



Aufgaben und Lösungen 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Routenplanung	3
2	Kopf oder Zahl	6
3	Zimtsterne	9
4	Sägewerk	13
5	Fußball	17
6	T-Shirts	21
7	Kandinsky	25
8	Lebkuchenhaus	28
9	Die zwei Türme	33
10	Schneemobile mit Schneeflockenantrieb	40
11	Christbaumkugel-Mashup	47
12	Glatteis	56
13	Mondrian	61
14	Die Weihnachtsgans Auguste	65
15	Magische Geschenkbänder	68
16	Rentierwahlen	77
17	Das Eierlikörei	80
18	Die Mützenaufgabe 2021	83
19	Casino	88
20	Diebe im Schnee	94
21	Tetraeder	99
22	Zelda in Gefahr	104
23	Spuren im Schnee	108
24	Verführerische Vanillekipferl	111



1 Routenplanung

Autor: Jonas Lorenz (TU Berlin)
Projekt: MATH+ Schulaktivitäten

Aufgabe

Jedes Jahr fliegt der Weihnachtsmann die Städte Amsterdam (A), Berlin (B), Chicago (C), Delhi (D), Edinburgh (E), Florenz (F), Göteborg (G), Hongkong (H) und Innsbruck (I) in einer ganz bestimmten Reihenfolge ab und passt daran seine gesamte Route am Heiligabend an. Dieses Jahr sind die Wichtel Madina und Elias mit der Routenplanung beauftragt worden und haben sich entschieden, die Route dieses Jahr zu lösen. Um nun die möglichen verschiedenen Routen, die jeweils jede Stadt einmal beinhalten, auf die Lose zu schreiben, sortiert Elias die „Routenwörter“ alphabetisch. Bei drei Städten, zum Beispiel, A, B und C würde Elias die sechs entstehenden Lose so beschreiben:

Los Nr. 1: „A-B-C“, Los Nr. 2: „A-C-B“, Los Nr. 3: „B-A-C“,
Los Nr. 4: „B-C-A“, Los Nr. 5: „C-A-B“, Los Nr. 6: „C-B-A“.

Nachdem die Wichtel alle Lose beschrieben haben, werfen sie diese in eine Schale. Elias mischt ein wenig mit der Hand in den Losen herum, zieht schließlich ein Los und liest das gezogene Routenwort vor:

„H-F-B-D-I-G-A-C-E“.

Madina überlegt ein wenig und verkündet dann die Nummer des Loses. Elias bestätigt die Losnummer schwer beeindruckt.

Welche Losnummer trägt das gezogene Los?



Illustration: Julia Nurit Schönngel

Antwortmöglichkeiten:

1. 308.510
2. 308.511
3. 308.512
4. 308.513
5. 308.514
6. 308.515
7. 308.516
8. 308.517
9. 308.518
10. 308.519

Lösung**Die richtige Antwort ist: 6.**

Bei n Städten können wir leicht bestimmen, wie viele verschiedene Routen zwischen diesen Städten möglich sind, wenn jede Stadt nur einmal vorkommen darf. Wir erhalten n Möglichkeiten für die erste, $n - 1$ Möglichkeiten für die zweite, und so weiter. Somit ergeben sich

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Routen. Wenn wir also eine der n Städte aus unserer Route festlegen, wird die verbleibende Anzahl der Routen $(n - 1)!$.

Um die Nummer des Loses zu ermitteln, stellen wir zunächst fest, dass mit jeder Stadt jeweils

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$$

mögliche Weihnachtsrouten beginnen. Somit ergibt sich bei einem Routenstart in Hongkong, dass unser Los keines der ersten

$$7 \cdot 8! = 7 \cdot 40.320 = 282.240$$

ist, da Hongkong die 8. Stadt in unserer alphabetischen Sortierung ist.

Genauso folgt, dass auch keines der folgenden $5 \cdot 7! = 25.200$ Lose (die mit H-A, H-B, H-C, H-D, H-E beginnen) das gesuchte ist, da Florenz die 6. Stadt ist. Weiter können wir auch die $6! = 720$ folgenden Lose ignorieren, da Berlin unsere 2. Stadt ist.

Die von Elias gezogene Route geht nun mit Delhi weiter. Hier müssen wir ein wenig aufpassen: Delhi ist zwar die 4. Stadt nach unserer alphabetischen Sortierung, allerdings kommt Berlin bereits in unserem Routenwort vor und muss damit nicht mehr „herausgezählt“ werden. Folglich sind weitere $2 \cdot 5! = 240$ Lose nicht das gesuchte Los. Auf Delhi folgt dann Innsbruck, die alphabetisch 9. Stadt. Da alle vier bereits im Routenwort vorgekommenen Städte auch alphabetisch vor Innsbruck kommen, bleiben damit nur $4 \cdot 4! = 96$ Lose übrig, die wir überspringen können (und zwar H-F-B-D-(A / C / E / G)). Da die gezogene Route mit Göteborg weitergeht, Göteborg die 7. Stadt ist und Berlin, Delhi sowie Florenz bereits im Routenwort vorkamen, müssen wir auch die nächsten $3 \cdot 3! = 18$ Lose noch überspringen.

Nun folgen jedoch Amsterdam, Chicago und Edinburgh, die in ebendieser Reihenfolge auch in der alphabetischen Sortierung auftauchen, sodass wir keine weiteren Lose ignorieren müssen.

Da wir mit der vorangegangenen Argumentation wissen, dass keines der ersten

$$282.240 + 25.200 + 720 + 240 + 96 + 18 = 308.514$$

Lose das von Elias gezogene Los ist, trägt es die Losnummer 308.515.



2 Kopf oder Zahl

Autor Jacques Resing (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

In der Münzsammlung des Weihnachtsmanns gibt es eine goldene Münze aus dem Land Kopponia. Wenn diese Münze geworfen wird, zeigt sie mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ Kopf und mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ Zahl. Eine andere Münze stammt aus Zallanien und zeigt mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ Zahl und mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ Kopf.

Der Weihnachtsmann wirft beide Münzen gleichzeitig, eine zeigt Kopf und die andere zeigt Zahl.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p , dass die Kopf zeigende Münze aus Kopponia stammt?



Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gilt $p \leq 0,55$.

2. Es gilt $0,55 < p \leq 0,60$.
3. Es gilt $0,60 < p \leq 0,65$.
4. Es gilt $0,65 < p \leq 0,70$.
5. Es gilt $0,70 < p \leq 0,75$.
6. Es gilt $0,75 < p \leq 0,80$.
7. Es gilt $0,80 < p \leq 0,85$.
8. Es gilt $0,85 < p \leq 0,90$.
9. Es gilt $0,90 < p \leq 0,95$.
10. Es gilt $0,95 < p$.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze aus Kopponia Kopf und die Münze aus Zallanien Zahl zeigt, beträgt $p_1 = (3/4) \cdot (3/4) = 9/16$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze aus Kopponia Zahl und die Münze aus Zallanien Kopf zeigt, beträgt $p_2 = (1/4) \cdot (1/4) = 1/16$.

Da p_1 genau neunmal so groß ist wie p_2 , ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p = 9/10$.



3 Zimtsterne

Autor: Frits Spijksma (TU Eindhoven)
 Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Auf dem Tisch stehen eine rote und eine schwarze Schüssel, daneben liegen 16 Zimtsterne. Beide Schüsseln sind leer. Um sich die Zeit zu vertreiben, spielt Knecht Ruprecht folgendes Spiel: In jedem Zug legt er *entweder* einen Stern vom Tisch in eine der beiden Schüsseln *oder* er nimmt einen Stern aus einer Schüssel und legt ihn zurück auf den Tisch. Dabei hält sich Ruprecht an die folgenden Regeln:

- Nach jedem Zug befinden sich in der roten Schüssel mindestens so viele Zimtsterne wie in der schwarzen Schüssel.
- Wenn nach einem Zug genau R Zimtsterne in der roten und genau S Zimtsterne in der schwarzen Schüssel sind, so dürfen nach keinem späteren Zug wieder genau R Zimtsterne in der roten und S Zimtsterne in der schwarzen Schüssel sein.

Was ist die Maximalzahl M an Zügen, die Ruprecht unter diesen Regeln machen kann?



Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Maximalzahl ist $M = 67$.
2. Die Maximalzahl ist $M = 68$.
3. Die Maximalzahl ist $M = 69$.
4. Die Maximalzahl ist $M = 70$.
5. Die Maximalzahl ist $M = 71$.
6. Die Maximalzahl ist $M = 72$.
7. Die Maximalzahl ist $M = 73$.
8. Die Maximalzahl ist $M = 74$.
9. Die Maximalzahl ist $M = 75$.
10. Die Maximalzahl ist $M = 76$.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Wir stellen eine Situation mit R Zimtsternen in der roten und S Zimtsternen in der schwarzen Schüssel durch den Punkt (R, S) mit x -Koordinate R und y -Koordinate S im kartesischen Koordinatensystem dar. Die möglichen Spielsituationen werden dann durch jene Punkte (R, S) beschrieben, die regelkonform die Bedingungen $0 \leq R \leq 16$ und $0 \leq S \leq 16$ sowie $R \geq S$ und $R + S \leq 16$ erfüllen (s. Abb. 1).

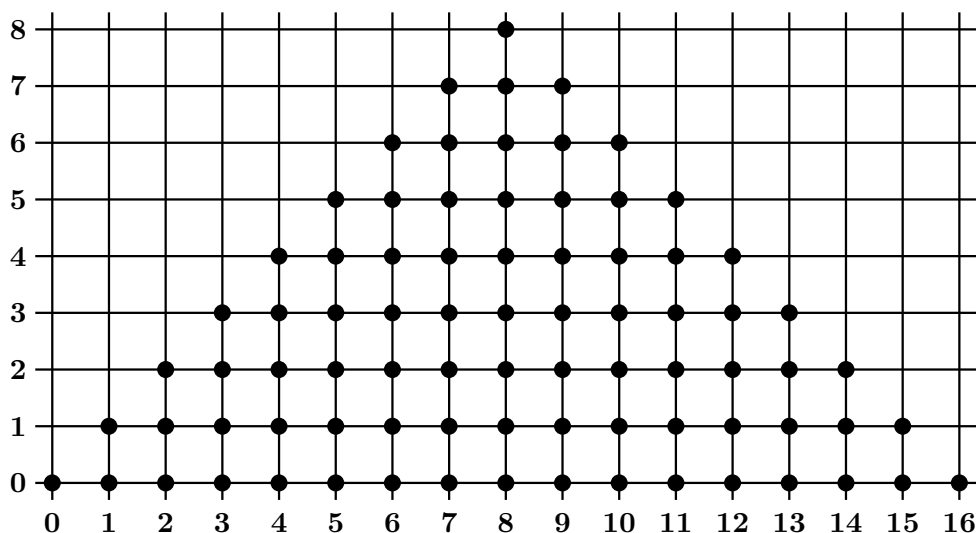


Abbildung 1: Regelkonforme Punkte (R, S) .

Ruprechts Züge beschreiben eine Wanderung auf dieser Punktmenge:

- Legt Ruprecht ein Plätzchen in die rote Schüssel, so geht er von (R, S) nach $(R + 1, S)$.
- Legt er ein Plätzchen in die schwarze Schüssel, so geht er von (R, S) nach $(R, S + 1)$.
- Nimmt er ein Plätzchen aus der roten Schüssel, so geht er von (R, S) nach $(R - 1, S)$.
- Nimmt er ein Plätzchen aus der schwarzen Schüssel, so geht er von (R, S) nach $(R, S - 1)$.

Da am Anfang des Spiels beide Schüsseln leer sind, beginnt Ruprecht seine Wanderung im Punkt $(0, 0)$. Er wandert dann immer zu einem horizontal oder vertikal benachbarten Gitterpunkt, ohne denselben Punkt mehr als einmal zu besuchen.

Als erstes wollen wir uns eine obere Schranke für die Anzahl der Züge überlegen. Jeder Spielzug führt Ruprecht entweder von einem Punkt (R, S) mit gerader Koordinatensumme $R + S$ zu einem Punkt mit ungerader Koordinatensumme, oder er führt ihn von einem Punkt mit ungerader Koordinatensumme zu einem Punkt mit gerader Koordinatensumme. Man prüft (oder zählt) leicht nach, dass es 36 verschiedene Spielsituationen mit ungerader und 45 Spielsituationen mit gerader Koordinatensumme gibt. Da Ruprecht im Punkt $(0, 0)$ mit gerader Koordinatensumme beginnt, wird er in jedem ungeraden Zug einen Punkt mit ungerader Koordinatensumme

besuchen. Daher kann Ruprecht allerhöchstens $1 + 2 \cdot 36 = 73$ Punkte besuchen und insgesamt allerhöchstens 72 Züge machen.

Schlussendlich zeigt uns Abbildung 2 einen Spielverlauf mit genau 72 Zügen. Die obere Schranke 72 kann also erreicht werden.

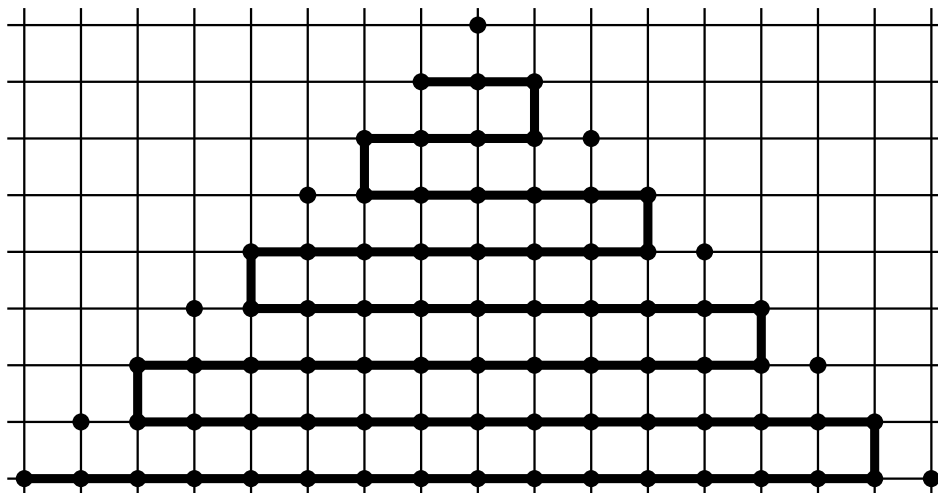


Abbildung 2: Ein Spielverlauf mit 72 Zügen.



4 Sägewerk

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Die Sägewichtel Zick und Zack arbeiten im Sägewerk des Weihnachtsmannes. Am Vormittag werden ihnen vier quadratische $4\text{ m} \times 4\text{ m}$ Holzplatten und ein Arbeitsplan geliefert. Bei ihrer Arbeit verwenden Zick und Zack immer ein magisches Sägeblatt, das absolut keine Breite hat.

- Teil *A* des Arbeitsplans verlangt, die erste Holzplatte in vier kongruente Vierecke zu zersägen, sodass jedes Viereck einen Umkreis mit Durchmesser $\sqrt{8}\text{ m}$ hat.
- Teil *B* verlangt, die zweite Holzplatte in vier kongruente Vierecke zu zersägen, sodass jedes Viereck einen Umkreis mit Durchmesser $\sqrt{10}\text{ m}$ hat.
- Teil *C* verlangt, die dritte Holzplatte in vier kongruente Vierecke zu zersägen, sodass jedes Viereck einen Umkreis mit Durchmesser $\sqrt{12}\text{ m}$ hat.
- Teil *D* verlangt, die vierte Holzplatte in vier kongruente Vierecke zu zersägen, sodass jedes Viereck einen Umkreis mit Durchmesser $\sqrt{17}\text{ m}$ hat.

Wichtel Zick kratzt sich am Kopf und klagt: „Dieser Arbeitsplan ist wieder furchtbar ungenau formuliert. Da wird ja überhaupt nicht erklärt, wie diese kongruenten Vierecke genau aussehen sollen.“

Wichtel Zack kratzt sich ebenfalls am Kopf und meckert: „Vielleicht hat uns die Zentralverwaltung wieder einmal einen unmöglichen Auftrag erteilt. Das wäre ja nicht das erste Mal.“

Können Sie unseren armen Sägewichteln weiterhelfen?



Illustration: Julia Nurit Schönngel

Antwortmöglichkeiten:

1. Nur die Teile *A* und *B* des Arbeitsplans können durchgeführt werden.
2. Nur die Teile *A* und *C* des Arbeitsplans können durchgeführt werden.
3. Nur die Teile *A* und *D* des Arbeitsplans können durchgeführt werden.
4. Nur die Teile *B* und *D* des Arbeitsplans können durchgeführt werden.
5. Nur die Teile *C* und *D* des Arbeitsplans können durchgeführt werden.
6. Nur die Teile *A, B, C* des Arbeitsplans können durchgeführt werden.
7. Nur die Teile *A, B, D* des Arbeitsplans können durchgeführt werden.
8. Nur die Teile *A, C, D* des Arbeitsplans können durchgeführt werden.
9. Nur die Teile *B, C, D* des Arbeitsplans können durchgeführt werden.
10. Alle vier Teile des Arbeitsplans können durchgeführt werden.

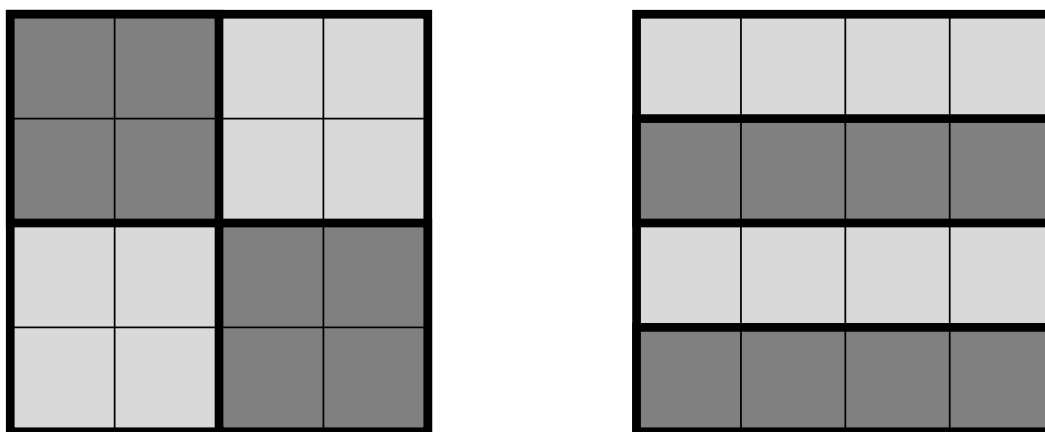
Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

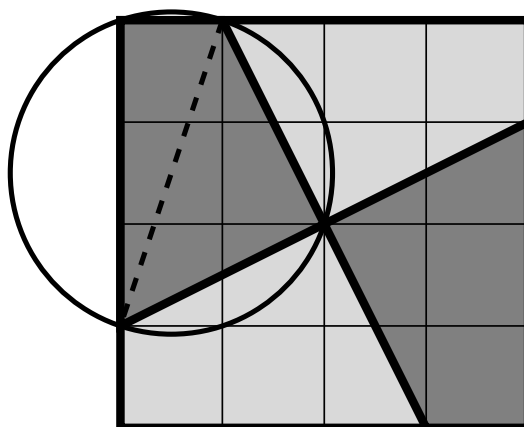
Alle vier Teile A, B, C, D des Arbeitsplans können durchgeführt werden. Die Zentralverwaltung hat also gut gearbeitet und diesmal keinen Fehler gemacht.

Die folgende Abbildung zeigt die beiden Aufteilungen für Teil A (links) und Teil D (rechts). In der linken Aufteilung für Teil A ist jedes Viereck ein Quadrat mit Seitenlänge 2. Die Diagonale eines solchen Quadrats (und damit der Durchmesser des Umkreises) betragen laut Satz des Pythagoras $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

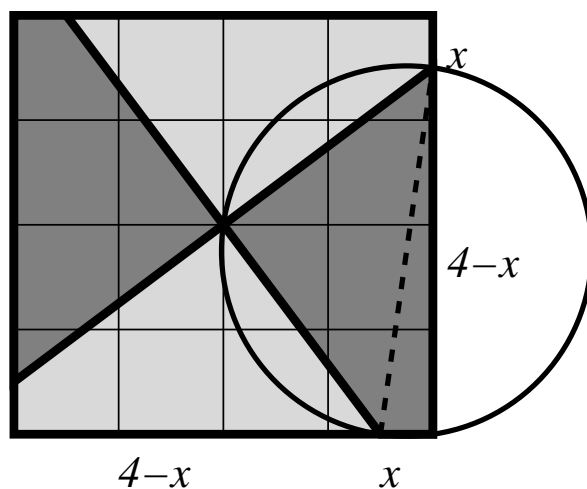
In der rechten Aufteilung für Teil D ist jedes Viereck ein Rechteck mit Seitenlängen 4 und 1. Die Diagonale eines solchen Rechtecks (und damit der Durchmesser des Umkreises) betragen laut Satz des Pythagoras $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.



Die folgende Abbildung zeigt die Aufteilung für Teil B . Jedes Viereck in der Aufteilung setzt sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken zusammen, die eine gemeinsame Hypotenuse haben. Das kleinere Dreieck hat die Seitenlängen 1, 3, $\sqrt{10}$ und das andere Dreieck hat die Seitenlängen $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$. Der (gestrichelt eingezeichnete) Durchmesser der Umkreise dieser Vierecke beträgt daher $\sqrt{10}$.



Schlussendlich ist in der folgenden Abbildung die Aufteilung für Teil C zu sehen. Wenn wir $x = 2 - \sqrt{2}$ wählen, so setzt sich jedes der vier kleinen Vierecke aus zwei rechtwinkligen Dreiecken mit gemeinsamer Hypotenuse zusammen. Das eine Dreieck hat die Seitenlängen $2 - \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$, $\sqrt{12}$ und das andere Dreieck hat die Seitenlängen $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$. Der (gestrichelt eingezeichnete) Durchmesser der Umkreise dieser Vierecke beträgt daher $\sqrt{12}$.





5 Fußball

Autor: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Am großen Weihnachtsturnier haben sechs Fußballteams aus den Wichteldörfern Eisstedt, Frostberg, Gletscherdorf, Kaltburg, Schneeheim und Winterthal teilgenommen. Im Laufe des Turniers hat jedes Wichtelteam genau einmal gegen jedes andere Wichtelteam gespielt. Für einen Sieg gab es dabei drei Punkte, für ein Unentschieden einen Punkt und für eine Niederlage gar keine Punkte.

Eisstedt hat das Turnier gewonnen und die Schlusstabelle souverän angeführt. Zwei Punkte hinter Eisstedt landete Frostberg, zwei Punkte dahinter lag dann Gletscherdorf, zwei weitere Punkte dahinter war Kaltburg, noch zwei Punkte dahinter Schneeheim, und noch einmal zwei Punkte dahinter landete schließlich Winterthal ganz am Ende der Tabelle.

Welche der folgenden zehn Aussagen folgt **zwingend** aus diesen Informationen?



Illustration: Julia Nurit Schönagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Eisstedt hat Frostberg und Gletscherdorf besiegt.
2. Eisstedt hat Kaltburg und Winterthal besiegt.
3. Frostberg hat gegen Gletscherdorf verloren und gegen Schneeheim gewonnen.
4. Gletscherdorf hat Kaltburg und Schneeheim besiegt.
5. Gletscherdorf hat Frostberg und Kaltburg besiegt.
6. Kaltburg hat gegen Eisstedt und Gletscherdorf verloren.
7. Kaltburg hat gegen Schneeheim verloren und gegen Winterthal gewonnen.
8. Schneeheim hat gegen Eisstedt und Kaltburg verloren.
9. Winterthal hat gegen Eisstedt und Frostberg verloren.
10. Winterthal hat gegen Kaltburg verloren und gegen Gletscherdorf unentschieden gespielt.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Zuerst wollen wir die Gesamtzahl N aller Punkte untersuchen, die in allen 15 Spielen des Weihnachtsturniers vergeben wurden. Da in jedem einzelnen Spiel entweder 2 oder 3 Punkte vergeben wurden, gilt $30 \leq N \leq 45$.

Wenn Winterthal (W) w Punkte erspielt hat, dann haben Eisstedt (E), Frostberg (F), Gletscherdorf (G), Kaltburg (K), Schneeheim (S) jeweils $w + 10$, $w + 8$, $w + 6$, $w + 4$ bzw. $w + 2$ Punkte erspielt. Daher gilt

$$N = 6w + 30 \quad \text{mit} \quad 0 \leq w \leq 2.$$

Wir betrachten die Fälle $w = 0, 1, 2$ getrennt:

- $w = 0$: Da $N = 6 \cdot 0 + 30 = 30$, wären in diesem Fall wären alle Spiele unentschieden ausgegangen und Winterthal hätte am Ende des Turniers $5 \cdot 1 = 5$ Punkte erreicht. Da dies ein Widerspruch zu $w = 0$ darstellt, ist dieser Fall unmöglich.
- $w = 1$: Da $N = 6 \cdot 1 + 30 = 36$, wären in diesem Fall genau 9 Spiele unentschieden und genau 6 Spiele mit Sieg/Niederlage ausgegangen.

Wir betrachten nun die 9 Spielen zwischen den drei Teams K, S, W auf der einen und den drei Teams E, F, G auf der anderen Seite, d. h.

$$K-E, \quad K-F, \quad K-G, \quad S-E, \quad S-F, \quad S-G, \quad W-E, \quad W-F, \quad W-G.$$

Von diesen 9 Spielen wären mindestens 3 unentschieden ausgegangen und hätten der Gruppe K/S/W in Summe mindestens 3 Punkte eingebracht. Nach allen 15 Spielen hätte die Gruppe K/S/W aber $(w + 4) + (w + 2) + w = 5 + 3 + 1 = 9$ Punkte erreicht. Daher wären in den drei Spielen, die K, S, W untereinander gespielt hätten, höchstens 6 Punkte erspielt worden. Somit hätten diese drei Spiele allesamt unentschieden geendet. Dann hätte Winterthal aber mindestens zweimal ein Unentschieden und somit in Summe mindestens 2 Punkte erreicht. Da dies aber ein Widerspruch zu $w = 1$ wäre, ist auch dieser Fall unmöglich.

- Im einzig verbleibenden Fall gilt demnach $w = 2$ und $N = 42$ und Eisstedt, Frostberg, Gletscherdorf, Kaltburg, Schneeheim, Winterthal haben jeweils 12, 10, 8, 6, 4 bzw. 2 Punkte erreicht.

Offensichtlich hat **Winterthal** zwei Spiele unentschieden gespielt, kein Spiel gewonnen und drei Spiele verloren.

Da $12 \equiv 0 \pmod{3}$, hat **Eisstedt** entweder keinmal oder dreimal unentschieden gespielt. Hätte das Team dreimal unentschieden gespielt, hätte es höchstens zweimal gewinnen und somit höchstens $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9 < 12$ Punkte erzielen können. Eisstedt hat somit keinmal unentschieden gespielt, viermal gewonnen und einmal verloren.

Ganz analog rechnet man nach, dass

- **Frostberg** nur einmal unentschieden gespielt, dreimal gewonnen und einmal verloren hat;

- **Gletscherdorf** nur zweimal unentschieden gespielt, zweimal gewonnen und einmal verloren hat;
- **Kaltburg** keinmal unentschieden gespielt, zweimal gewonnen und dreimal verloren hat.

Es bleibt zu klären, ob **Schneeheim** einmal oder viermal unentschieden gespielt hat. Da aber von den fünf gegnerischen Teams nur drei (Frostberg, Gletscherdorf und Winterthal) unentschieden gespielt haben, kann Schneeheim gar kein Unentschieden gegen vier Teams erreicht haben. Schneeheim hat daher nur einmal unentschieden gespielt, einmal gewonnen und dreimal verloren. Zusammenfassend ergibt sich nachfolgende Tabelle:

Eisstedt:	3	3	3	3	0
Frostberg:	3	3	3	1	0
Gletscherdorf:	3	3	1	1	0
Kaltburg:	3	3	0	0	0
Schneeheim:	3	1	0	0	0
Winterthal:	1	1	0	0	0

Aus dieser ergeben sich folgende Informationen:

- Da Kaltburg nie unentschieden gespielt hat und Winterthal nie gewonnen hat, muss Kaltburg **zwingend** gegen Winterthal gewonnen haben.
- Falls Gletscherdorf und Winterthal *nicht* unentschieden gespielt hätten, dann müsste Gletscherdorf die zwei Partien gegen Frostberg *und* Schneeheim unentschieden gespielt haben. Winterthal hätte somit gegen kein Team unentschieden spielen können. Dieser Widerspruch zeigt, dass das Spiel G–W **zwingend** unentschieden ausging.

Somit ist Aussage 10 korrekt.

