MATHE KALENDER

LÖSUNGSHEFT 2009

Deutsche Mathematiker-Vereinigung

www.mathekalender.de

DFG-Forschungszentrum Matheon
Mathematik für Schlüsseltechnologien

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

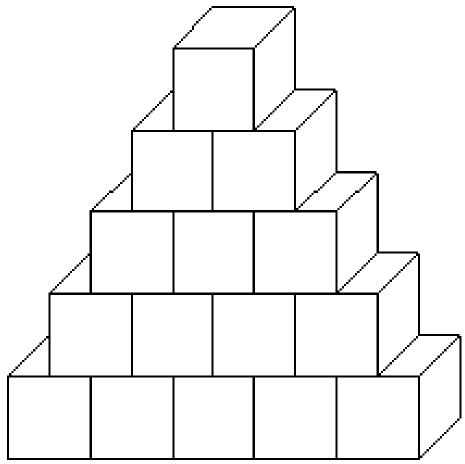
Das war ja mal ein bewegtes Mathekalenderjahr. Nicht nur, dass ein neues Adventskalenderteam angetreten ist, auch die Website präsentierte sich in einem neuen Look. Und dann haben wir versucht, viel Lärm vorher zu machen, so dass letztendlich über 16.000 Nutzer angemeldet waren. Und obwohl der Kalender eine extrem anstrengende Zeit für uns ist, motiviert Euer reger Zuspruch uns natürlich, weiterzumachen. Aber genug mit der Vorrede. Hier sind die Aufgaben und Lösungen des „Digitalen Mathekalenders 2009

1 Bausteine

Autor: Falk Ebert

1.1 Aufgabe

Wichtel Marek ist zum Herstellen von Geschenken noch zu klein. Als Bausteinvortester leistet er aber ganze Arbeit. Aus einer Kiste mit würfelförmigen roten, gelben und grünen Bausteinen hat er folgendes Gebilde gebaut.



Dem vorbeikommenden Weihnachtsmann fällt auf, dass keine zwei gleichfarbigen Bausteine aneinandergrenzen. Er überlegt sich, wieviele solcher Bauten (rot, gelb und grün, keine gleichfarbigen Steine grenzen aneinander) es wohl gibt.

Antwortmöglichkeiten:

1. gar keine, der Weihnachtsmann hat nicht richtig hingeschaut
2. 1
3. 3
4. 6
5. 10
6. 15

7. 24

8. $5! = 120$

9. $3^5 = 243$

10. $3^{15} = 14348907$

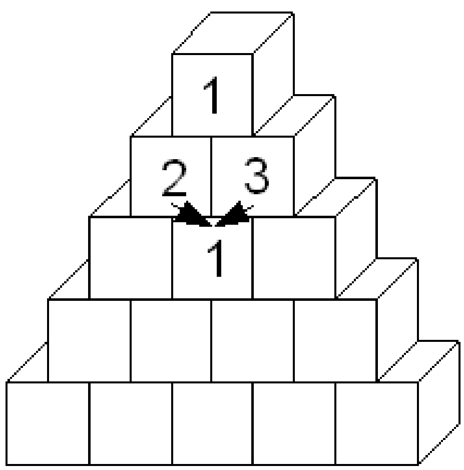
Anmerkung:
Nachdem die Anfrage sehr häufig kam: Der Weihnachtsmann schaut von *einer* Seite auf das Gebäude und sieht gedrehte Gebäude auch als 2 verschiedene Gebäude an. Ein „Gebäude“ist übrigens der dargestellte Turm mit einer Tiefe von 1 Stein, bestehend aus genau 15 Steinen. Und unter „berühren“ist zu verstehen, dass die betreffenden Steine an mindestens einem Punkt Kontakt haben.

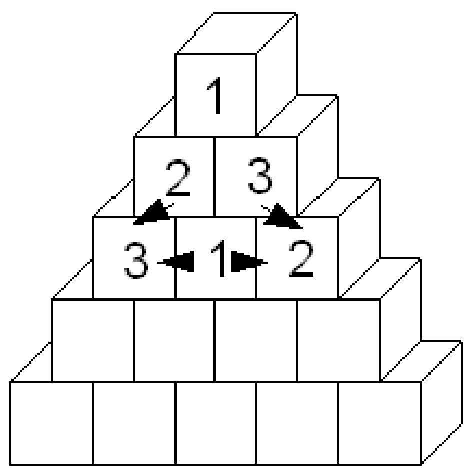
Projektbezug:
In der Ganzzahligen Programmierung treten häufig Fragestellungen auf, die viele Lösungen haben, welche sich aber in Bezug auf die Optimalität nicht unterscheiden. Zum Beispiel ist die Linien-Nummer eines Busses für die Qualität des Linienplans unerheblich. Allerdings macht eine hohe Anzahl von Möglichkeiten das Finden einer Lösung schwieriger. Im MATHEON Projekt B12 „Symmetrien in der Ganzzahligen Programmierung“ werden solche Problemstellungen untersucht.

1.2 Lösung

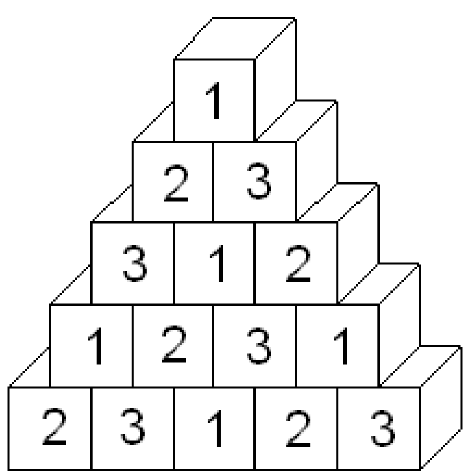
Richtige Lösung: Antwort 4: 6 Möglichkeiten

Wir bauen das Gebäude mal von oben nach unten und geben den ersten drei Bausteinen die Nummern 1, 2 und 3. Offensichtlich müssen die Farben von 1, 2 und 3 verschieden sein. Wegen der Forderung nach ungleichen Farben bei aneinandergrenzenden Steinen folgt, dass in der Mitte in der dritten Reihe die gleiche Farbe wie an 1 sein muss. Damit ergibt sich aber für die gesamte dritte Reihe sofort, welche Farben die Steine haben müssen.





Auf analoge Art und Weise kann man ab der dritten Reihe jede Reihe eindeutig anhand der Farben der darüberliegenden Reihe belegen.



Mit Festlegung der Farben für die ersten 2 Reihen ist also die Färbung der gesamten Konstruktion festgelegt. Und man kann sich leicht überzeugen, dass es genau $3! = 6$ Möglichkeiten gibt, drei Farben ohne Wiederholungen auf die drei Plätze der oberen 2 Reihen zu verteilen.

Bemerkung: Das Gebäude hätte also auch 42 oder 216 oder noch mehr Etagen haben können und die Antwort wäre die gleiche gewesen, da nur die obersten beiden Reihen von Bedeutung sind.

2 Linienplanung

Autor: Marika Neumann
Projekt: B15

Abbildung 1: *Links:* Ein Beispiel mit 7 Standorten und 9 Straßen. *Rechts:* Eine Lösung mit zwei Linien, blau und rot.

2.1 Aufgabe

Nächstes Jahr wird alles anders! Das hat der vorweihnachtliche Verwaltungsrat bereits beschlossen. Um die ständig wachsende Anzahl an Weihnachtswünschen erfüllen zu können, soll es nächstes Jahr mehrere Standorte geben, in denen Geschenke verpackt werden. Die genaue Zahl an Standorten ist noch nicht fest, aber es soll wenigstens vier geben. Die Standorte sollen durch ein Straßennetz verbunden werden. Auch wie das aussehen wird, ist noch nicht ganz klar. Da kommt es auf die geografischen Gegebenheiten an. Auf eines kann man sich aber verlassen, alle Standorte sind über das Straßennetz miteinander verbunden, und es gibt keine 2 Straßen, die exakt die gleichen Knotenpunkte miteinander verbinden. Ein Beispiel, wie es aussehen könnte, ist in Abbildung 1, links, dargestellt.

Damit die Verteilung der Geschenke zwischen den Standorten gut funktioniert, sollen auf dem Straßennetz Transportlinien eingerichtet werden. Diese Linien sollen so gewählt werden, dass jeder Standort von jedem anderen durch die Nutzung der Linien erreicht werden kann. Umsteigen geht an jedem Standort, der von den betreffenden Linien bedient wird. Linien können überall definiert werden, und verschiedene Linien können sich eine Straße teilen. Es gibt dabei folgende Bedingungen an die Linien:

1. Eine Linie soll stets genau vier Standorte miteinander verbinden und darf nur auf den gegebenen Straßen fahren.

2. Linien fahren in beide Richtungen und in jeder Richtung an jedem der vier Standorte nur einmal vorbei.

Das rechte Bild in Abbildung 1 zeigt eine Lösung für das Beispiel auf der linken Seite.

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Kapazitäten der Linien und die Länge der Straßen keine Rolle spielen.
Der Weihnachtsmann hat sich bezogen auf ein gegebenes Straßennetz und gegebene Standorte bereits überlegt, wie man diese Linien definieren kann. Hier ist seine Idee:

1. Zu Beginn wähle eine beliebige Linie, die vier Standorte miteinander verbindet. Die Standorte, die von dieser Linie angefahren werden, werden notiert.

2. Wenn es noch Standorte gibt, die nicht notiert sind, dann füge eine Linie dazu, die mindestens einen notierten Standort und mindestens einen nicht notierten Standort enthält. Notiere alle neu angefahrenen Standorte. Wiederhole diesen Schritt so lange, wie es noch nicht notierte Standorte gibt.

Der Weihnachtsmann stellt das Problem und seinen Lösungsvorschlag fünf seiner wichtigsten Helfer vor. Hier sind ihre Aussagen:

- Anton: Es gibt Konstellationen von Standorten und Straßennetzen für die es keine Lösung gibt.

- Beate: Falls es eine Lösung gibt, dann liefert der Lösungsvorschlag vom Weihnachtsmann eine Lösung.

- Claudia: Gibt es zwischen je zwei Standorten bezogen auf das Straßennetz (ohne Linien) zwei verschiedene Wege, dann bekommen wir mit der Idee vom Weihnachtsmann eine Lösung mit minimaler Anzahl an Linien.

- Doreen: Ist das Problem lösbar und gilt für die Anzahl der Standorte n, dass $n-1$ durch drei teilbar ist, dann gibt es eine Lösung, so dass keine zwei Linien, die gleiche Straße benutzen.

- Emil: Wenn es eine Lösung gibt, dann werden mindestens $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ viele Linien benötigt (n ist die Anzahl der Standorte, $\lceil x \rceil$ bedeutet die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist).

Der Weihnachtsmann denkt kurz nach und ist der Meinung, dass nur drei Aussagen stimmen. Welche sind es?

Antwortmöglichkeiten:

1. Anton, Beate, Claudia
2. Anton, Beate, Doreen
3. Anton, Beate, Emil
4. Anton, Claudia, Doreen
5. Anton, Claudia, Emil
6. Anton, Doreen Emil
7. Beate, Claudia, Doreen
8. Beate, Claudia, Emil
9. Beate, Doreen, Emil
10. Claudia, Doreen, Emil

Projektbezug:
Das „Überdecken“ eines Straßennetzes mit Linien, die genau 4 Stationen anfahren, ist ein Spezialfall in der Linienplanung. Die Linienplanung wird im MATHEON Projekt „Angebotsplanung im öffentlichen Nahverkehr“ untersucht.

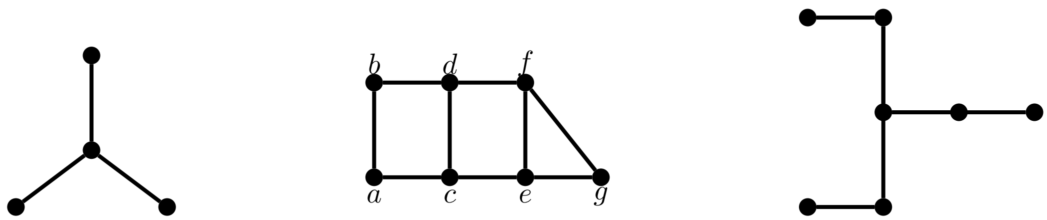


Abbildung 2:

2.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3: Anton, Beate, Emil

- Die Aussage von Anton ist korrekt. Das Beispiel in der linken Abbildung 2 hat vier Standorte und alle sind über Straßen miteinander verbunden. Aber man kann keine Linien finden, die genau vier Standorte anfahren und jeden in jeder Richtung nur einmal.

- Die Aussage von Beate ist richtig. Wenn es eine Lösung gibt, dann kann man eine Linie, die alle Bedingungen erfüllt finden. Gibt es noch nicht angefahrene Standorte, so muss einer dieser Standorte direkt durch eine Straße von einen der vier (von der ersten Linie angefahrenen) Standorte erreichbar sein. In jedem Fall kann man eine Linie finden, die drei von den bereits angefahrenen Standorten enthält und den neuen Standort.

  Die Behauptung folgt dann per Induktion.

- Die Aussage von Claudia stimmt nicht. Betrachte dazu die mittlere Abbildung 2. Es gibt zwischen je zwei Standorten zwei verschiedene Wege. Eine Minimallösung enthält zwei Linien, z.B. $\ell_1 = \{a, c, e, g\}$ und $\ell_2 = \{b, d, f, g\}$. Wenn der Algorithmus aber mit Linie $\{f, d, c, e\}$ beginnt, werden noch mindestens zwei Linien benötigt, um die restlichen Standorte zu bedienen.

- Die Aussage von Doreen stimmt nicht. Betrachte dazu die rechte Abbildung 2. Es sind mindestens drei Linien nötig, um alle Standorte miteinander zu verbinden. Da es aber nur sechs Straßen gibt, müssen sich die Linien Straßen teilen.

- Die Aussage von Emil stimmt. Eine Linie, die genau vier Standorte enthält, fährt über genau drei Straßen. Um n Standorte miteinander zu verbinden, muss man über $n-1$ Straßen fahren, d.h. $\frac{n-1}{3}$ ist eine untere Schranke an die Anzahl benötigter Linien. Da wir Linien ganz oder gar nicht nehmen, kann dieser Zahl aufgerundet werden.

