebäck liegen“, sagt der Weihnachtsmann. Er war zum Chef der Weihnachtbäckerei Theodor Lecker geeilt, um mit ihm über die fehlende Weihnachtsstimmung im Weihnachtsland zu sprechen. Dieser gibt zerknirscht zu: „Hm, ja, bei uns gab es in der Tat einen kleinen Vorfall. Unsere beiden Jüngsten Hans und Ole betrachten die Backstube gerne als ihr Raumschiff 'flitzender Rabe'. Wir hatten nur einen Augenblick nicht zugeschaut und schon hatten sie ein paar Knöpfe gedrückt. Wir dachten, wir hätten die alten Einstellungen wieder hergestellt. Aber anscheinend ist dem nicht so. Leider fehlt in einigen Plätzchen die Weihnachtsstimmung.“

Der Weihnachtsmann weiß, dass in jedem Plätzchen mindestens eine der Zutaten Tannenzucker, Schneemehl und Weihnachtssterngewürz vorkommt. Eine Mengeneinheit von jeder dieser drei Zutaten hat einen festen Stimmungsfaktor. Nimmt man zwei Einheiten einer Zutat, verdoppelt sich der Stimmungsfaktor, bei drei Einheiten verdreifacht sich der Stimmungsfaktor usw. Beim Mischen der Zutaten summieren sich deren Stimmungsfaktoren. Erreicht der Stimmungsfaktor einen bestimmten Wert, den Weihnachtswert, so stellt sich eine Weihnachtsstimmung ein. Die Weihnachtsstimmung bleibt zunächst auch, wenn der Weihnachtswert überschritten wird, verfliegt aber sofort, wenn von einer – egal welcher – Zutat zuviel verwendet wurde. Zuviel bedeutet, dass, wenn man eine Einheit weniger der Zutat nähme und alle anderen Mengeneinheiten gleich ließe, der Weihnachtswert auch erreicht oder überschritten worden wäre. Mit anderen Worten: Wenn eine Mischung für Weihnachtsstimmung sorgt, dann würde der Weihnachtswert unterschritten werden, sobald man von einer der drei Zutaten eine Einheit weniger nehmen würde.
In der Backstube stehen 13 Backautomaten. Jeder bäckt eine bestimmte Plätzchensorte und mischt die drei Zutaten in einem bestimmten Verhältnis dazu.
„Wie sind denn noch mal die Stimmungsfaktoren von Tannenzucker, Schneemehl und Weihnachtssterngewürz?“, fragt der Weihnachtsmann. Theodor Lecker antwortet verlegen: „Das habe ich vergessen. Aber es sind alles einstellige, positive, ganze Zahlen“. „Hm, und der Weihnachtswert?“, fragt der Weihnachtsmann. „Den weiß ich auch nicht mehr“, antwortet Theodor Lecker traurig. „Ich weiß nur noch, dass 5 Einheiten Tannenzucker, eine Einheit Schneemehl und 3 Einheiten Weihnachtssterngewürz exakt den Weihnachtswert ergeben. Außerdem überschreiten eine Einheit Tannenzucker, 2 Einheiten Schneemehl und 4 Einheiten Weihnachtssterngewürz den Weihnachtswert um 1, sorgen aber für Weihnachtsstimmung. Für Weihnachtsstimmung sorgen auch 3 Einheiten Tannenzucker, eine Einheit Schneemehl und 4 Einheiten Weihnachtssterngewürz; dabei wird der Weihnachtswert um 2 überschritten. Die Backautomaten 11 bis 13 mit diesen Mischverhältnissen sind also korrekt eingestellt.“
„Vielleicht könnten wir eine Plätzchenverkostung machen, um rauszubekommen, welche der anderen Backautomaten falsch eingestellt sind...“, überlegt Theodor Lecker. Der Weihnachtsmann schaut auf die Einstellungen der Backautomaten und brummt „Hm, könnten wir ausprobieren. Ich habe aber eine Idee und glaube, dass nur ein Backautomat falsch eingestellt ist.“
Der Weihnachtsmann hat recht. Welcher Backautomat mit den folgenden Einstellungen ist falsch konfiguriert?