Die Angaben aus dem Aufgabentext liefern keine eindeutige Schlusstabelle. Die folgenden Tabellen sind mit den Angaben im Aufgabentext kompatibel und veranschaulichen, dass die anderen neun Aussagen nicht zwingend erfüllt sein müssen:

	E	F	G	K	S	W
E	–	0	3	3	3	3
F	3	–	0	3	3	1
G	0	3	–	3	1	1
K	0	0	0	–	3	3
S	0	0	1	0	–	3
W	0	1	1	0	0	–

	E	F	G	K	S	W
E	–	3	3	0	3	3
F	0	–	1	3	3	3
G	0	1	–	3	3	1
K	3	0	0	–	0	3
S	0	0	0	3	–	1
W	0	0	1	0	1	–



6 T-Shirts

Autor: Hajo Broersma (Universiteit Twente)

Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

33 Wichtel stehen in einem Kreis. Jeder Wichtel hat entweder ein rotes oder ein grünes T-Shirt an. Wenn zwei Wichtel unmittelbar nebeneinander stehen, dann trägt höchstens einer der beiden ein rotes T-Shirt. Wenn zwischen zwei Wichteln genau 15 andere Wichtel im Kreis stehen, dann trägt höchstens einer der beiden ein rotes T-Shirt.

Was ist die größtmögliche Anzahl von Wichteln, die ein rotes T-Shirt tragen?



Illustration: Julia Nurit Schönngel

Antwortmöglichkeiten:

1. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 7.
2. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 8.

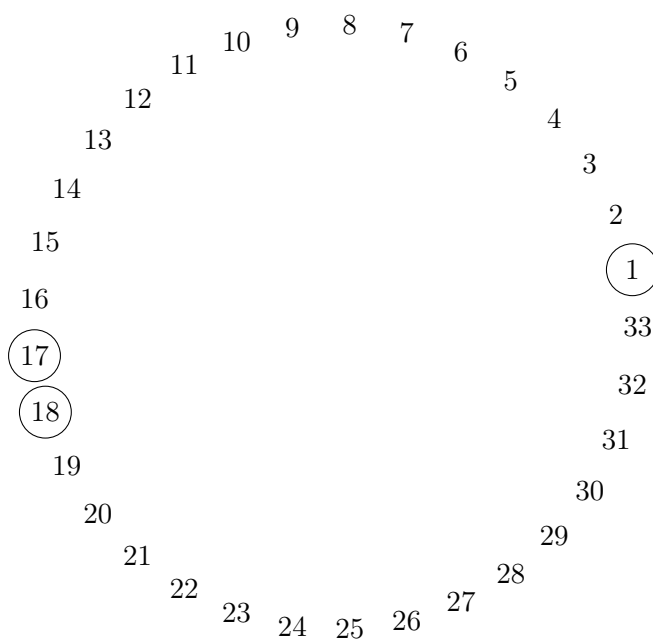
3. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 9.
4. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 10.
5. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 11.
6. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 12.
7. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 13.
8. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 14.
9. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 15.
10. Die größtmögliche Anzahl von Wichteln mit rotem T-Shirt beträgt 16.

Lösung**Die richtige Antwort ist: 5.**

Wir nummerieren die Wichtel der Reihe nach mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots, 33$ durch, um uns nicht 33 Namen einfallen lassen zu müssen. Die Wichtel mit den Nummern n und $n + 1$ stehen für $n \in \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ nebeneinander. Ebenso auch Wichtel 33 und 1.

Wir stellen zunächst fest, dass für einen Wichtel genau zwei andere Wichtel „15 Wichtel entfernt“ sind und diese direkt nebeneinander stehen. Für Wichtel 1 sind das Wichtel 17 und 18, für Wichtel 2 sind das Wichtel 18 und 19, ... , für Wichtel 33 sind es 16 und 17. Von diesen Dreiergruppen kann also *höchstens* ein Wichtel ein rotes T-Shirt tragen. Im Beispiel mit den Wichteln 1, 17 und 18 wird das schnell klar:

Trägt Wichtel 1 ein rotes T-Shirt, dann können weder Wichtel 17 noch 18 ein rotes T-Shirt tragen, da sie jeweils 15 Wichtel von 1 entfernt sind. Trägt Wichtel 17 ein rotes T-Shirt, dann kann 1 kein rotes T-Shirt tragen, da er 15 Wichtel entfernt steht. Wichtel 18 kann als Nachbar von 17 aber auch kein rotes T-Shirt mehr tragen. Genauso argumentiert man, falls Wichtel 18 ein rotes T-Shirt trägt.



Nun können wir die 33 Wichtel aber disjunkt in elf solche Dreiergruppen aufteilen, z. B. in die folgenden:

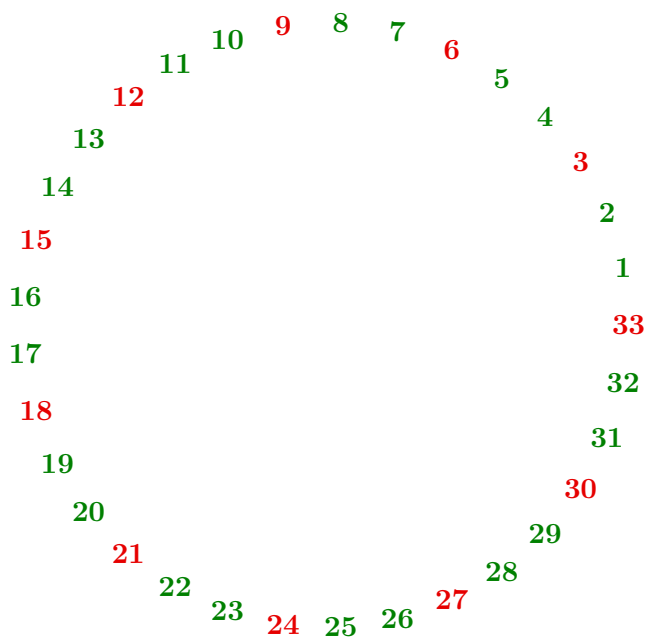
$$\begin{array}{cccc}
 1 - 2 - 18 & 3 - 19 - 20 & 44 - 5 - 21 & 6 - 22 - 23 \\
 7 - 8 - 24 & 9 - 25 - 26 & 10 - 11 - 27 & 12 - 28 - 29 \\
 13 - 14 - 30 & 15 - 31 - 32 & 16 - 17 - 33 &
 \end{array}$$

Aus diesen elf Dreiergruppen kann also jeweils höchstens ein Wichtel ein rotes T-Shirt tragen. Insgesamt kann es demnach *höchstens* elf Wichtel mit einem T-Shirt geben.

Tatsächlich kann man zulässige Verteilungen von elf roten T-Shirts finden: Tragen (z. B.) die **elf Wichtel** mit den Nummern

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33

ein rotes T-Shirt, dann ist das mit den Bedingungen aus der Aufgabenstellung kompatibel:





7 Kandinsky

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)
 Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Der Grinch bietet ein Gemälde mit dem Titel *Sonnenfinsternis Nr. 8* zum Kauf an, das (wie der Grinch behauptet) vielleicht von Wassily Wassilyevich Kandinsky gemalt worden ist (s. Abb. 3).

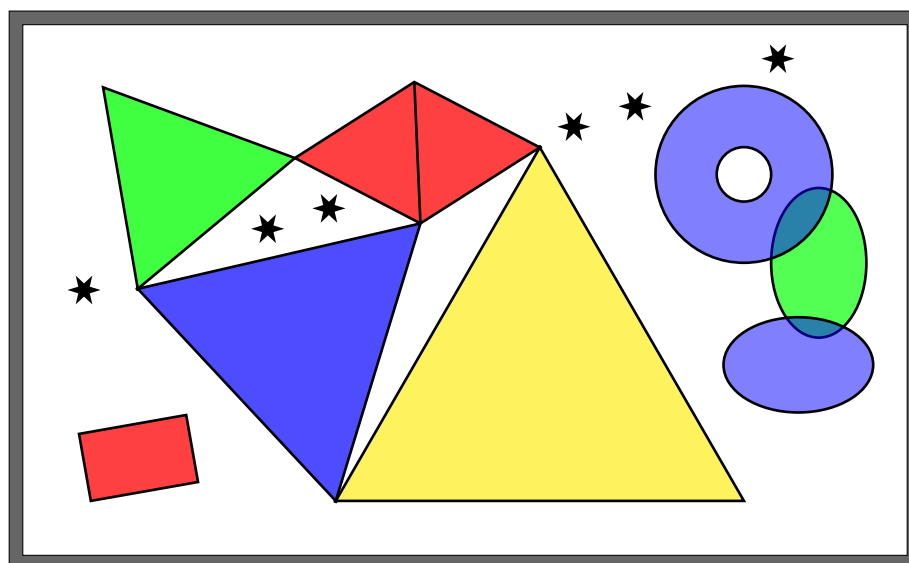


Abbildung 3: Das Gemälde *Sonnenfinsternis Nr. 8*

Der Echtheitsprüfwichtel Echnaton hat das Gemälde nun sorgfältig untersucht und ist zu den folgenden Erkenntnissen gelangt:

- Das gelbe, das blaue, das grüne Dreieck und die beiden roten Dreiecke im Gemälde sind gleichseitig, alle ihre Winkel betragen 60° .
- Die Mittelpunkte der sechs kleinen schwarzen Sterne liegen auf einer Geraden.
- Das rote Viereck in der linken unteren Ecke des Gemäldes ist ein Rechteck. Die dritte Nachkommastelle in der Dezimaldarstellung des Flächeninhalts dieses Rechtecks (in Quadratmetern gemessen) lautet 4.

- Die grüne und blaue Ellipse am rechten Bildrand sind kongruent.
- Die beiden roten Dreiecke sind kongruent und haben jeweils einen Flächeninhalt von $4/3$ Quadratmetern.
- Die Flächeninhalte des gelben und grünen Dreiecks addieren sich zu einer geraden ganzen Zahl von Quadratmetern.

Wir wollen nun wissen: Wie lautet die dritte Nachkommastelle in der Dezimaldarstellung des Flächeninhalts des blauen Dreiecks (in Quadratmetern gemessen)?



Illustration: Friederike Hofmann

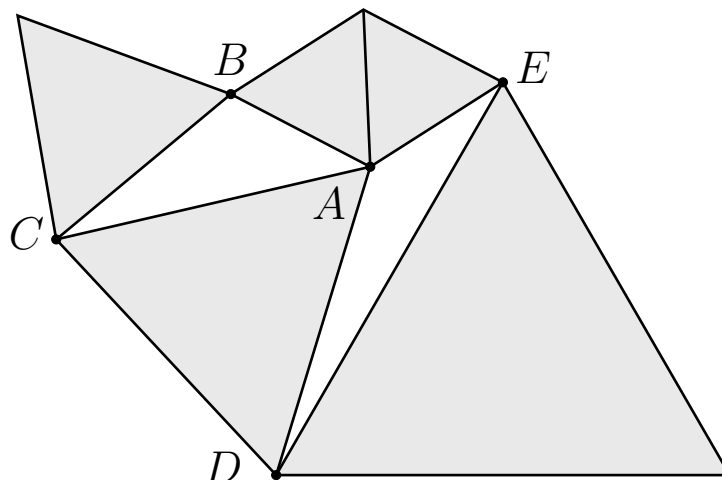
Antwortmöglichkeiten:

1. Die dritte Nachkommastelle ist 1.
2. Die dritte Nachkommastelle ist 2.
3. Die dritte Nachkommastelle ist 3.
4. Die dritte Nachkommastelle ist 4.
5. Die dritte Nachkommastelle ist 5.
6. Die dritte Nachkommastelle ist 6.
7. Die dritte Nachkommastelle ist 7.
8. Die dritte Nachkommastelle ist 8.
9. Die dritte Nachkommastelle ist 9.
10. Diese dritte Nachkommastelle kann aus den im Aufgabentext enthaltenen Informationen nicht eindeutig bestimmt werden.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

In der Lösung verwenden wir nur die erste, fünfte und sechste von Echnatons Erkenntnissen. Die folgende Abbildung führt fünf Punkte A, B, C, D, E ein.



Zuerst betrachten wir das Dreieck ABC und bezeichnen den inneren Winkel bei Punkt A mit $\alpha = \angle CAB$. Der Kosinussatz liefert

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos(\alpha). \quad (1)$$

Als nächstes betrachten wir das Dreieck ADE und bezeichnen den inneren Winkel bei Punkt A mit $\beta = \angle EAD$. Der Kosinussatz liefert

$$|DE|^2 = |AE|^2 + |AD|^2 - 2|AE||AD|\cos(\beta). \quad (2)$$

Wenn man die fünf am Punkt A anliegenden Winkel addiert, erhält man die Gleichung

$$\alpha + 60 + 60 + \beta + 60 = 360.$$

Daraus folgt $\alpha + \beta = 180$ und weiters $\cos(\beta) = \cos(180 - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Mithilfe von $|AE| = |AB|$ und $|AD| = |AC|$ schreiben wir (2) nun in die folgende Gleichung um:

$$|DE|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 + 2|AB||AC|\cos(\alpha). \quad (3)$$

Die Addition von (1) und (3) liefert dann

$$|BC|^2 + |DE|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2. \quad (4)$$

Da ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge s den Flächeninhalt $\frac{1}{4}\sqrt{3}s^2$ hat, erhalten wir aus (4) durch Multiplikation mit $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

$$\text{Fläche}(\triangle_{\text{grün}}) + \text{Fläche}(\triangle_{\text{gelb}}) = 2 \cdot \text{Fläche}(\triangle_{\text{rot}}) + 2 \cdot \text{Fläche}(\triangle_{\text{blau}}). \quad (5)$$

Da die linke Seite der Gleichung (5) laut Angabe eine gerade ganze Zahl $2N$ ist und da die Fläche des roten Dreiecks $4/3$ beträgt, erhalten wir für die Fläche des blauen Dreiecks den Wert $N - 4/3$. Die dritte Nachkommastelle ist also 6.



8 Lebkuchenhaus

Autor*innen: Stefan Felsner (TU Berlin)
Xueyi Guo (TU Berlin)
Projekt: MATH+ Schulaktivitäten

Aufgabe

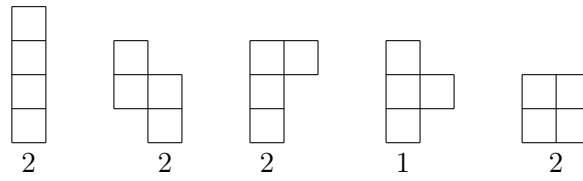
Luca, das frechste Kind am Nordpol, hat zwei Wände eines Lebkuchenhauses, die jeweils aus 6×6 quadratischen Lebkuchen bestehen, in Einzelteile zerbrochen. Der Weihnachtsmann ist darüber gar nicht erfreut und sagt: „Luca, falls du die Wände nicht reparierst, bekommst du an Heiligabend kein Geschenk.“

Luca hat die Teile des Hauses allerdings schon mit anderen Lebkuchen vermischt und ist sich nun nicht mehr ganz sicher, welche Sets für die Reparatur der beiden Wände benötigt werden.

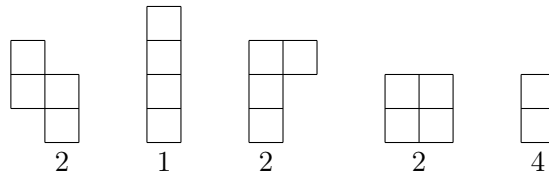
Eine Wand kann nur aus einem Set (s. u.) gebaut werden. Die Teile dürfen dabei gedreht und/oder gespiegelt, aber natürlich nicht zerteilt werden. In jedem Set geben die Zahlen unter den Teilen jeweils die Anzahl dieser Teile im Set an.

Finde heraus, welche zwei Sets gesucht sind, um das Lebkuchenhaus zu reparieren.

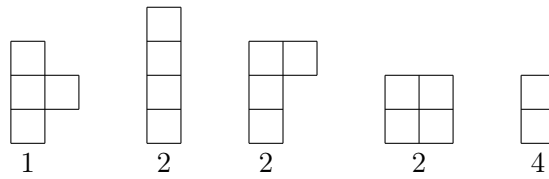
Set 1:



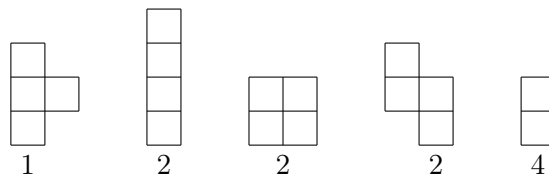
Set 2:



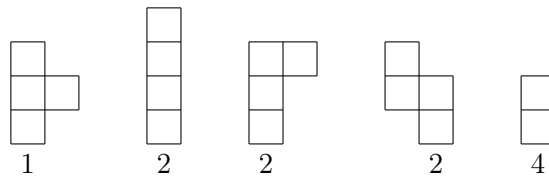
Set 3:



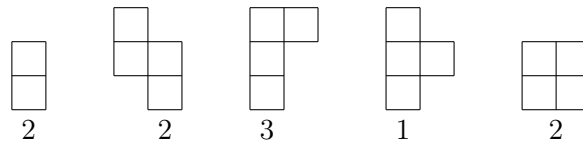
Set 4:



Set 5:



Set 6:



Set 7:

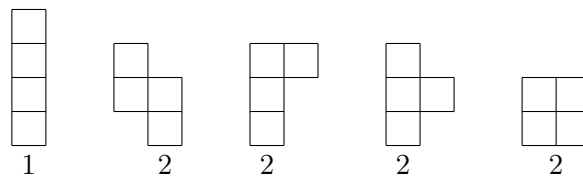




Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

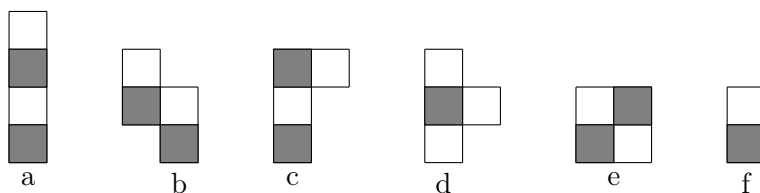
1. Set 1 und 2.
2. Set 1 und 4.
3. Set 1 und 6.
4. Set 2 und 3.
5. Set 2 und 5.
6. Set 2 und 7.
7. Set 3 und 4.
8. Set 3 und 6.
9. Set 4 und 5.
10. Set 4 und 7.

Lösung

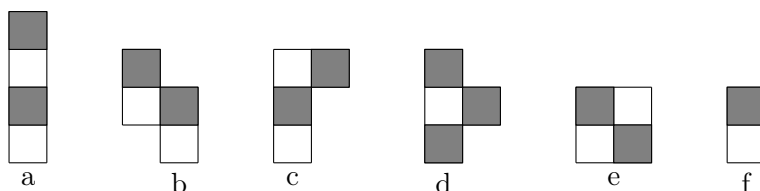
Die richtige Antwort ist: 6.

Wenn wir uns vorstellen, dass die Wände wie ein Schachbrett gemustert sind, dann ergibt das 18 schwarze und 18 weiße Felder. Nun können wir uns die verschiedenen Möglichkeiten überlegen, wie die einzelnen Teile gemustert sein können.

Für jedes Teil gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich



oder



Das **erste Set** enthält die Teile a, b, c, d und e. Wenn wir nun die Anzahl der schwarzen/weißen Felder betrachten, sehen wir, dass die Teile a, b, c und e alle jeweils eine gerade Anzahl an schwarzen/weißen Feldern haben und d eine ungerade Anzahl. Da die Anzahl von Teil d ungerade ist, ist die Gesamtanzahl an schwarzen/weißen Feldern ebenfalls ungerade. Ein 6×6 Schachbrett hat aber immer eine gerade Anzahl an schwarzen und weißen Feldern. Dementsprechend kann man aus dem ersten Set keine perfekte Wand bauen.

Das Gleiche machen wir nun mit dem **zweiten Set**. Wir sehen schon, dass es im zweiten Set ein Teil gibt, das eine ungerade Anzahl an schwarzen/weißen Feldern hat, und zwar Teil f. Doch in diesem Set gibt es das Teil f vier Mal. Im Set gibt es also insgesamt $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 18$ schwarze/weiße Felder. Das stimmt mit der gegebenen Anzahl schwarzer/weißer Felder auf einem 6×6 Schachbrett überein, also könnte Luca mit diesem Set eine Wand bauen.

Im **dritten Set** gibt es zwei Teile, die eine ungerade Anzahl an schwarzen/weißen Feldern haben, nämlich Teil d und Teil f. Teil d gibt es einmal und Teil f viermal. Also erhalten wir wieder eine ungerade Anzahl an schwarzen/weißen Feldern. Aus diesem Set kann Luca leider auch keine perfekte Wand bauen.

Das **vierte, fünfte und sechste Set** enthalten ebenfalls die Teile d und f, und auch in diesen drei Sets gibt es einmal das Teil d und eine gerade Anzahl von Teil f, was bedeutet, dass wir wieder eine ungerade Gesamtanzahl an schwarzen und weißen Feldern haben. Also sind auch diese drei Sets für die Reparatur der Wand ausgeschlossen.

Jetzt betrachten wir das **siebte Set**. Das Teil d gibt es hier zweimal. Also können wir dieses einmal nach Möglichkeit eins und einmal nach Möglichkeit zwei einfärben. Damit erhalten wir dann $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 18$ schwarze und 18 weiße Felder. Das stimmt mit der benötigten Gesamtanzahl überein. Somit könnte Luca mit diesem Set die zweite Wand reparieren.

Abschließend zeigen wir noch, dass die zwei Sets 2 und 7 zu jeweils einer Wand aus 6×6 quadratischen Lebkuchen zusammengebaut werden können. Ein Möglichkeit, die Wände aus Set 2 und 7 zusammenzusetzen, ist in Abbildung 4 gegeben.

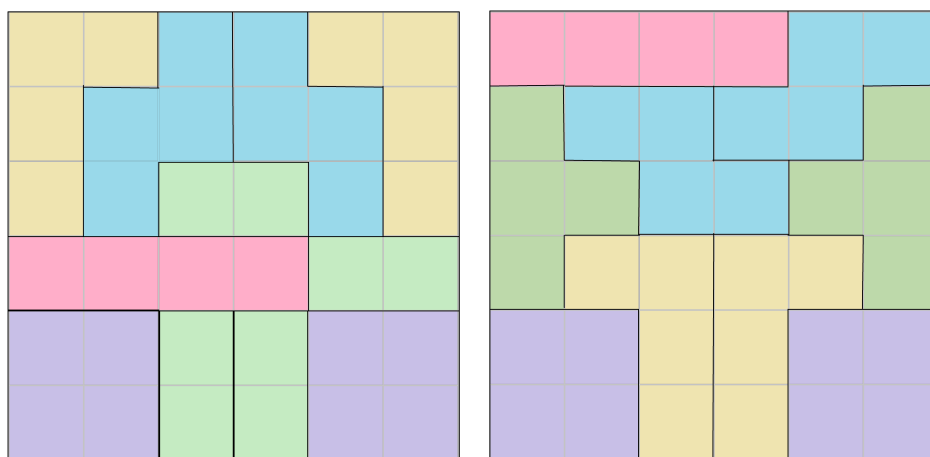


Abbildung 4: Links eine Wand, die aus Set 2 gebaut werden kann. Rechts eine Wand, die aus Set 7 gebaut werden kann.

Luca hat also Glück gehabt und bekommt vom Weihnachtsmann auch in diesem Jahr ein Geschenk.



9 Die zwei Türme

Autoren Aart Blokhuis (TU Eindhoven),
Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Die drei Intelligenzwichtel Reiko, Spaxo und Yello blicken gespannt auf den Weihnachtsmann. Der Weihnachtsmann sagt: „Auf meinem Schachbrett stehen ein blauer und ein gelber Turm, die einander (nach den Standardschachregeln) nicht bedrohen. Diese Türme stehen auf **zwei** der folgenden zwanzig Felder:

a1, a3, a4, a8, b1, b5, b8, c3, d2, d4, d7, e2, f1, f3, f5, f6, f7, g7, h4, h7.“

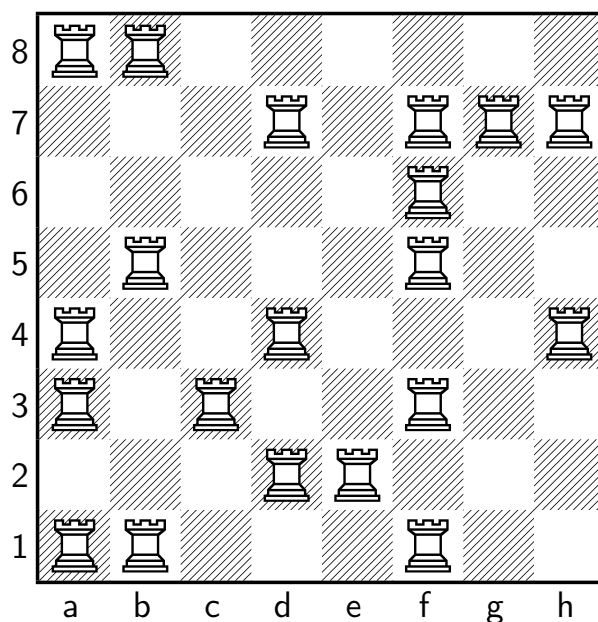


Abbildung 5: Die zwanzig möglichen Felder.

Der Weihnachtsmann fährt fort: „Reiko kennt die Reihe (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 oder 8), in der der blaue Turm steht. Spaxo kennt die Spalte (a, b, c, d, e, f, g oder h), in der der blaue Turm steht. Yello kennt das Feld, auf dem der gelbe Turm steht. Das ist aber auch schon alles, was ihr über die beiden Türme wisst.“

Die Intelligenzwichtel machen daraufhin die folgenden Aussagen. Nach jeder Aussage denken die Wichtel eine Minute nach, bevor die nächste Aussage getätigt wird.

- 1) Spaxo sagt: „Ich kann das Feld des blauen Turms nicht bestimmen.“
- 2) Dann sagt Spaxo: „Ich weiß, dass auch Reiko das Feld des blauen Turms nicht bestimmen kann.“
- 3) Jetzt sagt Reiko: „Ich kann das Feld des blauen Turms noch immer nicht bestimmen.“
- 4) Nun sagt Spaxo: „Ich kann das Feld des blauen Turms noch immer nicht bestimmen.“
- 5) Dann sagt Spaxo: „Ich weiß, dass Yello das Feld des blauen Turms nicht bestimmen kann.“
- 6) Danach sagt Yello: „Vor Spaxos letzter Aussage kannte ich die Spalte des blauen Turms nicht.“
- 7) Dann sagt Reiko: „Vor Spaxos letzter Aussage kannte ich die Spalte des blauen Turms nicht.“
- 8) Schließlich sagt Yello: „Aha! Jetzt kenne ich das Feld des blauen Turms.“

Wir wollen von Euch wissen: Wo steht denn nun der blaue Turm?



Illustration: Friederike Hofmann

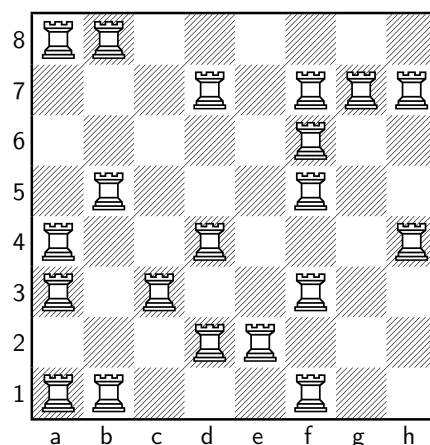
Antwortmöglichkeiten:

1. Der blaue Turm steht auf a1 oder d7.
2. Der blaue Turm steht auf a3 oder e2.
3. Der blaue Turm steht auf a4 oder f1.
4. Der blaue Turm steht auf a8 oder f3.
5. Der blaue Turm steht auf b1 oder f5.
6. Der blaue Turm steht auf b5 oder f6.
7. Der blaue Turm steht auf b8 oder f7.
8. Der blaue Turm steht auf c3 oder g7.
9. Der blaue Turm steht auf d2 oder h4.
10. Der blaue Turm steht auf d4 oder h7.