Damit haben Anton, Beate und Emil recht.

3 Würfelspiele

Autor: Irina Penner
Projekt: E9

3.1 Aufgabe

Auf einem Schulweihnachtsmarkt werden (zu einem guten Zweck) Glücksspiele angeboten. Es wird mit mehreren Würfeln gewürfelt, und man kann annehmen, dass alle Würfel fair sind, also jede Seite mit Wahrscheinlichkeit 1/6 gewürfelt wird. Ein Spieler kann einen Geldbetrag auf ein bestimmtes Ereignis setzen. Man verliert den Einsatz bei verlorener Wette und bekommt bei gewonnener Wette den doppelten Einsatz zurück. Das Spiel ist dann vorteilhaft für den Spieler, wenn seine Gewinnwahrscheinlichkeit p größer als 1/2 ist. Der erwartete Gewinn $E[\mathrm{G}]$ beim Einsatz von einem Euro ist

$$E[\mathrm{G}] = 1 \times p - 1 \times (1 - p) = 2 \times p - 1 > 0.$$

Wenn man also lange genug spielt, würde man im Schnitt mehr gewinnen als verlieren.

Es werden nun folgende Spiele auf dem Markt angeboten:

1. Ein Würfel wird 4-mal geworfen. Es wird darauf gewettet, dass mindestens eine Sechs dabei vorkommt.

2. Vier Würfel werden 1-mal geworfen. Es wird darauf gewettet, dass mindestens eine Sechs dabei vorkommt.

3. Zwei Würfel werden 24-mal geworfen. Es wird darauf gewettet, dass mindestens eine Doppelsechs dabei vorkommt.

4. Vierundzwanzig Würfel werden 2-mal geworfen. Es wird darauf gewettet, dass mindestens eine Doppelsechs dabei vorkommt. (Drei oder mehr Sechsen in einem Wurf zählen auch als eine Doppelsechs.)

Wenn man nur bei den Spielen mitspielen will, bei denen die Gewinnwahrscheinlichkeit größer als 1/2 ist, welche der vier beschriebenen Spiele kommen dann überhaupt in Frage?

Antwortmöglichkeiten:

1. Ich würde nur das Spiel 1 spielen, denn es hat als einziges eine Gewinnwahrscheinlichkeit größer als 1/2.

2. Ich würde nur das Spiel 2 spielen, denn es hat als einziges eine Gewinnwahrscheinlichkeit größer als 1/2.

3. Ich würde nur die Spiele 1 und 2 spielen, denn die beiden sind Varianten ein und desselben Spiels und haben beide die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit, die größer als 1/2 ist. Spiele 3 und 4 sind dagegen unvorteilhaft für den Spieler.

4. Ich würde nur die Spiele 3 und 4 spielen, denn sie haben beide eine Gewinnwahrscheinlichkeit größer als 1/2, während die Gewinnwahrscheinlichkeit bei Spielen 1 und 2 kleiner als 1/2 ist.

5. Ich würde nur die Spiele 1 und 4 spielen, denn sie haben beide eine Gewinnwahrscheinlichkeit größer als 1/2, während die Gewinnwahrscheinlichkeit bei Spielen 2 und 3 kleiner als 1/2 ist.

6. Ich würde nur das Spiel 4 spielen, denn es hat als einziges eine Gewinnwahrscheinlichkeit größer als 1/2.

7. Ich würde nur die Spiele 2, 3 und 4 spielen, denn nur das Spiel 1 hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit kleiner als 1/2.

8. Ich würde nur die Spiele 1, 2 und 4 spielen, denn nur das Spiel 3 hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit kleiner als 1/2.

9. Alle vier Spiele haben eine Gewinnchance größer als 1/2. Also würde ich bei allen mitspielen.

10. Alle vier Spiele haben eine Gewinnchance kleiner als 1/2. Also würde ich bei keinem mitspielen.

Projektbezug:
Die mathematische Grundlage für die Analyse der Finanzmärkte ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Historisch gesehen ist diese aus der Untersuchung von Glücksspielen entstanden. In gewisser Weise nehmen wir auch an, dass das Handeln auf den Finanzmärkten ein Glücksspiel ist. Vor allem beschäftigen wir uns mit der Bewertung und Absicherung von Finanzrisiken, die mit Derivaten verbunden sind. Ein Derivat kann als eine Wette auf einen bestimmten Spielausgang, also auf eine bestimmte Preisentwicklung

in dem Finanzmarkt aufgefasst werden. Um beurteilen zu können, wie riskant die Wette ist, kommt es unter anderem darauf an, die Gewinnchancen und Verlustrisiken möglichst genau zu kalkulieren oder wenigstens realistisch abzuschätzen.

3.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8: Spiele 1, 2 und 4

- Spiele 1 und 2 sind nur zwei Varianten ein und desselben Spiels und haben die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} p &= P[\text{mind. eine Sechs}] = 1 - P[\text{keine Sechs}] \\ &= 1 - (1 - \frac{1}{6})^4 \approx 0,5177 > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

  also sind diese Spiele vorteilhaft für den Spieler.
  (In der oberen Formel und weiter benutzen wir die Notation

$$P[\text{Ereignis}] = \text{Wahrscheinlichkeit des Ereignises.})$$

- Das Spiel 3 hat nicht die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit wie die Spiele 1 und 2, wie man zunächst vermuten könnte. Die Wahrscheinlichkeit für eine Doppelsechs bei einem Wurf mit 2 Würfel ist ja ein Sechstel der Wahrscheinlichkeit, eine Sechs mit nur einem Würfel zu würfeln. Man könnte also vermuten, dass sechsmal mehr Versuche beim Spiel 3 dieselbe Wahrscheinlichkeit wie vier Versuche beim Spiel 1 haben. Dies ist das sogenannte „Paradoxon des Chevalier de Méré“. Chevalier de Méré war ein französischer Adeliger im 17. Jahrhundert und ein Liebhaber des Würfelspiels. Er hat den Fehler begangen, die Gewinnchancen beim Spiel 1 und 3 für gleich zu halten, wurde aber durch häufiges Spielen und Verlieren beim Spiel 3 eines Besseren belehrt. (Siehe z.B. Wikipedia `http://de.wikipedia.org/wiki/De-M%C3%A9r%C3%A9-Paradoxon`.)
  Tatsächlich ist die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Spiel 3

$$\begin{aligned} p &= P[\text{mindestens eine Doppelsechs}] = 1 - P[\text{keine Doppelsechs}] \\ &= 1 - (1 - \frac{1}{36})^{24} \approx 0,4914 < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

  also ist dieses Spiel nicht vorteilhaft für den Spieler.

- Beim Spiel 4 sind die Gewinnchancen wieder anders als beim Spiel 3. Um die Gewinnwahrscheinlichkeit zu berechnen, kann man zunächst die Wahrscheinlichkeit für keine Doppelsechs, also mindestens 23 Nichtsechser bei einem Wurf ausrechnen:

$$\begin{aligned} P[\text{keine Doppelsechs}] &= P[\text{genau 23 Nichtsechser}] + P[\text{24 Nichtsechser}] \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{23} \times \frac{1}{6} \times 24 + \left(\frac{5}{6}\right)^{24} \approx 0,073. \end{aligned}$$

Also ist schon beim einmaligen Würfeln die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Doppelsechs $1 - 0,073 > 1/2$, und das Spiel 4 ist sicher vorteilhaft für den Spieler. Die genaue Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Doppelsechs beim zweifachen Würfeln ist

$$1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{23} \times \frac{1}{6} \times 24 + \left(\frac{5}{6}\right)^{24}\right)^2 \approx 0,9947 > \frac{1}{2}.$$

4 Nordische Minimierung

Autor: Uli Sack
Projekt: C17

4.1 Aufgabe

Im Lichte gestiegener Energie- und Lebensmittelkosten will der Weihnachtsmann seinen Betrieb effizienter gestalten. Sein Vorschlag nach Afrika umzuziehen, um Heizkosten zu sparen, trifft auf den Widerstand der Rentier-Gewerkschaft *Transren*, welche den Ersatz der Arbeitnehmer durch billigere afrikanische Springböcke befürchtet. Sie liefern einen Gegenvorschlag: Man müsse den Energieeinsatz bei den Schlittenausfahrten minimieren, da hier eh das größere Sparpotential existiere. Sie setzen den Energieverbrauch wie folgt an:
Sei x die kumulierte Muskelmasse der eingesetzten Rentiere und y die mittlere Reisegeschwindigkeit. Dann ist der für eine Standardfahrt benötigte Energieeinsatz gegeben durch:

$$\mathcal{E}(x,\, y) = \mathcal{E}(\vec{\mathbf{x}}) := \frac{1}{2} \cdot \langle \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle - \langle \vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle$$
$$\text{mit} \quad \vec{\mathbf{x}} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{c}} := \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$ das gewöhnliche Matrix-Vektor-Produkt und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das (euklidische) Skalarprodukt (s. unten).
Weil der Weihnachtsmann etwas verständnislos aussieht, liefert sein Formelmanipulationswichtel ihm spontan eine äquivalente aber - wie der Wichtel findet - weniger elegante Darstellung:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\vec{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} \cdot \langle \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle - \langle \vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \frac{1}{2} x \cdot (a_1 x + by) + \frac{1}{2} y \cdot (bx + a_2 y) - c_1 x - c_2 y \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Minimalstelle $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{min}} = \begin{bmatrix} x_{min} \\ y_{min} \end{bmatrix}$ von $\mathcal{E}$ geht der *Transren*-Vorsitzende Jacobi wie folgt vor:
Er rät zunächst eine Stelle $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} := \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, von der er annimmt, dass sie nicht zufällig die Lösung ist. Dann sucht er die Minimalstellen x_1 und y_1 der eindimensionalen Funktionen $\mathcal{E}_{y_0}(x) := \mathcal{E}(x, y_0)$ bzw. $\mathcal{E}_{x_0}(y) := \mathcal{E}(x_0, y)$. Er stellt jedoch fest, dass $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} := \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ nicht die Minimalstelle ist. Daher wiederholt

er seine Rechnung, diesmal mit $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}$ als Startpunkt und anschließend nocheinmal mit $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}$ und nocheinmal und ... in der Hoffnung, dass das Ergebnis immer „besser“ wird.
Der Weihnachtsmann ist jedoch skeptisch und hakt nach, wie sich JACOBI denn sicher sein könne, dass sein Verfahren überhaupt ein sinnvolles Ergebnis liefert. Die Rentiere sehen sich betroffen an und malen sich aus, wie der Weihnachtsmann in Badeshorts auf einem von Springböcken gezogenen Einbaum die Geschenke ausfährt. Könnt Ihr den Rentieren helfen, diese Frage zu beantworten, damit sie ihre Jobs behalten? Geht bei der Bearbeitung der Aufgabe davon aus, dass $\mathcal{E}$ ein eindeutiges Minimum besitzt.

Antwortmöglichkeiten:

1. Unabhängig vom Startwert $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}$ liefert das Verfahren nach höchstens $\lfloor (a_1 + a_2)/2b \rfloor$ Schritten die exakte Lösung, wenn $2b < a_1 + a_2$ ist.

2. Das Verfahren liefert niemals die exakte Lösung, aber die Ergebnisse werden immer besser, wenn die Norm des Residuums (s. unten) zum Startwert kleiner ist als 1 ($\|\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}\| < 1$).

3. Das Verfahren ist Quatsch, da die Minima der Funktionen bezüglich jeweils nur *einer* Variablen nix mit dem Minimum der Gesamtfunktion zu tun haben.

4. Unabhängig vom Startwert $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}$ liefert das Verfahren nach höchstens $\lfloor (c_1 + c_2)/2b \rfloor$ Schritten die exakte Lösung, wenn $2b < c_1 + c_2$ ist. Sonst werden die Ergebnisse aber in jedem Schritt besser, wenngleich die exakte Lösung nie erreicht wird.

5. Da wir eine Funktion von zwei Variablen betrachten, reicht es, das Verfahren zweimal anzuwenden, um eine befriedigende Lösung zu erhalten unabhängig vom Startwert oder den Werten von a_1, a_2, b, c_1, c_2.

6. Das Verfahren liefert niemals die exakte Lösung, aber für vorgegebenes ε gilt spätestens nach $n = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ Schritten $\|\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{n}}\| < \varepsilon$, wenn $|b| < \min(|a_1|, |a_2|)$.

7. Das Verfahren liefert die exakte Lösung in höchstens $\lfloor (|a_1|+|a_2|)/\|\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}\| \rfloor$ Schritten, wenn $\|\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}\| < 1$.

8. Das Verfahren liefert niemals die exakte Lösung, aber die Ergebnisse werden immer besser genau dann, wenn $\|\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{0}\| < \|\vec{\mathbf{c}}\|$.

9. Unabhängig vom Startwert $\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}$ werden die Ergebnisse immer besser, wenn $|b| < \min(|a_1|, |a_2|)$. Die exakte Lösung wird dann und nur dann geliefert, wenn $b = 0$, dann aber im ersten Schritt.

10. Unabhängig vom Startwert $\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}$ werden die Ergebnisse immer besser, wenn $\|\vec{\mathbf{c}} - \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}\| < 2 \cdot |b| + |a_1| + |a_2|$. Die exakte Lösung wird dann und nur dann erreicht, wenn $c_1 = c_2 = 0$.

Hinweis:
Zunächst sollte man sich ein Fehlermaß überlegen; also was genau „besser“ eigentlich heißen soll. Häufig wird das sogenannte Residuum $\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{k} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{k} - \vec{\mathbf{c}}$ bzw. dessen Norm $\|\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{k}\|$ verwendet.

Matrix-Vektor-Produkt:

$$\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \end{bmatrix}$$

Euklidisches Skalarprodukt:

$$\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2$$

(Euklidische) Norm:

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| := \langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Runden:

$\lceil x \rceil$ ist x auf die nächste ganze Zahl *auf*gerundet
$\lfloor x \rfloor$ ist x auf die nächste ganze Zahl *ab*gerundet

Wenn x eine ganze Zahl ist, dann ist $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor = x$.