Antwortmöglichkeiten:

1. 2 Einheiten Tannenzucker, 3 Einheiten Schneemehl und 3 Einheiten Weihnachtssterngewürz
2. 4 Einheiten Tannenzucker, 2 Einheiten Schneemehl und 3 Einheiten Weihnachtssterngewürz
3. 3 Einheiten Tannenzucker, 4 Einheiten Schneemehl und 2 Einheiten Weihnachtssterngewürz
4. 5 Einheiten Tannenzucker, 3 Einheiten Schneemehl und 2 Einheiten Weihnachtssterngewürz
5. 6 Einheiten Tannenzucker, 2 Einheiten Schneemehl und 2 Einheiten Weihnachtssterngewürz
6. 8 Einheiten Tannenzucker, 1 Einheit Schneemehl und 2 Einheiten Weihnachtssterngewürz
7. 6 Einheiten Tannenzucker, 4 Einheiten Schneemehl und 1 Einheit Weihnachtssterngewürz
8. 8 Einheiten Tannenzucker, 3 Einheiten Schneemehl und 1 Einheit Weihnachtssterngewürz
9. 9 Einheiten Tannenzucker, 2 Einheiten Schneemehl und 1 Einheit Weihnachtssterngewürz
10. 11 Einheiten Tannenzucker, 1 Einheit Schneemehl und 1 Einheit Weihnachtssterngewürz

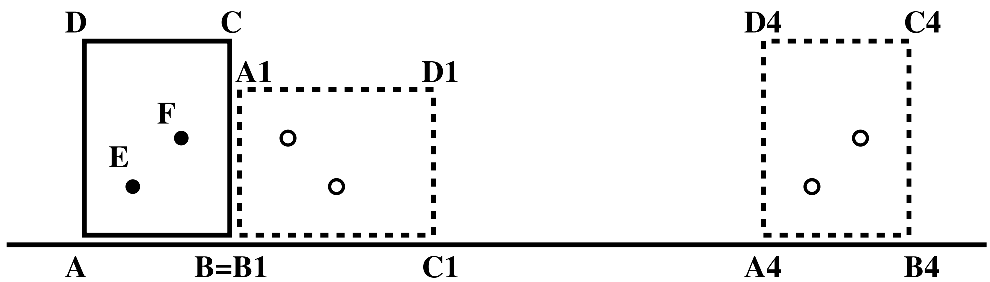
Projektbezug:
In Verkehrsnetzen sind z.B. Kapazitäten gegeben, die erfüllt werden müssen. Oft stehen dafür nur bestimmte Grundkapazitäten zur Verfügung, aus denen die gegebene Kapazität kombiniert werden soll. In einem Liniennetz zum Beispiel sollen die Linien im 10, 20 oder 30 Minutentakt verkehren. Jeder Takt entspricht einer Grundkapazität; man muss nun entscheiden, wie viele Linien mit welchem Takt verkehren sollen, damit eine gegebene Mindestkapazität erreicht wird. Im Allgemeinen gibt es mehrere Möglichkeiten und man ist vor allen Dingen an die minimalen Möglichkeiten interessiert. So wie im Beispiel mit dem Weihnachtswert. Alle Backautomaten sollen so eingestellt sein, dass die Stimmungsfaktoren der Zutaten den Weihnachtswert gerade erreichen bzw. überschreiten.
Bemerkungen:

18 Granitblock

Autoren: Rudi Pendavingh (TU Eindhoven), Frits Spieksma (KU Leuven)