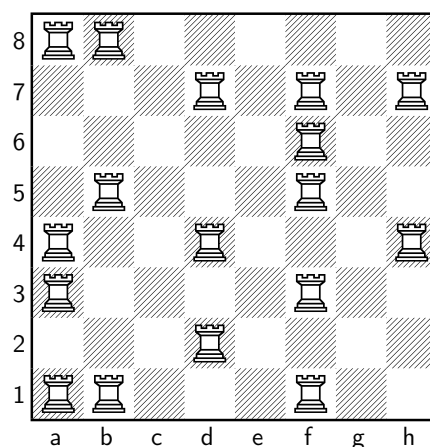
Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

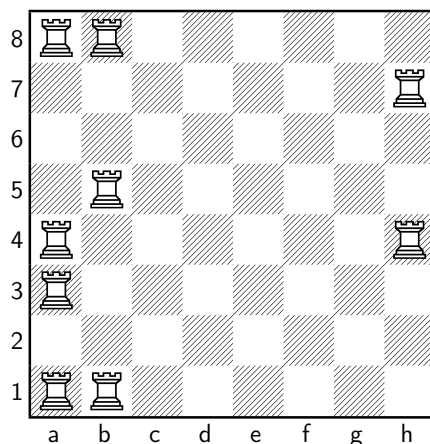
Wir arbeiten uns Schritt für Schritt durch die Aussagen der Intelligenzwichtel und analysieren ihre Konsequenzen. Wir sagen, dass ein Feld auf dem Schachbrett zu einem gewissen Zeitpunkt *aktiv* ist, falls die bis zu diesem Zeitpunkt gemachten Aussagen es zulassen, dass der blaue Turm auf diesem Feld steht. Zur Erinnerung hier die 20 möglichen Positionen der beiden Türme:



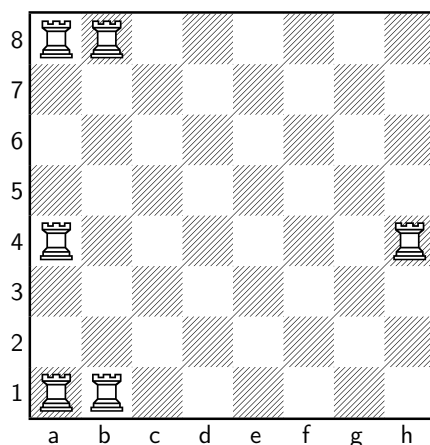
Spaxo: Ich kann das Feld des blauen Turms nicht bestimmen. Spaxo kennt nur die Spalte des blauen Turms. Wenn in dieser Spalte zwei (oder mehr) verschiedene Felder aktiv sind, kann Spaxo die Position des blauen Turms nicht bestimmen. Wenn in dieser Spalte aber nur ein Feld aktiv ist, weiß Spaxo, dass der blaue Turm auf diesem aktiven Feld stehen muss. Wir folgern, dass der blaue Turm weder in Spalte *c*, noch in Spalte *e*, noch in Spalte *g* steht:



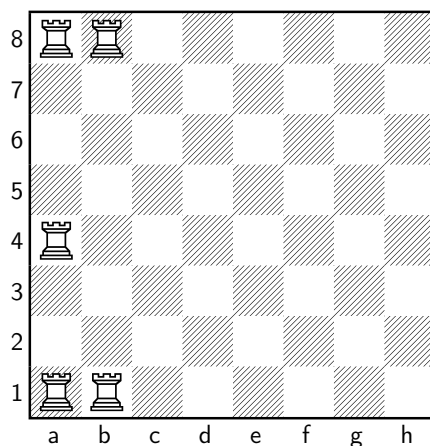
Spaxo: Ich weiß, dass auch Reiko das Feld des blauen Turms nicht bestimmen kann. Reiko kennt nur die Reihe des blauen Turms. Daher kann er die Position des Turms genau dann bestimmen, wenn diese Reihe nur ein einziges aktives Feld enthält; nur die beiden Reihen 2 und 6 enthalten genau ein aktives Feld. Spaxo weiß also, dass der blaue Turm weder in Reihe 2 noch in Reihe 6 steht. Das bedeutet aber, dass Spaxo weder die Spalte *d* (mit dem aktiven Feld d2) noch die Spalte *f* (mit dem aktiven Feld f6) haben kann:



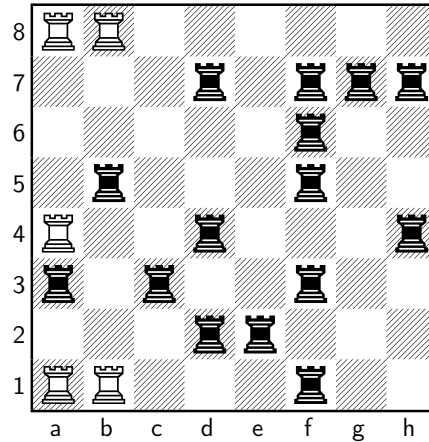
Reiko: Ich kann das Feld des blauen Turms noch immer nicht bestimmen. Da Reiko die Reihe des blauen Turms kennt, muss diese Reihe mindestens zwei aktive Felder enthalten. Dadurch werden die Reihen 3, 5 und 7 eliminiert:



Spaxo: Ich kann das Feld des blauen Turms noch immer nicht bestimmen. Da Spaxo die Spalte des blauen Turms kennt, muss diese Spalte mindestens zwei aktive Felder enthalten. Dadurch wird die Spalte h eliminiert:



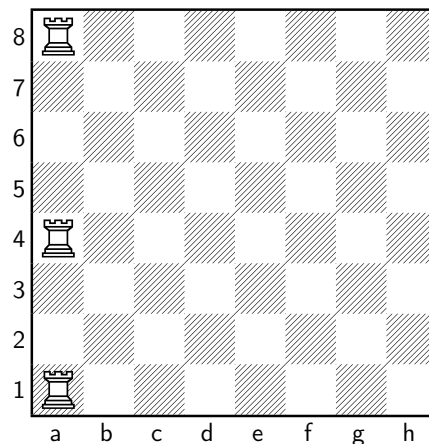
Spaxo: Ich weiß, dass Yello das Feld des blauen Turms nicht bestimmen kann. Yello hat aus der bisherigen Konversation natürlich genau dasselbe Wissen wie wir extrahiert; er weiß, dass der blaue Turm nur auf einem der fünf Felder a1, a4, a8, b1, b8 stehen kann.



In welchen Fällen kann Yello aus der Position des gelben Turms nun die Position des blauen Turms bestimmen?

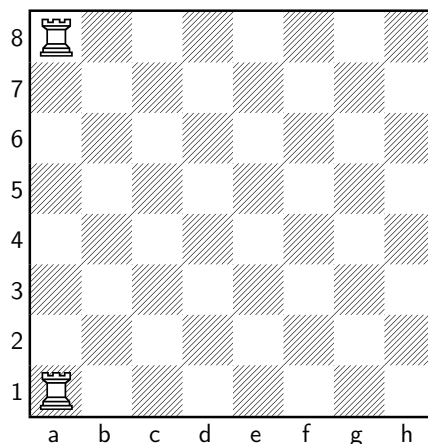
- Wenn der gelbe Turm auf a1 steht, muss der blaue Turm auf b8 sein.
- Wenn der gelbe Turm auf a8 steht, muss der blaue Turm auf b1 sein.

In allen anderen Fällen bleiben Yello mindestens zwei aktive Kandidaten für die Position des blauen Turms übrig. Spaxo muss also wissen, dass Yello weder das Feld a1 noch das Feld a8 hat. Und Spaxo kann dies nur dann mit Sicherheit wissen, wenn er selbst die Spalte *a* hat. Für den blauen Turm sind jetzt also nur noch die drei Felder a1, a4, a8 aktiv:

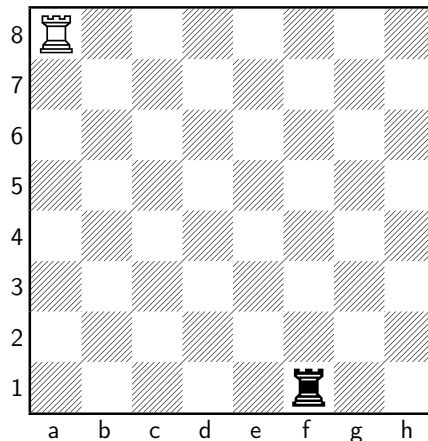


Yello: Vor Spaxos letzter Aussage konnte ich die Spalte des blauen Turms nicht. Unmittelbar vor Spaxos letzter Aussage waren die fünf Felder a1, a4, a8, b1, b8 aktiv. Wenn der gelbe Turm in einer der beiden Spalten *a* und *b* stünde, müsste der blaue Turm in der anderen Spalte stehen. Da Yello die Spalte aber nicht bestimmen kann, steht der gelbe Turm weder in Spalte *a* noch in Spalte *b*.

Reiko: Vor Spaxos letzter Aussage konnte ich die Spalte des blauen Turms nicht. Unmittelbar vor Spaxos letzter Aussage waren die fünf Felder a1, a4, a8, b1, b8 aktiv. Aus Reikos Aussage folgt, dass Reiko nicht die Reihe 4 hat:



Yello: Aha! Jetzt kenne ich das Feld des blauen Turms. Nach Reikos Aussage sind nur noch die beiden Felder a1 und a8 aktiv. Da Yello eines dieser beiden Felder eliminieren kann, muss der gelbe Turm in Reihe 1 oder Reihe 8 stehen. Wir wissen bereits, dass der gelbe Turm weder in Spalte a noch in Spalte b steht. Daher bleibt nur noch das Feld f1 für den gelben Turm übrig. Der blaue Turm steht dann auf a8:





10 Schneemobile mit Schneeflockenantrieb

Autor*innen: Niels Lindner (Zuse-Institut Berlin),
Fabian Löbel (Zuse-Institut Berlin),
Berenike Masing (Zuse-Institut Berlin)

Projekt: Electric Bus Scheduling (Forschungscampus MODAL)

Aufgabe

Das Produzieren der Geschenke ist jedes Jahr eine Mammutaufgabe für den Weihnachtsmann und seine Wichtel. Doch nicht nur die Herstellung an sich, sondern auch die Logistik stellt eine echte Herausforderung dar: Die einzelnen Bestandteile müssen pünktlich und rechtzeitig von einer Station zur nächsten transportiert werden. Weil sich die Arbeit über mehrere Tage hinzieht, hatte der Weihnachtsmann bis jetzt immer ein System von Rentierschlitten auf dem Nordpol-Straßennetz benutzt, um die Waren zu befördern. Dabei führten die Schlitten jede Stunde die gleichen Fahrten zu den gleichen Abfahrts- und Ankunftsminuten durch. Das Straßennetz und der Fahrplan sind in [Abbildung 6](#) zu sehen.

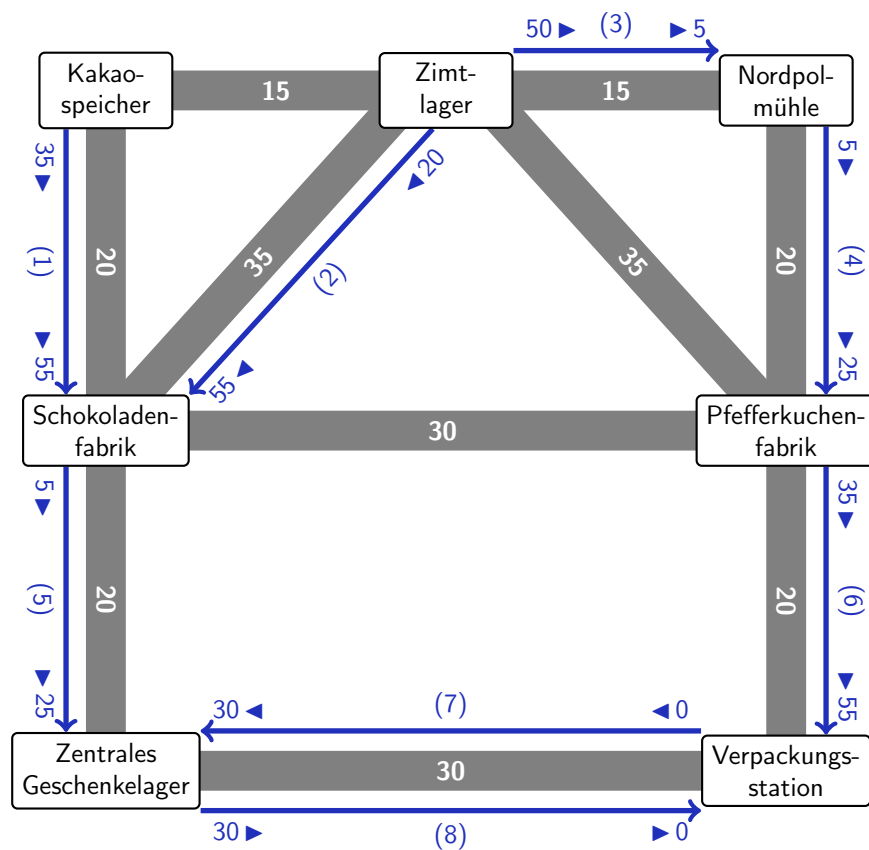
Doch dieses Jahr ist alles anders: Die Rentiere wollen diese anstrengende Arbeit nicht mehr ausführen und sind deshalb in einen unbefristeten Streik getreten. Der Weihnachtsmann muss nun schnell handeln: Der Fahrplan der Rentierschlitten lässt sich nicht mehr ändern, denn die Produktion an den einzelnen Stationen ist voll darauf ausgerichtet. Glücklicherweise gelingt es dem Weihnachtsmann, kurzfristig umweltfreundliche Schneemobile zu beschaffen. Sie fahren genauso schnell wie die Rentierschlitten, also zwischen Stationen gemäß den Fahrzeiten in [Abbildung 6](#). Wie die Rentierschlitten dürfen auch sie nicht die Straßen verlassen; die Fahrzeit hängt nicht von der Fahrtrichtung ab.

„Prima!“, denkt sich der Weihnachtsmann. „Dann kann ich den Fahrplan wie vorher mit 6 Schneemobilen abdecken.“ Weil sich der Fahrplan jede Stunde wiederholt, sollen sich die Fahrzeuge auf Kreisen durch das Netz bewegen, die sich ebenfalls periodisch wiederholen. Jede Fahrt soll von genau einem Kreis abgedeckt werden und kein Kreis darf eine Fahrt mehrfach enthalten. Die Fahrzeuge können sich frei auf dem Straßennetz bewegen, insbesondere dürfen sie auch nach Befahren einer Straße diese gleich wieder zurückfahren. Nach Ankunft an einer Station dürfen sie sofort wieder abfahren, können aber auch warten. Konkret hat sich der Weihnachtsmann den Fahrzeugumlaufplan aus [Abbildung 7](#) ausgedacht.

Da klopft Rudolf, das Rentier, an. Als er den Fahrzeugumlaufplan vom Weihnachtsmann erblickt, bricht er in schallendes Gelächter aus. Danach erklärt Rudolf dem verblüfften Weih-

nachtsmann, was er vergessen hat: Die Schneemobile funktionieren mit einem besonderen Schneeflockenantrieb. Dazu ist jedes Fahrzeug mit einem Eimer ausgerüstet, der bis zu 500 Schneeflocken fassen kann. Allerdings verbraucht der Motor pro Minute Fahrzeit 10 Schneeflocken, Schneemobile können dementsprechend nicht mehr als 50 Minuten ohne Pause fahren. Die Eimer können an jeder Station wieder aufgefüllt werden, allerdings benötigt das 5 Minuten Zeit. Also können die Schneemobile nicht wie im Plan des Weihnachtsmanns bis zu 110 Minuten am Stück fahren, ohne an einer Station zu pausieren. Wenn die Fahrzeuge im Plan vom Weihnachtsmann allerdings zum Nachfüllen auf einmal länger hielten, würden sie auch die nächsten Abfahrten verpassen und das ganze Geschenkesystem bräche zusammen. Der Weihnachtsmann muss sich also wohl oder übel neue Kreise ausdenken, auf denen die Fahrzeuge verkehren. Im schlimmsten Fall braucht er mehr als 6 Schneemobile, um alle Fahrten im Fahrplan abzudecken...

Frage: Wie viele Schneemobile werden mindestens gebraucht, um alle Fahrten 1 bis 8 im Fahrplan aus Abbildung 6 zu realisieren?



Legende:

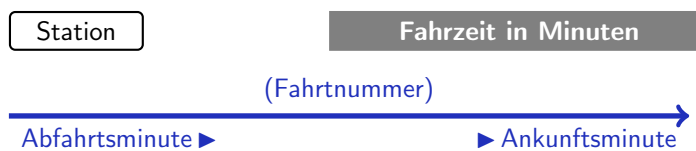


Abbildung 6: Straßennetz und Fahrplan.

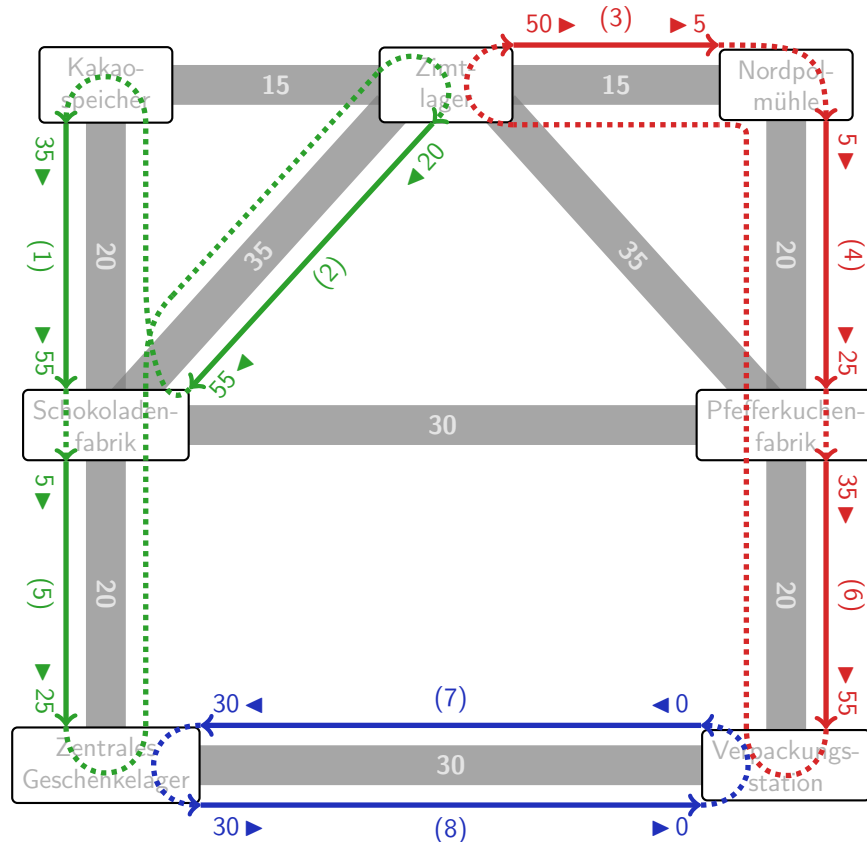


Abbildung 7: Fahrzeugumlaufplan des Weihnachtsmanns:

Auf dem **blauen Kreis** werden abwechselnd Fahrten 7 und 8 bedient. Ein Umlauf dauert 60 Minuten. Daher benötigt der blaue Kreis für einen 60-Minuten-Takt genau ein Fahrzeug. Pausen haben die Fahrzeuge dabei keine.

Der **grüne Kreis** besteht aus Fahrt 1 (20 Minuten), Warten an der Schokoladenfabrik (10 Minuten), Fahrt 5 (20 Minuten), Leerfahrt zum Zimtlager (55 Minuten), Fahrt 2 (35 Minuten), Leerfahrt zum Kakaospeicher (20 Min.), Warten auf Abfahrt von Fahrt 1 (20 Min.). Insgesamt dauert ein Umlauf damit 180 Minuten, es werden also 3 Fahrzeuge für den grünen Kreis benötigt.

Auf dem **roten Kreis** ist jedes Fahrzeug 120 Minuten unterwegs, damit sind genau 2 Fahrzeuge für einen Stundentakt nötig. Durch die 55 Minuten Fahrzeit schaffen die Fahrzeuge mit Ankunft zur Minute 55 an der Verpackungsstation genau die Abfahrt am Zimtlager zur Minute 50. Fahrzeuge auf dem roten Kreis haben nur 10 Minuten Pause an der Pfefferkuchenfabrik.



Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 10

Projektbezug:

Das MobilityLab am Zuse-Institut Berlin erforscht, wie Organisation, Betrieb und Fahrgast-freundlichkeit im öffentlichen Verkehr mithilfe von Mathematik verbessert werden können. Im Rahmen des Forschungscampus MODAL widmet sich das Projekt *Electric Bus Scheduling* der Umlaufplanung von elektrisch angetriebenen Bussen. Die größte Herausforderung bei der Umstellung von Diesel- auf Elektrobusse ist, dass heutige Batteriekapazitäten nicht für die Strecken ausreichen, die Dieselsebuse an einem Tag typischerweise zurücklegen. Daher muss das Wiederaufladen der Batterie beim Planen des Fahrzeugeinsatzes mitbedacht werden.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Für die Argumentation hilft es, ein Diagramm wie in Abbildung 8 anzufertigen, das eine Übersicht über die zeitliche Anordnung der Fahrten gibt.

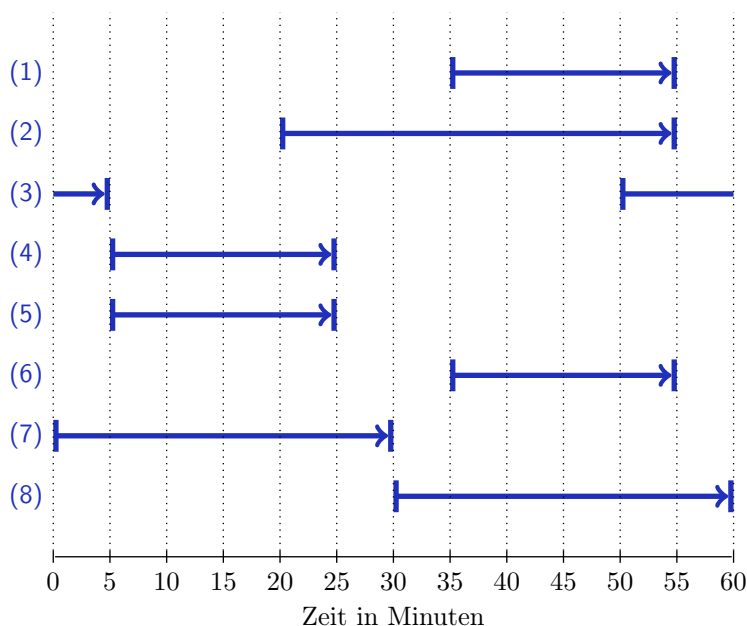


Abbildung 8: Fahrzeugumlaufplan

≥ 5 **Schneemobile:** Aus dem Diagramm sieht man sofort, dass sich zwischen den Minuten 50 und 55 je ein Fahrzeug auf den Fahrten 1, 2, 3, 6 und 8 befinden muss, es sind also mindestens fünf Schneemobile nötig.

Auch im Folgenden werden wir auf Minute 50 Bezug nehmen, da sich die benötigte Anzahl an Fahrzeugen an diesem Zeitpunkt gut messen lässt.

≥ 6 **Schneemobile:** Das Zimtlager ist recht weit weg von den Endstationen der Fahrten: Von der Nordpolmühle benötigen die Schneemobile 15 Minuten, von allen anderen Endpunkten sogar 35 Minuten oder mehr. Für das Fahrzeug, das zur Minute 20 die Fahrt 2 am Zimtlager beginnt, gilt also genau einer der beiden Fälle:

1. Es befindet sich zur Minute 50 der vorigen Periode auf einer Leerfahrt, d. h. auf keiner der Fahrten 1–8.
2. Es hat bis zur Minute 5 der gleichen Periode die Fahrt 3 bedient.

Im ersten Fall fahren zur Minute 50 mindestens 6 Schneemobile, nämlich auf den Fahrten 1, 2, 3, 6 und 8 sowie auf der Leerfahrt zur Fahrt 2.

Im zweiten Fall fährt das Schneemobil vom Zimtlager zur Nordpolmühle (Fahrt 3, 15 Minuten), zurück zum Zimtlager (15 Minuten) und sofort weiter auf Fahrt 2 (35 Minuten). Diese 65 Minuten Fahrt benötigen 650 Schneeflocken, aber der Eimer fasst nur 500, und es bleibt keine Zeit zum Auffüllen. Dieser Fall ist also nicht möglich.

Demnach benötigt der Weihnachtsmann mindestens 6 Schneemobile.

≥ 7 Schneemobile: Wir betrachten nun Fahrt 5. Das Fahrzeug, das bis zur Minute 25 die Fahrt 5 bedient, kann sich nicht 25 Minuten später (d. h. zur Minute 50 desselben Umlaufs) auf einer der Fahrten 1, 2, 3 oder 6 befinden, denn vom Zentralen Geschenkelager dauert die Fahrt zu den Anfangsstationen dieser Fahrten mehr als 25 Minuten. Wir haben drei Fälle: Dieses Fahrzeug befindet sich zur Minute 50

1. auf einer Leerfahrt und anschließend auf Fahrt 2,
2. auf einer Leerfahrt und anschließend nicht auf Fahrt 2,
3. auf Fahrt 8.

Im ersten Fall bemerken wir, dass Fahrt 5 zur Minute 25 endet und Fahrt 2 ab Minute 20 der nächsten Periode beginnt. Ein Fahrzeug schafft die Strecke vom Geschenkelager zum Zimtlager zwar in 55 Minuten, doch dann besteht keine Pausenmöglichkeit, sodass die Schneeflocken nicht ausreichen. Der Übergang von Fahrt 5 zu 2 funktioniert nur, wenn Fahrt 2 nicht in der nächsten, sondern erst in der übernächsten Periode durchgeführt wird. Damit wären wir bei 7 Fahrzeugen, denn zur Minute 50 gibt es neben den 5 auf Fahrt 1, 2, 3, 6, 8 noch die zwei, die auf Leerfahrt zwischen Fahrt 5 und 2 sind.

Im zweiten Fall haben wir zwei verschiedene Leerfahrten zur Minute 50, also wieder mindestens 7 Fahrzeuge (s. oben).

Im dritten Fall gehen Fahrzeuge von Fahrt 5 zu Fahrt 8 über. Insbesondere findet kein Übergang von Fahrt 7 zu Fahrt 8 statt. Zur Minute 50 befindet sich das Fahrzeug von Fahrt 7 dann zwingend auf einer Leerfahrt. Wir unterscheiden nun wieder, ob sich Fahrt 2 an diese Leerfahrt anschließt oder nicht. Im ersten Fall kann das Fahrzeug wegen der 55 Minuten Leerfahrtdauer zur Minute 20 am Zimtlager erst in der übernächsten Periode abfahren. Im zweiten Fall gibt es eine Leerfahrt von Fahrt 7 ausgehend und eine andere zu Fahrt 2 hin. In beiden Fällen sind 7 Fahrzeuge nötig.

≤ 7 **Schneemobile:** Es ist möglich, den Fahrplan mit 7 Schneemobilen zu fahren, siehe Abbildung 9.

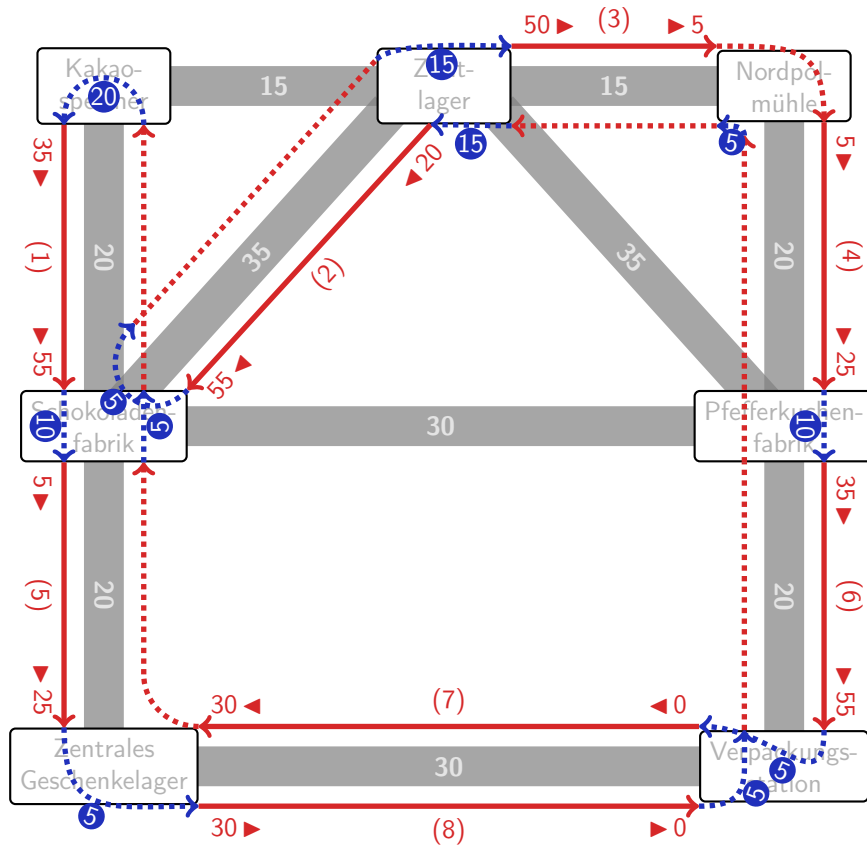


Abbildung 9: Lösung mit 7 Schneemobilen.

Alle Fahrzeuge fahren auf einem großen Kreis. Die **blauen Marker** geben an, wie lange die Fahrzeuge an den jeweiligen Stationen warten und wieder Schneeflocken tanken. Mit dieser Lösung dauert eine Umlauf des Kreises 420 Minuten, somit werden also $420/60 = 7$ Schneemobile benötigt.