Projektbezug:
Minimierungsprobleme wie dieses tauchen häufig bei der Simulation physikalischer Prozesse auf, da physikalische Systeme den Zustand der minimalen (potentiellen) Energie anstreben. Im Matheon Projekt C17 simulieren

wir die Entmischung von Lötlegierungen. Dazu wird das Rechengebiet mit einem feinen Dreiecksgitter überzogen. Jeder Knotenpunkt liefert uns eine Dimension des Ansatzraumes. Das heißt, dass die zu lösenden Minimierungsprobleme nicht wie hier im $\mathbb{R}^2$ "leben", sondern sehr hochdimensional sind (bis zu mehreren Millionen!!!). Derart große Systeme können nicht mehr in akzeptabler Zeit direkt gelöst werden; aber auch iterative Verfahren wie das JACOBI-Verfahren oder das eng verwandte GAUSS-SEIDEL-Verfahren sind hierfür viel zu langsam. Im Rahmen der derzeit schnellsten Löser für Probleme dieser Art, die (sehr raffinierten) Multilevel- oder Mehrgitter-Verfahren, werden sie aber als sogenannte Glätter verwendet.

4.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9: Unabhängig vom Startwert $\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}$ werden die Ergebnisse immer besser, wenn $|b| < \min(|a_1|,\, |a_2|)$. Die exakte Lösung wird dann und nur dann geliefert, wenn $b = 0$, dann aber im ersten Schritt.

Zur Vereinfachung der Darstellung werden in der Lösung die Vektorpfeile weggelassen.

Ohne Differentialrechnung

Zunächst einmal benötigen wir eine Darstellung der Zwischenergebnisse $\mathbf{x}_i$. Dazu müssen wir das Verfahren anwenden. Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \cdot \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \frac{1}{2} x \cdot (a_1 x + by) + \frac{1}{2} y \cdot (bx + a_2 y) - c_1 x - c_2 y\end{aligned}$$

Also sind

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{x_i}(y) &= \frac{1}{2} x_i \cdot (a_1 x_i + by) + \frac{1}{2} y \cdot (bx_i + a_2 y) - c_1 x_i - c_2 y \\ &= \frac{1}{2} a_2 y^2 + (bx_i - c_2)\, y + \frac{1}{2} a_1 x_i^2 - c_1 x_i \\ \text{und} \qquad \mathcal{E}_{y_i}(x) &= \frac{1}{2} a_1 x^2 + (by_i - c_1)\, x + \frac{1}{2} a_2 y_i^2 - c_2 y_i\end{aligned}$$

quadratische Funktionen einer Variablen entlang der Geraden parallel zu den Koordinatenachsen durch x_i bzw. y_i. Da das volle Minimierungsproblem nach Voraussetzung eine eindeutige Lösung hat, müssen $a_1 > 0$ und $a_2 > 0$ gelten. Das sieht man wie folgt ein.

Angenommen es wäre $a_1 < 0$, dann beschriebe $\mathcal{E}_{y_i}$ eine nach unten geöffnete Parabel. Mit $\mathcal{E}_{y_i}$ wäre also auch $\mathcal{E}$ nach unten unbeschränkt und besäße im Widerspruch zur Voraussetzung kein Minimum. Für $a_2 < 0$ geht die Argumentation analog. Sei nun $a_1 = 0$, so beschreibt $\mathcal{E}_{y_i}$ eine Gerade, die für $by_i - c_1 \neq 0$ wiederum nach unten unbeschränkt ist mit denselben Folgen für $\mathcal{E}$. Ist $by_i - c_1 = 0$, so ist $\mathcal{E}_{y_i}$ konstant. Somit ist $\mathcal{E}$ entlang der Geraden parallel zur x-Achse konstant. Ein möglicherweise existierendes Minimum, wäre in diesem Fall nicht eindeutig. Wiederum läuft die Argumentation für $a_2 = 0$ analog.

Die Funktionen $\mathcal{E}_{y_i}$ und $\mathcal{E}_{x_i}$ beschreiben also beide nach oben geöffnete quadratische Parabeln und nehmen daher ihr Minimum in ihrem jeweiligen Scheitelpunkt an. Durch quadratische Ergänzung erhält man die *Scheitelpunktsformen*:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{x_i}(y) &= \frac{1}{2}a_2\left(y - \frac{c_2 - bx_i}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{bx_i - c_2}{a_2}\right)^2 + \frac{1}{2}a_1x_i^2 - c_1x_i \\
\mathcal{E}_{y_i}(x) &= \frac{1}{2}a_1\left(x - \frac{c_1 - by_i}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{by_i - c_1}{a_1}\right)^2 + \frac{1}{2}a_2y_i^2 - c_2y_i
\end{aligned}$$

Daraus kann man nun die jeweiligen Minimalstellen ablesen und bekommt als Iterationsformel

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1}(c_1 - by_i) \\ \frac{1}{a_2}(c_2 - bx_i) \end{bmatrix}$$

Damit können wir nun das Residuum bestimmen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i &:= \mathbf{A}\mathbf{x}_i - \mathbf{c} \\
&= \begin{bmatrix} a_1x_i + by_i - c_1 \\ bx_i + a_2y_i - c_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (c_1 - by_{i-1}) + by_i - c_1 \\ bx_i + (c_2 - bx_{i-1}) - c_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b(y_i - y_{i-1}) \\ b(x_i - x_{i-1}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ersetzen aller Terme mittels der Iterationsvorschrift liefert weiterhin

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i &= b \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2}(c_2 - bx_{i-1}) - \frac{1}{a_2}(c_2 - bx_{i-2}) \\ \frac{1}{a_1}(c_1 - by_{i-1}) - \frac{1}{a_1}(c_1 - by_{i-2}) \end{bmatrix} \\
&= b \cdot \begin{bmatrix} \frac{b}{a_2}(x_{i-2} - x_{i-1}) \\ \frac{b}{a_1}(y_{i-2} - y_{i-1}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}_i\|^2 &= |b|^2 \cdot \left(\left(\frac{b}{a_2}\right)^2 (x_{i-2} - x_{i-1})^2 + \left(\frac{b}{a_1}\right)^2 (y_{i-2} - y_{i-1})^2 \right) \\
&\leqslant |b|^2 \left(\frac{1}{\min_i |a_i|}\right)^2 \cdot \left(b^2 (x_{i-2} - x_{i-1})^2 + b^2 (y_{i-2} - y_{i-1})^2\right) \\
&= \left(\frac{|b|}{\min_i |a_i|}\right)^2 \cdot \|\mathbf{r}_{i-1}\|^2
\end{aligned}$$

Es folgt also, dass die Iterierten immer "besser" im Sinne der Residuumsnorm werden, wenn

$$\frac{|b|}{\min_i |a_i|} < 1 \quad \text{bzw.} \quad |b| < \min_i |a_i|$$

Ob das Verfahren konvergiert hängt also lediglich von den Koeffizienten in $\mathbf{A}$ ab.

Mit Differentialrechnung

Es sind

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}'_{x_i}(y) &= a_2 y + (b x_i - c_2) \\
\mathcal{E}''_{x_i}(y) &= a_2 \\
\mathcal{E}'_{y_i}(x) &= a_1 x + (b y_i - c_1) \\
\mathcal{E}''_{y_i}(x) &= a_1
\end{aligned}$$

Nach dem hinreichenden und notwendigen Kriterium für Minimalstellen einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion, sind die Nullstellen $\frac{1}{a_2}(c_2 - b x_i)$ bzw. $\frac{1}{a_1}(c_1 - b y_i)$ von $\mathcal{E}'_{x_i}(y)$ bzw. $\mathcal{E}'_{y_i}(x)$ Minimalstellen, wenn $a_2 > 0$ und $a_1 > 0$. Die Argumente, dass dies so sein muss, können von oben übernommen werden. Damit hat man wiederum die Iterationsvorschrift und kann alles Weitere von oben übernehmen.

Nun wenden wir uns der zweiten Frage zu. Angenommen, im $k-$ten Schritt ist die exakte Lösung erreicht. Dann gilt für das Residuum

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = r_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{c} \\ &= b \cdot \begin{bmatrix} (y_i - y_{i-1}) \\ (x_i - x_{i-1}) \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow b = 0 \vee (x_i = x_{i-1} \wedge y_i = y_{i-1}) \end{aligned}$$

Wir bekommen folglich genau dann das exakte Ergebnis, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ diagonal ist oder wir bereits im Schritt davor die exakte Lösung hatten. Im letzteren Falle läßt sich die Argumentation wiederholt anwenden, so dass bereits der Startwert $\mathbf{x}_0$ die exakte Lösung gewesen sein muss. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass dies nicht so war (vgl. Aufgabe). Für den Fall einer diagonalen Matrix ist es jedoch auch anschaulich klar, dass das Jacobi-Verfahren die exakte Lösung im ersten Schritt liefert. Durch die Diagonalstruktur sind x und y in $\mathcal{E}$ komplett unabhängig und koppeln nicht. Daher minimiert man tatsächlich die ganze Funktion $\mathcal{E}$, wenn man in x- und y-Richtung unabhängig minimiert.

Bemerkung 1

In dem hier behandelten symmetrischen zweidimensionalen Fall lässt sich noch eine schwächere Bedingung beweisen, die die hier gefundene einschließt. Und zwar muss $a_1x^2 + 2bxy + a_2y^2 > 0$ sein für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Auch dies ist eine Eigenschaft der (symmetrischen) Matrix $\mathbf{A}$ und heit *positive Definitheit* und wird allgemein (auch für nichtsymmetrische Matrizen) so definiert: $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. In höheren Dimensionen reicht bei symmetrischer Matrix die positive Definitheit nicht mehr aus für die Konvergenz des Jacobi-Verfahrens, wohl aber für das am Rande erwähnte Gauss-Seidel-Verfahren. In höheren Dimensionen muss für Konvergenz des Jacobi-Verfahrens das sog. *starke Zeilensummenkriterium* erfüllt sein. Es lautet:

$$\forall i : \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

und reduziert sich für den hier betrachteten symmetrischen, zweidimensionalen Fall auf die oben bewiesene Bedingung.

Bemerkung 2

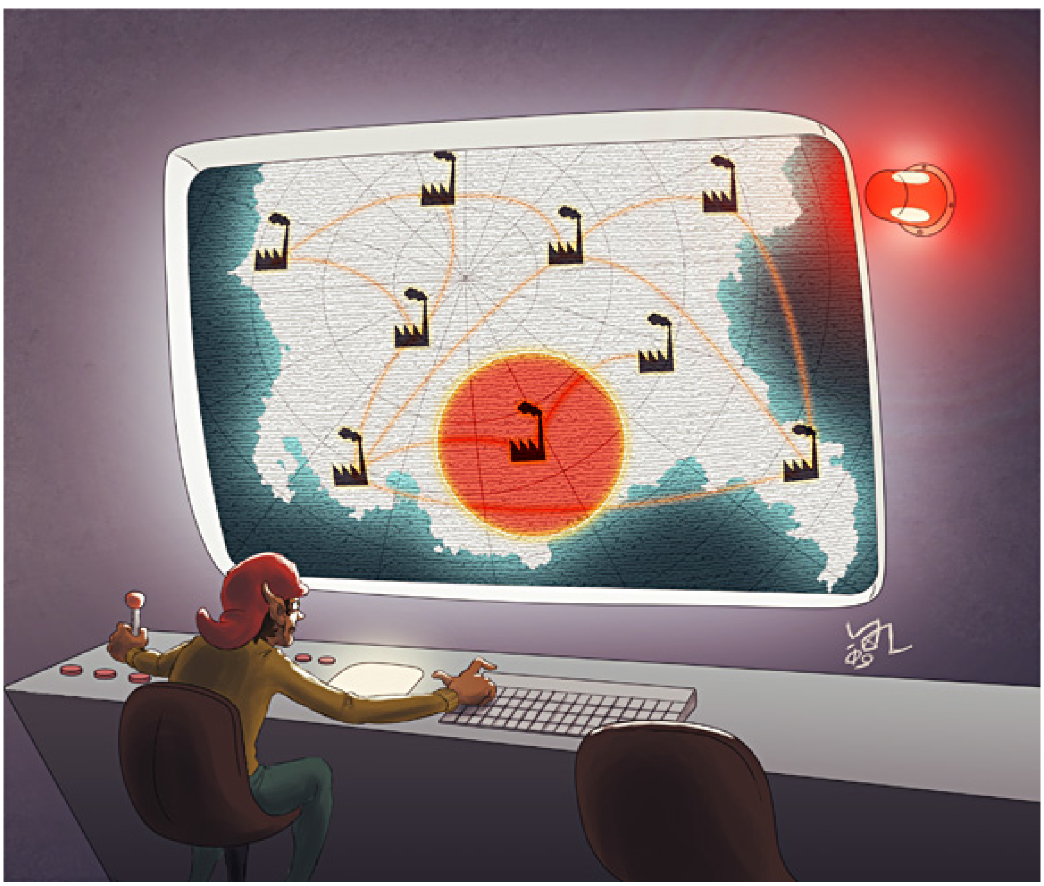
Den meisten Lesern und Lösern dieser Aufgabe wird die Residuumsnorm als Fehlermaß ziemlich vom Himmel gefallen vorkommen. Hier daher der Versuch einer verständlichen Erklärung, warum dies ein (zumindest für einen Konvergenzbeweis) sinnvolles Kriterium ist. Das Kriterium für lokale Minima differenzierbarer Funktionen $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist ähnlich dem für eindimensionale Funktionen. Notwendig ist, dass die Ableitung an der Extremstelle Null ist. Nur wissen wir noch nicht, was die Ableitung einer solchen Funktion überhaupt ist. Halten wir wie oben eine der beiden Variablen (z.B. y) fest, erhalten wir wieder eine Funktion einer Variable: $\mathcal{F}_y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Leiten wir diese nun ab erhalten wir die sogenannte *partielle Ableitung* von $\mathcal{F}$ nach x, die mit $\partial_x \mathcal{F}$ bezeichnet wird. Genauso verfahren wir um die partielle Ableitung nach y $\partial_y \mathcal{F}$ zu erhalten. Unter bestimmten formalen Voraussetzungen (die hier erfüllt sind) ist die Ableitung von $\mathcal{F}$ dann definiert als $\mathcal{F}'(x, y) = [\partial_x \mathcal{F}(x, y), \partial_y \mathcal{F}(x, y)]$. Sei nun $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ von oben. Die partiellen Ableitungen haben wir im Lösungsansatz mit Differentialrechnung bereits berechnet und erkennen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}'(x, y) &= \begin{bmatrix} \partial_x \mathcal{E}(x, y) \\ \partial_y \mathcal{E}(x, y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 x + by - c_1 \\ a_2 y + bx - c_2 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{Ax} - \mathbf{c}
\end{aligned}
$$

Die notwendige Bedingung für ein (lokales) Minimum $\mathcal{E}'(x, y) = 0$ ist also gleichbedeutend damit, dass das oben definierte Residuum Null ist.