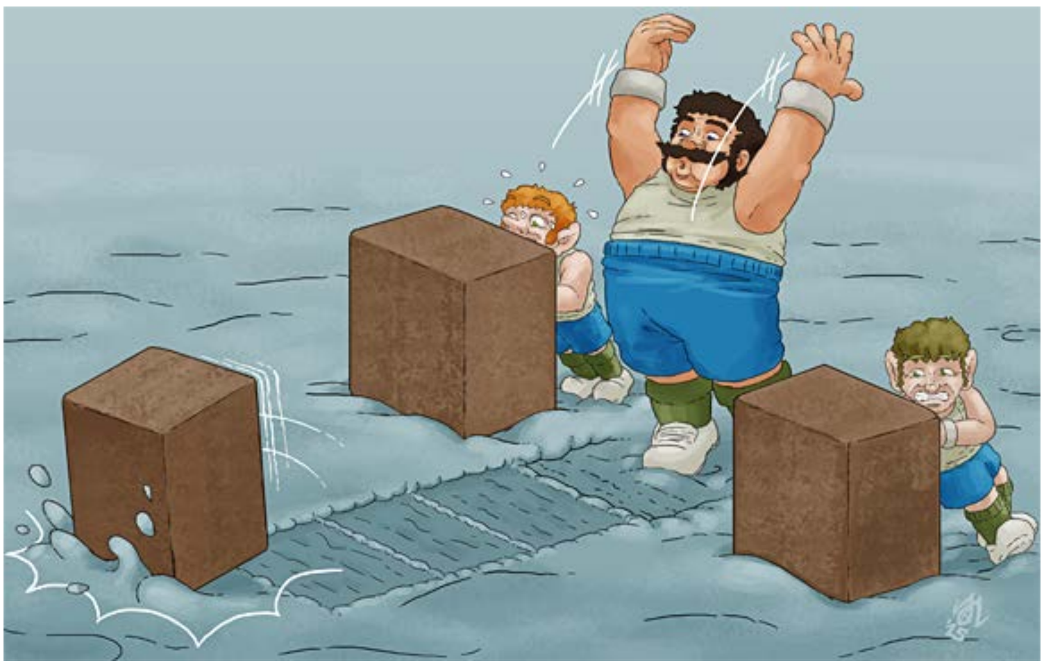
Aufgabe:

Der Höhepunkt des letzten Sportjahres war natürlich wieder der traditionelle Eisenwichtel Wettkampf: Irongnome 2015 – der vielleicht härteste Sportwettstreit der Welt. Im sechsten Teilwettbewerb musste Knecht Ruprecht einen gewaltigen quaderförmigen Granitblock über eine 14 Wichtelmeter lange Strecke nur durch mehrmaliges Kippen ins Ziel befördern.
Der Block war 4 Wichtelmeter hoch, und seine Grundfläche betrug 3 Wichtelmeter mal 3 Wichtelmeter.
Die folgende Abbildung zeigt die Anfangsposition des Blocks (von der Seite - mit Eckpunkten $ABCD$), die entsprechende Position $A_1B_1C_1D_1$ nach dem ersten Kippen, und die Endposition $A_4B_4C_4D_4$ nach dem vierten Kippen.



Also kippte Ruprecht den Block zuerst in Richtung des Zielpunktes um eine Kante der Grundfläche. Dann kippte er ihn noch einmal, sodass der Block auf dem Kopf stand. Danach kippte er den Block ein drittes Mal und dann noch ein viertes Mal, so dass der Block schließlich in aufrechter Position im Ziel zu stehen kam.

Auf der Seite des Granitblocks befanden sich zwei kleine schwarze Farbflecken: Der erste Fleck E lag 1 Wichtelmeter über dem Erdboden und 1 Wichtelmeter vom linken Rand entfernt, und der zweite Fleck F lag 2 Wichtelmeter über dem Erdboden und 2 Wichtelmeter vom linken Rand entfernt. Die beiden Flecken sind im Bild durch kleine Kreise markiert. Durch das viermalige Kippen legte jeder der sechs Punkte A, B, C, D, E und F einen gewissen Weg entlang einer gewissen Kurve zurück. Wir bezeichnen die Länge dieser Wege für A, B, C, D, E, F mit a, b, c, d, e, f (in Wichtelmetern gemessen). Welche der folgenden Aussagen bezüglich der sechs Längen a, b, c, d, e, f ist richtig?



Antwortmöglichkeiten:

1. Da der Block zum Schluss wieder aufrecht steht, sind alle sechs Wege gleich lang.
2. Je weiter ein Punkt vom Erdboden entfernt ist, desto länger ist sein Weg. Daher gilt $c = d > f > e > a = b$.
3. Je weiter ein Punkt vom Erdboden entfernt ist, desto kürzer ist sein Weg. Daher gilt $c = d < f < e < a = b$.
4. Die vier Ecken legen gleich lange Wege zurück, und $a = b = c = d > e > f$.
5. Die vier Ecken legen gleich lange Wege zurück, und $a = b = c = d > f > e$.
6. Die vier Ecken legen gleich lange Wege zurück, und $a = b = c = d > e = f$.
7. Da E genau in der Mitte zwischen A und F liegt, gilt $e = \frac{1}{2}(a + f)$.
8. Die beiden Ecken am linken Rand der Vorderseite legen den längsten Weg zurück. Es gilt $a = d > e > f > b = c$.
9. Die beiden Ecken am rechten Rand der Vorderseite legen den längsten Weg zurück. Es gilt $b = c > f > e > a = d$.
10. Alle sechs Wege sind verschieden lang.