11 Christbaumkugel-Mashup

Autoren: Christian Hercher (Europa-Universität Flensburg),
Michael Schmitz (Europa-Universität Flensburg)

Aufgabe

Der Wichtel Willi bedient in diesem Jahr die Christbaumkugel-Maschine in der Weihnachtswerkstatt. Die Maschine produziert Packungen mit farbigen Christbaumkugeln. Dabei kann man die Packungsgröße und die möglichen Kugelfarben einstellen. Allerdings wählt die Maschine bei jeder Kugel, die in eine Packung kommt, eine der eingestellten Farben zufällig aus. Es kann also zum Beispiel passieren, dass nur Kugeln einer Farbe in einer Packung vorkommen, obwohl mehr als eine Farbe eingestellt war. Im Moment ist die Maschine auf 5er-Packungen mit den Farben Rot und Silber eingestellt. Nachdem Willi drei Packungen geöffnet hat, behauptet er: „Alle 5er-Packungen mit Farben Rot und Silber sind voneinander verschieden.“ Dabei bezeichnen wir zwei Packungen als *gleich*, wenn sie die gleiche Anzahl von Kugeln je Farbe haben, und als *verschieden*, wenn sie nicht gleich sind.

Wichtelin Selma erwidert: „Das kann ja gar nicht sein, da es nur sechs verschiedene Packungen dieser Art gibt.“

- (a) Wie viele verschiedene 10er-Packungen mit Kugeln in den Farben Rot, Silber und Grün gibt es?
- (b) Die Maschine ist nun auf 4er-Packungen mit den Farben Rot und Silber eingestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung genau 3 rote Kugeln sind?
- (c) Die Maschine ist nach wie vor auf 4er-Packungen mit den Farben Rot und Silber eingestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei direkt nacheinander produzierte Packungen gleich sind?
- (d) Die Maschine ist nun auf 9er-Packungen mit den Farben Rot und Silber eingestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei direkt nacheinander produzierte Packungen gleich sind?

Um die Fragestellungen der Aufgabenteile (b) bis (d) zu beantworten, veranschaulicht sich die schlaue Selma den Füllvorgang bei zwei möglichen Farben, z. B. Rot und Silber, durch einen Pfad im Koordinatensystem. Kommt eine silberne Kugel in die Packung, geht es einen Schritt nach rechts, kommt eine rote Kugel in die Packung, geht es einen Schritt nach oben. In der nachfolgenden Abbildung stellt der blaue Pfad das Befüllen einer 4er-Packung mit drei

silbernen und einer roten Kugel dar. Der rote Pfad stellt das Befüllen einer 4er-Packung mit zwei silbernen und zwei roten Kugeln dar. Vielleicht hilft auch dir diese Veranschaulichung weiter?

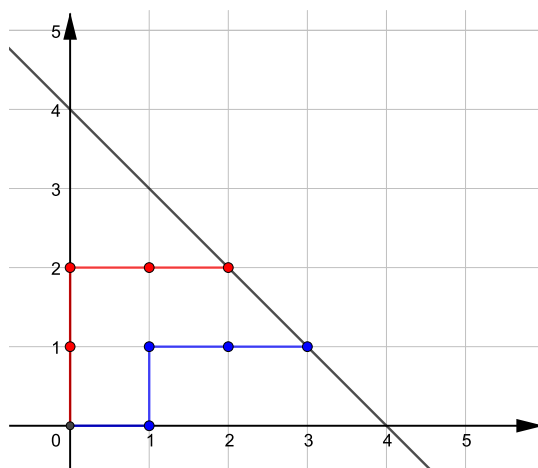




Illustration: Julia Nurit Schönngel

Antwortmöglichkeiten:

1. (a) 59049, (c) $\frac{35}{128}$.
2. (a) 11, (d) $\frac{1}{10}$.
3. (b) $\frac{1}{5}$, (c) $\frac{1}{5}$.
4. (b) $\frac{1}{4}$, (d) $\frac{1}{10}$.
5. (c) $\frac{35}{128}$, (d) $\frac{12055}{65536}$.
6. (a) 66, (c) $\frac{1}{5}$.
7. (a) 59049, (d) $\frac{12155}{65536}$.
8. (b) $\frac{1}{4}$, (c) $\frac{35}{128}$.
9. (b) $\frac{1}{5}$, (d) $\frac{12155}{65536}$.
10. (c) $\frac{1}{5}$, (d) $\frac{12055}{65536}$.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Nur Antwort 8 ist korrekt, alle anderen enthalten mindestens einen falschen Wert. Um dies zu zeigen, berechnen wir im Folgenden die gesuchten Werte. Dabei gilt (wie so häufig, insbesondere in der Kombinatorik und Stochastik), dass es viele verschiedene Möglichkeiten und Überlegungen gibt, die zum Ziel führen. Wir stellen hier jeweils zwei Lösungswege vor.

- (a) Wir können jede 10er-Packung mit den Farben Rot, Silber und Grün als ein 12-Tupel mit genau 10 Nullen und 2 Einsen darstellen. Dabei geben die Anzahlen der Nullen vor der ersten Eins, zwischen den beiden Einsen bzw. nach der zweiten Eins die Anzahlen der roten, silbernen bzw. grünen Kugeln in der Packung an. Z. B. stellt das Tupel $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ eine Packung mit 2 roten, 3 silbernen und 5 grünen Kugeln dar. Man beachte, dass auf diese Weise auch Packungen, in der nicht alle Farben vorkommen, darstellbar sind. So stellt z. B. das Tupel $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ eine Packung mit nur grünen Kugeln dar. Da es $\binom{12}{2} = 66$ Möglichkeiten gibt, die Positionen der beiden Einsen aus den 12 möglichen Positionen zu wählen, gibt es ebenso viele Tupel dieser Art bzw. 10er-Packungen mit den Farben Rot, Silber und Grün.

Bemerkung: Es handelt sich um das Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge“. Für das k -malige Ziehen aus einer Urne mit n Kugeln gibt es $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ mögliche Ausgänge. In unserem Fall wird $k = 10$ mal aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln (in den Farben Rot, Silber und Grün) gezogen, d. h. es gibt $\binom{n+k-1}{n-1} \binom{12}{2} = 66$ mögliche 10-er Packungen.

Alternativer Lösungsweg: Hier wollen wir schrittweise vorgehen und uns zuerst einmal um Selmas Aussage bei Packungen mit Kugeln in höchstens zwei Farben kümmern.

Sei dazu $A_2(n)$ die Anzahl verschiedener Packungen mit n Kugeln in Rot und Silber. Wenn die Anzahl r der roten Kugeln in einer solchen Packung bekannt ist, so stellen wir fest, dass die Anzahl s der silbernen Kugeln schon eindeutig bestimmt ist: Es gilt $s = n - r$; alle Kugeln einer solchen Packung, die nicht rot sind, sind silber. Demnach gilt: Für jede Anzahl r an roten Kugeln, gibt es (bis auf Gleichheit) eine solche Packung. Und da für die Anzahl r roter Kugeln natürlich jede ganze Zahl zwischen inklusive Null und der Gesamtanzahl aller Kugeln einer solchen Packung n zulässig ist, können wir festhalten, dass es genau

$$A_2(n) = n + 1$$

verschiedene Packungen mit n Kugeln in zwei verfügbaren Farben gibt. Insbesondere ist $A_2(5) = 6$, sodass Selmas Aussage vollkommen korrekt ist.

Kommen wir nun zur Aufgabenstellung. Hier sind Packungen in drei zur Verfügung stehenden Farben zu betrachten. Wie eben definieren wir die Anzahl verschiedener solcher Packungen der Größe n mit $A_3(n)$ und wählen eine Farbe: Sei g die Anzahl der grünen Kugeln in einer solchen Packung. Dann sind insgesamt noch $n - g$ Kugeln in den Farben Rot und Silber vorhanden. Wir wissen aber bereits, dass es dafür $A_2(n - g)$ Möglichkeiten gibt. Da sich ja die Anzahl der grünen Kugeln g genauso zwischen Null und n bewegen muss, können wir genau wie oben schlussfolgern, dass

$$\begin{aligned}
A_3(n) &= A_2(n-0) + A_2(n-1) + \cdots + A_2(n-n) \\
&= (n+1) + n + \cdots + 1 \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

gilt. Insbesondere ist die gesuchte Anzahl von 10er-Packungen $A_3(10) = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$.

- (b) Wir verwenden Selmas Veranschaulichung, um diese Aufgabe zu lösen. Jeder Pfad vom Koordinatenursprung mit einem Endpunkt auf der Geraden $x + y = 4$ stellt eine 4er-Packung mit den Farben Rot und Silber dar. In jedem Schritt geht es mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach rechts und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach oben. Da es vier voneinander unabhängige Schritte gibt, besitzt jeder Pfad die Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$. Alle Pfade mit dem Endpunkt $(1, 3)$ repräsentieren eine 4er-Packung mit genau drei roten Kugeln. Da es genau vier solche Pfade gibt, beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Bemerkung: Man beachte, dass es zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nicht zielführend ist, nach dem Ansatz aus Aufgabenteil (a) die Anzahl der verschiedenen 4er-Packungen mit den Farben Rot und Silber zu bestimmen. Es ist zwar korrekt, dass es $\binom{5}{1} = 5$ verschiedene solcher Packungen gibt und dass genau eine davon drei rote und eine silberne Kugel enthält, aber die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist nicht gleich $\frac{1}{5}$, weil die unterschiedlichen Packungen nicht gleichwahrscheinlich sind. Das kann man sich an Selmas Pfadmodell gut klarmachen: So führt z. B. nur ein Pfad zum Endpunkt $(4, 0)$. Eine Packung mit vier roten Kugeln wird also nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$ produziert.

Alternativer Lösungsweg: Um die Wahrscheinlichkeiten einfacher berechnen zu können, führen wir eine virtuelle Reihenfolge der Kugeln in der Packung ein; es gibt also jetzt für uns eine „erste“ Kugel, eine „zweite“ Kugel usw. Dadurch können wir eine solche Packung als Tupel darstellen, d. h. als Folge von Einträgen, deren Reihenfolge relevant ist. Steht r dafür, dass die entsprechende Kugel rot ist und s für eine silberne Kugel, dann beschreibt (r, s, r, r) eine 4er-Packung, bei der die 1., 3. und 4. Kugeln rot ist, während die 2. silbern ist.

Die Reihenfolge haben wir eingeführt, da diese Tupel bei fest vorgegebener Packungsgröße n und fester Farbanzahl alle gleichwahrscheinlich sind. (Man spricht von einem *Laplace-Experiment*.) Wie viele solche Tupel gibt es? Für jeden Eintrag haben wir zwei Möglichkeiten: Entweder die Kugel ist rot oder silbern. Da man sich bei jeder Kugel neu entscheiden kann, welche Farbe sie haben soll, verdoppelt sich die Anzahl solcher Tupel mit jeder weiteren Kugel, die in die Packung kommt. Für 4er-Packungen erhalten wir also $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ solche Tupel, sodass jedes Tupel beim zufälligen Ziehen eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{16}$ besitzt.

Und wie viele dieser Tupel enthalten genau drei rote Kugeln? Dazu muss man aus den vier Stellen die drei auswählen, an denen die roten Kugeln platziert werden sollen. (An der übrigen Stelle befindet sich dann eine silberne Kugel.) Dazu gibt es $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten, sodass die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ beträgt.

- (c) Wir verwenden erneut Selmas Pfadmodell und überlegen uns zunächst für beliebiges ein $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Pfad der Länge 4 im Punkt $(k, 4 - k)$

endet (ein solcher Pfad stellt eine Packung mit k silbernen und $4 - k$ roten Kugeln dar). Weil genau k der 4 Schritte nach rechts gehen müssen, gibt es $\binom{4}{k}$ verschiedene Pfade zum Punkt $(k, 4 - k)$. Weil jeder dieser Pfade die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$ besitzt, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Pfad der Länge 4 im Punkt $(k, 4 - k)$ endet, $\binom{4}{k} \cdot \frac{1}{16}$. Dies ist auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 4er-Packung mit den Farben Rot und Silber genau k rote Kugeln enthält. Werden nun zwei solcher Packungen zufällig und unabhängig voneinander gewählt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide genau k rote Kugeln enthalten, folglich

$$\binom{4}{k} \cdot \frac{1}{16} \cdot \binom{4}{k} \cdot \frac{1}{16} = \binom{4}{k}^2 \cdot \frac{1}{256}.$$

Zwei zufällig gewählte Packungen sind genau dann identisch, wenn sie beide genau 0 oder 1 oder 2 oder 3 oder 4 silberne Kugeln enthalten. Folglich beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \frac{1}{256} \cdot \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k}^2 &= \frac{1}{256} \cdot \left(\binom{4}{0}^2 + \binom{4}{1}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{3}^2 + \binom{4}{4}^2 \right) \\ &= \frac{70}{256} = \frac{35}{128}. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg: Ähnlich wie im alternativen Lösungsweg zum Aufgabenteil (b) wollen wir hier eine Modellierung mit Tupeln vornehmen, um wieder ein Laplace-Experiment zu erhalten. Da wir nun aber zwei 4er-Packungen betrachten, wollen wir die darin enthaltenen Kugeln durch ein $2 \cdot 4 = 8$ -Tupel repräsentieren. (Der fünfte Eintrag dieses 8-Tupels steht dann für die erste Kugel der zweiten Packung, der sechste des Tupels für die zweite Kugel der zweiten Packung usw.)

Jedoch wollen wir die Modellierung so verändern, sodass wir leichter die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmen können: Wenn wir zwei im Sinne der Aufgabenstellung gleiche 4er-Packungen vor uns haben, müssen sich die Anzahl der roten Kugeln in der ersten und die Anzahl der silbernen Kugeln in der zweiten Packung immer zu 4 (bzw. allgemein zur Packungsgröße) ergänzen. Dies ist klar, da die Anzahl der silbernen Kugeln in der zweiten Packung gleich der Anzahl der silbernen in der ersten Packung ist. Und natürlich gilt aus demselben Grund auch die Umkehrung: Immer dann, wenn sich die Anzahl der roten Kugeln aus der ersten mit der Anzahl der silbernen Kugeln aus der zweiten Packung zu 4 (bzw. zur Packungsgröße) ergänzen, liegen uns zwei im Sinne der Aufgabenstellung gleiche Packungen vor.

Dies nutzen wir nun, um unsere Modellierung anzupassen: Wir betrachten 8-Tupel mit den Einträgen „0“ bzw. „1“. Dabei steht an den ersten vier Positionen eine Eins dafür, dass die entsprechende Kugel der ersten Packung rot ist, und eine Null entsprechend für eine silberne Kugel. Bei den Einträgen an den Positionen der zweiten Hälfte des 8-Tupels sei die Codierung aber genau umgekehrt: Eine Eins stehe nun dafür, dass die entsprechende Kugel der zweiten Packung silbernen sei und eine Null für eine rote Kugel.

So codiert z. B. das 8-Tupel $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$, dass die 1. und 2. Kugel der ersten Packung sowie die 3. und 4. Kugel der zweiten Packung rot und die anderen silbernen sind.

Wie viele solche Tupel gibt es nun? Wie bisher haben wir für jeden Eintrag des 8-Tupels zwei Möglichkeiten, die unabhängig voneinander gewählt werden können. Also ist die Gesamtzahl solcher Tupel $2^8 = 256$.

Und wie viele dieser Tupel codieren jetzt zwei im Sinne der Aufgabenstellung gleiche Packungen? Nach unserer Beobachtung muss sich dafür die Anzahl der roten Kugeln der ersten Packung mit der der silbernen der zweiten zu 4 ergänzen. Diese Anzahl können wir direkt an den konstruierten 8-Tupeln ablesen: Sie entspricht genau der Anzahl der Einsen! Wir suchen also die Anzahl derjenigen 8-Tupel, die genau 4 Einsen enthalten. Das sind $\binom{8}{4} = 70$, da wir aus den acht Stellen die vier auswählen müssen, an denen die Einsen stehen sollen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt demnach $\frac{70}{256} = \frac{35}{128}$.

- (d) Wie in Aufgabenteil (c) leitet man den Ausdruck

$$\sum_{k=0}^9 \binom{9}{k}^2 \cdot \left(\frac{1}{2^9}\right)^2 = \frac{12155}{65536}$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit her.

Bemerkung: Man kann die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten vereinfachen, indem man erkennt, dass der Ausdruck $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ stets mit $\binom{2n}{n}$ übereinstimmt. Diese Identität lässt sich ebenfalls schön in Selmas Pfadmodell erklären: Der Ausdruck $\binom{2n}{n}$ entspricht der Anzahl aller Pfade der Länge $2n$ mit dem Endpunkt (n, n) , da genau n der $2n$ Schritte nach rechts gehen müssen. Man kann die Anzahl dieser Pfade aber auch anders bestimmen: Jeder solche Pfad muss die Gerade mit der Gleichung $x + y = n$ in irgendeinem Punkt $(l, n - l)$ mit überqueren. Dann wurden bis zum Punkt $(l, n - l)$ genau l Schritte nach rechts ausgeführt. Dafür gibt es $\binom{n}{l}$ Möglichkeiten. Um zum Punkt (n, n) zu gelangen, müssen also danach noch genau $n - l$ Schritte nach rechts ausgeführt werden. Dafür gibt es $\binom{n}{n-l} = \binom{n}{l}$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $\binom{n}{l} \cdot \binom{n}{l} = \binom{n}{l}^2$ Möglichkeiten, um über den Punkt $(l, n - l)$ zum Punkt (n, n) zu gelangen. Weil man über jeden der Punkte $(l, n - l)$ mit $l \in \{0, 1, \dots, n\}$ nach (n, n) gelangen kann, gibt es folglich $\sum_{l=0}^n \binom{n}{l}^2$ verschiedene Pfade der Länge $2n$ zum Punkt (n, n) .

Es handelt sich hierbei übrigens um einen Spezialfall (nämlich $m_1 = m_2 = n$) der Vandermonde-Identität $\binom{m_1+m_2}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} \cdot \binom{m_2}{n-k}$.

Alternativer Lösungsweg: Entsprechend dem Vorgehen im alternativen Lösungsweg zu (c) leiten wir für Packungen der Größe n in den beiden zur Verfügung stehenden Farben Rot und Silber die Wahrscheinlichkeit für zwei im Sinne der Aufgabenstellung gleiche Packungen her:

$$p_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Insbesondere ergibt sich für $n = 9$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p_9 = \frac{\binom{18}{9}}{2^{18}} = \frac{46820}{262144} = \frac{12155}{65536}.$$

Weiteres Interesse?

Für eine allgemeine Betrachtung (Packungen mit n Kugeln in $d \leq n$ verschiedenen Farben) des in der Aufgabe betrachteten Problems verweisen wir auf folgenden Artikel:

J. Prochno, M. Schmitz. *A probabilistic way to discover the rainbow..* The Mathematical Gazette, 106, 565, März 2022, S. 103–115.

arXiv:2011.01030, <https://arxiv.org/abs/2011.01030> (2020).



12 Glatteis

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Der sportliche Höhepunkt des letzten Jahres war sicherlich der *Iron Gnome 2021*, der traditionelle alljährliche Eisenwichtel-Wettkampf. Im neunten Teilwettbewerb des Iron Gnome musste Knecht Ruprecht quer durch ein Schneefeld von A nach B laufen. Abbildung 10 zeigt uns die beiden Punkte A und B im Schneefeld zusammen mit einer spiegelglatten blauen Eisfläche in der linken unteren Ecke, die sich hunderte Kilometer weit nach Süden und nach Westen erstreckte. Der Nordrand und der Ostrand der Eisfläche bildeten jeweils eine schnurgerade Linie.

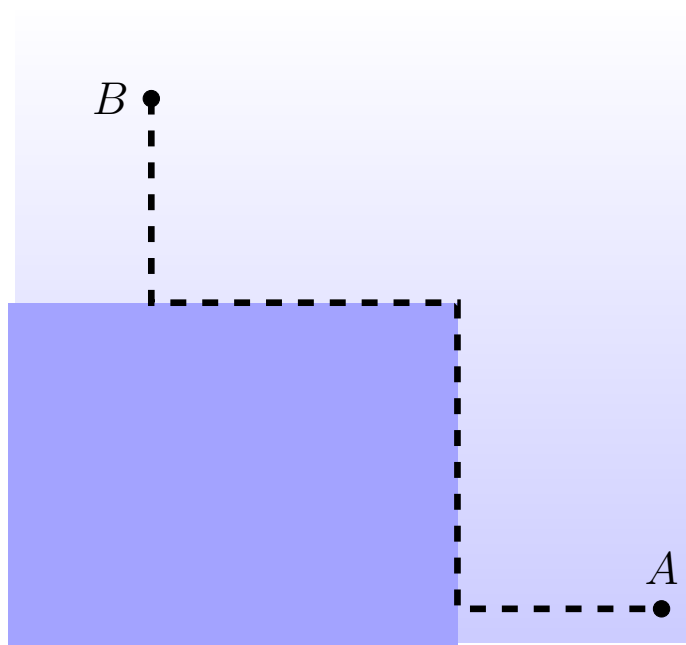


Abbildung 10: Das zu durchquerende Schneefeld, die spiegelglatte Eisfläche und ein möglicher Weg von A nach B .

Abbildung 10 zeigt außerdem einen möglichen Weg, den Ruprecht von A nach B nehmen kann. Der Weg geht von A zunächst 6 km geradeaus nach Westen, bis er den Ostrand der Eisfläche erreicht. Danach 9 km den Ostrand entlang nach Norden, danach 9 km den Nordrand entlang

nach Westen und schlussendlich 6 km geradeaus nach Norden bis zum Punkt B .

Auf der Eisfläche schlittert Ruprecht mit 10 km pro Stunde dahin, während er beim mühsamen Laufen durch das Schneefeld nur $\sqrt{40}$ km pro Stunde schafft.

Wie viel Zeit benötigt Ruprecht für den *schnellstmöglichen* Weg von A nach B ?



Illustration: Friederike Hofmann

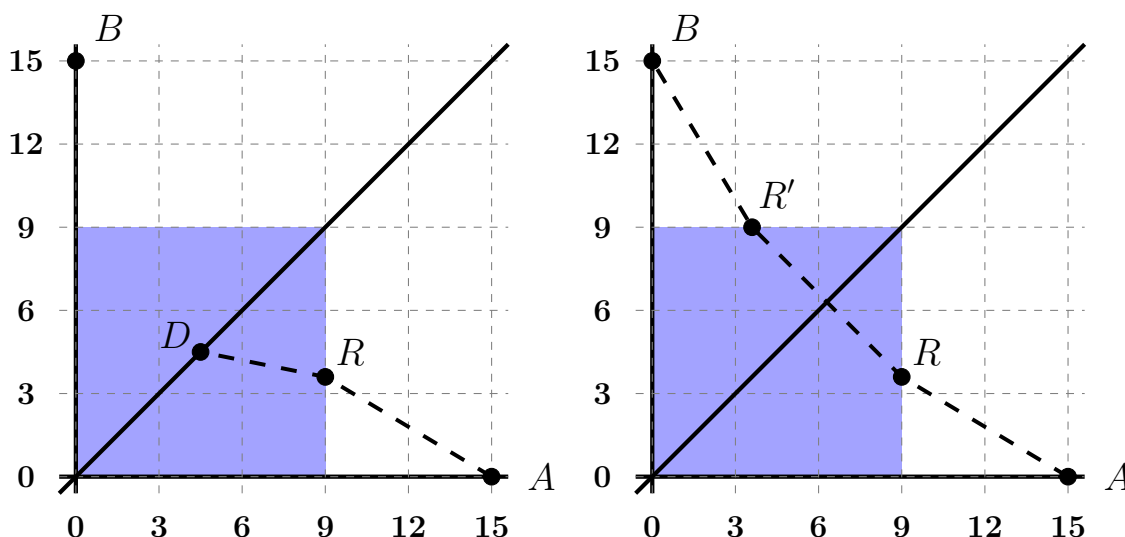
Antwortmöglichkeiten:

1. Zwischen 140 und 145 Minuten.
2. Zwischen 145 und 150 Minuten.
3. Zwischen 150 und 155 Minuten.
4. Zwischen 155 und 160 Minuten.
5. Zwischen 160 und 165 Minuten.
6. Zwischen 165 und 170 Minuten.
7. Zwischen 170 und 175 Minuten.
8. Zwischen 175 und 180 Minuten.
9. Zwischen 180 und 185 Minuten.
10. Zwischen 185 und 190 Minuten.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Wir führen ein Koordinatensystem ein, in dem die Einheitslänge 1 km beträgt: Punkt A erhält die Koordinaten $(15, 0)$, Punkt B erhält die Koordinaten $(0, 15)$, und die Ecke des Eisfeldes kommt im Punkt $(9, 9)$ zu liegen.



Man darf nun annehmen, dass der schnellste Weg von A nach B bezüglich der Diagonale $x = y$ spiegelsymmetrisch verläuft: Der schnellste Weg führt Ruprecht zunächst vom Startpunkt A zu einem Punkt $R = (9, r)$ am Ostrand des Eisfeldes und trifft dann irgendwann die Diagonale in einem Punkt $D = (d, d)$. Da aber die gesamte Abbildung symmetrisch zur Diagonalen ist, kann man den restlichen Teil des schnellsten Weges von D bis B derart wählen, dass er zum Spiegelbild des ersten Teils von D bis A wird. Insbesondere wird dieser Weg das Eisfeld in einem Punkt $R' = (r, 9)$ wieder verlassen, sodass dieser Punkt R' zum Punkt R spiegelbildlich liegt. Der schnellste Weg besteht daher aus drei Stücken:

- Aus dem Geradenstück von $A = (15, 0)$ bis $R = (9, r)$,
- aus dem Geradenstück von $R = (9, r)$ bis $R' = (r, 9)$, und
- aus dem Geradenstück von $R' = (r, 9)$ bis $B = (0, 15)$.

Die Gesamtzeit (in Stunden), die Ruprecht für diesen schnellsten Weg benötigt, hängt nur von der Koordinate r mit $0 \leq r \leq 9$ ab und beträgt

$$\begin{aligned} T(r) &= \frac{1}{\sqrt{40}} \cdot \sqrt{36 + r^2} + \frac{1}{10} \cdot \sqrt{2(9 - r)^2} + \frac{1}{\sqrt{40}} \cdot \sqrt{36 + r^2} \\ &= \sqrt{\frac{36 + r^2}{10}} + \frac{9 - r}{5\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Wir berechnen einige Werte von T im Bereich $0 \leq r \leq 9$, um uns einen Eindruck vom Verlauf der Funktion in diesem Bereich zu verschaffen:

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T(r) \approx$	3,05	2,99	2,97	2,99	3,04	3,11	3,20	3,30	3,42

Zeichnet man diese Punkte in ein Koordinatensystem ein, sieht man nun gut, dass die Funktion T im Bereich $0 \leq r \leq 9$ in der Nähe von $r = 3$ eine Minimalstelle hat (s. Abb. 11, links).

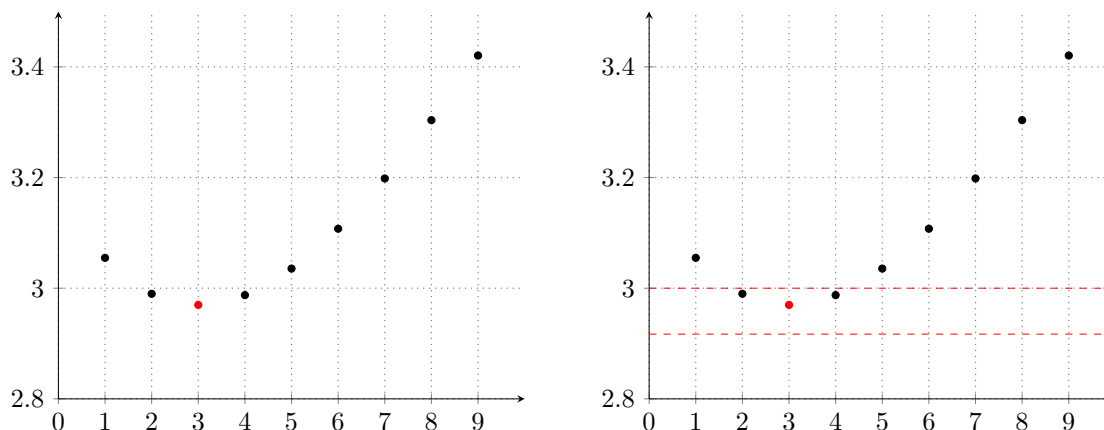


Abbildung 11: Links: Die berechneten Werte von T im Koordinatensystem. Rechts: Zusätzlich abgetragen sind die Grenzen 175 und 180 Minuten (rot, gestrichelt).

Zeichnet man zusätzlich die Grenzen 175 Minuten (entspricht $\approx 2,92$ Stunden) und 180 Minuten (entspricht 3 Stunden) in das Koordinatensystem ein (s. Abb. 11, rechts), erkennt man, dass der minimale Wert der Funktion T in diesem Bereich liegt.