5 Plötzlich platzende Plätzchenteigrohre

Autor: Daniel Dressler
Projekt: B18



5.1 Aufgabe

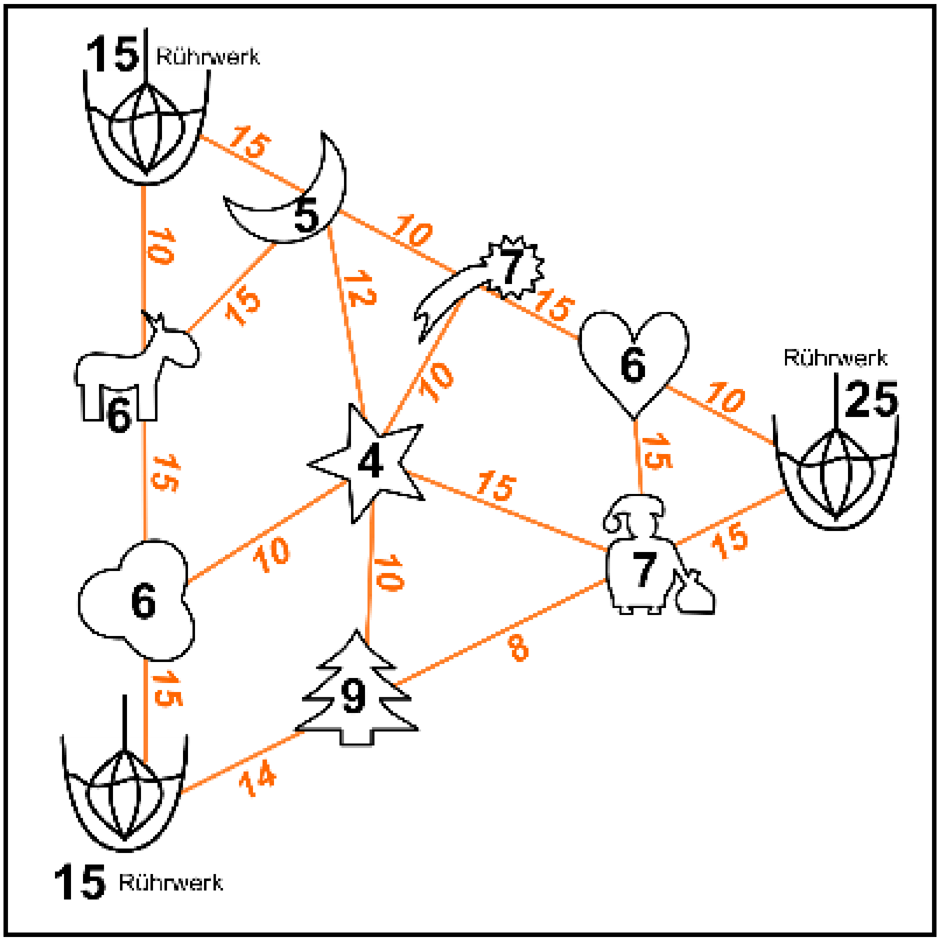
In der Stern-Fabrik schossen plötzlich mehrere Tonnen Plätzchenteig pro Sekunde aus dem unglaublich großen und leider aufgeplatzten Zuleitungsrohr. Die Teigmassen überschwemmten die Fabrik. Schreie erfüllten die große Halle und unverbesserliche Naschkatzen erfüllten sich ihre Wünsche. Nur die mutige Mandolina bewahrte die Ruhe und kämpfte sich durch das Chaos und gegen den klebrigen Strom. Ihr Ziel war der Kontrollraum, der zum Glück etwas höher lag und noch von den Teigmassen verschont blieb. Noch. Viel Zeit blieb nicht mehr, sie musste das Teigrohr schließen! Sie zog nach einem Moment der Ratlosigkeit energisch an dem erstbesten der vielen roten NOTAUS-Hebeln und hörte das laute Quietschen eines alten Sicherheitsventils. Sekunde um Sekunde verging. „Gleich ist alles geschafft“, hoffte sie. Doch die Teigmassen flossen unbeeindruckt weiter. Scheinbar mit Genugtuung wälzten sie soeben die großen Teigwalzen nieder. „Verdammt!“, entfuhr es Mandolina. Sie hatte nicht sehen können, welche der riesigen Zuleitungen geplatzt war und wohl den falschen Hebel gewählt. „Warum haben wir auch so viele von den dummen Röhren?!“ Aus der Halle drang das letzte Gurgeln des Hauptofens, bevor er im unaufhaltsamen Mehl-Butter-Zucker-Schlamm versank. Das Licht im Kontrollraum erlosch. Ohne den Ofen würde auch der Motor für die Ventile nicht mehr laufen. Die Fabrik war verloren. Mandolina flüchtete durch den Notausgang auf das Dach und begutachtete das Chaos unter sich. Viele ihrer teigverschmierten Freunde winkten von unten zur ihr herauf. In der Ferne konnte sie die roten Schlitten der Teigwehr kommen sehen. „Ich hab es immerhin versucht“, seufzte sie.

Der Weihnachtsmann hörte dem Schadensbericht gar nicht mehr zu. Er war es leid, ständig neue Katastrophenmeldungen aus den Plätzchenwerken zu erhalten. Es musste etwas Grundlegendes geändert werden! Immer wieder platzten die Teigzuleitungen, und bei dem chaotischen Versorgungssystem wusste nie jemand, woran es jetzt lag und wie man am besten reagiert. Entschlossen verkündete er: „Okay, ab jetzt machen wir es anders, einfacher! In jede Fabrik darf nur noch eine Zuleitung führen. Das reduziert die möglichen Fehlerquellen, und jeder weiß sofort, welches Rohr Probleme macht, wenn es nur eins gibt.“

Befehl ist Befehl, und so machten sich die Teigingenieure daran, das gesamte Teigsystem neu zu konfigurieren. Ein so großes Projekt hatten sie nur selten und deshalb wurden die Regeln noch einmal vorgelesen:

„Jede Fabrik hat einen bestimmten Bedarf, angegeben in wieviel Tonnen Teig pro Sekunde sie walzen, ausstechen und backen kann. Zum Beispiel kann die Kräftig-gebauter-Mann-mit-Mütze-Fabrik 7 Tonnen pro Sekunde verarbeiten. Die Fabriken dienen gleichzeitig auch als Umschlagwerk im Rohrsystem. Ungenutzter Teig kann beliebig auf mehrere ausgehende Rohre geleitet werden, auch wenn ab jetzt nur noch ein Rohr den Teig in die Fabrik bringen darf. Die Rohre sind unterschiedlich groß, und jedes kann eine bestimmte Menge Teig pro Sekunde transportieren. Schließlich muss der Teig auch noch irgendwo herkommen und zwar aus den drei gigantischen Rührwerken. Diese haben ebenfalls eine begrenzte Leistung, die angibt, wieviel Teig sie maximal in die Leitungen pumpen können. Wie in den Fabriken wird der Teig in den Rührwerken möglicherweise auf mehrere Rohre verteilt. Übrigens können Fabriken und Rührwerke auch mit weniger als ihrer maximalen Leistung betrieben werden, genauso wie die Leitungen nicht ganz voll sein müssen. Mehr als das Maximum ist natürlich nicht möglich.

Unsere Aufgabe als Teigingenieure ist es, den Transportplan des Teigs im Rohrsystem festzulegen, so dass in den Fabriken insgesamt möglichst viel Teig verarbeitet werden kann. Da der Teig ab jetzt Tag und Nacht fließen muss, kommt es nur auf die transportierten Tonnen pro Sekunde an. Wie lange ein bestimmter Teigklumpen vom Rührwerk zu einer der Fabriken braucht, ist ganz egal. Alle Zahlen und die zur Verfügung stehenden Leitungen seht ihr auf dem großen Wandplan! Also an die Arbeit!“



Wieviele Tonnen Teig können nun am Nordpol pro Sekunde in Plätzchen umgewandelt werden, wenn die Teigingenieure alles richtig gemacht haben?

Antwortmöglichkeiten:

1. 55 t
2. 53 t
3. 51 t
4. 50 t
5. 49 t
6. 48 t
7. 47 t
8. 46 t
9. 45 t
10. 44 t

Projektbezug:
Im MATHEON Projekt B18 „Modelling, Characterization and Computation of User Equilibria for Network Flows Over Time“ und im BMBF-Projekt „Adaptive Verkehrsteuerung“ werden unter anderem die Bewegungen von Personen im Falle einer Evakuierung untersucht. Stellt man sich den Teigfluss rückwärts vor, so sieht man, dass aus jeder Fabrik immer nur ein Weg hinausführt. Genauso zeigt ein Notausgangschild immer nur in eine Richtung, und es gilt, möglichst viele Leute mit solchen Schildern sicher durch das Gebäude zu den Ausgängen zu bringen.

5.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6: 48 t.

Als erstes fassen wir die Aufgabe zusammen und vereinheitlichen ein paar Begriffe.
Gegeben ist der Plan, den wir auch *Netzwerk* nennen. Fabriken und Rührwerke zusammen nennen wir die *Knoten*. Jede Fabrik hat einen bestimmten *Bedarf* an Teig, die Rührwerke haben ein *Angebot*. Die Rohre haben eine *Kapazität*. Diese Zahlen sind im Bild gegeben. Statt "Tonnen pro Sekunde" schreiben wir *Einheiten*.
Es geht darum, den Teig von den Rührwerken zu den Fabriken zu leiten, die ihn dann *verarbeiten*. Folgende Regeln sind einzuhalten:

1. Eine Fabrik kann höchstens so viel Teig verarbeiten, wie sie Bedarf hat.

2. Ein Rührwerk kann höchstens so viel Teig raus schicken, wie es Angebot hat.

3. Durch ein Rohr darf höchstens so viel Teig fließen, wie es Kapazität hat.

4. In jede Fabrik darf höchstens ein Rohr Teig bringen (unabhängig davon, was mit dem darin transportierten Teig passiert).

5. Die Knoten des Netzwerks dürfen Teig auf mehrere ausgehende Rohre verteilen. Fabriken können natürlich nur den Teig weiterleiten, den sie nicht selbst verarbeiten.

Das heißt, für jeden Knoten muss man folgendes festlegen: Woher kommt der Teig? Wie viel Teig kommt an? Wieviel wird verarbeitet? Wohin wird wie viel Teig weitergeleitet? All diese Entscheidungen zusammen ergeben den *Fluss* des Teigs. Die Summe des verarbeiteten Teigs nennen wir den *Wert* des Flusses. Das Ziel ist es, einen Fluss mit maximalen Wert zu bestimmen, also die Entscheidungen so zu treffen, dass möglichst viel Teig verarbeitet wird.
Die meisten werden sich nun fragen, wie man so ein Problem ohne Ausprobieren lösen kann. Die Antwort lautet: Nur schlecht, deswegen lösen wir es mit Ausprobieren! Damit das Ausprobieren aber nicht zu lange dauert, lohnt

es sich, vorher ein paar Überlegungen zur Natur des Problems zu machen, die egal für welche Zahlen oder Netzwerke gelten.

Das Ziel ist es zu zeigen, dass es nur darauf ankommt, welche Rohre überhaupt verwendet werden und dass die richtigen Mengen Teig, die darin fließen müssen, sich dann ganz von alleine ergeben.

Die erste und wichtigste Überlegung ist, ob eine Fabrik Teig weiterleiten sollte, wenn sie ihn auch selbst verarbeiten kann. Kann sich das jemals lohnen? Die Antwort ist Nein. Eine Einheit Teig, die eine Fabrik weiterleitet, wird auch in einer anderen Fabrik bloß zu einer Einheit Plätzchen. Unterwegs belegt der Teig sogar noch ein bisschen Röhrenkapazität. Etwas formaler: Wenn es einen Fluss gibt, der Teig weiterleitet, obwohl die Fabrik noch Bedarf hat, gibt es auch einen Fluss, der die Fabrik möglichst voll auslastet und im Wert nicht schlechter ist. Das reicht schon, um zu sagen, dass es immer einen besten Fluss gibt (also einen mit maximalen Wert), der Fabriken möglichst voll auslastet. Damit müssen wir uns andere Flüsse gar nicht mehr anschauen.

Etwas komplizierter ist die zweite Frage, wie man ausgehenden Teig aufteilen sollte, wenn mehrere ausgehende Rohre beschickt werden sollen. Man könnte sogar nicht ganzzahlige Teigmengen in Betracht ziehen. Wie sieht hier also eine beste Strategie aus? Wieder greift das gleiche Argument, dass eine Einheit Teig bloß eine Einheit Plätzchen produzieren sollte, egal wo. Das heißt, dass man den Teig *beliebig* auf ausgehende Rohre verteilen kann, vorausgesetzt, dass er noch genutzt werden kann. Wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, den Teig weiterzuschicken und zu verarbeiten, ist es also egal, welche man nimmt.

Damit gibt es nun eine einfache Methode, wie man eine beste Teigverteilung bestimmt, wenn man schon festgelegt hat, welche Rohre verwendet werden sollen. Man beginnt mit einem Rührwerk und folgt einem der ausgewählten Rohre (sofern sie noch Kapazität frei haben) bis zu der ersten Fabrik, die noch Bedarf hat. Auf diesem Weg schickt man "möglichst viel Teig", also die größte Menge Teig, die a) noch im Rührwerk verfügbar ist, b) durch alle Rohre unterwegs noch passt und c) noch von der Fabrik verarbeitet werden kann. Dann wiederholt man das ganze, bis entweder das Rührwerk ganz leer ist, oder es keinen Weg durch Rohre mit noch freien Kapazitäten zu Fabriken mit noch unerfüllten Bedarfen gibt.