19 Summe und Produkt

Autoren: Cor Hurkens (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

Aufgabe:

Der Weihnachtsmann sagt zu den beiden Klugwichteln Prodo und Summo: “Ich habe mir zwei ganze Zahlen x und y mit $1 \leq x \leq y$ ausgedacht. Dann habe ich ihre Summe $S = x + y$ auf eine Karte und das Produkt $P = xy$ auf eine andere Karte geschrieben. Prodo hat die Karte mit dem Produkt erhalten und Summo hat die Karte mit der Summe erhalten. Ihr dürft euch nun eure Karten verdeckt ansehen!”
Prodo und Summo starren eine Zeit lang auf ihre Karten und denken tief nach.
Dann sagt Summo zu Prodo: “Du kannst die Summe S nicht bestimmen.”
Prodo erwidert: “Aha! Danke für diesen Hinweis. Jetzt weiß ich, dass $S = 46$ ist.”
Summo erwidert: “Aha! Danke für diesen Hinweis. Jetzt kenne ich x und y!”

Welche der folgenden zehn Aussagen trifft nun zu?

Antwortmöglichkeiten:

1. $23 \le y < 25$
2. $25 \le y < 27$
3. $27 \le y < 29$
4. $29 \le y < 31$
5. $31 \le y < 34$
6. $34 \le y < 37$
7. $37 \le y < 40$
8. $40 \le y < 43$
9. $43 \le y < 46$
10. Die beiden Wichtel müssen sich geirrt haben: Aus ihrem Gespräch heraus können sie die Zahlen x und y unmöglich bestimmen.

20 Riesige Potenzen

Autor: Tom Verhoeff (TU Eindhoven)

Aufgabe:

In der großen Weihnachtspaketzentrale herrscht Hochbetrieb. Es gibt doch tatsächlich zehn Milliarden Pakete. Damit die Wichtel nicht den Überblick verlieren, werden die Pakete mit den ganzen Zahlen 1 bis 10 000 000 000 nummeriert. Diese Nummern werden immer länger.
Aber manche Zahlen kann man als Potenzen viel kürzer schreiben. Die Wichtel fragen sich, bei wie vielen Zahlen das möglich ist, bevor das zehnmilliardste Paket an der Reihe ist.
Eine Zahl kann als echte Potenz ausgedrückt werden, wenn sie mindestens eine Darstellung als Potenzzahl hat, bei der Basis und Exponent natürliche Zahlen echt größer als 1 sind.
Der Wichtel Rudi möchte das an der Zahl 125 genauer erklären:
Eine mögliche Potenzdarstellung für die Zahl 125 ist $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Hier ist 5 die Basis und 3 der Exponent. Beides sind natürliche Zahlen, die echt größer als 1 sind. Dass es weitere Darstellungen mit anderen Basen und Exponenten gibt, ist hier nicht relevant. Die Existenz von mindestens einer solchen echten Potenz zählt.
Die Wichtel üben das Bestimmen von echten Potenzen für die ganzen Zahlen, die echt kleiner sind als 10. Sie finden heraus, dass nur die Zahlen 4, 8 und 9 sich als echte Potenzen darstellen lassen:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^1 \\
2 &= 2^1 \\
3 &= 3^1 \\
4 &= 4^1 = 2^2 \\
5 &= 5^1 \\
6 &= 6^1 \\
7 &= 7^1 \\
8 &= 8^1 = 2^3 \\
9 &= 9^1 = 3^2
\end{aligned}
$$

Aus Faulheit, wollen sie die Pakete möglichst mit echten Potenzen nummerieren.
Wie viele Zahlen, die echt kleiner sind als 10 Milliarden (10^{10}), können als echte Potenzen dargestellt werden?