Bemerkung: Wer der Differentialrechnung mächtig ist, kann natürlich auch die erste Ableitung der Funktion T betrachten, um das Minimum von T im Bereich $0 \leq r \leq 9$ zu finden:

$$T'(r) = \frac{r}{\sqrt{10(36 + r^2)}} - \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Setzt man $T'(r) = 0$, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{r}{\sqrt{10(36 + r^2)}} - \frac{1}{5\sqrt{2}} \\ \Rightarrow 5\sqrt{2}r &= \sqrt{10(36 + r^2)} \\ \Rightarrow 50r^2 &= 10(36 + r^2) \\ \Rightarrow r^2 &= 9 \end{aligned}$$

und weiters $r = 3$ im Bereich $0 \leq r \leq 9$. Man überprüft nun leicht, dass die Funktion $T(r)$ an der Stelle $r = 3$ ein Minimum für den Bereich $0 \leq r \leq 9$ hat.

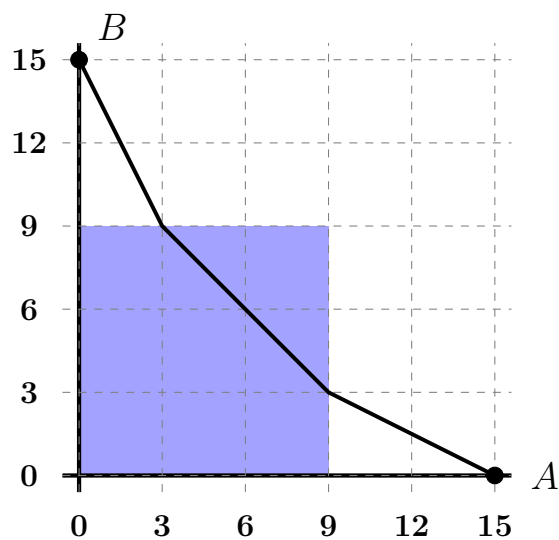


Abbildung 12: Der schnellste Weg von A nach B dauert 178,2 Minuten.

Für den schnellsten Weg von A nach B benötigt Knecht Ruprecht daher $T(3) = 21\sqrt{2}/10 \approx 2,97$ Stunden, und das sind rund 178,2 Minuten (s. Abb. 12).



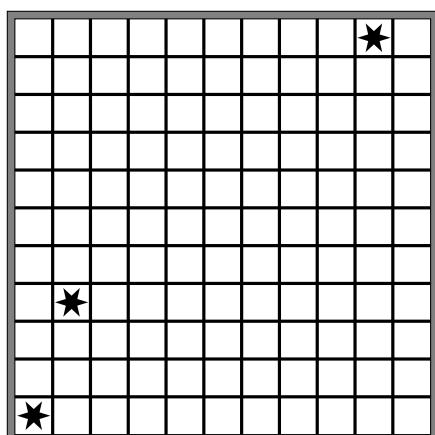
13 Mondrian

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

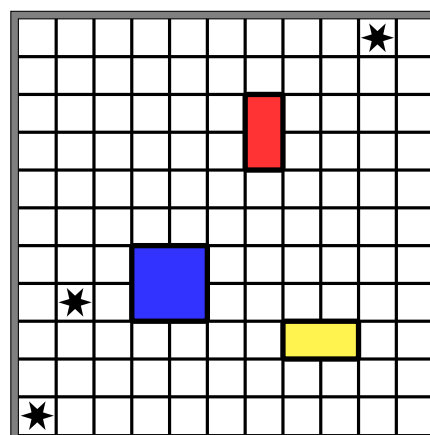
Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Der Malwichtel Mondrian hat eine quadratische Weihnachtskarte entworfen und diese in 121 gleichgroße quadratische Zellen unterteilt (s. Abb. 13a). In drei dieser Zellen zeichnet Mondrian einen Stern – *genau* so wie es in Abbildung 13a zu sehen ist.



(a) Mondrians Weihnachtskarte mit den drei Sternen.



(b) Beispiel: Mondrians Weihnachtskarte mit zwei Rechtecken und einem Quadrat.

Abbildung 13: Mondrians Weihnachtskarte.

Den Rest der Weihnachtskarte bestehend aus 118 Zellen teilt Mondrian in lauter 1×2 und 2×1 Rechtecken (bestehend aus jeweils 2 Zellen) und 2×2 Quadrate (aus jeweils 4 Zellen) ein, die er mit bunten Farben ausmalt (s. Abb. 13b). Am Ende ist *jede* der 118 Zellen Teil *genau eines* solchen Rechtecks oder Quadrats. Die drei Zellen mit den Sternen werden dabei nicht übermalt.

Wie viele 2×2 Quadrate kann Mondrian höchstens auf seine Weihnachtskarte malen?

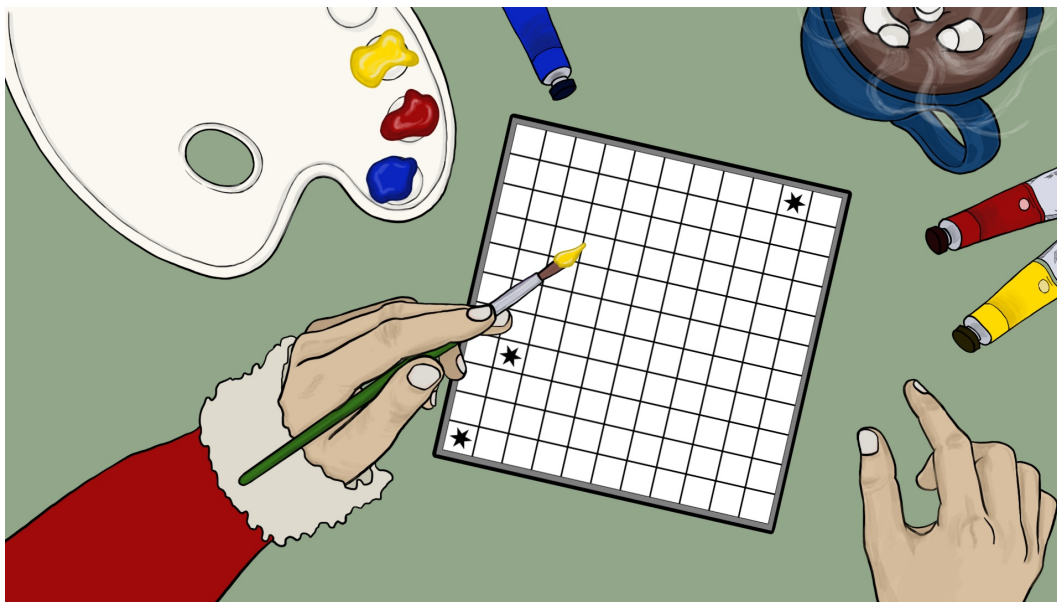


Illustration: Frauke Jansen

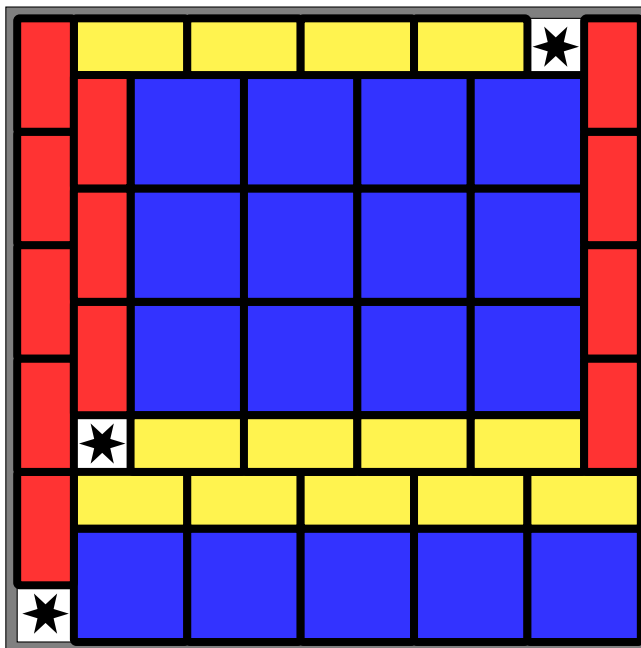
Antwortmöglichkeiten:

1. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 14.
2. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 15.
3. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 16.
4. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 17.
5. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 18.
6. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 19.
7. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 20.
8. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 21.
9. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 22.
10. Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten ist 23.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Die größtmögliche Zahl von 2×2 Quadraten beträgt 17. Das folgende Bild zeigt eine mögliche Lösung mit 17 blauen Quadraten, 13 gelben 2×1 Rechtecken und 12 roten 1×2 Rechtecken:



Nun zeigen wir noch, dass es keine Lösung mit mehr als 17 Quadraten gibt. In der folgenden Abbildung wurde in jede der 121 Zellen eine ganze Zahl geschrieben:

0	-1	2	-3	4	-5	6	-7	8	-9	10
1	0	-1	2	-3	4	-5	6	-7	8	-9
-2	1	0	-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
3	-2	1	0	-1	2	-3	4	-5	6	-7
-4	3	-2	1	0	-1	2	-3	4	-5	6
5	-4	3	-2	1	0	-1	2	-3	4	-5
-6	5	-4	3	-2	1	0	-1	2	-3	4
7	-6	5	-4	3	-2	1	0	-1	2	-3
-8	7	-6	5	-4	3	-2	1	0	-1	2
9	-8	7	-6	5	-4	3	-2	1	0	-1
-10	9	-8	7	-6	5	-4	3	-2	1	0

Die Hauptdiagonale dieses Zahlenschemas enthält ausschließlich Nullen. Außerdem ist das Schema *schiefssymmetrisch* bezüglich der Hauptdiagonalen, d. h.: Hat ein Eintrag unter der Hauptdiagonalen den Wert w , so hat der entsprechende symmetrisch über der Hauptdiagonalen gelegene Eintrag den Wert $-w$. Daraus folgt sofort, dass die Summe aller 121 Zahlen 0 ist. Das Zahlenschema hat außerdem die beiden folgenden wichtigen Eigenschaften:

- Jedes 2×2 Quadrat überdeckt vier Zahlen mit der Summe 0.
- Jedes 2×1 oder 1×2 Rechteck überdeckt zwei Zahlen mit der Summe 1 oder -1 .

Betrachten wir nun eine beliebige Aufteilung der 118 Zellen in Rechtecke und Quadrate: Da jedes 2×2 Quadrat vier Zahlen mit der Summe 0 überdeckt und da die drei Sterne drei Zellen mit der Gesamtsumme $-10 - 6 - 9 = -25$ überdecken, müssen die 2×1 und 1×2 Rechtecke eine Gesamtsumme von 25 überdecken. Da jedes Rechteck zu dieser Summe höchstens 1 beiträgt, muss es in der Aufteilung mindestens 25 Rechtecke geben. Die Gesamtfläche der Rechtecke beträgt somit mindestens $25 \cdot 2 = 50$ Zellen, sodass für die Gesamtfläche der Quadrate höchstens $118 - 50 = 68$ Zellen übrig bleibt. Daher kommen in der Aufteilung höchstens $68/4 = 17$ Quadrate vor.



14 Die Weihnachtsgans Auguste

Autor*innen: Ariane Beier (MATH+ Schulaktivitäten),
Mehran Seyed Hosseini (Universität Potsdam)

Aufgabe

Dienstag, 14. Dezember – ein schöner, kalter Wintertag. Vater Leopold kommt mit vollen Einkaufstaschen vom Bauernmarkt zurück und ist sich sicher: Am Weihnachtsabend wird es den leckersten Festtagsschmaus geben, den seine Familie je gegessen hat. Duftendes Gebäck, feinste Horsd'œuvre und natürlich eine knusprige Weihnachtsgans. Leopold läuft schon das Wasser im Mund zusammen.

Vom Rascheln der Tüten und Poltern der Lebensmittel angelockt, kommen seine Kinder, Elis, Gerda und der kleine Piotr, neugierig in die Küche.

„Würdet ihr noch die Gans aus dem Lastenrad holen?!“, bittet Leopold seine Kinder.

„Papa! Ich dachte, wir hätten uns auf ein vegetarisches Weihnachtsmenü geeinigt...“, mault Gerda. Da sind Elis und Piotr aber schon nach unten geflitzt. Kurze Zeit später kommen sie mit einem dicken schnatternden Vogel angestieftelt.

„Papa... die lebt ja noch...“, bemerkt Gerda das Offensichtliche.

„Ja, ähm... war billiger und außerdem ist sie ja dann auch frischer, oder?“, stammelt Leopold und kratzt sich seine Halbglatze.

„Die können wir doch nicht essen!“, protestiert Piotr.

„Auf keinen Fall!“, stimmen Elis und Gerda zu.

„Wir können sie aber wohl kaum behalten und bezahlt ist sie auch schon...“, meint Leopold verzweifelt.

Nach langer Streiterei einigen sich Leopold, Elis, Gerda und Piotr auf Folgendes: Leopold stellt fünf Kisten nebeneinander auf eine gedachte Gerade und platziert Auguste – ja, die Kinder haben das Tier schon lieb gewonnen und ihm einen Namen gegeben – in eine Kiste seiner Wahl. Die Kinder dürfen dann zusammen in genau eine Kiste schauen. Falls Auguste in der Kiste sitzt, haben sie gewonnen: Auguste wird nicht gegessen und ist ein freier Vogel. Sitzt Auguste jedoch nicht in der gewählten Kiste, dann platziert Leopold sie am Folgetag in eine *direkt angrenzende* Kiste und die Kinder dürfen erneut raten. Das „Spiel“ geht so lange weiter, bis die Kinder Auguste gefunden haben oder bis der 24. Dezember erreicht ist, dann kommt die Gans definitiv in den Ofen.

Damit Elis, Gerda und Piotr Zeit zum Nachdenken haben und Leopold entsprechende Kisten bauen kann, beginnt das Spiel erst morgen – also am 15. Dezember. Die Kinder können von

außen nicht sehen, hören, riechen oder fühlen, in welcher Kiste die Gans sitzt. Und selbstverständlich geht es Auguste in allen fünf Kisten gut.

Welche der zehn Aussagen ist korrekt?



Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt keine Strategie, mit der die Kinder Auguste aufspüren können.
2. Ob die Kinder Auguste rechtzeitig finden können, hängt davon ab, in welche Kiste Leopold sie am Anfang platziert.
3. Mit der besten Strategie finden die Kinder Auguste im schlimmsten Fall am 17.12.
4. Mit der besten Strategie finden die Kinder Auguste im schlimmsten Fall am 18.12.
5. Mit der besten Strategie finden die Kinder Auguste im schlimmsten Fall am 19.12.
6. Mit der besten Strategie finden die Kinder Auguste im schlimmsten Fall am 20.12.
7. Mit der besten Strategie finden die Kinder Auguste im schlimmsten Fall am 21.12.
8. Mit der besten Strategie finden die Kinder Auguste im schlimmsten Fall am 22.12.
9. Mit der besten Strategie finden die Kinder Auguste im schlimmsten Fall am 23.12.
10. Mit der besten Strategie finden die Kinder Auguste im schlimmsten Fall gerade noch rechtzeitig am 24.12.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Elis, Gerda und Piotr können Auguste rechtzeitig vor dem Heiligabend – sogar im schlimmsten Fall am 20. Dezember – finden. Wir leiten im Folgenden eine erfolgreiche Strategie her: Dazu nummerieren wir die Kisten von links nach rechts mit den Zahlen 1 bis 5 durch.

Fall 1: Angenommen Leopold setzt Auguste in eine Kiste mit einer geraden Nummer, also 2 oder 4.

Die Kinder schauen am ersten Tag in Kiste 2. Ist Auguste in dieser Kiste, dann ist sie schon gerettet. Sitzt Auguste nicht in Kiste 2, dann *muss* sie in Kiste 4 sein. Am nächsten Tag sitzt sie dann also in Kiste 3 oder 5. Die Kinder wählen also am zweiten Tag die dritte Kiste. Ist Auguste in dieser Kiste, dann wird sie gerettet. Falls nicht, dann *muss* sie in der fünften Kiste sitzen. Am folgenden Tag *muss* sie Leopold also in Kiste 4 setzen und die Kinder werden sie retten, wenn sie in die Kiste schauen.

Fazit 1: Falls Auguste am Anfang in einer Kiste mit gerader Nummer sitzt, wird sie spätestens am dritten Tag gefunden, wenn die Kinder nacheinander in die Kisten 2, 3 und 4 schauen.

Fall 2: Angenommen Leopold setzt Auguste in eine Kiste mit einer ungeraden Nummer, also 1, 3 oder 5.

Falls Auguste nicht am ersten Tag gefunden wird, dann sitzt sie am zweiten Tag in der Kiste 2 oder 4. Falls sie dann nicht gefunden wird, dann sitzt sie am dritten Tag in 1, 3 oder 5. Falls sie dann nicht gefunden wird, dann sitzt sie in 2 oder 4.

Fazit 2: Falls Auguste am Anfang in einer Kiste mit ungerader Nummer sitzt, dann sitzt sie am vierten Tag in einer Kiste mit gerader Nummer.

Wir können nun die beiden obigen Resultate zu einer Strategie kombinieren: Elis, Gerda und Piotr schauen der Reihenfolge nach in die Kisten 2, 3 und 4. Sollten sie Auguste am dritten Tag noch nicht gefunden haben, dann wissen die Kinder, dass Auguste am Anfang in einer Kiste mit ungerader Nummer verborgen war, nun aber in Kiste 2 oder 4 sitzt. Sie werden sie also nach weiteren drei Tagen finden, wenn sie wieder nacheinander in die Kisten 2, 3 und 4 schauen. Spätestens am sechsten Tag – also am 20. Dezember – wird die Gans vor dem Ofen gerettet sein.



15 Magische Geschenkbander

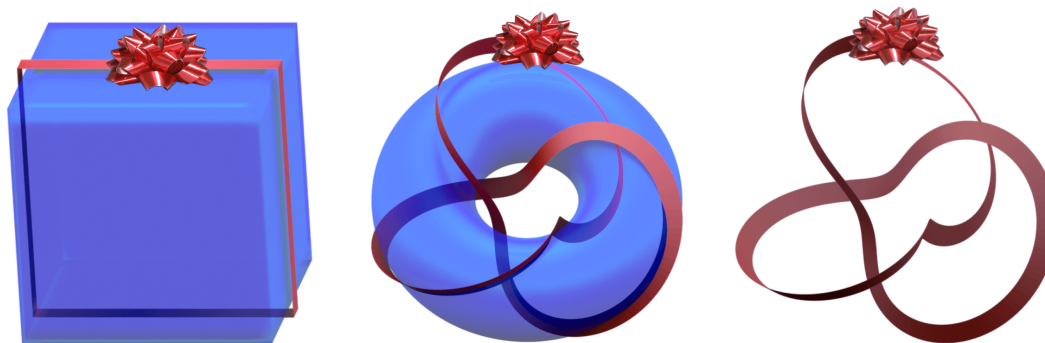
Autor*innen: Myfanwy Evans (Uni Potsdam),
Frank Lutz (TU Berlin)

Projekt: Thematic Einstein Semester 2021
„Geometric and Topological Structure of Materials“

Aufgabe

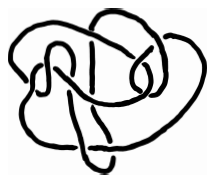
Weit, weit oben im Norden ist die Heimat der Elfen. Wenn der Winter naht, helfen die Elfen Santa Claire mit ihren magischen Geschenkbandern beim Einpacken der Geschenke. Wenn die Geschenkbander berührt werden, erklingen sphärische Klänge.

Im vergangenen Jahr standen die Elfen vor einer besonderen Herausforderung, als Santa Claire sie bat, einen Schokoladentorus zu verpacken. Sie schnitten eines ihrer Geschenkbander auf, wickelten es um den Schokoladentorus und klebten das Band mit Hilfe von Magie wieder zusammen. Eine der Elfen bemerkte, dass sich das Band über dem Torus verknötet hatte, vergaß es aber bald wieder.

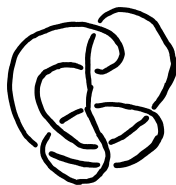


Jedes Jahr werden die magischen Geschenkbander an die Elfen zurückgegeben und aufbewahrt, damit sie in der nächsten Saison wieder verwendet werden können. Das besondere Band landete in einem Beutel mit neun anderen Geschenkbandern. Als die Elfen bei ihren Vorbereitungen für das diesjährige Fest die Geschenkbander herausnahmen, wirkten sie irgendwie „verknötet“. Es dauerte eine ganze Weile, bis sie neun von ihnen wieder entwirrt hatten. Erst dann erinnerten sie sich daran, dass eines der zehn Geschenkbander besonders ist.

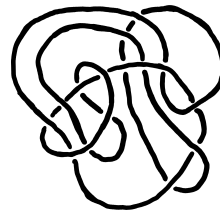
Welches ist das besondere Band, das letztes Jahr um den Schokoladentorus gewickelt war?



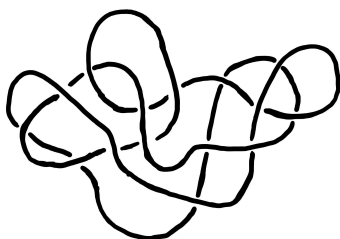
Geschenkband Nr. 1.



Geschenkband Nr. 2.



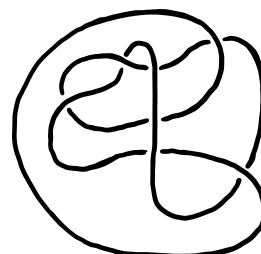
Geschenkband Nr. 3.



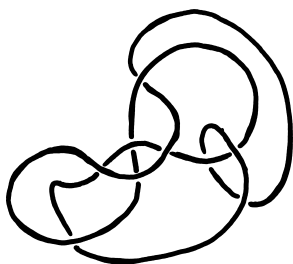
Geschenkband Nr. 4.



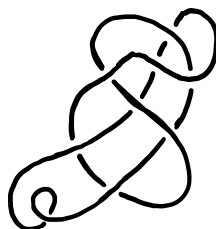
Geschenkband Nr. 5.



Geschenkband Nr. 6.



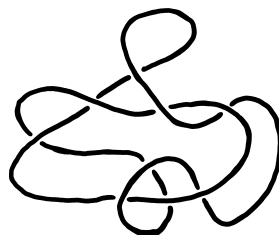
Geschenkband Nr. 7.



Geschenkband Nr. 8.



Geschenkband Nr. 9.



Geschenkband Nr. 10.



Artwork: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Geschenkband Nr. 1.
2. Geschenkband Nr. 2.
3. Geschenkband Nr. 3.
4. Geschenkband Nr. 4.
5. Geschenkband Nr. 5.
6. Geschenkband Nr. 6.
7. Geschenkband Nr. 7.
8. Geschenkband Nr. 8.
9. Geschenkband Nr. 9.
10. Geschenkband Nr. 10.

Projektbezug:

Die physikalischen Eigenschaften von Materialien werden in hohem Maße durch ihre Mikrostruktur bestimmt. Einige Materialien sind stark angeordnet wie Kristalle, andere sind polykristallin wie Gesteine oder Metalle, wieder andere zellulär wie Seifen- oder metallische Schäume, ungeordnet wie amorphe Festkörper, und einige sind sogar „verknotet“ wie die DNS.

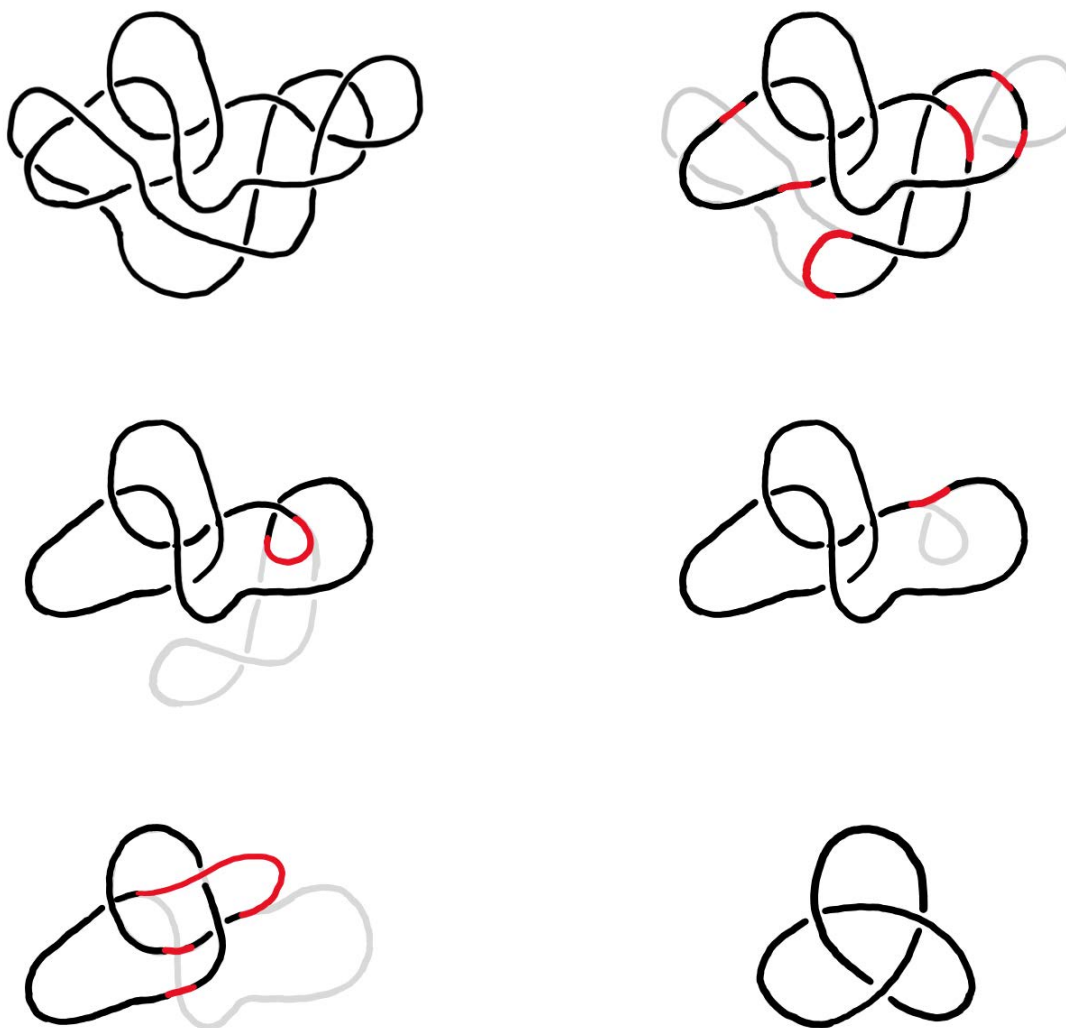
Das Einstein-Semester 2021 „Geometric and Topological Structure of Materials“ war jüngsten mathematischen Entwicklungen gewidmet, die uns helfen Materialien besser zu verstehen, indem wesentliche strukturelle Eigenschaften identifiziert oder berechnet werden. Dies ermöglicht die Verbesserung von Produktionsprozessen und die Entwicklung neuer Materialien mit erwünschten Eigenschaften.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

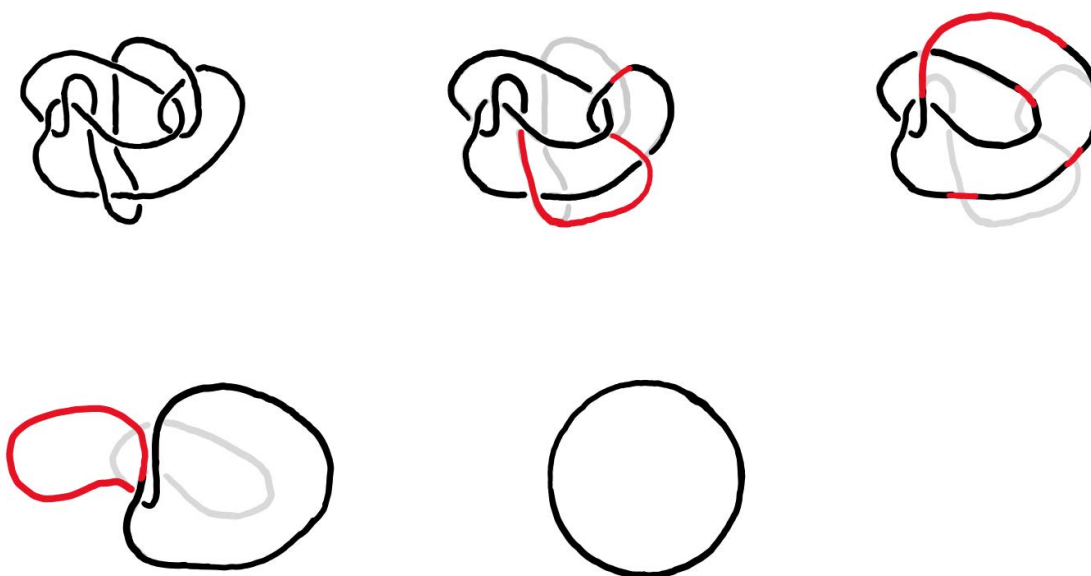
Wir werden das vierte Geschenkband in den *Kleeblattknoten* transformieren, der um den Schokoladentorus gewickelt war. Der Kleeblattknoten ist der einfachste Knoten, der nicht trivial ist:

Geschenkband Nr. 4:

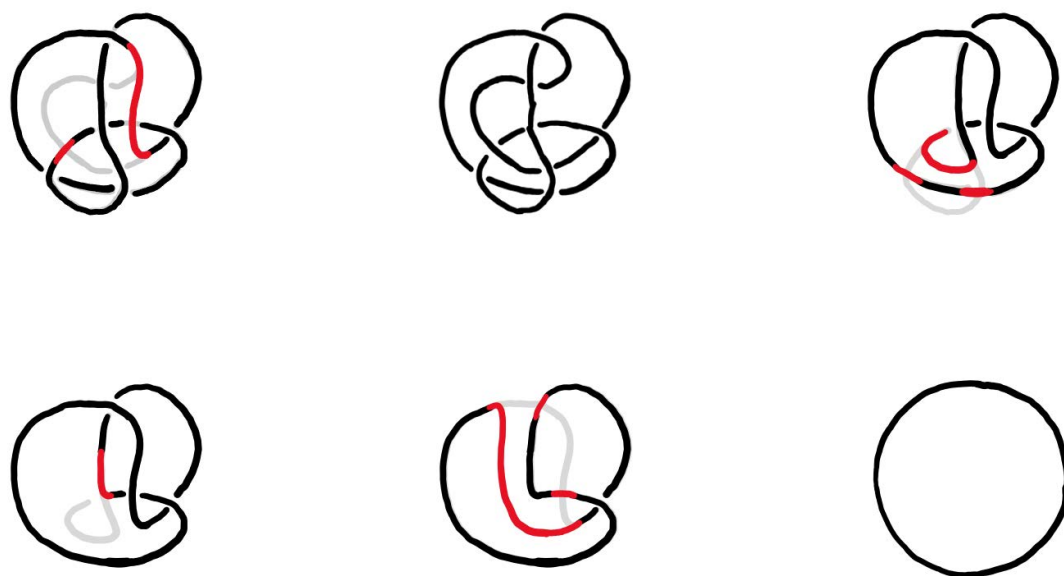


Die anderen Geschenkbander können in der Tat in den *trivialen Knoten* umgeformt werden, der um die anderen Geschenke gewickelt war.