Nun reduziert sich das Problem tatsächlich auf die Auswahl der richtigen Leitungen: Hat man diese festgelegt, kann man die richtigen Teigmengen ohne weitere (wichtige) Entscheidungen treffen zu müssen verteilen. Ein an-

genehmer Nebeneffekt ist auch, dass diese Methode immer nur ganzzahlige Teigmengen verschickt.
Nun betrachten wir das vorliegende Problem. Ein paar schnelle Überlegungen, zeigen die ersten Schranken: So können zwar die Rührwerke in der Summe 55 Einheiten zur Verfügung stellen, die Fabriken aber nur 50 Einheiten verarbeiten. Das heißt, dass der beste Fluss auch höchstens 50 Einheiten Plätzchen produzieren kann. Ein paar Antworten scheiden damit sofort aus.
Andererseits probieren wir ein paar einfache Lösungen aus: Die sechs Fabriken direkt neben einem Rührwerk können alle direkt von den Rührwerken versorgt werden. Das ergibt eine Lösung mit Wert 39. Das ist nicht viel, aber noch wird der Stern und die Sternschnuppe gar nicht benutzt. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, aber man bekommt immer nur bis zu 8 weitere Einheiten zu den Fabriken. Insbesondere die Sternschnuppe ist nur schwer zu versorgen, wenn man auf dem Weg zu ihr alle Fabriken möglichst auslastet. Man kommt also auf einen Fluss mit Wert 47, und damit bleiben nur noch 47,48,49 und 50 als mögliche Antworten übrig. Doch welche ist die richtige?
Nun gibt es tatsächlich sehr viele mögliche Ansätze, Lösungen auszuschließen. In der Tat wurde die optimale Lösung 48 auch noch gar nicht gefunden, und jedes korrekte Ausschlussverfahren, sollte dementsprechend unterwegs einen Aha-Moment haben.
Meine Überlegungen beginnen immer mit der Sternschnuppe. In der bis jetzt besten Lösung mit Wert 47, bekommt die Sternschnuppe nur 4 Einheiten Teig, obwohl sie 7 Einheiten verarbeiten könnte. Auch sonst scheint es schwer, der Sternschnuppe deutlich mehr Teig zukommen zu lassen, wenn man anschaut, wie sie verbunden werden kann:

1. Über das Herz. Das Herz selbst kann aber nur 10 Einheiten bekommen (über den Weihnachtsmann sogar nur 8) und damit gibt es von dieser Seite nie mehr als 4 Einheiten für die Sternschnuppe. Da die Sternschnuppe nur ein Teig lieferndes Rohr haben darf, wird so eine Lösung immer höchstens $50 - 3 = 47$ als Wert ergeben. Wir können also jeden Fluss, der Teig von dem Herz zur Sternschnuppe schickt, ab jetzt ignorieren, denn damit werden wir keine bessere Lösung finden (eine gleich gute schon, aber das hilft uns nicht weiter).

Eine kleine Zwischenbemerkung passend dazu: Das Rührwerk unten rechts kann nur 25 Einheiten Teig liefern, und so viel passt auch gerade durch beide Rohre zusammen. Prinzipiell spricht also nichts dagegen, diese beiden

Rohre komplett zu füllen, außer dass vielleicht der Weihnachtsmann oder das Herz von woanders noch mehr überschüssigen Teig bekommen könnten. Das ist aber nicht der Fall, es gibt keinen Weg, der mehr als 10 bzw. 15 Einheiten Teig zu den Fabriken schickt und unterwegs alle Bedarfe vollständig erfüllt. Somit schickt das Rührwerk rechts immer direkt zu dem Herz und dem Weihnachtsmann. Und da das Herz nicht zur Sternschnuppe schickt und auch nicht zu dem Weihnachtsmann (der ja schon ein besseres eingehendes Rohr hat), kann man hier das Netzwerk ziemlich vereinfachen. Im Endeffekt kann man sich die Weihnachtsmannfabrik als neues Rührwerk mit Vorrat 8 vorstellen (und keinem Bedarf), denn so viel kann hier maximal noch übrig bleiben. Das Herz und alle angrenzenden Rohre kann man sich sogar komplett wegdenken.
Nun weiter mit der Sternschnuppe:

2. Sie könnte vom Mond aus versorgt werden. Der Mond kann sinnvoll nur vom oberen Rührwerk versorgt werden, denn alle anderen Wege addieren sich schnell zu Bedarfe, bei denen mindestens 3 Einheiten zu wenig verfügbar sind. Die Verbindung Rührwerk-Mond-Sternschnuppe kann die 12 Einheiten aufbringen, also soll sie das auch tun, wie wir oben überlegt haben. Nun ist tatsächlich die Sternschnuppe voll versorgt, aber wie geht es weiter? Wenn man das Rentier noch über das obere Rührwerk anschließt, kann es nur die letzten 3 Einheiten vom Rührwerk bekommen, und damit 3 Einheiten zu wenig. So eine Lösung kann wieder nur auf höchstens 47 kommen und ist uninteressant. Also wird das Rentier über das Kleeblatt angeschlossen. Nach kurzem Ausprobieren sieht man, dass man das Kleeblatt dann direkt von dem Rührwerk versorgen sollte, wenn man eine gute Lösung haben will. Bis dahin hat das Rührwerk oben links noch 3 Einheiten frei, das unten links ebenfalls 3 und das Rührwerk unten rechts stellt höchstens noch 8 Einheiten über den Weihnachtsmann zur Verfügung. Der Tannenbaum kann muss aus einem dieser drei verbleibenden Vorräte versorgt werden, und nur über den Weihnachtsmann sind die Verluste akzeptabel. Hier bekommt der Tannenbaum 8 (seiner maximal 9) Einheiten her. Wir haben jetzt alle Fabriken bis auf den Stern versorgt. Da jedes einzelne Rührwerk nur noch maximal 3 Einheiten mehr liefern kann, können auch nur noch 3 Einheiten zum Stern gelangen. Das ist möglich, sowohl über das Kleeblatt, als auch über den Mond oder sogar die Sternschnuppe. Dieser so konstruierte Fluss hat Wert 48 und da alle Entscheidungen beste Ent-

scheidungen waren (auch wenn es noch andere beste Entscheidungen gibt), ist das die beste Lösung, falls die Sternschnuppe über den Mond verbunden wird.

3. Die allerletzte Möglichkeit ist also, dass die Sternschnuppe über den Stern verbunden wird. Und wir interessieren uns nur noch für eine Lösung, die besser als 48 ist, also Wert 49 oder 50 hat. Damit darf höchstens eine Fabrik höchstens eine Einheit Teig zu wenig bekommen. Insbesondere müssen Sternschnuppe und Stern zusammen 11 oder 10 Einheiten Teig bekommen. Das ist prinzipiell über alle Rohre zum Stern möglich, aber die Fabriken, aus denen der Teig kommt, haben ja ebenfalls Bedarf. Inklusive des Mondes bräuchte man $7 + 4 + 5 = 16$ (unmöglich) oder 15 (möglich). Dann müssen Rentier und Kleeblatt von unten versorgt werden. Das lässt für den Weihnachtsmann nur noch 8 Einheiten statt 9 zu. Da aber bereits eine Einheit bei Mond, Stern und Sternschnuppe verloren gegangen ist, kann dies keine Lösung mit Wert 49 oder 50 mehr ergeben. (48 ist aber noch möglich.) Alternativ betrachtet man Sternschnuppe-Stern-Kleeblatt. Diese Konstellation benötigt $7+4+6 = 17$ oder 16. Das geht nicht. Genauso wenig funktioniert das mit dem Tannenbaum (20 oder 19) oder dem Weihnachtsbaum (18 oder 17). Jetzt wissen wir ganz sicher, dass es keine Lösung mit 49 oder besser gibt.

Somit ist 48 die gesuchte Lösung, und Antwort 6 die richtige.
Wichtig ist dabei, dass wir zwar systematisch ausprobiert haben, aber durch eine gute erste Lösung (die 47) schon sehr schnell viele Möglichkeiten ausschließen konnten. Um so besser die bekannte Lösung wurde (mit 48), um so weniger Optionen musste man noch untersuchen. Und das Argument “Wenn es eine gute Lösung gibt, dann auch eine gute Lösung, die folgende Eigenschaft hat ...” haben wir immer wieder in unseren Schlüssen eingesetzt, um den Entscheidungsprozess nicht unnötig zu verkomplizieren.

6 Die Rentierringelsocken

Autoren: Rüdiger Giese, Ulrich Hey, Prof. Jürg Kramer, Brian Maus
Projekt: Z1.2

6.1 Aufgabe

Die strickwütige Oma des Weihnachtsmannes hat sich in diesem Jahr in den Kopf gesetzt, für die riesengroße Rentierherde des Weihnachtsmannes rotweiße Ringelsocken für jedes Tier zu stricken. Im Moment sind die Tiere noch alle verstreut, aufgeteilt auf viele kleine Herden. Im Dezember treffen sich dann immer alle Tiere und bilden eine große Herde, die bis zu 500 000 Tiere umfassen kann. Der Wichtel Maximus wird damit betraut, die genaue Anzahl der Tiere festzustellen, damit die Oma weiß, wie viele Socken sie stricken kann.

Die genaue Anzahl wird an der Informationstafel, für alle sichtbar, mit Hilfe von Zifferntäfelchen ausgehängt.

Der Wichtel Guido, für seine Unachtsamkeit bekannt, kommt nun gerade vorbei und stößt gegen diese Tafel. Dabei fällt die letzte Ziffer herunter; weil er in Eile ist, hängt er diese Ziffer aus Versehen nach vorn an die Tafel.

Maximus, der die Herde zählte und die Anzahl der Tiere kennt, stellt verwundert fest, dass man nun die Zahl der rotweißen Ringelsocken für die Rentiere ablesen kann. Jetzt fragt er sich, ob das ein Zufall ist, oder ob bei einer 6-stelligen Anzahl von Rentieren mehrere solcher Zahlen existieren.

Antwortmöglichkeiten:

1. Er hat sich geirrt, es gibt keine solche Zahl.
2. Die zufällig gefundene Zahl ist die einzige.
3. Es gibt genau zwei dieser Zahlen.
4. Es gibt drei Zahlen mit dieser Eigenschaft.
5. Genau sechs solche Zahlen existieren.
6. Alle 6-stelligen Zahlen, die am Ende eine vier besitzen.
7. Alle 6-stelligen Zahlen, die eine vier als Ziffer enthalten.
8. Es sind sieben Zahlen, weil die Anzahl eine Primzahl sein muss.
9. Es sind genau 24 Zahlen.
10. Jede 6-stellige Zahl besitzt diese Eigenschaft.

Projektbezug:
Die Aufgabe entstand durch die Beschäftigung mit einem Artikel über ein ähnliches Problem, aber mit Zahlen, die 174174-stellig sind.
vgl. Elemente der Mathematik, Vol. 64, No. 4, Aufgabe 1260 (pp. 171-178)

6.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5: Genau sechs solche Zahlen existieren.

Unter den natürlichen Zahlen n, deren Dezimaldarstellung aus 6 Stellen besteht, betrachten wir jene mit folgender Eigenschaft:
Es gibt eine natürliche Zahl $q > 1$, so dass die Dezimaldarstellung der Zahl $q \cdot n$ aus jener von n dadurch entsteht, dass man die letzte Ziffer von n entfernt und an den Anfang stellt.

Lösung 1

- Wir bezeichnen die vorgegebene Stellenzahl von 6 mit s. Diese hat die Zerlegung $s = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 6$.

- $n \in \mathbb{N}$ hat genau dann s Dezimalstellen, wenn gilt:
  $$n = a_{s-1}10^{s-1} + a_{s-2}10^{s-2} ... + a_1 10 + a_0 \quad (1)$$
  mit $a_i \in \{0...9\}$ wobei $a_{s-1} \neq 0$ und
  $$10^{s-1} \leq n < 10^s \quad (2)$$
  Wenn es ein q wie oben beschrieben gibt, dann muss $q \in \{2...9\}$ sein, da für $q \geq 10$ die Stellenzahl von $q \cdot n$ mindestens $s + 1$ wäre.

- Multipliziert man nun q mit (1), so erhält man:
  $$q \cdot n = a_0 10^{s-1} + a_{s-1}10^{s-2} ... + a_1 \quad (3)$$

- (3) mit 10 multipliziert liefert:
  $$10q \cdot n = a_0 10^s + a_{s-1}10^{s-1} ... + a_1 10 \quad (4)$$

- Subtrahiert man nun (1) von (4) erhält man:
  $$10q \cdot n - n = (a_0 10^s + a_{s-1}10^{s-1} ... + a_1 10) - (a_{s-1}10^{s-1} ... + a_1 10 + a_0)$$
  $$(10q - 1) \cdot n = a_0 10^s - a_0 = a_0(10^s - 1)$$
  nach a_0 umgestellt:
  $$a_0 = \frac{(10q - 1)n}{10^s - 1} \quad (5)$$

- Aus (5) und der Ungleichung (2) folgen dann:

  $$a_0 \geq \frac{(10q-1)10^{s-1}}{10^s - 1} > \frac{(10q-1)10^{s-1}}{10^s} = \frac{(10q-1)}{10} = q - \frac{1}{10} \tag{6}$$

  (6) bedeutet aber, dass $a_0 \in \{q...9\}$.

  Speziell für $q = 4$ gilt dann: $a_0 \in \{4...9\}$.