Antwortmöglichkeiten:

1. 102218
2. 102219
3. 102229
4. 102230
5. 102292
6. 102294
7. 102368
8. 102371
9. 102716
10. 102719

21 Wasserfass

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)

Aufgabe:

Im Rentiergehege steht ein großes zylinderförmiges Fass, welches voll mit Wasser gefüllt ist. Das Fass ist 120 cm hoch und seine Grundfläche hat einen Durchmesser von 80 cm. Das Fass ist aus Metall und wiegt ohne Inhalt genau 22 kg; dieses Gewicht verteilt sich völlig gleichmäßig über die Oberfläche des Fasses. Die Materialdicke von Mantel, Deckfläche und Grundfläche ist vernachlässigbar klein. Das Wasser im Fass hat eine Dichte von 1 g/cm^3.
Der Masseschwerpunkt des vollen Fasses liegt natürlich exakt in der Mitte und der Masseschwerpunkt des leeren Fasses würde auch genau in der Mitte liegen. Rudolf zapft nun so lange Wasser aus dem Fass ab, bis der Gesamtschwerpunkt so tief wie nur irgend möglich ist.
Frage: Wie hoch steht dann das Wasser im Fass?

Antwortmöglichkeiten:

1. Höchstens 3 cm
2. Zwischen 3 und 6 cm
3. Zwischen 6 und 9 cm
4. Zwischen 9 und 12 cm
5. Zwischen 12 und 15 cm
6. Zwischen 15 und 18 cm
7. Zwischen 18 und 21 cm
8. Zwischen 21 und 24 cm
9. Zwischen 24 und 27 cm
10. Mindestens 27 cm

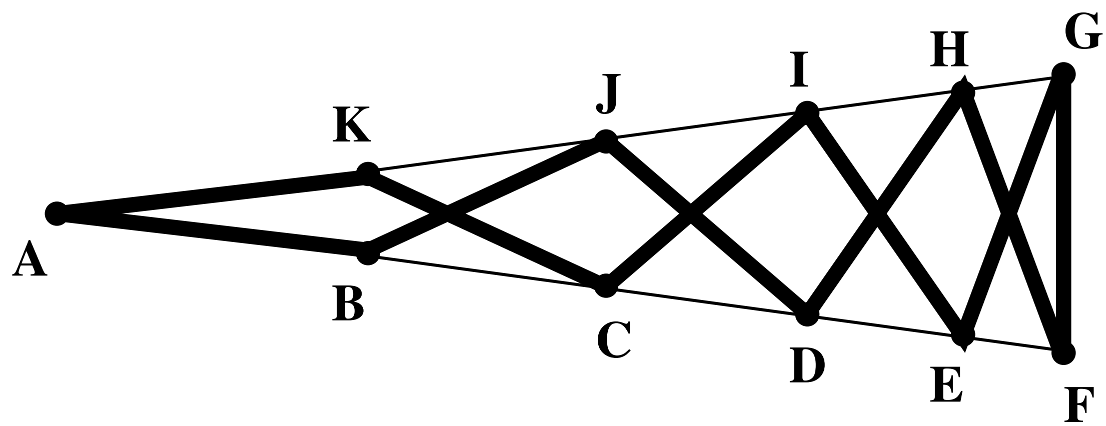
22 Tiefschnee

Autor: Georg Prokert (TU Eindhoven)

Aufgabe:

Knecht Ruprecht stapft durch ein dreieckiges Schneefeld, welches zwischen zwei steilen Berghängen liegt. Das Feld ist so beschaffen, dass Knecht Ruprecht nur zwischen den Seitenrändern des Feldes hin und her wandern kann.

Die Abbildung zeigt das dreieckige Schneefeld mit seinen drei Eckpunkten A, F und G. Der Weg von Knecht Ruprecht ist in dicken Linien eingezeichnet. Jede Strecke zwischen zwei Punkten ist hierbei genau 100 Meter lang.
(Achtung: Diese Skizze ist nicht maßstabsgetreu.)