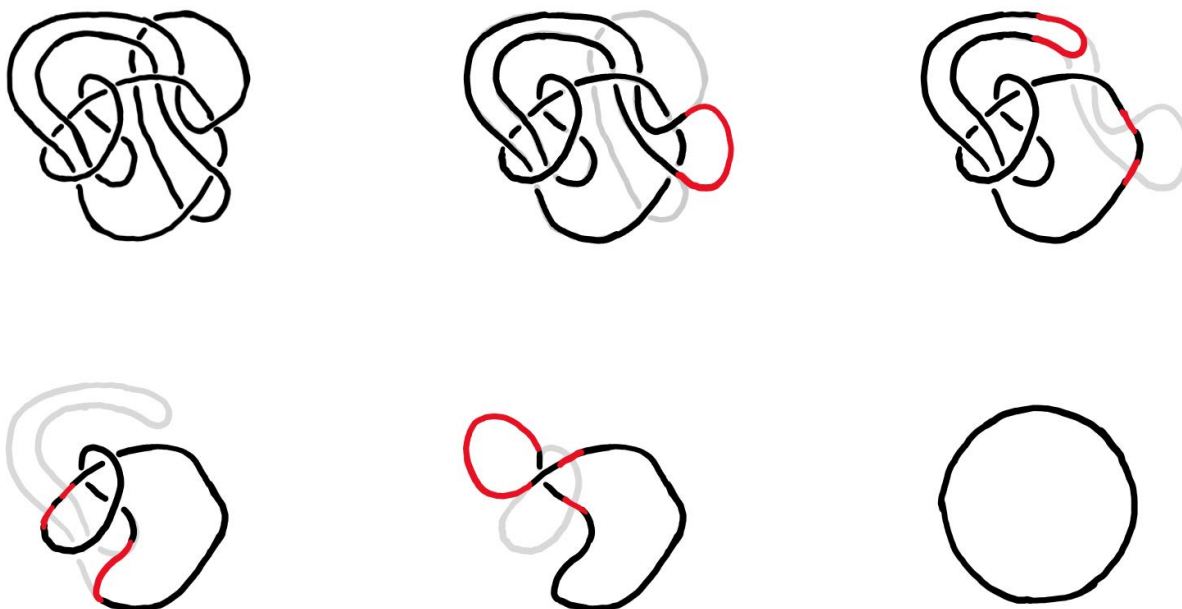
Geschenkband Nr. 1:



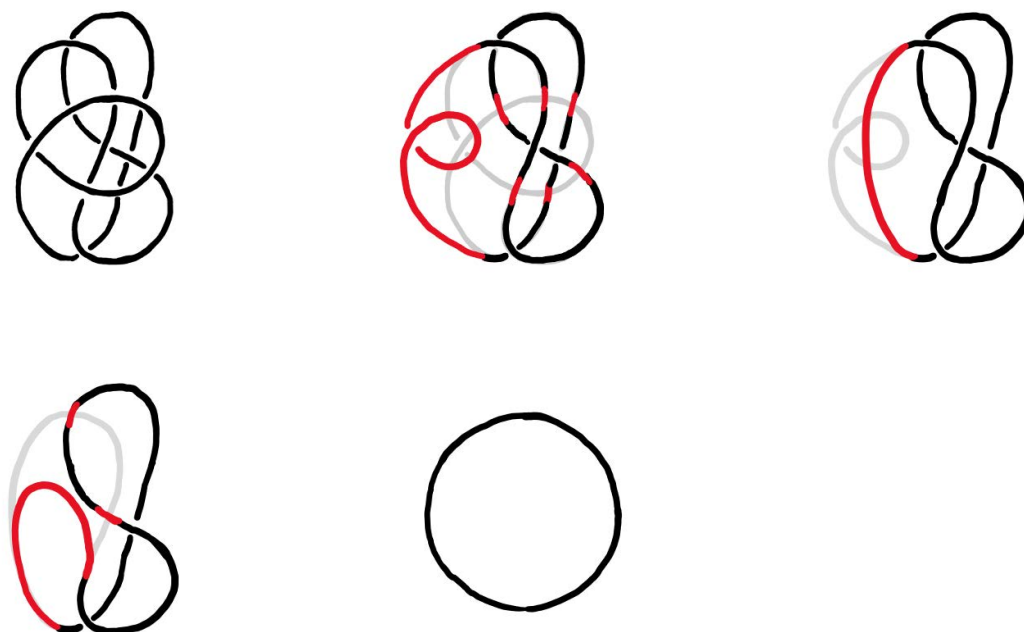
Geschenkband Nr. 2:



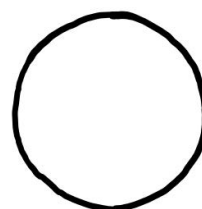
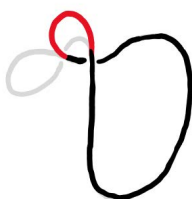
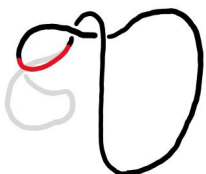
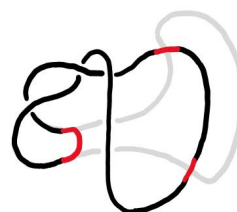
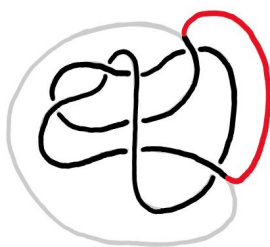
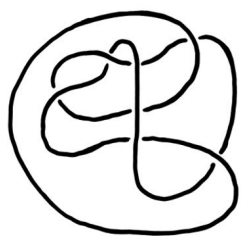
Geschenkband Nr. 3:



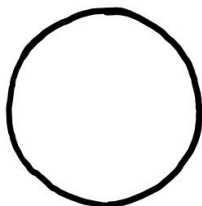
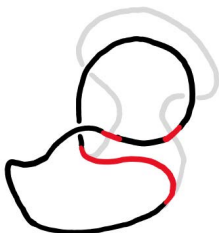
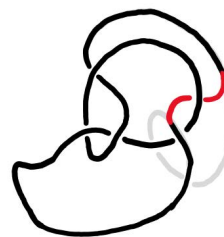
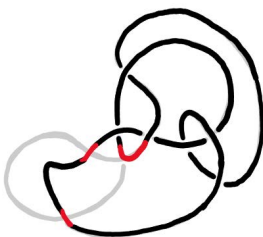
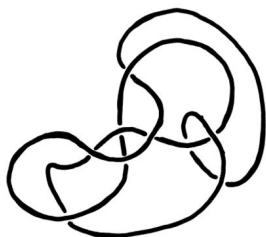
Geschenkband Nr. 5:



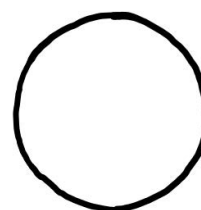
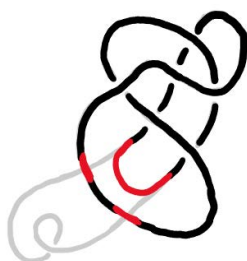
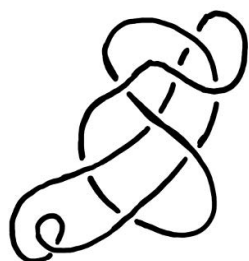
Geschenkband Nr. 6:



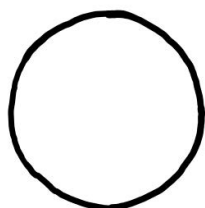
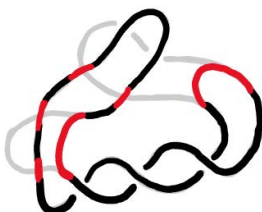
Geschenkband Nr. 7:



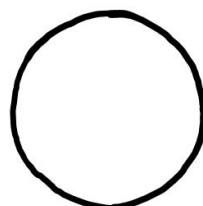
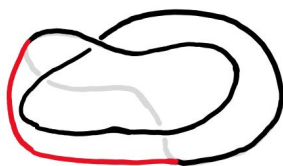
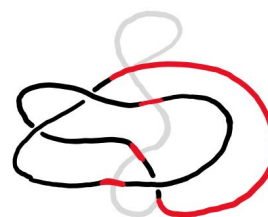
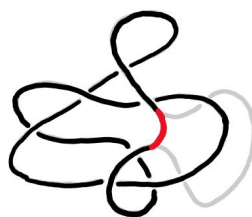
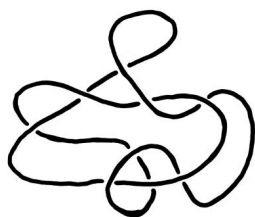
Geschenkband Nr. 8:



Geschenkband Nr. 9:



Geschenkband Nr. 10:



Die verwendeten Bewegungen sind Varianten der drei *Reidemeister Bewegungen*, die Knotendiagramme in äquivalente (oder *isotope*) Knotendiagramme umformen.



16 Rentierwahlen

Autorin: Ariane Beier (TU Berlin)

Projekt: MATH+ Schulaktivitäten

Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat es ein für alle Mal satt, sich das wochenlange Gezeter der fünf Oberrentiere, Rudolph, Blitzen, Comet, Dasher und Dancer, anzuhören, wer nun in diesem Jahr am Weihnachtsabend den Geschenkeschlitten anführen darf. Er hat sich daher überlegt, die gesamte Bevölkerung des Wichteldorfes darüber abstimmen zu lassen.

Die Wahl soll in vier Wahlgängen erfolgen: Im ersten Wahlgang tritt Rentier 1 gegen Rentier 2 an. Das siegreiche Rentier aus dem ersten Wahlgang tritt dann im zweiten Wahlgang gegen Rentier 3 an. Das siegreiche Rentier aus diesem Wahlgang tritt dann im dritten Wahlgang gegen Rentier 4 an. Das Rentier, das den dritten Wahlgang gewonnen hat, tritt dann im vierten (und letzten) Wahlgang gegen Rentier 5 an.

Ein Wahlgang wird von dem Rentier gewonnen, welches mehr als 50% der Stimmen erhält. Das Rentier, welches den letzten Wahlgang gewinnt, gewinnt auch die gesamte Wahl und wird den Schlitten am Weihnachtsabend anführen dürfen.

Der Weihnachtsmann ist sehr zufrieden mit seinem genialen Einfall – jetzt muss er sich nur noch überlegen, wie er die Reihenfolge der Rentiere 1 bis 5 festlegt. Da er sich recht sicher ist, dass das sowieso keinen Einfluss auf den Wahlausgang hat und Rudolph insgeheim sein Lieblingsrentier ist, darf Rudolph die Reihenfolge bestimmen.

Hoherfreut schaut sich Rudolph das prognostizierte Wahlverhalten der Wichteldorfer*innen an – und sieht seine Chancen auf einen Wahlsieg gleich wieder schwinden. In der Tat kann man ziemlich genau sagen, wie die Bevölkerung von Wichteldorf abstimmen wird. Demnach ist die Bevölkerung exakt in fünf gleichgroße Gruppen mit den folgenden Präferenzen gespalten:

Gruppe 1: Dasher > Dancer > Blitzen > Rudolph > Comet

Gruppe 2: Dasher > Dancer > Rudolph > Comet > Blitzen

Gruppe 3: Comet > Blitzen > Dasher > Dancer > Rudolph

Gruppe 4: Dancer > Comet > Blitzen > Dasher > Rudolph

Gruppe 5: Dancer > Blitzen > Dasher > Rudolph > Comet

D. h. würde eine Person aus Gruppe 4 abstimmen, würde sie für Comet stimmen, wenn dieses gegen Blitzen, Dasher oder Rudolph antritt, aber für Dancer, wenn Comet gegen Dancer antritt. Wir wissen außerdem, dass die Bevölkerung von Wichteldorf sehr zuverlässig ist: Am Wahltag machen restlos alle Bewohner*innen des Wichteldorfes von ihrem Stimmrecht Gebrauch und stimmen genau so, wie prognostiziert.

Welche Reihenfolge sollte Rudolph für die Rentiere festlegen, um am Ende als Gewinner der Wahl den Schlitten anführen zu dürfen?

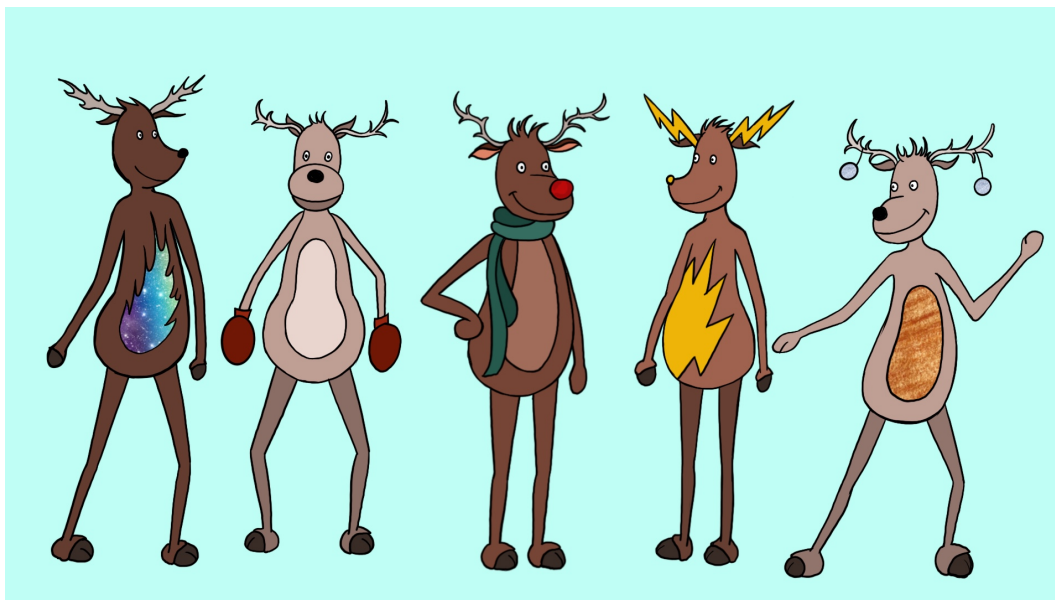


Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Comet, Dasher, Dancer, Blitzen, Rudolph.
2. Dasher, Dancer, Blitzen, Rudolph, Comet.
3. Dasher, Dancer, Rudolph, Comet, Blitzen.
4. Dasher, Blitzen, Dancer, Comet, Rudolph.
5. Dasher, Blitzen, Dancer, Rudolph, Comet.
6. Dancer, Blitzen, Dasher, Comet, Rudolph.
7. Dancer, Dasher, Comet, Rudolph, Blitzen.
8. Dancer, Dasher, Blitzen, Comet, Rudolph.
9. Dancer, Dasher, Comet, Blitzen, Rudolph.
10. Es gibt keine Reihenfolge, bei der Rudolph die Wahl gewinnen kann.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Rudolph möchte der Gesamtsieger der vier Wahlgänge werden, daher **muss** er den 4. Wahlgang gewinnen. Gegen welche der anderen vier Rentiere ist das aber möglich? Sicherlich nicht gegen Dasher und Dancer, denn Rudolph liegt in allen fünf Gruppen hinter den beiden. In einer direkten Wahl würde er also jeweils 0% der Stimmen bekommen und verlieren. Auch gegen Blitzen würde er mit 20% der Stimmen verlieren, da er nur in Gruppe 2 von den Wähler*innen favorisiert wird. In einer direkten Wahl gegen Comet sieht es für Rudolph schon besser aus: Hier würde er mit 60% der Stimmen (aus den Gruppen 1, 2 und 5) gewinnen. Wir halten fest, dass Rudolph nur in der direkten Wahl gegen Comet gewinnen kann. Das liefert uns zunächst:

- Rentier 5: Rudolph,
- Rentier 4: Comet.

Nun **muss** Comet aber als Sieger*in aus dem 3. Wahlgang hervorgehen. Das ist in einer direkten Wahl nur gegen Blitzen möglich, die Comet mit 60% der Stimmen (aus den Gruppen 2, 3 und 4) gewinnt. Gegen Dasher und Dancer würde Comet mit nur 40% bzw. 20% der Stimmen verlieren. Wir setzen also:

- Rentier 3: Blitzen.

Blitzen **muss** also den 2. Wahlgang gewinnen. Eine direkte Wahl gegen Dancer würde Blitzen mit nur 20% der Stimmen verlieren. Die direkte Wahl gegen Dasher würde Blitzen allerdings mit 60% der Stimmen gewinnen.

Die Rentiere 1 und 2, die den 1. Wahlgang bestreiten sind also Dasher und Dancer. Dieser Wahlgang wird in der Tat von Dasher mit 60% der Stimmen gewonnen.

Eine Reihenfolge, mit der Rudolph als Gesamtsieger der Wahl hervorgeht, ist also:

1. Dasher, 2. Dancer, 3. Blitzen, 4. Comet, 5. Rudolph.

Die einzige weitere Möglichkeit ist, die Positionen von Dasher und Dancer zu vertauschen, da der 1. Wahlgang symmetrisch ist.



17 Das Eierlikörei

Autorin: Ariane Beier (TU Berlin)

Projekt: MATH+ Schulaktivitäten

Aufgabe

Nach dem letzten Osterfest haben die Weihnachtsselfen Annelie und Bernd noch 111 Nougateier und ein einziges Eierlikörei übrig. Da die beiden schon im April vom Weihnachtsvorbereitungstress gepackt wurden, haben sie es einfach noch nicht geschafft, die Leckereien aufzuessen. Nun müssen sie sich aber ranhalten; die Eier haben ihr Mindesthaltbarkeitsdatum schon überschritten und außerdem bringt ihnen der Weihnachtsmann bestimmt neue Süßigkeiten. Annelie liebt Eierlikör, aber auch Bernd möchte das letzte Ei dieser Art gerne essen. Er schlägt Annelie daher folgendes Spiel vor: Die 111 Nougateier werden in eine Schale gelegt und die beiden dürfen abwechselnd je ein bis acht Nougateier nehmen. Dabei können sie vor jedem Zug neu entscheiden, wie viele Eier sie aus der Schale nehmen wollen. Wer dann das letzte Nougatei nimmt, darf auch das Eierlikörei haben.

Bernd überlässt Annelie die Entscheidung, ob sie anfangen möchte oder nicht. Welche der folgenden Entscheidungen sollte Annelie treffen, wenn sie das Eierlikörei haben möchte?



Illustration: Julia Nurit Schönagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Annelie sollte den ersten Zug machen und dabei ein Nougatei nehmen.
2. Annelie sollte den ersten Zug machen und dabei zwei Nougateier nehmen.
3. Annelie sollte den ersten Zug machen und dabei drei Nougateier nehmen.
4. Annelie sollte den ersten Zug machen und dabei vier Nougateier nehmen.
5. Annelie sollte den ersten Zug machen und dabei fünf Nougateier nehmen.
6. Annelie sollte den ersten Zug machen und dabei sechs Nougateier nehmen.
7. Annelie sollte den ersten Zug machen und dabei sieben Nougateier nehmen.
8. Annelie sollte den ersten Zug machen und dabei acht Nougateier nehmen.
9. Annelie sollte den ersten Zug machen. Dabei ist es egal, wie viele Eier sie nimmt.
10. Annelie hat nur dann eine Chance zu gewinnen, wenn sie Bernd den ersten Zug machen lässt.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Wir werden die Aufgabe lösen, indem wir das Spiel vom Ende her betrachten:

- Angenommen Bernd ist am Zug und es liegen noch acht oder weniger Nougateier in der Schale. Dann kann Bernd diese einfach nehmen und gewinnt auch das Eierlikörei.
- Falls allerdings neun Nougateier in der Schale liegen, dann sind nach Bernds Zug noch mindestens ein aber höchstens acht Nougateier übrig. Diese kann Annelie nehmen, wodurch sie das Spiel und das Eierlikörei gewinnt.
- Befinden sich zehn bis siebzehn Nougateier in der Schale, dann kann Bernd erreichen, dass vor Annelies nächstem Zug neun Eier in der Schale liegen, von denen Annelie höchstens acht nehmen kann. Somit gewinnt Bernd das Spiel in diesem Fall.

Fazit: Annelie sollte sicherstellen, dass vor Bernds letztem Zug genau neun Nougateier in der Schale liegen. Dies kann sie genau dann erreichen, wenn sie Bernd im vorhergehenden Zug genau 18 Nougateier übriglässt. Annelie kann das genau dann erreichen, wenn sie Bernd im Zug davor 27 Eier übrig lässt, etc.

Annelie muss also sicherstellen, dass vor Bernds Zügen immer $n \cdot 9$ Nougateier ($n = 1, 2, 3, \dots$) in der Schale liegen. Da 111 kein Vielfaches von 9 ist, sondern $111 = 12 \cdot 9 + 3$ gilt, sollte Annelie den ersten Zug machen und drei Nougateier nehmen, sodass Bernd in seinem ersten Zug $12 \cdot 9 = 108$ Eier bleiben.

Bemerkung: Mit dieser Strategie stellt Annelie zwar sicher, dass sie am Ende das Eierlikörei gewinnt, jedoch kann Bernd $12 \cdot 8 = 96$ Nougateier ergattern, wenn er in jedem Zug die Höchstmenge an Nougateiern nimmt. Da Nougateier eigentlich Bernds Lieblingseier sind, ist dieser Deal für ihn also gar nicht so schlecht.



18 Die Mützenaufgabe 2021

Autor: Aart Blokhuis (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Der Weihnachtsmann sagt zu den vier Intelligenzwichteln Atto, Bilbo, Chico und Dondo: „Für unser alljährliches Mützenrätsel möchte ich euch morgen Nachmittag zu Kaffee und Kuchen einladen.“

„Wir kommen natürlich gerne!“, rufen die vier Wichtel.

Der Weihnachtsmann beginnt seine Erklärungen: „Gut, dann werde ich heute Abend einige blaue, gelbe und rote Wichtelmützen vorbereiten. Morgen setze ich dann jedem von euch hinterrücks und blitzschnell eine Mütze auf den Kopf, sodass keiner die Farbe der eigenen Mütze zu sehen bekommt. Jeder kann zwar die Farben der Mützen der drei anderen sehen, ihr dürft aber keinerlei Informationen untereinander austauschen. Außerdem erhält jeder von euch sieben Tafeln mit den folgenden Sätzen.

- T1:** Meine Mütze ist blau.
- T2:** Meine Mütze ist gelb.
- T3:** Meine Mütze ist rot.
- T4:** Meine Mütze ist blau oder gelb.
- T5:** Meine Mütze ist blau oder rot.
- T6:** Meine Mütze ist gelb oder rot.
- T7:** Meine Mütze ist blau oder gelb oder rot.

Dann muss jeder von euch gleichzeitig die Farbe seiner Mütze raten, indem er eine seiner sieben Tafeln für alle sichtbar in die Höhe streckt. Wenn auch nur ein einziger von euch falsch rät, schicke ich euch alle sofort wieder nach Hause. Wenn niemand falsch rät und mindestens einer von euch die eigene Mützenfarbe mit einer der Tafeln T1, T2 oder T3 korrekt errät, dann bekommt jeder von euch ein Stück Mozarttorte und eine große Tasse Kaffee. Wenn ihr alle die Tafeln T4, T5, T6 oder T7 korrekt verwendet, so wiederholen wir die Raterunde – allerdings nur dann, wenn ihr nicht alle die Tafel T7 verwendet. Dann schicke ich euch nämlich ebenfalls direkt wieder nach Hause.“

Atto fragt: „Wie wählst du denn unsere Mützen aus?“

„Die wähle ich zufällig aus, sodass jede der 81 möglichen Farbkombinationen auf euren Köpfen genau gleichwahrscheinlich ist“, sagt der Weihnachtsmann.

Dann fragt Bilbo: „Erhalten wir denn neue Mützen, wenn die Raterunde wiederholt wird?“

„Nein!“, antwortet der Weihnachtsmann. „Die Mützen bleiben gleich. Ihr dürft aber in jeder Raterunde andere Tafeln verwenden.“

Chico möchte wissen: „Was passiert denn, wenn wir in der zweiten Raterunde wieder nur die Tafeln T4, T5, T6 oder T7 verwenden und wenn wieder jeder korrekt rät?“

„Dann wird die Raterunde noch einmal wiederholt. Und danach vielleicht noch einmal, und noch einmal, und noch einmal, solange es euch gefällt“, sagt der Weihnachtsmann.

Die Wichtel beginnen zu diskutieren. Sie überlegen und sie denken nach. Sie denken nach und sie diskutieren. Dann diskutieren sie noch mehr und denken noch länger nach. Sie arbeiten schließlich eine wirklich geniale Strategie aus, bei der sie für M (der 81) Farbkombinationen garantiert Kaffee und Kuchen erhalten. Diese Strategie ist sogar optimal, d.h. dass keine Strategie existiert, für die sie für $M + 1$ Farbkombinationen garantiert Kaffee und Kuchen erhalten.

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?



Illustration: Julia Nurit Schönagel

Antwortmöglichkeiten:

1. $0 \leq M \leq 32$.
2. $33 \leq M \leq 37$.
3. $38 \leq M \leq 42$.

4. $43 \leq M \leq 47$.
5. $48 \leq M \leq 52$.
6. $53 \leq M \leq 57$.
7. $58 \leq M \leq 62$.
8. $63 \leq M \leq 67$.
9. $68 \leq M \leq 72$.
10. $73 \leq M \leq 81$.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Wir werden zeigen, dass $M = 72$ gilt. Dazu stellen wir die Mützenfarbkombinationen von Atto, Bilbo, Chico, Dondo als vierbuchstabile Worte mit den Buchstaben B, G, R (blau, gelb, rot) dar, wobei die vier Buchstaben den vier Wichteln entsprechen. Wir sagen, dass zwei Farbkombinationen *benachbart* sind, falls sie sich in genau einem Buchstaben unterscheiden. Zwei benachbarte Farbkombinationen können also ineinander überführt werden, indem man einem einzigen Wichtel eine andere Mütze gibt.

Warum $M=72$ möglich ist. Wir beschreiben eine Strategie, die den Wichteln in mindestens 72 der 81 möglichen Fälle Erfolg garantiert. Diese Strategie basiert auf den folgenden neun *speziellen* Farbkombinationen F_1, \dots, F_9 :

	Bxxx	Gxxx	Rxxx
x Bxx	BBBB	GBRG	RBGR
x Gxx	BGGG	GGBR	RGRB
x Rxx	BRRR	GRGB	RRBG

Betrachtet man zwei verschiedene spezielle Farbkombinationen F_i und F_j mit $i \neq j$, so gibt es genau einen Wichtel, der unter F_i und F_j dieselbe Mützenfarbe hat. Oder mit anderen Worten: Will man F_i in F_j überführen, so muss man die Mützenfarbe von genau drei Wichteln verändern. Weiters ist jede nicht-spezialle Farbkombination zu *genau einer* speziellen Farbkombination benachbart. Die Strategie der Wichtel in der ersten Raterunde sieht nun wie folgt aus:

- Jeder Wichtel sieht sich die Mützen der anderen drei Wichtel an. Da es für die eigene Mützenfarbe nur die drei Möglichkeiten B, G, R gibt, bleiben dem Wichtel nur drei mögliche Kombinationen K_B, K_G, K_R .
- Falls eine der drei Kombinationen K_B, K_G, K_R eine spezielle Farbkombination F_k ist, so rät der Wichtel die beiden Farben (mit den Tafeln T4, T5, T6), die nicht F_k ergeben. Falls keine der drei Kombinationen gleich F_k ist, so verwendet der Wichtel die Tafel T7.