- Aus (5) erhält man:

  $$n = \frac{a_0(10^s - 1)}{10q - 1} \tag{7}$$

  Die $a_0 \in \{4...9\}$ in (7) eingesetzt ergeben damit alle gesuchten Zahlen:

$$\begin{array}{lll} n_1 = 102564 & n_3 = 153846 & n_5 = 205128 \\ n_2 = 128205 & n_4 = 179487 & n_6 = 230769 \end{array}$$

Lösung 2

Die gesuchten Zahlen lassen sich auch vollständig mit Hilfe eines Computerprogramms erzeugen.
6-stellige Zahlen werden so modifiziert, dass die erste Ziffer entfernt und am Ende der Ziffernfolge angefügt wird. Dann prüft man, ob die so erzeugte Zahl genau ein Viertel der Ursprungszahl ist. In diesem Fall wird die Zahl in die Ergebnisliste aufgenommen. Diese Methode nennt man „Brute-Force-Suche“ (engl. „brute force search“). Folgendes Beispiel in Haskell:

```
module Adventskalender where

magic []                                                  = []
magic (x:xs)
 | ((x - 10^5*(div x (10^5)))*10 + (div x (10^5)))*4 == x  = (x - 10^5*(div x (10^5)))*10 + (div x (10^5)):magic xs
 | otherwise                                               = magic xs

-- die Eingabe von magic [400000..999999]
-- liefert die Liste [102564,128205,153846,179487,205128,230769]
```

Oder als Java-Methode:

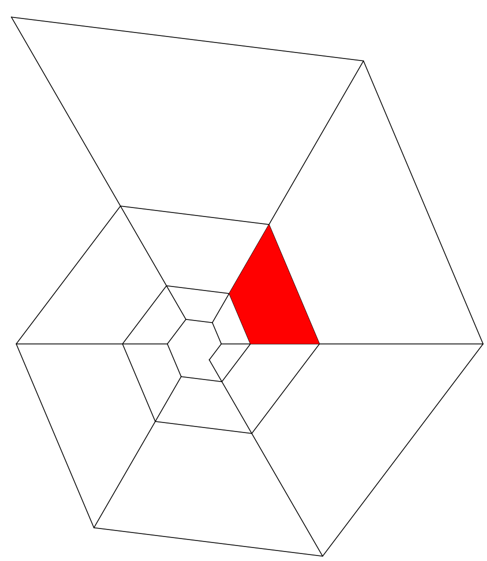
```
public void magic(int max)
    {
      for (int i = 100000; i < max; i++)
       if ((i % 10)*100000 +(i / 10) == 4*i)
        System.out.println(i+"   "+4*i);
    }
```

7 Doyle-Spirale

Autor: Ulrike Bücking
Projekt: F1

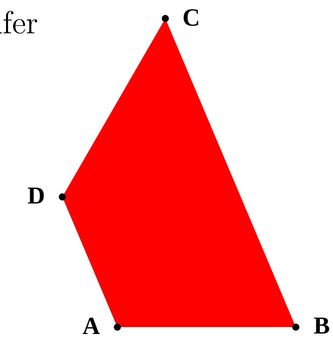
7.1 Aufgabe

Die Weihnachtsengel haben festgestellt, dass in diesem Jahr die Räume des Weihnachtsmannes renoviert werden müssen. Für den Fußbodenbelag haben sie eine besondere Art von Teppich gefunden: Die erste Fliese ist ein beliebiges Viereck $\mathcal{Q}$. Für jede Seite von $\mathcal{Q}$ erhält man die angrenzende Nachbarfliese, indem man $\mathcal{Q}$ geeignet vergrößert oder verkleinert und dann verschiebt und dreht, so dass die neue Fliese $\hat{\mathcal{Q}}$ genau an die entsprechende Seite von $\mathcal{Q}$ passt. Die Vierecke $\mathcal{Q}$ und $\hat{\mathcal{Q}}$ haben also dieselben Winkel und alle entsprechenden Seiten haben dasselbe Längenverhältnis. Wenn man diese Konstruktion immer weiter fortsetzt, erhält man ein unendliches Teppichmuster.



Die Weihnachtsengel möchten nun gerne den Boden mit einem solchen Muster belegen. Dazu haben sie vorsorglich ein kartesisches Koordinatensystem in den Raum gezeichnet. Außerdem haben sie sich auf eine Spirale aus Teppichfliesen geeinigt, bei der man ein Nachbarviereck $\hat{\mathcal{Q}}$ eines gegebenen Vierecks $\mathcal{Q}$ erhält, indem man entweder nur vom Ursprung aus zentrisch streckt (bzw. staucht) oder um den Ursprung dreht und streckt (bzw. staucht). Ein Teil des gewünschten Teppichmusters ist in obiger Abbildung zu sehen.

Für das rot bezeichnete Viereck hat Ihnen der Verkäufer die Koordinaten der Punkte A, B, C, D angegeben, siehe Skizze. Leider hat sich der Einkaufsengel nur die Koordinaten der Punkte $A = (1, 0)$ und $B = \left(\frac{64}{27}, 0\right)$ gemerkt. Wie lauten die Koordinaten der Punkte C und D?



Antwortmöglichkeiten:

1. $C = \left(\frac{91\sqrt{3}}{81}, \frac{91}{27}\right)$ und $D = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$
2. $C = \left(\frac{128\sqrt[5]{2}}{27\sqrt[5]{27}}, \frac{64\sqrt{3}\sqrt[5]{2}}{27\sqrt[5]{27}}\right)$ und $D = \left(\sqrt[5]{\frac{2}{27}}, \frac{\sqrt{3}\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{27}}\right)$
3. $C = \left(\frac{128}{27\sqrt[6]{27}}, \frac{128\sqrt{3}}{27\sqrt[6]{27}}\right)$ und $D = \left(\frac{2}{\sqrt[6]{27}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[6]{27}}\right)$
4. $C = \left(\frac{64}{27\sqrt[7]{51}}, \frac{64\sqrt{3}}{27\sqrt[7]{51}}\right)$ und $D = \left(\frac{1}{\sqrt[7]{51}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[7]{51}}\right)$
5. $C = \left(\frac{37}{54}, \frac{37\sqrt{3}}{54}\right)$ und $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
6. $C = \left(\frac{32}{27}, \frac{32\sqrt{3}}{27}\right)$ und $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
7. $C = \left(\frac{16}{27}, \frac{16\sqrt{3}}{27}\right)$ und $D = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
8. $C = \left(\frac{64\sqrt{3}}{81}, \frac{64}{27}\right)$ und $D = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$
9. $C = \left(\frac{32}{27}, \frac{32\sqrt{3}}{27}\right)$ und $D = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$
10. $C = \left(\frac{256}{81\sqrt{3}}, \frac{64\sqrt{3}}{81}\right)$ und $D = \left(\frac{4}{3\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Projektbezug:

Im Matheon Projekt F1 beschäftigen wir uns mit Fragestellungen, die bei der computergraphischen Darstellung von Flächen im Raum oder in der Ebene auftreten. Einen Aspekt bilden dabei die Verwendung und Untersuchung diskreter konformer Abbildungen. Die angegebene Konstruktion zeigt ein Beispiel, nämlich eine diskrete Exponentialabbildung der komplexen Ebene.

7.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8: $C = \left(\frac{64\sqrt{3}}{81}, \frac{64}{27}\right)$ und $D = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

Wenn man das Anfangsviereck $\mathcal{Q} = ABCD$ über die Kante CD entsprechend der angegebenen Konstruktion fortsetzt, so erhält man das neue Viereck $\mathcal{Q}' = A'B'C'D' = DCC'D'$ durch eine Streckung des Anfangsvierecks mit Faktor ℓ (Streckzentrum ist nach Voraussetzung im Ursprung) und Drehung um den Urspung um einen Winkel α. ℓ ist dabei das Längenverhältnis

$$\ell = \frac{\text{Länge der Seite } CD}{\text{Länge der Seite } AB}$$

und α ist der Winkel zwischen den Geraden durch AB und CD, die sich im Ursprung schneiden, so dass nach Voraussetzung eine Dreh-Streckung um den Ursprung die Seite AB auf die Seite CD abbilden kann.
Setzt man nun das neue Viereck $\mathcal{Q}'$ über dessen neue Kante $C'D'$ entsprechend fort, so erhält man das angrenzende Viereck nach Konstruktion wieder durch eine Streckung mit Faktor ℓ (da die Seitenverhältnisse gleich bleiben) und Drehung um den Winkel α (da die Dreh-Streckung den Winkel zwischen den gedrehten Geraden durch die Seiten AB und CD nicht verändert hat). Auf diese Weise kann man immer weitere Vierecke erhalten.
Der Abbildung des Teilmusters entnimmt man, dass nach 6-maliger Dreh-Streckung $6 \cdot \alpha$ den Kreiswinkel $360°$ bzw. 2π ergeben soll. Daraus erhält man $\alpha = 60°$ bzw. $\alpha = \pi/3$. Nach Voraussetzung und ist $A = (1, 0)$,d.h. insbesondere ist die x-Koordinate von A $x = 1$. Da OD durch Dreh-Streckung aus OA hervorgeht, gilt $\ell = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OD}{1} = OD$. Entsprechend ist ℓ^2 der Abstand vom Punkt D' zum Ursprung O usw. Also folgt aus der Abbildung des Teilmusters und der Voraussetzung $B = (64/27, 0)$, dass $\ell^6 = 64/27$ gelten muss bzw. $\ell = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$.
Mit diesen Überlegungen erhält man die Koordinaten von Punkt

$$D = (\ell \cos\alpha, \ell \sin\alpha) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right).$$

Der Punkt C liegt auf derselben Geraden durch den Ursprung wie D und sein Abstand zum Ursprung ist nach Konstruktion ℓ-mal der Abstand von B

zum Urspung, also $\ell \cdot 64/27$. Damit ergibt sich

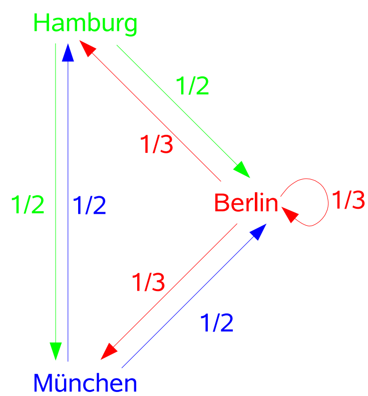
$$C = (\ell\frac{64}{27}\cos\alpha, \ell\frac{64}{27}\sin\alpha) = (\frac{64}{27}\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{64}{27}) = (\frac{64\sqrt{3}}{81}, \frac{64}{27}).$$

8 Der Reisebeginn

Autor: Alexander Weiß
Projekt: E1

8.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann klappert Deutschland jedes Jahr in einer Rundreise ab. Er startet in einer Großstadt und fliegt dann das Bundesgebiet im Uhrzeigersinn ab. Die möglichen Anfangsstädte sind traditionell Hamburg, Berlin und München. Welche Stadt tatsächlich der Ausgangspunkt ist, hängt vom Zufall und von der letztjährigen Wahl ab.



Das Diagramm gibt die Startwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Städte in Abhängigkeit vom Startpunkt des Vorjahres an. So bedeutet zum Beispiel der blaue Pfeil, der von München auf Hamburg zeigt und an dem $1/2$ steht, dass die Wahrscheinlichkeit, dieses Jahr in Hamburg zu starten, bei $50\,\%$ liegt, wenn der Weihnachtsmann letztes Jahr seine Tour in München begonnen hat. Es gibt historische Quellen, aus denen sicher hervorgeht, dass der Weihnachtsmann im Jahre 1900 seine Tour in Berlin begonnen hat. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit (auf zwei Nachkommastellen gerundet), dass er auch dieses Jahr (2009) seine Reise dort beginnt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0 %
2. 10,38 %
3. 28,57 %
4. 33,33 %
5. 42,86 %
6. 50,00 %
7. 66,67 %
8. 78,25 %
9. 86,29 %
10. 100,00 %

Projektbezug:
Hinter dieser Frage steckt die Theorie gedächtnisloser stochastischer Prozesse. Solche mathematischen Objekte benutzt man, um das zufällige Verhalten von Systemen zu beschreiben, deren Änderung nur vom aktuellen Zustand, aber nicht von der Vergangenheit abhängt. Mit diesem recht simplen Ansatz lassen sich bereits diverse Effekte zum Beispiel in der Physik, der Populationsbiologie, der Meteorologie oder auch dem Finanzwesen modellieren.

8.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5: 42,86 %
Wir können die Wahrscheinlichkeiten, dass der Weihnachtsmann in Hamburg, Berlin oder München startet als drei-dimensionalen Zeilenvektor schreiben, bei dem die erste Koordinate für die Wahrscheinlichkeit Hamburgs, die zweite für die Berlins und die dritte für die Münchens steht. Im Jahr 1900 hat der Vektor die Form

$$(0, 1, 0)$$

Ein Jahr später ist die Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Um den Vektor zu aktualisieren, muss man also für jede Stadt schauen, wie der aktuelle Vektor ausschaut und dessen Werte dann mit den Übergangswahrscheinlichkeiten multiplizieren. Wenn v_j der Zeilenvektor im Jahr j ist, so gilt also in Matrixschreibweise

$$v_{j+1} = v_j \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun also

$$v_{2009} = (0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{109}.$$

Auch ohne Kenntnisse der linearen Algebra lässt sich recht leicht einsehen, wie sich die Wahrscheinlichkeiten von Jahr zu Jahr ändern, so dass der exakte Wert mit Hilfe eines einfachen Algorithmus vom Computer ermittelt werden kann. Was aber viel wichtiger ist: schon nach drei Schritten kommt man auf den richtigen Wert vor dem Komma, der sich dann auch nicht mehr ändert. Daher ist das qualifizierte Erraten der korrekten Lösung kein allzu schwieriges Problem.