Knecht Ruprecht startet also im Eckpunkt A und läuft 100 Meter am Rand des Feldes entlang bis zum Punkt B. Dann geht es auf weiteren 100 Metern schnurgerade quer durchs Feld, und zwar bis zum Punkt J auf der anderen Seite des Schneefeldes. Dann wieder 100 Meter quer durchs Schneefeld zum Punkt D, weitere 100 Meter querfeldein bis H, und noch einmal 100 Meter bis zum Eckpunkt F des Feldes. Danach geht Ruprecht 100 Meter weit bis zum Eckpunkt G, und dann jeweils 100 Meter querfeldein zu den vier Punkten E, I, C und K. Schlussendlich legt er noch einmal 100 Meter am Rand des Feldes zurück und kehrt zu seinem Startpunkt A zurück.

Die Größe des Winkels $\angle KAB$ beim Eckpunkt A des Schneefeldes wird in Grad gemessen.
Frage: Wie lautet dann von diesem Winkel $\angle KAB$ die erste Stelle nach dem Komma in der Dezimaldarstellung?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

23 Mützen und Zahlen

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

Aufgabe:

Der Weihnachtsmann spricht zu den vier Intelligenzwichteln Atto, Bilbo, Chico und Dondo: „Meine lieben Intelligenzwichtel! Schwierige Denkaufgaben mit Mützen auf Wichtelköpfen haben eine lange Tradition im mathematischen Adventskalender. Zu diesem Zwecke lade ich Euch morgen zu einem gemütlichen Nachmittag mit Kaffee und Kuchen ein."— „Fein, wir kommen gerne!", rufen Atto, Bilbo, Chico und Dondo.
Der Weihnachtsmann fährt fort: „Heute abend werde ich vier Wichtelm§tzen mit jeweils einer ganzen Zahl beschriften, so dass keine zwei Zahlen gleich sind. Morgen setze ich dann jedem von Euch hinterrücks und blitzschnell eine

dieser Mützen auf den Kopf, sodass keiner die Zahl auf der eigenen Mütze zu sehen kriegt. Ihr könnt die Zahlen auf den anderen drei Mützen sehen, dürft aber keinerlei Informationen unter einander austauschen. Dann werden Euch die Augen verbunden und jeder muss sich entscheiden, ob er die rechte oder die linke Hand in die Höhe strecken soll. Das Spiel ist für Euch gewonnen, falls zwei Wichtel die linke Hand heben und zwei Wichtel die rechte Hand heben.“
„Ha! “, fällt Atto dem Weihnachtsmann ins Wort. „Das ist doch ganz leicht: Bilbo und ich heben die rechte Hand, und Chico und Dondo heben die linke Hand. Und schon ist das Spiel gewonnen.“ Der Weihnachtsmann seufzt: „Unterbrecht mich doch nicht immer, ich war noch nicht fertig: Außerdem müssen der Wichtel mit der kleinsten und der Wichtel mit der drittkleinsten Zahl beide die rechte Hand oder beide die linke Hand heben. Dann und nur dann ist das Spiel gewonnen. So, jetzt bin ich fertig. Habt Ihr noch Fragen?“
Bilbo sagt: „Es gibt vierundzwanzig Möglichkeiten, die vier Mützen auf unsere Köpfe zu geben. Sind die alle gleich wahrscheinlich?“ — „Ja. “, antwortet der Weihnachtsmann. „Alle diese vierundzwanzig Möglichkeiten sind exakt gleich wahrscheinlich.“ Chico fragt: „Wenn ich zum Beispiel die Zahlen 25, 376 und 1024 auf den anderen Mützen sehe, soll ich dann meine linke oder meine rechte Hand heben? Und was soll ich bei den Zahlen 377, 801 und 15222 tun?“ — „Na, das müsst Ihr Euch schon selbst überlegen!“, antwortet der Weihnachtsmann.