Nun wollen wir uns überlegen, was unter dieser Strategie in der ersten Raterunde geschieht. Durch die Wahl der vier Mützen konstruiert der Weihnachtsmann eine Farbkombination F^* .

- Falls $F^* = F_k$ eine spezielle Farbkombination ist, so hat jeder der vier Wichtel die Farbkombination F_k unter seinen drei möglichen Kombinationen K_B, K_G, K_R . Dann rät jeder der vier Wichtel (mit den Tafeln T4, T5, T6) genau die beiden Farben, die nicht zu seiner Mütze gehören. Alle vier Wichtel raten falsch und verlieren in diesem Fall das Spiel.
- Falls F^* aber keine spezielle Farbkombination ist, so ist F^* zu genau einer speziellen Farbkombination F_k benachbart. Die drei Wichtel, die in F^* und F_k dieselbe Mützenfarbe haben, nennen wir *Normalwichtel* und der letzte Wichtel ist dann der *Sonderwichtel*.

Da F_k zu den drei möglichen Kombinationen K_B, K_G, K_R des Sonderwichtels gehört, wird der Sonderwichtel eine der drei Tafeln T4, T5, T6 verwenden und korrekt raten. Da F_k nicht zu den drei möglichen Kombinationen für die Normalwichtel gehört, verwenden die Normalwichtel die Tafel T7. Das Spiel geht daher in die zweite Runde.

In den 9 Fällen, in denen F^* eine spezielle Farbkombination ist, werden die Wichtel ohne Kaffee und ohne Kuchen nach Hause geschickt. In den 72 Fällen, in denen F^* hingegen keine spezielle Farbkombination ist, erreichen die Wichtel immer die zweite Raterunde.

Was passiert nun in der zweiten Raterunde? Durch die Reaktion des Sonderwichtels in der ersten Runde kennen die Normalwichtel die spezielle Farbkombination F_k , die zu F^* benachbart ist: Jeder Normalwichtel sieht die Mützenfarben der anderen beiden Normalwichtel, und diese beiden Farben legen F_k eindeutig fest. Da die drei Normalwichtel in F^* und in F_k dieselbe Farbe tragen, kennen also die Normalwichtel ihre Mützenfarbe. In der zweiten Runde raten die Normalwichtel dann ihre korrekte Mützenfarbe mit den Tafeln T1, T2, T3, der Sonderwichtel verwendet T7. Die Wichtel gewinnen das Spiel und bekommen Kaffee und Kuchen.

Wir illustrieren unser Argument am Beispiel BGBB: Für den Sonderwichtel Bilbo sind dann die drei Farbkombinationen BBBB, BGBB, BRBB möglich. Da BBBB eine spezielle Kombination ist, verwendet Bilbo die Tafel T6 (gelb oder rot) und rät korrekt. Für die drei Normalwichtel Atto, Chico, Dondo gibt es keine spezielle Farbkombination, die mit ihren Informationen kompatibel wäre; alle drei verwenden daher die Tafel T7. In der zweiten Runde wissen die Normalwichtel, dass BBBB die zu F^* benachbarte spezielle Farbkombination ist, und gewinnen das Spiel.

Zusammenfassend gewinnen die Wichtel das Spiel mit der angegebenen Strategie in mindestens 72 der 81 möglichen Fälle.

Warum $M=73$ unmöglich ist. Wir nehmen zwecks Widerspruchs an, dass eine Strategie existiert, mit der die Wichtel bei mindestens 73 Farbkombinationen die erste Runde überstehen. Wir betrachten dazu eine konkrete Farbkombination F^* , bei der die Wichtel die erste Runde überstehen. D. h. mindestens ein Wichtel X muss eine der sechs Tafeln T1–T6 korrekt verwenden. Wenn wir die Mützenfarbe von X auf eine Farbe abändern, die nicht mit der gewählten Tafel übereinstimmt, so erhalten wir eine zu F^* benachbarte Farbkombination F^{**} , bei der die Wichtel das Spiel verlieren.

Zusammengefasst: Wenn die Wichtel die erste Runde unter Farbkombination F^* überstehen, dann gibt es eine zu F^* benachbarte Farbkombination F^{**} , bei der die Wichtel bereits nach der ersten Runde nach Hause geschickt werden. Da es aber höchstens $8 = 81 - 73$ Farbkombinationen gibt, bei denen die Wichtel bereits in der ersten Runde verlieren, und da jede Farbkombination nur 8 Nachbarn hat, gibt es höchstens $8 \cdot 8 = 64$ Farbkombinationen, bei denen die Wichtel die erste Runde überstehen.

Dieser Widerspruch impliziert die gewünschte Schranke $M \leq 72$.



19 Casino

Autor: Jaques Resing (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Knecht Ruprecht und der Grinch spielen folgendes Spiel: Knecht Ruprecht beginnt mit einem Startkapital von 189€. Der Grinch beginnt das Spiel mit sechs Karten, von denen drei mit dem Wort „DOPPELT“ und drei mit dem Wort „NICHTS“ beschriftet sind. Das Spiel geht über sechs Runden.

Zu Beginn jeder Runde gibt Knecht Ruprecht seinen Wetteinsatz W für diese Runde bekannt. Der Wetteinsatz W ist eine beliebige nicht-negative reelle Zahl, die allerdings Ruprechts momentanes Spielkapital nicht übersteigen darf. Nachdem der Grinch den Wetteinsatz gehört hat, legt er eine seiner Karten ab. Jede der sechs Karten darf im Spiel nur *einmal* abgelegt werden.

- Wenn der Grinch eine Karte mit dem Wort NICHTS ablegt, verliert Ruprecht seinen Wetteinsatz W an den Grinch.
- Wenn der Grinch eine Karte mit dem Wort DOPPELT ablegt, muss er Ruprechts Wetteinsatz verdoppeln: Ruprecht erhält seinen Wetteinsatz W zurück und dazu noch W weitere Euro vom Grinch.

Der Grinch und Knecht Ruprecht treffen in jeder Runde jeweils die für sich bestmöglichen Entscheidungen.

Mit welchem Betrag wird Knecht Ruprecht am Ende den Spieltisch verlassen?



Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Mit ungefähr 210 €.
2. Mit ungefähr 222 €.
3. Mit ungefähr 234 €.
4. Mit ungefähr 245 €.
5. Mit ungefähr 256 €.
6. Mit ungefähr 261 €.
7. Mit ungefähr 279 €.
8. Mit ungefähr 288 €.
9. Mit ungefähr 297 €.
10. Mit ungefähr 303 €.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Wir werden ganz allgemein Situationen $S(n, d)$ analysieren, in denen der Grinch noch n NICHTS-Karten und d DOPPELT-Karten hat. Das Spielkapital von Knecht Ruprecht zu Anfang von Situation $S(n, d)$ bezeichnen wir mit K . Durch bestmögliches Spiel kann Ruprecht sein Kapital K in den verbleibenden $n + d$ Runden auf den Wert $\tilde{K} = f(n, d) \cdot K$ bringen. Unser erstes Ziel ist es, diese Faktoren $f(n, d)$ besser zu verstehen.

- Für alle $n \geq 0$ gilt $f(n, 0) = 1$: Da keine DOPPELT-Karten im Spiel sind, hat Ruprecht nichts zu gewinnen. Mit einem Wetteinsatz $W = 0$ behält Ruprecht sein Startkapital: $\tilde{K} = 1 \cdot K$.
- Für alle $d \geq 0$ gilt $f(0, d) = 2^d$: Da keine NICHTS-Karten im Spiel sind, wird Ruprecht in jeder Runde sein ganzes Spielkapital setzen und verdoppeln. Nach d Verdoppelungen beträgt sein Endkapital $\tilde{K} = 2^d \cdot K$.

Nun wenden wir uns den Situationen $S(n, d)$ mit $n \geq 1$ und $d \geq 1$ zu. Für Ruprecht ist die Situation $S(n - 1, d)$ immer besser als die Situation $S(n, d - 1)$: In beiden Situationen sind noch $n + d - 1$ Runden zu spielen, in der ersten Situation hat der Grinch jedoch eine DOPPELT-Karte mehr als in der zweiten Situation. Daraus folgern wir

$$f(n, d - 1) \leq f(n - 1, d) \quad \text{für } n \geq 1 \text{ und } d \geq 1. \quad (6)$$

In der Situation $S(n, d)$ wird Ruprecht einen gewissen Teil W seines momentanen Kapitals K setzen (mit $0 \leq W \leq K$).

- Verwendet der Grinch dann eine NICHTS-Karte, verliert Ruprecht seinen Einsatz und kommt mit dem Kapital $K - W$ in die Situation $S(n - 1, d)$. Ruprechts Kapital am Ende des Spiels wird in diesem Fall $K' = f(n - 1, d) \cdot (K - W)$ betragen.
- Verwendet der Grinch eine DOPPELT-Karte, bekommt Ruprecht den doppelten Einsatz zurück und kommt mit dem Kapital $K + W$ in die Situation $S(n, d - 1)$. Ruprechts Kapital am Ende des Spiels wird dann $K'' = f(n, d - 1) \cdot (K + W)$ betragen.

Wir behaupten jetzt, dass für jede mögliche Wahl des Einsatzes W die folgende Ungleichung gilt:

$$\min \{K', K''\} \leq \frac{2f(n - 1, d) f(n, d - 1)}{f(n - 1, d) + f(n, d - 1)} K. \quad (7)$$

Nehmen wir nun an, dass (7) nicht gilt. Dann wäre

$$\begin{aligned}
K' &:= f(n-1, d) \cdot (K - W) > \frac{2f(n-1, d) f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K \\
K - W &> \frac{2f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K \\
-W &> \frac{2f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K - K \\
-W &> \left(\frac{2f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} - 1 \right) \cdot K \\
-W &> \frac{2f(n, d-1) - f(n-1, d) - f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K \\
-W &> \frac{f(n, d-1) - f(n-1, d)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K \\
W &< \frac{f(n-1, d) - f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K. \tag{8}
\end{aligned}$$

Ebenso würde dann

$$\begin{aligned}
K'' &:= f(n, d-1) \cdot (K + W) > \frac{2f(n-1, d) f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K \\
K + W &> \frac{2f(n-1, d)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K \\
W &> \frac{2f(n-1, d)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K - K \\
W &> \left(\frac{2f(n-1, d)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} - 1 \right) \cdot K \\
W &> \frac{2f(n-1, d) - f(n-1, d) - f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K \\
W &> \frac{f(n-1, d) - f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K \tag{9}
\end{aligned}$$

gelten.

Da die beiden Ungleichungen (8) und (9) einander widersprechen, ist die Ungleichung in (7) bewiesen.

Nun betrachten wir noch den Fall, dass Ruprecht seinen Wetteinsatz W durch

$$W = \frac{f(n-1, d) - f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K \tag{10}$$

festlegt.

Wegen (6) ist der Zähler in (10) nicht-negativ, somit gilt wie gewünscht $0 \leq W \leq K$. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
 K' &:= f(n-1, d) \cdot (K - W) \\
 &= f(n-1, d) \cdot \left(1 - \frac{f(n-1, d) - f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)}\right) K \\
 &= f(n-1, d) \cdot \left(\frac{f(n-1, d) + f(n, d-1) - f(n-1, d) + f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)}\right) K \\
 &= f(n-1, d) \cdot \left(\frac{2f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)}\right) K \\
 &= \frac{2f(n-1, d)f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K
 \end{aligned}$$

und weiterhin

$$\begin{aligned}
 K'' &:= f(n, d-1) \cdot (K + W) \\
 &= f(n, d-1) \cdot \left(1 + \frac{f(n-1, d) - f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)}\right) K \\
 &= f(n, d-1) \cdot \left(\frac{f(n-1, d) + f(n, d-1) + f(n-1, d) - f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)}\right) K \\
 &= f(n, d-1) \cdot \left(\frac{2f(n-1, d)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)}\right) K \\
 &= \frac{2f(n-1, d)f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K.
 \end{aligned}$$

Legt Ruprecht seinen Wetteinsatz also durch (10) fest, wird die Ungleichung (7) zu einer Gleichung – und damit optimal:

$$K' = K'' = \frac{2f(n-1, d)f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} K. \quad (11)$$

Unabhängig davon, ob der Grinch eine NICHTS-Karte oder eine DOPPELT-Karte spielt, kann Ruprecht sein Spielkapital immer auf den Wert in (11) bringen.

Alles in allem haben wir damit bewiesen, dass

$$f(n, d) = \frac{2f(n-1, d)f(n, d-1)}{f(n-1, d) + f(n, d-1)} \quad \text{für } n \geq 1 \text{ und } d \geq 1. \quad (12)$$

Nun können wir leicht alle Faktoren $f(n, d)$ mit $0 \leq n \leq 3$ und $0 \leq d \leq 3$ bestimmen. Die erste Spalte der folgenden Tabelle erhalten wir aus $f(n, 0) = 1$ und ihre erste Zeile erhalten wir aus $f(0, d) = 2^d$. Die weiteren Einträge $f(n, d)$ errechnet man rekursiv durch die Formel (12).

n bzw. d	0	1	2	3
0	1	2	4	8
1	1	$4/3$	2	$16/5$
2	1	$8/7$	$16/11$	2
3	1	$16/15$	$16/13$	$32/21$

Da $f(3, 3) = 32/21$ gilt, kann Ruprecht sein Startkapital von $K = 189 e$ durch bestmögliches Spiel auf

$$\tilde{K} = f(3, 3) \cdot K = \frac{32}{21} \cdot 189 e = 288 e$$

erhöhen. In der ersten Runde wird Ruprecht gemäß Gleichung (10) einen Betrag von

$$W_1 = \frac{f(2, 3) - f(3, 2)}{f(2, 3) + f(3, 2)} \cdot K = \frac{2 - 16/13}{2 + 16/13} \cdot K = \frac{10/13}{42/13} \cdot K = \frac{5}{21} \cdot K = \frac{5}{21} \cdot 189 e = 45 e$$

setzen. Falls der Grinch eine DOPPELT-Karte spielt, landet Ruprecht mit 234 Euro in der Situation $S(3, 2)$. Falls der Grinch eine NICHTS-Karte spielt, landet Ruprecht mit 144 € in der Situation $S(2, 3)$. Und so weiter.



20 Diebe im Schnee

Autor: Maximilian Stahlberg (TU Berlin)
Projekt: Evolution Models for Historical Networks
(MATH+ Emerging Field Project EF5-6)

Aufgabe

Das Gesicht der Schneefigur fehlt! Sowohl ihre Gurkenaugen als auch ihre Möhrennase wurden heute früh gestohlen. Die Wichtel sind sich sicher, dass nur die Tiere der Nachbarschaft als Diebe in Frage kommen, können sie doch dem leckeren Gemüse kaum widerstehen. Schnell formiert sich eine Untersuchungskommission, die die Tat aufklären und die tierischen Täter*innen zur Rede stellen möchte.

Bei einer ersten Vernehmung behaupten der kleine Hase, das Rehkitz und der Biber, dass die Möhre noch tief und fest im Kopf der Schneefigur steckte, als sie am Morgen zur Schule und zur Arbeit gingen – die Augen fehlten aber schon. Die Katze und das Eichhörnchen betonen, sie hätten die Schneefigur nur aus der Entfernung gesehen und seien sich nicht sicher, ob die Gurkenaugen noch steckten. Sie behaupten aber ebenfalls, die Möhre noch gesehen zu haben.

Nach dieser ersten Beweisaufnahme sind sich die Wichtel sicher, dass die Tiere alle nacheinander unterwegs waren – so erklären sich zumindest die fehlenden Augenzeugenberichte... Zudem muss das Tier, das die Schneefigur am Tattag als erstes passierte, die Gunst der frühen Stunde genutzt haben, um die Gurkenaugen zu verputzen. Dagegen klaute das Tier, das als letztes an der Schneefigur vorbeikam, die knackige Karotte – vermutlich hatte es verschlafen und war sich deshalb sicher, alleine unterwegs zu sein. Nur wissen die Wichtel nicht, wer an diesem Tag als Erstes und als Letztes im tiefen Schnee unterwegs war, denn keines der Tiere war so ungeschickt, eine besonders frühe oder späte Aufbruchzeit zu Protokoll zu geben.

Doch Pfadfinderwichtelin Masha hat eine Idee: Die Spuren im Schnee lassen zwar keine Pfotenabdrücke mehr erkennen, Masha weiß aber, dass die Tiere es stets schwer haben, sich durch den frischen Schnee zu wühlen. Sie bevorzugen daher oft Streckenabschnitte, auf denen vor ihnen schon ein anderes Tier eine Schneise durch den Schnee gepflügt hat. Genauer gesagt schätzt Masha, dass die Reisezeit der Tiere grundsätzlich proportional zur Länge eines schon gepflügten Pfads ist – für Abschnitte mit frischem Schnee brauchen sie aber doppelt so lang. Sie geht auch davon aus, dass die Tiere immer den schnellsten Weg zu ihrem Ziel wählen. Außerdem können alle Tiere die gesamte Nachbarschaft überblicken und sehen daher auch aus

der Entfernung, welche Wege schon betreten wurden. Von Mashas Theorie überzeugt begehen die Wichtel den Tatort und fertigen eine Skizze an:

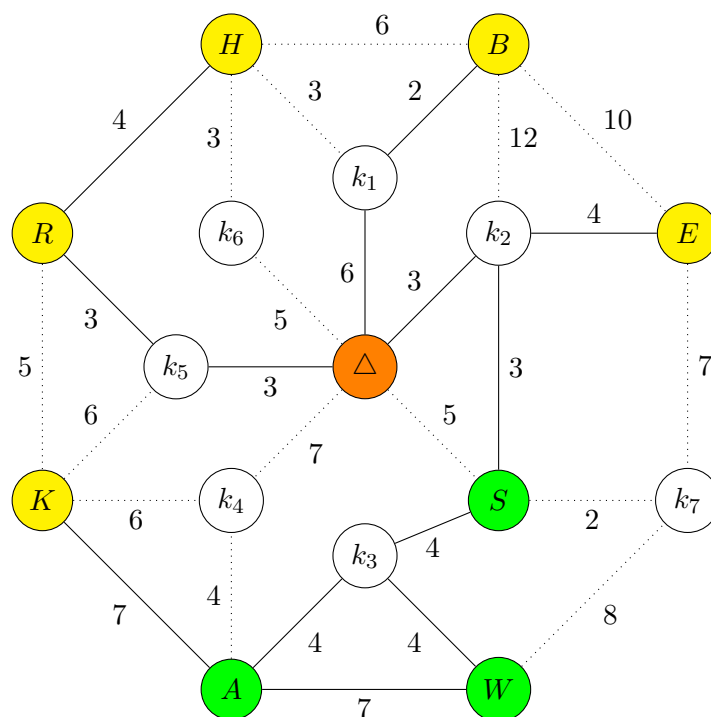


Abbildung 15: **Die Tatortskizze** zeigt die Wohnorte der fünf Tiere (gelb), deren morgendliche Ziele (grün), die Schneefigur (orange) und Kreuzungspunkte (weiß). Durchgezogene Linien markieren Schneisen im Schnee, gepunktete Linien stehen für ungenutzte Strecken. An jedem Streckenabschnitt ist zudem dessen Länge in Metern notiert.

Die Wichtel wissen, dass der Hase H und das Rehkitz R noch zur Schule S gehen, das Eichhörnchen E jeden Morgen zuerst zum Ahorn A spaziert und dass sowohl die Katze K als auch der Biber B in der Holzwerkstatt W arbeiten. (Die Katze ist für ihre schönen Kratzmuster noch weit über das Feld hinaus bekannt.) Die Schneefigur Δ steht in der Mitte des Felds, wo viele der Tiere sie passiert haben könnten.

Nach eingängiger Analyse des Schneeschneisennetzwerks ist sich Masha sicher, den morgendlichen Ablauf genau zu kennen und die beiden Täter*innen überführt zu haben.

Welche der zehn Aussagen ist korrekt?



Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Das Eichhörnchen war zuerst unterwegs und klaute die Gurkenscheiben. Der Biber aß die Möhre.
2. Das Rehkitz war zuerst unterwegs, aber der Biber stahl die Gurkenscheiben. Der Hase konnte der Möhre nicht widerstehen.
3. Die Katze war zuerst unterwegs, aber das Rehkitz aß die Gurkenscheiben und der Biber stahl die Möhre.
4. Die Katze war zuerst unterwegs und stahl die Gurkenscheiben. Der Biber hat die Möhre geklaut.
5. Das Eichhörnchen war zuerst unterwegs, aber das Rehkitz aß die Gurkenscheiben und der Hase erlag dem Verlangen nach der Möhre.
6. Die Katze war zuerst unterwegs, aber der Biber stahl die Gurkenscheiben. Der Hase konnte der Möhre nicht widerstehen.
7. Das Eichhörnchen hatte zuerst Schneekontakt, aber das Rehkitz aß die Gurkenscheiben und der Biber stahl die Möhre.
8. Das Rehkitz war zuerst unterwegs und stahl die Gurkenscheiben. Der Biber machte sich über die Möhre her.
9. Der Biber war zuerst auf den Beinen und stahl die Gurkenaugen. Der Hase ist für das Verschwinden der Möhre verantwortlich.
10. Das Rehkitz war zuerst unterwegs und stahl die Gurkenscheiben. Der Hase hat die Möhre auf dem Gewissen.

Projektbezug:

Die gegebene Aufgabe ist für größere Netzwerke mit mehr Start- und Zielpunkten gar nicht so einfach, da die Zahl der möglichen Reihenfolgen explodiert. Schon mit nur fünf Tieren gibt es $5! = 120$ verschiedene Möglichkeiten, ihre Wanderung in eine zeitliche Abfolge zu bringen. In unserer Forschung wollen wir genau solche Abfolgen rekonstruieren, indem wir Netzwerkstrukturen analysieren. Nur, dass wir statt Schneisen im Schnee historische Straßennetzwerke erforschen, etwa das durch die Römer erbaute. Auch hier ist oft nicht klar, welche Straßen zuerst errichtet wurden oder wo womöglich eine noch unentdeckte Straße verlief, doch ähnlich wie im Schneetreiben können wir davon ausgehen, dass spätere Straßen dazu tendieren Anschluss an frühere zu suchen, denn der Bau neuer Straßenabschnitte war sehr aufwändig. Indem wir Verbindungen zwischen antiken Stätten in eine zeitliche Abfolge bringen, die gut zu dem bekannten Straßennetz passt, versuchen wir archäologische Wissenslücken zu schließen.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Masha macht die folgenden Beobachtungen:

- Die Katze K ist zuerst zum Ahorn A gelaufen, da keine andere Schneeschneise von ihrem Schlafplatz ausgeht. Alle anderen Tiere, die entweder zum Ahorn oder zur Werkstatt W liefen, müssen über den Kreuzungspunkt k_3 gekommen sein. Wäre eines dieser Tiere vor der Katze unterwegs gewesen, so hätte die Katze statt dem direkten Weg vom Ahorn zur Werkstatt mit Länge 7 den Umweg über k_3 genommen, da sie dann statt $2 \cdot 7 = 14$ Zeiteinheiten nur $4 + 2 \cdot 4 = 12$ für diesen Wegabschnitt benötigt hätte. Die Katze war also vor dem Biber und dem Eichhörnchen unterwegs, kam aber wie behauptet nicht an der Schneefrau vorbei.
- Der Weg von Hase H , Rehkitz R und Biber B führt eindeutig an der Schneefrau \triangle und der Schule S vorbei. Der direkte Pfad von \triangle nach S blieb aber ungenutzt, obwohl er mit nur 5 Längeneinheiten (d. h. 10 Zeiteinheiten für das erste Tier) der kürzeste ist. Das lässt sich nur so erklären, dass auf dem Pfad von \triangle über k_2 nach S bereits mindestens ein Abschnitt von Schnee befreit wurde, denn dann lässt sich dieser in höchstens $3 + 2 \cdot 3 = 9$ statt sonst 12 Zeiteinheiten passieren. Hierfür kann nur das Eichhörnchen E verantwortlich sein, dessen Spaziergang zum Ahorn über k_2 und S führte. Also war das Eichhörnchen *vor* dem Rehkitz, Hasen und dem Biber, aber *nach* der Katze unterwegs. Das Eichhörnchen sagt zudem ebenfalls die Wahrheit und kam nicht direkt an der Schneefrau vorbei.
- Der Schulweg des Hasen H liefert das letzte Indiz: Wäre er vor dem Rehkitz und dem Biber unterwegs gewesen, hätte er den kürzesten Weg zur Schneefrau über k_6 genommen und dafür $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 16$ Zeiteinheiten benötigt. Dieser Weg ist aber ungenutzt, sodass der Weg über R und k_5 schneller gewesen sein muss. Daher muss das Rehkitz schon vor dem Hasen unterwegs gewesen sein und der Hase für seinen Schulweg $2 \cdot 4 + 3 + 3 = 14$ nur Zeiteinheiten gebraucht. Wäre der Biber vor dem Hasen unterwegs gewesen (der nach den Schneespuren zu urteilen eindeutig über k_1 zu \triangle lief), dann wäre auch für den Hasen der Weg über k_1 klar von Vorteil gewesen, da das lange Wegstück zwischen k_1 und \triangle vom Schnee befreit gewesen wäre und der Schulweg des Hasen dann nur $2 \cdot 3 + 6 = 12$ Zeiteinheiten gedauert hätte. Also war der Hase vor dem Biber, aber nach dem Rehkitz unterwegs.

Masha kann folglich die Reihenfolge, in der Tiere am Morgen unterwegs waren, genau rekonstruieren: **Zuerst war die Katze unterwegs**, dann das Eichhörnchen. Beide Tiere kamen *nicht* an der Schneefrau vorbei. Nach dem Eichhörnchen folgte das Rehkitz. **Das Rehkitz war damit das erste Tier, das an der Schneefrau vorbeikam und stibitzte die Gurkenscheiben.** Nach dem Rehkitz machte sich der Hase auf den Weg. Als er die Schneefrau passierte, fehlten dieser schon die Gurkenaugen. Er sagt also ebenfalls die Wahrheit, da **erst nach ihm – und damit als letzter – der Biber unterwegs war und die Möhre klaute.** Somit ist Antwort 3 korrekt.

Als Masha die diebischen Tiere konfrontiert, gestehen sie die Tat und geloben Besserung.



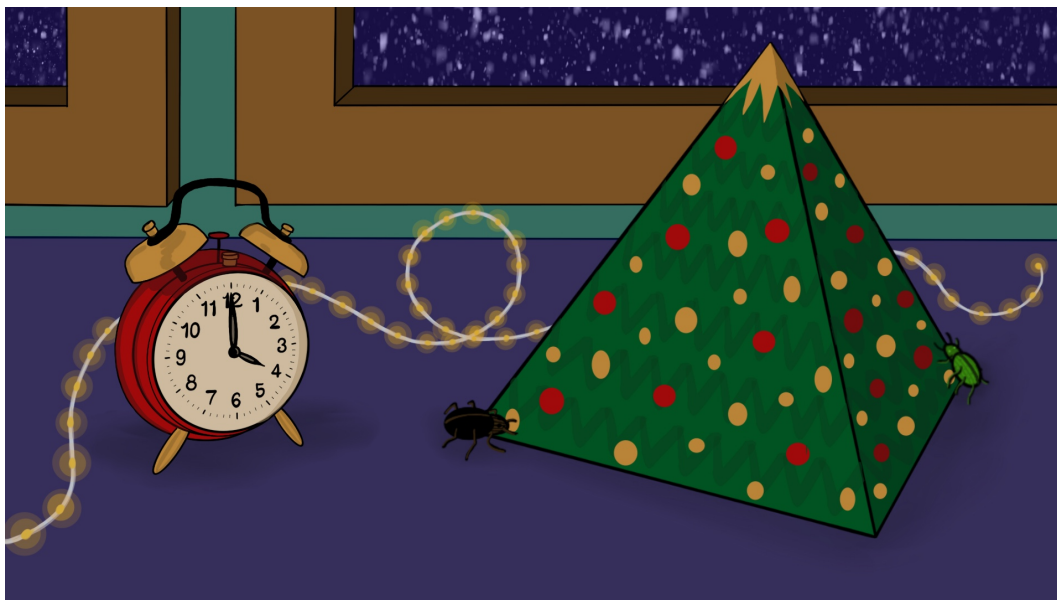
21 Tetraeder

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

Aufgabe

Ein schwarzer und ein grüner Käfer sitzen auf einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$. Der schwarze Käfer beginnt seine Reise um 16 Uhr am Eckpunkt A , krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Kante AB und erreicht den Eckpunkt B um 18 Uhr. Der grüne Käfer beginnt seine Reise um 16 Uhr im Eckpunkt C , krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Kante CD , erreicht den Eckpunkt D um 17 Uhr und bleibt dann in D sitzen.