Wer es trotzdem etwas exakter und schultauglicher haben will, kann folgenden Ansatz verfolgen. Man kann davon ausgehen, dass nach 109 Jahren die Wahrscheinlichkeiten sich mehr oder weniger eingepegelt haben und sich von einem Jahr zum nächsten nicht mehr spürbar ändern. Dann gilt für diese eingepegelten Wahrscheinlichkeiten (p_H für Hamburg, p_B für Berlin und p_M für München)

$$\begin{aligned}
p_H &= 0 \cdot p_H + \frac{1}{3} \cdot p_B + \frac{1}{2} \cdot p_M, \\
p_B &= \frac{1}{2} \cdot p_H + \frac{1}{3}c \cdot p_B + \frac{1}{2} \cdot p_M, \\
p_M &= \frac{1}{2} \cdot p_H + \frac{1}{3}c \cdot p_B + 0 \cdot p_M,
\end{aligned}$$

weil sich diese Wahrscheinlichkeiten ja auch im Folgejahr nicht ändern. Dieses Gleichungssystem kann umgestellt werden zu

$$\begin{aligned}
0 &= -p_H + \frac{1}{3} \cdot p_B + \frac{1}{2} \cdot p_M, \\
0 &= \frac{1}{2} \cdot p_H - \frac{2}{3}c \cdot p_B + \frac{1}{2} \cdot p_M, \\
0 &= \frac{1}{2} \cdot p_H + \frac{1}{3}c \cdot p_B - p_M.
\end{aligned}$$

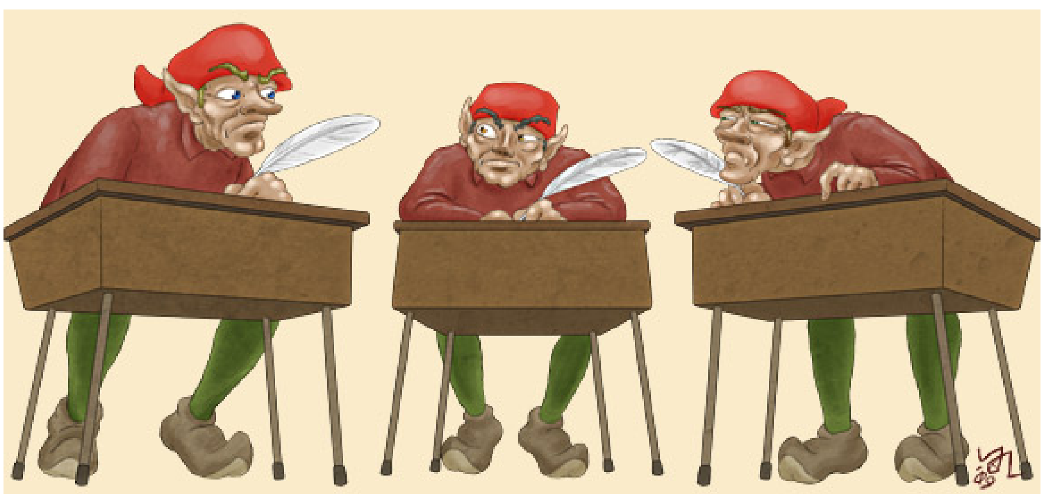
Schnell sieht man, dass dieses Gleichungssystem unterbestimmt ist und nicht ausreicht, um alle p_* zu bestimmen. Eine Gleichung kann also weggelassen werden. Allerdings gilt, weil die p_* ja Wahrscheinlichkeiten sind, dass $p_H + p_B + p_M = 1$. Mit dieser zusätzlichen Gleichung kann man ein neues Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned}
0 &= -p_H + \frac{1}{3} \cdot p_B + \frac{1}{2} \cdot p_M, \\
0 &= \frac{1}{2} \cdot p_H - \frac{2}{3}c \cdot p_B + \frac{1}{2} \cdot p_M, \\
1 &= p_H + p_B + p_M,
\end{aligned}$$

welches die Lösung $p_H = p_M = \frac{2}{7}$ und $p_B = \frac{3}{7} \approx 42,86\%$ hat. Es fällt auch auf, dass für diese Herangehensweise der Startpunkt in Berlin vollkommen irrelevant ist.

9 Der Antrag

Autoren: Volker Mehrmann, Falk Ebert



9.1 Aufgabe

Habt Ihr Euch schon mal gefragt, wie es ein alter Mann am Nordpol schafft, unter widrigsten klimatischen Bedingungen ein Wirtschaftsunternehmen am laufen zu halten? Und nicht etwa irgendeins, sondern ein weltweit operierendes Konsortium, das jährlich Milliarden von Menschen *beschenkt*. Wie werden Löhne gezahlt, woher kommen die Rohstoffe und dann die Energiekosten? Es liegt nahe, dort kriminelle Machenschaften zu vermuten, für die der rundliche Mann mit dem Schlitten und den tollen Giveaways nur Fassade ist. Wir können Euch aber beruhigen. Alles ist absolut legal. Hinter der ganzen Schenkerei ist eine noch viel höhere Instanz, nämlich die sogenannten *Dezember-Festivitäts-Gönner* oder auch kurz DFG. Die stellen das ganze Geld zur Verfügung, das der Weihnachtsmann dann sinnvoll in Geschenke umwandelt. Die DFG vergeben das Geld gern - man muss sie nur lieb darum bitten. Und *bitten* heißt konkret: einen Antrag schreiben, in dem haarklein dargelegt wird, wofür das Geld ausgegeben wird. Das schiere Ausmaß dieses Antrages ist der Grund dafür, warum Weihnachten nur einmal im Jahr ist. Die Geschenke sind schnell gebaut, aber der Antrag benötigt die meiste Zeit des Jahres.

Nun gibt es im Weihnachtsmann-Konsortium je 10 Einzelgruppen in den 6 Bereichen Lebkuchenwissenschaften, Logistik, Geschenkeproduktion, Optische Verschönerung von Geschenken, Weihnachtsfinanzierung sowie Computerspiele. Außerdem gibt es noch 4 Gruppen aus dem Bereich „Zusätzliches“, die sich zum Beispiel um die Ausbildung junger Weihnachtswichtel kümmern. Jede von diesen Gruppen muss einen eigenen Bericht schreiben, in dem sie darlegen, wie wichtig sie für den Weihnachtsmann sind, was für tolle Geschenke sie bauen und warum sie so viel Geld haben wollen. Aus diesen Teilberichten wird letztendlich dann der Antrag zusammengefügt. Leider sind in jedem Teilbericht erfahrungsgemäß etwa 10 Schreibfehler enthalten. Weil die DFG für solche Fehler die Finanzierung kürzen, wird der Antrag am Ende noch mal penibel auf Fehler geprüft. Das Ganze geht natürlich elektronisch und online im Winternet. Dazu schauen sich 3 Orthographiewichtel unabhängig voneinander den Antrag an. Jeder findet mit der absolut gleichen Wahrscheinlichkeit eine Zahl von Fehlern, die zwischen 0 und der Gesamtzahl der vorhandenen Fehler liegt. (Dabei sind 0 gefundene Fehler und das Finden aller Fehler mit eingeschlossen. Alle Wichtel haben die gleichen Chancen.) Dann überschreibt jeder Wichtel einfach die letzte Version des Antrags mit seiner Korrekturfassung. Das führt dazu, dass die Korrekturversion des Wichtels, der die meisten Fehler gefunden hat und der damit auch am längsten gebraucht hat, die vorläufige Endversion wird. Das kratzt natürlich an der Ehre der beiden Orthographiewichtel, die jetzt komplett umsonst gearbeitet haben. Also wird mit der vorläufigen Endversion noch einmal so verfahren. Alle drei prüfen wieder unabhängig voneinander und die Version, in der die meisten Fehler gefunden werden, wird zum Zwischensieger erklärt. Und damit alle 3 eine Chance haben, Zwischensieger zu werden, gibt es noch genauso eine dritte Runde des Korrekturwettstreits. Wichtelehrgeiz hin oder her - danach ist Schluss! Die letzte Korrekturfassung wird an die DFG abgegeben. Die Frage ist nur: Wie viele Fehler sind in der letzten Fassung durchschnittlich noch drin?

1. gar keine, die sind bereits nach der zweiten Runde alle raus
2. 0-2
3. 5-6
4. 9-12
5. 25-35
6. genau 42
7. 50-60
8. etwa 80
9. etwa 120
10. etwa 160

Beispiel: *Die 3 Wichtel prüfen auf die gleiche Art einen anderen Text, in dem 10 Fehler drin sind. In der ersten Runde finden sie unabhängig voneinander 3, 5 und 6 Fehler. Demnach sind nach dem ersten Durchgang noch 4 Fehler in dem Text. In der kommenden Runde finden sie 1, 2 und 4 Fehler also sind nach der 2. Runde 0 Fehler im Text. In der 3. Runde finden alle 0 Fehler und damit ist der Text nach 3 Runden fehlerfrei.*

Projektbezug:
Das Antragsverfahren entspricht in *vereinfachter Form* etwa dem, das das MATHEON alle 4 Jahre (glücklicherweise nicht in jedem Jahr!) durchläuft. Und manchmal läuft die Korrektur - eher ungewollt - auch wie in der Aufgabe ab.

9.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4: 9-12 Fehler

Die erste Vorüberlegung sollte sein: 6 Bereiche mit je 10 Gruppen und 4 Extragruppen sind insgesamt 64. Wenn jede 10 Fehler in den Antrag einbaut, sind das insgesamt 640. Wir versuchen zuerst herauszufinden, wieviele Fehler nach einer Korrekturrunde noch in dem Antrag drin sind. Dazu gibt es verschiedene Lösungswege, die alle verschiedene Grundkenntnisse voraussetzen, aber fast identische Lösungen liefern.

9.2.1 intuitive Lösung

Wenn es nur einen Korrektor gäbe, dann wäre seine Korrekturfassung automatisch die beste. Der Anteil der gefundenen Fehler liegt irgendwo zwischen 0 und 1. Es gibt keinen Grund anzunehmen, dass er in irgendeiner Weise näher an der 0 oder näher an der 1 liegen sollte. Dementsprechend sagt die Intuition, dass ein Korrektor im Mittel die Hälfte der Fehler findet. Wie sieht es jetzt bei n Korrektoren aus? Jeder von denen findet wieder einen gewissen Anteil der Fehler und uns interessiert, wie viele maximal gefunden werden. Dazu nennen wir die gefundenen Fehleranteile p_1 bis p_n und nehmen der Einfachheit halber an, dass $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ gilt. Wiederum gibt es keinen Grund, warum irgendein Bereich zwischen 0 und 1 wahrscheinlicher für die gefundenen Anteile sein sollte. Analog zu dem Fall mit nur einem Korrektor, können wir jetzt also davon ausgehen, dass p_1 mittig zwischen 0 und p_2 liegt, p_2 mittig zwischen p_1 und p_3 usw. Folglich liegen die Anteile im Mittel so, dass die Intervalle $[0, p_1]$, $[p_1, p_2]$, ... $[p_n, 1]$ alle die gleiche Länge haben, weil bei gleichwahrscheinlichen p_i kein Grund besteht, warum eines der Intervalle kürzer oder länger sein sollte. Insgesamt gibt es $n + 1$ solche Intervalle und damit liegt p_n im Mittel bei

$$p_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Das passt auch gut zu dem erwarteten Ergebnis bei $n = 1$ Korrektoren. Im Fall von 3 Korrektoren werden in jeder Runde also etwa $\frac{3}{4}$ der Fehler gefunden. Demnach verbleiben in jeder Runde noch $\frac{1}{4}$ der Fehler. Nach 3 Durchgängen sind das also $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$. Bei ursprünglich 640 Fehlern bleiben also noch 10.

9.2.2 mit diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Vorüberlegung: Angenommen, es gäbe keine Fehler in dem Antrag, dann hat jeder Korrektor genau eine Möglichkeit, eine gewisse Anzahl - nämlich 0 - zu finden. Wenn wir die gefundenen Fehler der drei Korrektoren als Tripel darstellen, ist das genau ein Tripel: $(0, 0, 0)$. Sobald es einen Fehler gibt, hat jeder der Korrektoren zwei gleichwahrscheinliche Chancen, nämlich entweder 0 oder 1 Fehler zu finden. Jetzt gibt es $2^3 = 8$ Möglichkeiten, die gefundenen Fehler als Tripel darzustellen, nämlich $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$. Genau eines dieser Tripel führt zu einem Maximum von 0 gefundenen Fehlern, die restlichen $2^3 - 1 = 7$ liefern 1 als Maximum. Wenn wir jetzt von 2 Fehlern im Antrag ausgehen, kann jeder Korrektor 0, 1 oder 2 finden, hat also 3 Möglichkeiten. Insgesamt gibt es jetzt $3^3 = 27$ Tripel, welche die gefundenen 2 oder weniger Fehler darstellen. Eines davon $(0, 0, 0)$ liefert 0 als Maximum. Die weiteren 7, die wir in der letzten Betrachtung gefunden haben, sind natürlich auch unter den Möglichkeiten. Diese $1 + (2^3 - 1) = 2^3$ Mglichkeiten liefern also keine 2 gefundenen Fehler. Das heißt also, dass die restlichen $3^3 - 2^3 = 19$ Tripel jeweils mindestens eine 2 beinhalten, demnach zu einem Maximum von 2 führen. Wenn wir den Gedanken fortsetzen, heißt das, dass es bei n Fehlern im Antrag für jeden Korrektor $n + 1$ Möglichkeiten gibt, Fehler zu finden. Insgesamt gibt es $(n + 1)^3$ Möglichkeiten, Tripel aufzustellen. Davon führt genau eines zu 0 maximal gefundenen Fehlern, 7 führen zu einem gefundenen Fehler, 19 zu zwei Fehlern. Allgemein gilt, dass es $(k + 1)^3 - k^3$ Möglichkeiten gibt, dass als Maximum genau k Fehler gefunden werden. Wir nennen X_i, $i = 1, 2, 3$ die Zufallsvariable, welche angibt, wieviel Fehler jeder Korrektor findet. Es gilt $P(X_i = k) = \frac{1}{n+1}$ weil jeder Wert zwischen 0 und der Gesamtzahl gleichwahrscheinlich ist. Mit den obigen Überlegungen haben wir dass

$$P(\max(X_1, X_2, X_3) = k) = \frac{(k + 1)^3 - k^3}{(n + 1)^3}.$$

Damit können wir den Erwartungswert der gefundenen Fehler bestimmen.

$$\begin{aligned} E(\max(X_1, X_2, X_3)) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(\max(X_1, X_2, X_3) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{(k + 1)^3 - k^3}{(n + 1)^3}. \end{aligned}$$

Dieser Term lässt sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned}E(\max(X_1,X_2,X_3)) &= \frac{1}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n} k^4+3k^3+3k^2+k-k^4\\ &= \frac{1}{(n+1)^3}\left(3\sum_{k=0}^{n}k^3+3\sum_{k=0}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{n}k\right).\end{aligned}$$

Die Terme für die Potenzsummen sind schnell gefunden - immerhin hat man ja das Internet.

$$E(\max(X_1,X_2,X_3)) = 3\frac{(n(n+1))^2}{4(n+1)^3}+3\frac{(2n+1)(n+1)n}{6(n+1)^3}+\frac{n(n+1)}{2(n+1)^3}$$

Dieser Term lässt sich mit etwas Rumrechnerei vereinfachen zu

$$E(\max(X_1,X_2,X_3)) = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4(n+1)}\right)n.$$

Wieder zeigt sich, dass etwa 3/4 (und ein klein wenig mehr) der Fehler im Durchschnitt in einem Durchgang gefunden werden. Und wenn man diese kleine Abweichung von den 3/4 ignoriert, kann man auch die gleiche Argumentation wie bei dem intuitiven Lösungsansatz verwenden und kommt letztendlich auf 10 verbleibende Fehler. Wenn man die kleine Abweichung mit einrechnen will, dann wird die Bildung des Erwartungswertes über 3 Durchgänge deutlich komplizierter, weil man dann alle Kombinationen von gefundenen Fehlern über 3 Runden berücksichtigen muss.