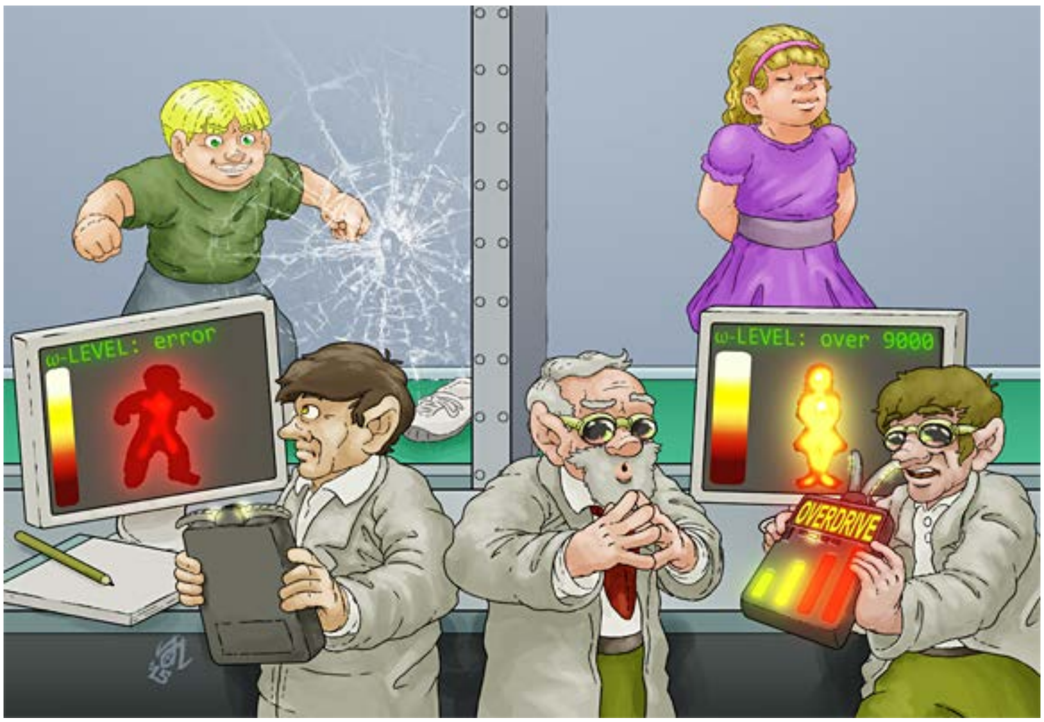
Und das tun die Wichtel auch. Sie diskutieren und sie denken nach. Sie denken nach und sie diskutieren. Dann diskutieren sie noch mehr und denken noch länger nach. Sie arbeiten schließlich eine wirklich geniale Strategie aus, die ihre Gewinnwahrscheinlichkeit (unter allen möglichen Strategien!) maximiert. Unsere Frage lautet: Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit mit dieser wirklich genialen Strategie?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 8/24.
2. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 12/24.
3. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 15/24.
4. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 16/24.
5. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 18/24.
6. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 20/24.
7. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 21/24.
8. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 22/24.
9. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 23/24.
10. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 24/24.

24 Die ω-Strahlung

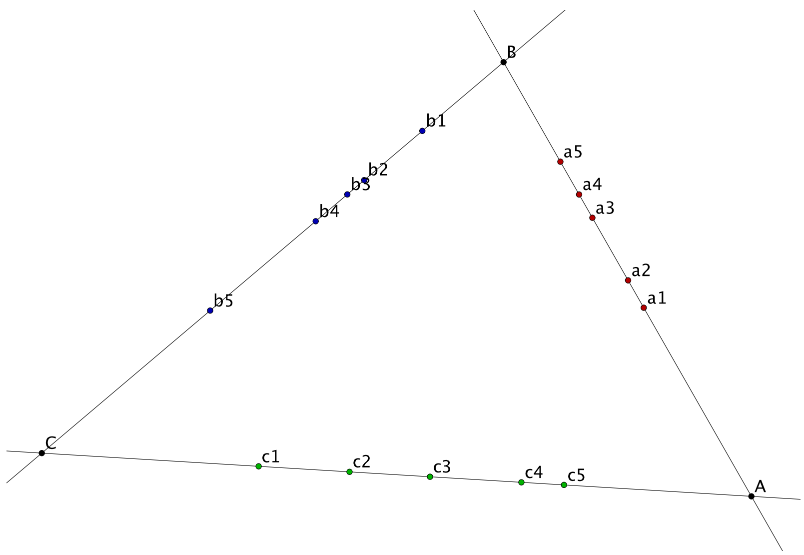
Autoren: Raman Sanyal (FU Berlin), Moritz Schmitt (FU Berlin)



Aufgabe:

Bekanntermaßen strahlen artige Kinder. In freudiger Erwartung von Weihnachten wird diese Strahlung – in Fachkreisen auch ω-Strahlung genannt – in der Vorweihnachtszeit besonders stark. Die Wichtel des Weihnachtsmanns haben vor langer Zeit erkannt, daß man ω-Strahlung nutzen kann, um die Häuser der artigen Kinder zu finden. Sie haben sich ein raffiniertes System ausgedacht, wie das besonders einfach möglich ist.
Auf einer Karte wird um jede Gemeinde jeweils ein spitzes Dreieck gezeichnet, deßen Ecken mit A, B und C benannt sind. Dann wird je ein Wichtel zu dieser Gemeinde geschickt, der sie entlang des Dreiecks einmal umrundet, von A über B zu C und wieder zurück zu A. Je näher der Wichtel einem ar-

tigen Kind kommt, desto stärker wird die ω-Strahlung. Während der Wichtel entlang der Kanten des Dreiecks läuft, steigt und fällt die von ihm gemeßene Strahlung. Jedes Mal wenn die Strahlung am stärksten ist (also ein lokales Maximum erreicht), markiert der Wichtel die Position auf der Kante, das heißt, er merkt sich die Entfernung zur letzten Ecke des Dreiecks die er paßiert hat. Wenn er wieder bei der Ecke A angekommen ist hat er auf jeder Kante die gleiche Anzahl von Markierungen. Es ist nun nötig, aus diesen Markierungen die Positionen der Häuser der artigen Kinder eindeutig zu rekonstruieren. Das ist so gut wie immer möglich! Laut Dr. Hase, dem Leiter des Wichtel-Forschungszentrums, ist gewiß, daß die Strahlung proportional zum Kehrwert des Abstands ist und daß jedes artige Kind gleich stark strahlt. Natürlich beeinflußt das Artigsein des einen Kindes nicht das Artigsein eines anderen.



In der Gemeinde Nasingen, zum Beispiel, leben 5 artige Kinder. Das zugehörige Dreieck hat die Ecken

$$A = (200, 500), B = (850, 1050) \text{ und } C = (1198.14, 439.29).$$

Auf der Kante AB mißt er die stärkste ω-Strahlung in den Abständen

$$a_1 = 305.81, a_2 = 433.99, a_3 = 547.51, a_4 = 676.38 \text{ und } a_5 = 736.47$$

Für die Kante BC und CA sind die jeweiligen Abstände

$$b_1 = 149.74, b_2 = 257, b_3 = 288.07, b_4 = 346.46 \text{ und } b_5 = 541.03$$

und

$$c_1 = 304.95, c_2 = 349.39, c_3 = 450.64, c_4 = 488.07 \text{ und } c_5 = 541.39$$

An welchen Positionen befinden sich die fünf Kinder?

Antwortmöglichkeiten:

1. $(729.05, 795.06), (883.47, 778.63), (855.21, 645.97), (940.58, 545.08), (805.35, 566.4)$
2. $(650, 750), (761.23, 708.94), (513.1, 610.58), (729.05, 795.06), (855.21, 645.97)$
3. $(761.23, 708.94), (884.41, 611.46), (883.47, 778.63), (940.58, 545.08), (805.35, 566.4)$
4. $(513.1, 610.58), (729.05, 795.06), (855.21, 645.97), (940.58, 545.08), (805.35, 566.4)$
5. $(650, 750)$, $(761.23, 708.94)$, $(884.41, 611.46)$, $(950, 700)$, $(513.1, 610.58)$
6. $(650, 750), (884.41, 611.46), (513.1, 610.58), (940.58, 545.08), (805.35, 566.4)$
7. $(761.23, 708.94), (729.05, 795.06), (883.47, 778.63), (510.38, 565.95), (805.35, 566.4)$
8. $(650, 750)$, $(884.41, 611.46)$, $(950, 700)$, $(513.1, 610.58)$, $(729.05, 795.06)$
9. $(761.23, 708.94), (950, 700), (643.42, 641.79), (510.38, 565.95), (729.05, 795.06)$
10. $(761.23, 708.94), (884.41, 611.46), (950, 700), (643.42, 641.79), (510.38, 565.95)$