Wir möchten von euch wissen: Zu welchem Zeitpunkt T haben die beiden Käfer den geringsten Abstand zueinander?



Artwork: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

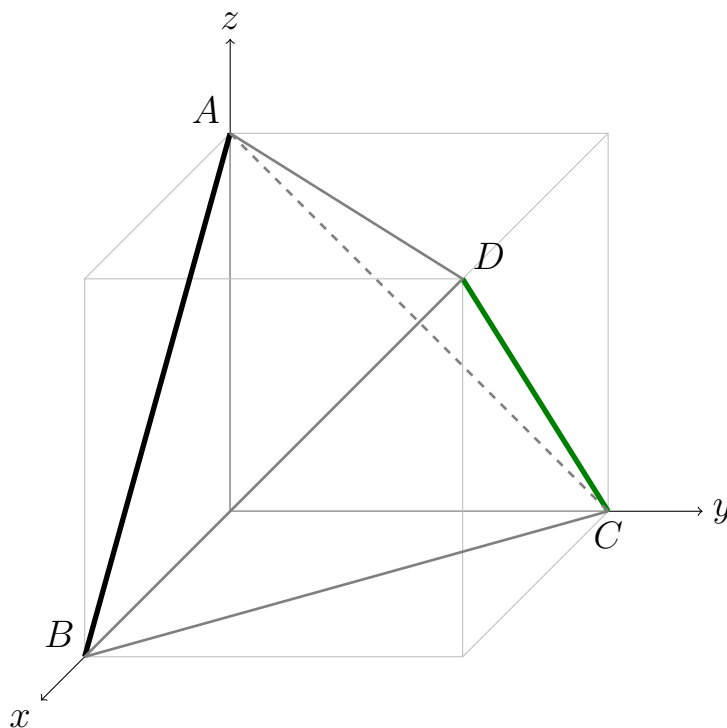
1. Zum Zeitpunkt $T = 16:31$ Uhr.
2. Zum Zeitpunkt $T = 16:32$ Uhr.
3. Zum Zeitpunkt $T = 16:33$ Uhr.
4. Zum Zeitpunkt $T = 16:34$ Uhr.
5. Zum Zeitpunkt $T = 16:35$ Uhr.
6. Zum Zeitpunkt $T = 16:36$ Uhr.
7. Zum Zeitpunkt $T = 16:37$ Uhr.
8. Zum Zeitpunkt $T = 16:38$ Uhr.
9. Zum Zeitpunkt $T = 16:39$ Uhr.
10. Zum Zeitpunkt $T = 16:40$ Uhr.

Lösung**Die richtige Antwort ist: 6.**

Wir betten den Tetraeder so in einen Würfel der Kantenlänge 120 ein, dass die Seiten AB und CD auf gegenüberliegenden Seiten dieses Würfels liegen. Dies gelingt z. B., indem wir

$$A = (0, 0, 120), \quad B = (120, 0, 0), \quad C = (0, 120, 0), \quad D = (120, 120, 120)$$

setzen.



Der schwarze Käfer befindet sich damit m Minuten nach 16 Uhr im Punkt

$$S(m) = (m, 0, 120 - m)$$

für alle $0 \leq m \leq 120$.

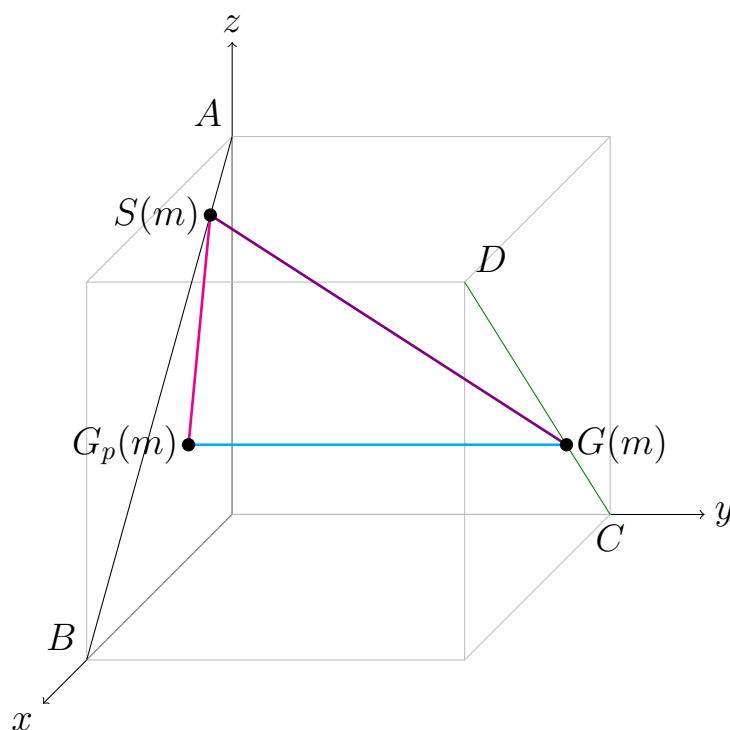
Für $0 \leq m \leq 60$ befindet sich der grüne Käfer m Minuten nach 16 Uhr im Punkt

$$G(m) = (2m, 120, 2m).$$

Für $60 \leq m \leq 120$ sitzt der grüne Käfer im Punkt $D = (120, 120, 120)$.

Der Abstand $d(S(m), G(m))$ der beiden Punkte $S(m)$ und $G(m)$ lässt sich mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen: Dazu bezeichnen wir mit $G_p(m)$ die *Projektion* von $G(m)$ auf die Würfelseite, auf der AB und somit insbesondere $S(m)$ liegt:

$$G_p(m) = (2m, 0, 2m).$$

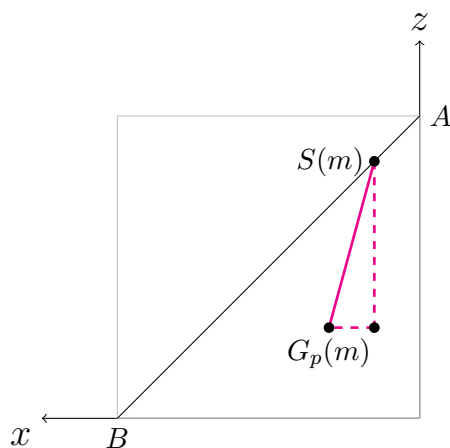


Der Abstand $d(S(m), G(m))$ ergibt sich aus den Abständen $d(G(m), G_p(m))$ zwischen $G(m)$ zu $G_p(m)$ bzw. $d(S(m), G_p(m))$ zwischen $S(m)$ zu $G_p(m)$:

$$d(S(m), G(m))^2 = d(G(m), G_p(m))^2 + d(S(m), G_p(m))^2.$$

Der Abstand $d(G(m), G_p(m))$ von $G(m)$ zu $G_p(m)$ beträgt damit 120. Den Abstand zwischen $S(m)$ und $G_p(m)$ berechnen wir, indem wir den Abstand dieser Punkte in der xz -Ebene berechnen:

$$\begin{aligned} d(S(m), G_p(m))^2 &= d((m, 120 - m), (2m, 2m))^2 \\ &= (2m - m)^2 + (2m - 120 + m)^2 \\ &= m^2 + 9m^2 - 720m + 120^2 \\ &= 10m^2 - 720m + 120^2. \end{aligned}$$



Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} d(S(m), G(m))^2 &= d(G(m), G_p(m))^2 + d(S(m), G_p(m))^2 \\ &= 120^2 + 10m^2 - 720m + 120^2 \\ &= 10m^2 - 720m + 2 \cdot 120^2. \end{aligned}$$

Für $0 \leq m \leq 60$ ist das Quadrat des Abstandes der beiden Käfer also eine quadratische Funktion in m :

$$\begin{aligned} f(m) &:= d(S(m), G(m))^2 \\ &= 10m^2 - 720m + 2 \cdot 120^2 \\ &= 10 \cdot (m^2 - 72m + \frac{1}{5} \cdot 120^2) \\ &= 10 \cdot ((m - 36)^2 - 36^2 + \frac{1}{5} \cdot 120^2). \end{aligned}$$

Da der Faktor vor dem quadratischen Term von $f(m)$ positiv ist, besitzt die Funktion in ihrem Scheitelpunkt ein absolutes Minimum. Der Scheitelpunkt befindet sich bei $m = 36$, wie man an der Scheitelpunktform der Funktion f direkt ablesen kann.

Für $60 \leq m \leq 120$ definieren wir \tilde{f} analog als das Quadrat des Abstandes der beiden Käfer (wobei der grüne Käfer still im Punkt D ausharrt):

$$\begin{aligned} d(S(m), D)^2 &= 120^2 + d((m, 120 - m), (120, 120))^2 \\ &= 120^2 + (120 - m)^2 + (120 - 120 + m)^2 \\ &= 120^2 + 120^2 - 240m + m^2 + m^2 \\ &= 2m^2 - 240m + 2 \cdot 120^2 \\ &= 2 \cdot (m^2 - 120m + 120^2) \\ &= 2 \cdot ((m - 60)^2 - 60^2 + 120^2) \end{aligned}$$

Auch \tilde{f} ist eine quadratische Funktion, deren absolutes Minimum sich im Scheitelpunkt befindet. Der Scheitelpunkt befindet sich an der Stelle $m = 60$, was man aus der Scheitelpunktform direkt ablesen kann.

Weiterhin gilt nach Definition von f und \tilde{f} an der Stelle $m = 60$

$$\tilde{f}(60) = f(60) > f(36),$$

da die Funktion f ihr Minimum bei $m = 36$ hat. Der Abstand der beiden Käfer ist demnach um 36 Minuten nach 16 Uhr, also um 16:36 Uhr, minimal.



22 Zelda in Gefahr

Autor*innen: Luise Fehlinger (HU Berlin)
Florian Matthies (HU Berlin, Herder-Gymnasium Berlin)
Projekt: Arbeitsgruppe „Mathematik und ihre Didaktik“ (HU Berlin)

Aufgabe

Die Prinzessin Zelda wurde schon wieder entführt. Und es ist klar, dass diesmal Mut, Kraft und Weisheit, die die Ecken des magischen Triforce bilden, nicht ausreichen werden, um sie zu retten. Es ist unbedingt auch die vierte Kraft, *Geduld*, nötig. Das Triforce muss also in ein magisches Tetraeder umgebaut werden. Eine neue Dimension kommt dazu. Aus dem gleichseitigen Dreieck des Triforce wird ein regelmäßiges Tetraeder. Wie beim Triforce müssen die Ecken des Tetraeders aus kleineren Tetraedern bestehen. Diese berühren sich an ihren Eckpunkten und bilden so das Gerüst des magischen Tetraeders (s. Abb. 16). Allerdings darf das Innere nicht leer bleiben. Es muss durch einen inneren Körper K_1 perfekt ausgefüllt werden, der wiederum aus Ecken und einem weiteren inneren Körper K_2 besteht usw.

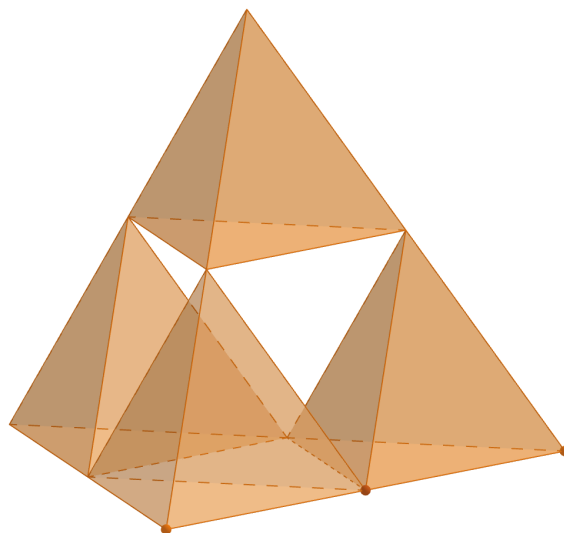


Abbildung 16: Der Tetraeder K_0 . Der Körper K_1 entsteht aus K_0 durch abschneiden der Ecken (in orange). K_1 ist demnach der (farblose) Rest in der Mitte des Tetraeders K_0 .

Das Tetraforce ist also ein regelmäßiges Tetraeder, wir nennen diesen Körper K_0 .

- K_1 entsteht aus K_0 , indem man alle Ecken von K_0 abschneidet. Die Schnittflächen sind dabei jeweils durch die Mittelpunkte der Kanten von K_0 , die sich in dem jeweiligen Eckpunkt treffen, definiert (s. Abb. 16).
- Aus K_1 entsteht K_2 wieder durch abschneiden aller Ecken von K_1 . Wieder sind die Schnittflächen durch die Mittelpunkte aller Kanten von K_1 , die sich in dem jeweiligen Eckpunkt treffen, definiert.
- So geht es immer weiter: K_{n+1} entsteht aus K_n wieder durch abschneiden aller Ecken von K_n . Wieder sind die Schnittflächen durch die Mittelpunkte aller Kanten von K_n , die sich in dem jeweiligen Eckpunkt treffen, definiert.

Nach unendlich vielen Schnitten bleibt das magische Herz des Tetraforce übrig.

Dieses Herz werden die Wichtel – wer sonst wäre dazu in der Lage – aus einem magischen Kristall herstellen, welches bei -40°C am magnetischen Pol der Erde aus Weihnachtsexier gegossen werden muss.

Doch welche Eigenschaften hat das magische Herz? Die Wichtel stellen verschiedene Vermutungen auf. Aber eine Aussage ist falsch. Welche?

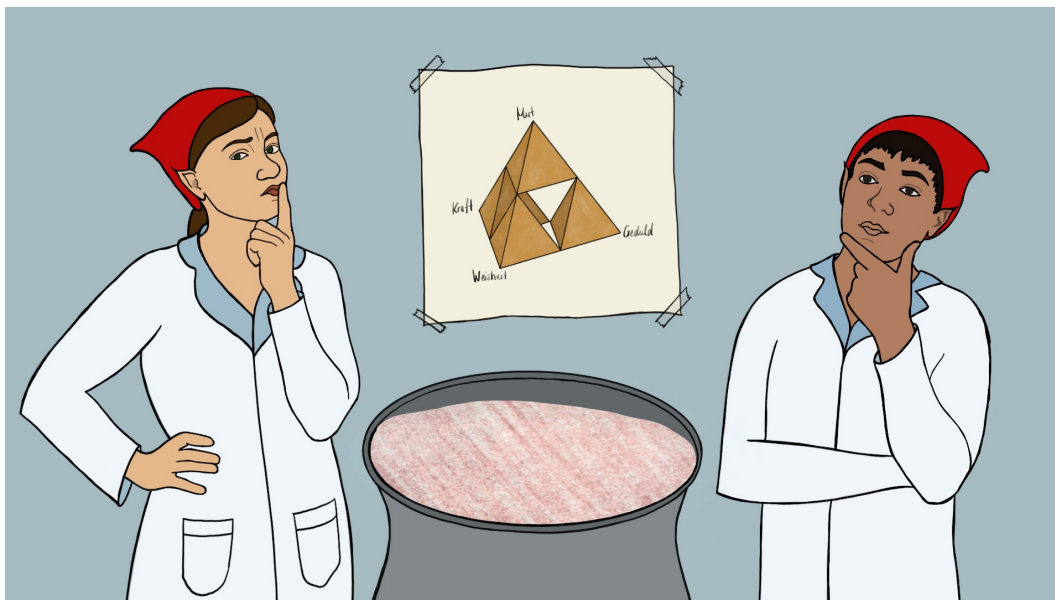


Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. K_1 ist ein Oktaeder.
2. Das Volumen von K_1 ist nur die Hälfte vom Volumen von K_0 .
3. Alle K_n sind konvex.
4. K_0 ist der einzige der Körper, bei dem sich nur drei Kanten in jedem Eckpunkt treffen. Bei allen anderen K_n treffen sich immer vier Kanten pro Eckpunkt.
5. Jeder Körper K_n hat auch Seitenflächen, die gleichseitige Dreiecke sind.
6. Jeder Körper K_n hat als Seitenflächen nur Dreiecke und/oder Vierecke.
7. Die Schwerpunkte der Seitenflächen von K_n gehören zu allen K_{n+k} ($k \in \mathbb{N}$).
8. In jedem Schritt verdoppelt sich die Anzahl der Kanten.
9. Bei jedem Körper K_n außer K_0 gibt es genau zwei Seitenflächen mehr als Eckpunkte.
10. Das magische Herz ist eine Kugel.

Lösung

Leider gibt es hier einen gravierenden Fehler in der Aufgabenstellung. Die entstehenden Vierecke sind ab dem sechsten Iterationsschritt nicht mehr wohldefiniert, d. h. nicht planar. Die Aufgabe ist daher nicht lösbar. Bitte entschuldigt!

Wir danken allen engagierten Teilnehmer*innen, die uns auf diesen Fehler aufmerksam gemacht haben – auch für die lebhaften und erhellenden Diskussionen im Mathekalender-Forum.

Die Aufgabe wurde aus der Wertung des MATH+ Adventskalenders 2021 gestrichen.



23 Spuren im Schnee

Autor: Christian Renau (HU Berlin, Heinrich-Hertz-Gymnasium Berlin)
Projekt: Arbeitsgruppe „Mathematik und ihre Didaktik“ (HU Berlin)

Aufgabe

Wie jeden morgen machen sich die Nachwuchswichtel Juri und Sergei auf den Weg in die Wichtelschule. Zunächst erklimmen die beiden den Feenhügel, dann geht es im Elfental entlang des Zwergenbachs hin zum verwunschenen Tannenwald. Hinter dem Tannenwald wartet dann noch ein ausgedehntes Schneefeld, das die beiden überqueren müssen.

Als Juri und Sergei den Tannenwald verlassen, trauen sie ihren Augen nicht: Im Schneefeld zeichnen sich Spuren ab, die aussehen wie ein riesiges Koordinatensystem, in dem, soweit das Auge reicht, die Verbindungsstrecken zwischen den Punkten (m^2, m) und $(n^2, -n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n > 1$ abgetragen sind. Sollten hier etwa Aliens am Werk gewesen sein?

Aufgeregt rennen Juri und Sergei den restlichen Weg zur Schule, wo sie auf ihre Mathelehrerin Emma treffen. Sogleich erzählen sie ihr von der geheimnisvollen Entdeckung. Interessiert schnappt sich Emma die ganze Wichtelklasse und gemeinsam stapfen sie zum Schneefeld. Die Miniwichtel sind begeistert von diesem Ausflug, denn einen Tag vor Weihnachten halten sie es nur noch sehr schwer auf ihren Stühlen im Klassenraum aus...

„Aber Mathematik muss schon sein“, denkt sich Emma und fragt ihre Klasse, welche Zahlen auf der x -Achse von diesen Verbindungsstrecken „getroffen“ werden. Allerdings hat ein kleiner Wichtel durch die ganze Aufregung nicht ganz genau aufgepasst und daher einen Fehler gemacht. Welcher?



Illustration: Julia Nurit Schönngel

Antwortmöglichkeiten:

1. Anh antwortet: „Ich denke, 1.008.988.999 wird getroffen.“
2. Basima beobachtet: „Die Zahl 2.517.849.199 wird getroffen.“
3. Charly schätzt: „Auch 3.497.348.737 wird getroffen.“
4. Dao denkt: „Bestimmt wird 4.142.454.642 getroffen.“
5. Elif erklärt: „Natürlich wird 5.761.648.489 getroffen.“
6. Frieda findet: „Auch 6.556.849.301 wird getroffen.“
7. Ghazal garantiert: „Ganz sicher wird 7.481.075.262 getroffen.“
8. Hasina hat folgende Idee: „Ich denke, 8.991.101.800 wird getroffen.“
9. Imani ist sich sicher: „9.768.956.129 wird getroffen.“
10. João schmunzelt: „Auf jeden Fall wird 10.567.846.453 getroffen.“

Lösung**Die richtige Antwort ist: 2.**

Die Treffpunkte der Verbindungsstrecken zwischen (m^2, m) und $(n^2, -n)$ auf der x -Achse sind gerade die Nullstellen der Geraden durch (m^2, m) und $(n^2, -n)$.

Wir stellen daher zunächst die Geradengleichung für die Verbindungsstrecken zwischen den Punkten (m^2, m) und $(n^2, -n)$ für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n > 1$ auf und berechnen dann deren Nullstellen. Die Zweipunkteform der gesuchten Geradengleichung ist

$$(y - m) \cdot (n^2 - m^2) = (x - m^2) \cdot (-n - m).$$

Äquivalente Umformungen führen zur folgenden Geradengleichung

$$y = \frac{1}{n - m}(-x + mn),$$

an der man sofort die Nullstelle $x_0 = mn$ ablesen kann.

Auf der x -Achse werden demnach alle Zahlen getroffen, die das Produkt zweier ganzer Zahlen $n, m > 1$ sind. Wir geben im folgenden die Primfaktorzerlegung der zehn gegebenen Zahlen an:

1. $1.008.988.999 = 10.091 \cdot 99.989$
2. $2.517.849.199$ ist eine Primzahl und somit nicht als das Produkt zweier ganzer Zahlen $n, m > 1$ darstellbar. D. h. Basima hat sich verschätzt.
3. $3.497.348.737 = 54.577 \cdot 64.081$
4. $4.142.454.642 = 2 \cdot 3^3 \cdot 73 \cdot 1.050.851$
5. $5.761.648.489 = 74.597 \cdot 77.237$
6. $6.556.849.301 = 59 \cdot 111.133.039$
7. $7.481.075.262 = 2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 23.233.153$
8. $8.991.101.800 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 44.955.509$
9. $9.768.956.129 = 23 \cdot 193 \cdot 2.200.711$
10. $10.567.846.453 = 43 \cdot 103 \cdot 2.386.057$

Bemerkung: Der Mathematiker Juri Wladimirowitsch Matijassewitsch hat 1971 in der Zeitschrift *Kwant* (Квант) gezeigt, dass man die oben gezeigte Eigenschaft der Normalparabel nutzen kann, um beliebige (positive) Zahlen graphisch miteinander zu multiplizieren. Die Normalparabel ist also ein *Nomogramm*. Der Mathematiker Sergei Borissowitsch Stetschkin hatte die Idee, daraus ein graphisches Primzahlsieb zu konstruieren.



24 Verführerische Vanillekipferl

Autorin: Ariane Beier (TU Berlin)
Projekt: MATH+ Schulaktivitäten

Aufgabe

Die Backelfen haben sich in diesem Jahr mal wieder selbst übertroffen und die allerallerbesten Vanillekipferl gebacken. Die Kipferl sind süß (aber nicht zu süß), überhaupt nicht trocken, sondern zergehen zart schmelzend im Mund und hinterlassen dabei ein herrliches Weihnachtsgefühl. Damit das Rezept nicht gleich geklaut wird und als „Omas Rezept für Vanillekipferl – die besten!!!“ auf wichtelkoch.np landet, haben es die Elfen in einem speziellen Tresor mit sieben Kippschaltern vor Dieben gesichert.

Kurz vor Weihnachten müssen nun aber Vanillekipferl nachgebacken werden, da die gefräßigen Elfen schon alle Vorräte auf ihren diversen Weihnachtsfeiern verputzt haben. Die Backelfen müssen auf eine Leiter klettern, um an die Tresoranleitung zu kommen, die auf dem höchsten Regal der Backstube versteckt ist. In der Anleitung steht:

Der Tresor öffnet sich nur, wenn alle Kippschalter auf „aus“ stehen. Die Schalter können, wie folgt, bedient werden:

- Der Kippschalter ganz rechts kann wie gewünscht an- oder ausgeschaltet werden.
- Jeder andere Schalter kann nur dann an- oder ausgeschaltet werden, wenn der Schalter direkt rechts von ihm „an“ ist und alle anderen rechts von ihm „aus“ sind.
- Es kann immer nur ein Kippschalter gleichzeitig bedient werden.

Im Moment sind alle Schalter „an“. Wie viele Züge sind notwendig, um den Tresor zu öffnen? Dabei gilt jedes Umschalten eines Schalters als ein Zug.



Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. 81
2. 82
3. 83
4. 84
5. 85
6. 86
7. 87
8. 88
9. 89
10. 90

Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Sei ganz allgemein $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Kippschalter. Wir nummerieren die Schalter *von links nach rechts* mit 1 bis n und bezeichnen die Zustände „an“ bzw. „aus“ mit 1 bzw. 0. Sei $M(n)$ die minimale Anzahl von Zügen, um n Schalter von „an“ nach „aus“ zu schalten.

Um uns den Vorgang zu veranschaulichen, betrachten wir zunächst kleine n . Für $n = 1$ muss man nur einen Schalter betätigen, um vom Zustand 1 zum Zustand 0 zu gelangen, d. h. $M(1) = 1$. Für $n = 2$ benötigt man zwei Züge. Somit ist $M(2) = 2$. Für $n = 3$ benötigt man $M(3) = 5$ Züge und für $n = 4$ mindestens $M(4) = 10$:

1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0
	0	0	0	1	0	1	1	0
			0	1	1	0	1	0
			0	0	1	0	1	0
			0	0	0	0	1	1
						0	1	1
						0	0	1
						0	0	1
						0	0	0
						0	0	0

Sei nun $n \geq 3$. Wir können die $M(n)$ Züge in vier Phasen unterteilen:

1. Bevor wir den ersten der n Schalter (also den Schalter ganz links) ausschalten können, muss der Zustand 1100...00 erreicht sein. Daher müssen wir zunächst die $n - 2$ rechts von Schalter Nr. 2 ausschalten. Dafür benötigen wir mindestens $M(n - 2)$ Züge. (Zur Veranschaulichung sind diese Züge für $n = 4$ in der nachfolgenden Tabelle in **blau** dargestellt.)
2. Vom Zustand 1100...00 gelangen wir mit einem Zug zum Zustand 0100...00.
3. Bevor wir nun den 2. Schalter ausschalten können, muss der Zustand 0111...11 erreicht werden. Dabei werden die Züge aus 1) in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt. Dies sind also nochmal $M(n - 2)$ Züge. (Zur Veranschaulichung sind diese Züge für $n = 4$ in der nachfolgenden Tabelle in **rot** dargestellt.)
4. Wenn wir nun die führende 0 (ganz links) vernachlässigen, entspricht der Zustand 0111...11 dem Fall $n - 1$. Wir benötigen demnach mindestens $M(n - 1)$ Züge um zum gewünschten Zustand 00...00 zu gelangen. (Zur Veranschaulichung sind diese Züge für $n = 4$ in der nachfolgenden Tabelle in **grün** dargestellt.)

Insgesamt erhalten wir für $n \geq 3$ die folgende rekursive Formel:

$$M(n) = M(n - 1) + 1 + M(n - 1) + M(n - 2) = 2M(n - 2) + M(n - 1) + 1. \quad (13)$$

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Mithilfe von (13) lassen sich nun die Zahlen $M(n)$ für höhere n wie folgt bestimmen:

$$n = 5: M(5) = 2M(3) + M(4) + 1 = 2 \cdot 5 + 10 + 1 = 21,$$

$$n = 6: M(6) = 2M(4) + M(5) + 1 = 2 \cdot 10 + 21 + 1 = 42,$$

$$n = 7: M(7) = 2M(5) + M(6) + 1 = 2 \cdot 21 + 42 + 1 = 85.$$

Für sieben Schalter benötigen die Backwachtel also mindestens 85 Züge.

Bemerkung: Aus (13) können wir auch die folgende geschlossene Formel für $M(n)$ herleiten und durch vollständige Induktion beweisen:

$$M(n) = \frac{2}{3}2^n - \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ lautet (14):

$$M(1) = \frac{2}{3}2^1 - \frac{1}{6}(-1)^1 - \frac{1}{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1.$$

Analog erhalten wir für $n = 2$:

$$M(2) = \frac{2}{3}2^2 - \frac{1}{6}(-1)^2 - \frac{1}{2} = \frac{8}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2.$$

Induktionsschritt: Sei $k \geq 3$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt (14) für $n = k - 1$ und $n = k - 2$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
M(k) &= 2M(k-2) + M(k-1) + 1 \\
&= 2 \cdot \left(\frac{2}{3}2^{k-2} - \frac{1}{6}(-1)^{k-2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2}{3}2^{k-1} - \frac{1}{6}(-1)^{k-1} - \frac{1}{2} \right) + 1 \\
&= \frac{2}{3}2^{k-1} - \frac{1}{3}(-1)^{k-2} - 1 + \frac{2}{3}2^{k-1} - \frac{1}{6}(-1)^{k-1} - \frac{1}{2} + 1 \\
&= 2 \cdot \frac{2}{3}2^{k-1} - \left(\frac{1}{3}(-1)^k(-1)^{-2} + \frac{1}{6}(-1)^k(-1)^{-1} \right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{2}{3}2^k - \left(\frac{1}{3}(-1)^k - \frac{1}{6}(-1)^k \right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{2}{3}2^k - \frac{1}{6}(-1)^k - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

womit wir Formel (14) bewiesen haben.