10 Pulse

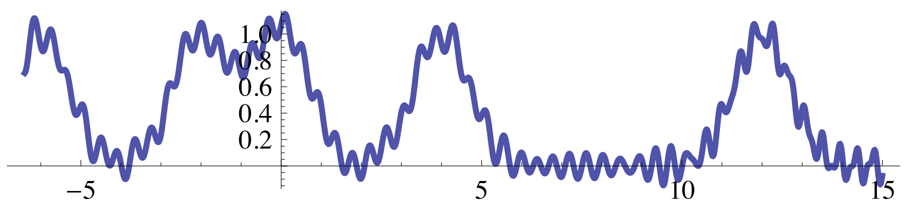
Autor: Alexander Mielke

10.1 Aufgabe

Auch die Weiterleitung und Verarbeitung von Weihnachtswünschen geschieht mittlerweile via optischer Datenleitungen, da aufgrund der Länge mancher Wunschlisten gigantische Datenmengen anfallen. Zur digitalen Datenübertragung wird für jedes 1-Bit ein optischer Puls der Form $P(t)$ durch die Datenleitung geschickt. Für ein 0-Bit wird nichts geschickt. Die Abstände der Pulse ist die Taktzeit τ. Zur Übermittlung der Bitsequenz $..., b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, b_3, ...$ mit $b_j \in \{0, 1\}$ wird also das Signal

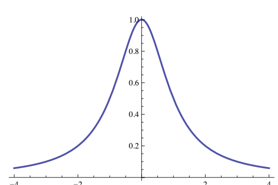
$$f(t) = \cdots + b_{-1}P(t{+}1\tau) + b_0 P(t{+}0\tau) + b_1 P(t{-}1\tau) + b_2 P(t{-}2\tau) + \cdots + e(t)$$

verschickt, wobei $e(t)$ ein Rauschterm ist, von dem nur bekannt ist, dass er immer zwischen $-0,2$ und $+0,2$ liegt. Wie gesagt, die Wunschlisten und somit auch die Signale können beliebig lang sein.



Ursprünglich verwendete die Datenübertragung die Taktfrequenz $\tau = 2$ und den schnell abklingen Gauß-Puls $P(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$. Als der Computer im Sommer frisch installiert werden musste und kein 10 DM-Schein (der bekanntlich die Formel der Gauß'schen Glockenkurve enthält) zur Hand war, wurde kurzerhand die einfachere Pulsfunktion

$$P(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$



eingegeben. Hierbei sind alle Zeiteinheiten in Pikosekunden angegeben.
Nun ist noch die Taktfrequenz so festzulegen, dass die Bit-Rate möglichst hoch wird. Natürlich muss das Signal noch eine eindeutige Unterscheidung zwischen den Bit-Informationen zulassen. Das bedeutet, dass ein Wert $f(k\tau) \leq 0,5$ eindeutig zum Wert $b_k = 0$ korrespondiert und $f(k\tau) > 0,5$ eindeutig zum Wert $b_k = 1$ korrespondiert.
Welche der unten angegebenen Bit-Raten ist die beste, die unter den gegebenen Bedingungen erreicht werden kann?

1. 26000 Megabit/sec
2. 58000 Megabit/sec
3. 141 Gigabit/sec
4. 196 Gigabit/sec
5. 260 Gigabit/sec
6. 299 Gigabit/sec
7. 311 Gigabit/sec
8. 420 Gigabit/sec
9. 502 Gigabit/sec
10. 650 Gigabit/sec

Hinweis:
Es reicht aus, gewisse Terme gut genug abzuschätzen und einen Taschenrechner einzusetzen.
Probleme mit der Kausalität treten auch nicht auf!

Das Matheon-Projekt D14 *Nichtlokale und nichtlineare Effekte in der Faseroptik* beschäftigt sich mit der Pulsausbreitung in Fasern. Es gilt Pulsformen zu finden, die einerseits über lange Strecken stabil laufen und die anderseits schnell abklingen, um eine hohe Bit-Rate erzielen zu können.

10.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7: 311 Gigabit/sec

A. Offensichtlich wird ein Bit $b_k = 1$ immer als "1" erkannt, da $b_k = 1$ stets $f(k\tau) \geq 0,8 > 0,5$ impliziert, denn es gilt

$$f(k\tau) = \underbrace{b_k}_{=1} + \sum_{n \neq k} \underbrace{b_n P((n-k)\tau)}_{\geq 0} + \underbrace{e(k\tau)}_{\geq -0,2} \geq 0,8.$$

Dabei ist τ noch beliebig.

B. Für das Erkennen der Null wird es schwieriger. In einer Sequenz $[1,0,1]$ stören die lang auslaufenden Seiten der Einsen die Null. Die benachbarten Impulse müssen also weit genug entfernt sein, damit die Null auch als solche erkannt wird. Allerdings sind nicht nur die direkten Nachbarn von Interesse, sondern im schlimmsten Fall soll auch eine Sequenz der Form $[\ldots,1,1,0,1,1,\ldots]$ korrekt erkannt werden. Es muss also gelten $f(k\tau) \leq 0,5$ gelten, wobei die $b_n \in \{0;1\}$ für $n \neq k$ und $e(k\tau) \in [-0,2;0,2]$ beliebig sein dürfen. Zur Vereinfachung setzen wir $k = 0$, dann folgt

$$f(0) = 0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{1+(k\tau)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(k\tau)^2} + 0,2 \leq 0,5.$$

Nutzen wir jetzt aus, dass die Vorzeichen beim Quadrieren verschwinden, ergibt sich

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(k\tau)^2} + 0,2 \leq 0,5$$

beziehungsweise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(k\tau)^2} \leq 0,15.$$

C. Die maximale Bitrate erreicht man, wenn man gerade den Grenzfall

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(k\tau)^2} = 0,15$$

betrachtet. Es ist jetzt mit Schulmitteln ziemlich schwer, den genauen Wert der unendlichen Summe zu berechnen, aber man kann ihn recht einfach eingrenzen. Offensichtlich gilt ja

$$\frac{1}{1+\tau^2} + \frac{1}{1+4\tau^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(k\tau)^2}.$$

und die Forderung

$$\frac{1}{1+\tau^2} + \frac{1}{1+4\tau^2} < 0,15$$

führt auf die biquadratische Ungleichung

$$0,60\tau^4 - 4,25\tau^2 - 1,85 > 0.$$

Die lässt sich mit den Mitteln für quadratische Gleichungen leicht lösen und liefert $\tau > 2,7377$.

D. Eine obere Schranke für τ lässt sich finden, indem wir die unendliche Summe nach oben abschätzen. Es gilt

$$\frac{1}{1+(k\tau)^2} < \frac{1}{(k\tau)^2}.$$

Es gilt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(k\tau)^2} < \frac{1}{\tau^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Die rechte unendliche Summe konvergiert ziemlich schnell gegen etwa 1,65. Viele gute Tafelwerke geben sie auch direkt an

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6.$$

Dann folgt mit $0,15 < \frac{\pi^2}{6\tau^2}$ dass $\tau < 3,3115$. Man kann sogar noch etwas genauer werden und abschätzen

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(k\tau)^2} &< \tfrac{1}{1+\tau^2} + \tfrac{1}{\tau^2} \textstyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \tfrac{1}{1+\tau^2} + \tfrac{1}{\tau^2}\left(\tfrac{\pi^2}{6} - 1\right) \end{aligned}$$

Dann folgt mit $0,15 < \frac{1}{1+\tau^2} + \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$ wieder über eine biquadratische Ungleichung

$$0,15\tau^4 - 1,4949\tau^2 - 0,6449 < 0,$$

dass $\tau < 3,2219$.

E. Eine Pikosekunde sind 10^{-12} Sekunden. Da pro Zeiteinheit τ_* ein Bit gesendet werden kann, ist die Bit-Rate

$$B = \frac{1 \text{ Bit}}{\tau_* \text{ Pikosekunde}} = \frac{10^{12}}{\tau_*}\frac{\text{Bit}}{\text{Sekunde}} = \frac{1000}{\tau_*} \text{ Gb/s},$$

wobei Gb/s die Abkürzung von Gigabit pro Sekunde bedeutet. Aus **C** folgt $B < 365$ Gb/s und aus **D** folgt $B > 310$ Gb/s Gb/s. Damit bleibt dann nur als Lösung 7 mit 311 Gb/s.

F. Tatsächlich lässt sich die Funktion $M(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(k\tau)^2}$ mit einigen Tricks aus der höheren Analysis (Uni-Vorlesung) exakt berechnen. Es gilt die Formel

$$M(\tau) = \frac{\pi}{2}\frac{\text{Coth}(\pi/\tau)}{\tau} - \frac{1}{2} \qquad \text{mit } \text{Coth}(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}.$$

Daraus lässt sich die eindeutige Lösung τ_* von $M(\tau_*) = 0,15$ numerisch mittels Intervallhalbierung, Newton- oder Sekantenverfahren berechnen. Es ergibt sich $\tau_* = 3.21333\ldots$, was einer Bit-Rate von $B \approx 311.2...$ Gb/s entspricht. Die obere Schranke aus **D** war also bereits sehr nah an der Lösung dran.

G. Alternativ kann man eine obere Schranke für τ_* auch durch geschicktes Probieren erhalten. Wir zeigen $M(10/3) < 0.15$, also gilt $\tau_* < 3.334$. Wir schätzen die unendliche Reihe $M(\tau)$ nach oben ab, indem wir für $m \geq n$ den Term $\frac{1}{1+m^2\tau^2}$ durch die größere Zahl $\frac{1}{m(m-1)\tau^2} = \frac{1}{(m-1)\tau^2} - \frac{1}{m\tau^2}$ ersetzen. Damit gilt

$$\begin{aligned} M(\tau) &= \tfrac{1}{1+\tau^2} + \cdots + \tfrac{1}{1+(n-1)^2\tau^2} + \sum_{m=n}^{\infty} \tfrac{1}{1+m^2\tau^2} \\ &\leq \tfrac{1}{1+\tau^2} + \cdots + \tfrac{1}{1+(n-1)^2\tau^2} + \tfrac{1}{\tau^2}\sum_{m=n}^{\infty}\left(\tfrac{1}{m-1} - \tfrac{1}{m}\right) \\ &= \tfrac{1}{1+\tau^2} + \cdots + \tfrac{1}{1+(n-1)^2\tau^2} + \tfrac{1}{(n-1)\tau^2}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die unendliche Reihe in der mittleren Reihe eine Teleskop-Summe ist, d.h. positive und negative Terme kürzen sich weg, so dass nur der erste Term $\frac{1}{m-1}$ übrig bleibt.

Wir setzen nun $\tau = 10/3$ und $n = 3$ ein und erhalten

$$M(10/3) \leq \frac{9}{109} + \frac{9}{409} + \frac{9}{200} = 0.14957... < 0.15.$$

Wählen wir $\tau = 10/3$ und $n = 4$ so wird der Abstand noch klarer:

$$M(10/3) \leq \frac{9}{109} + \frac{9}{409} + \frac{9}{909}\frac{9}{300} = 0.14447... < 0.15.$$

Numerisch lässt sich $M(10/3) = 0.13996...$ ausrechnen, siehe **F.**

H. Rechnen wir fälschlicherweise mit nur einem Nachbarpuls auf beiden Seiten, so würde M ersetzt werden durch die einfachere Funktion P. Aus der Bedingung $P(\tau_1) = 0,15$ ergibt sich der Wert $\tau_1 = 2.3804...$, der einer Bit-Rate $B_1 = 420,08...$ Gb/s entspricht.

11 Weihnachten findet statt

Autor: Heino Hellwig
Projekt: Z1.1

11.1 Aufgabe

Die Wichtel streiken in der Weihnachtszeit: sie verlangen mehr Lohn für ihre Nachtschichten und Überstunden. Der Streikführer überbringt dem Weihnachtsmann das auf die zweite Nachkommastelle gerundete Ergebnis der Urabstimmung: 69,07% der 50 Wichtel haben sich für einen Streik ausgesprochen. Leider sind die Haushaltskassen des Weihnachtsmannes leer, so dass er schon daran denkt, Weihnachten 2009 abzusagen. Da stürzt sein Buchhalter ins Zimmer: „Chef, es handelt sich um eine Wahlfälschung. Mit 50 Wichteln ist das Ergebnis von 69,07% niemals erreichbar. Durch die Bildung von Medianten (John Farey, 1816) folgt, dass mindestens x Wichtel für ein solches Ergebnis nötig sind."

Frage: In welchem Bereich befindet sich die Anzahl x?

Antwortmöglichkeiten:

1. $50 < x \leq 60$
2. $60 < x \leq 70$
3. $70 < x \leq 80$
4. $80 < x \leq 90$
5. $90 < x \leq 100$
6. $100 < x \leq 200$
7. $200 < x \leq 300$
8. $300 < x \leq 400$
9. $400 < x \leq 500$
10. $500 < x \leq 1000$

Projektbezug:
Im Projekt Z1.1 werden Seminarkurse zum Thema „Mathematische Modellierung" für die Sekundarstufe II entwickelt und erprobt. Farey - Folgen spielen

bei den Modellierungen von Spiralmustern im Pflanzenreich eine wichtige Rolle.

11.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5: $90 < x \leq 100$

Farey beobachtete, dass für je zwei teilerfremde Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gilt:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},$$

wobei $\frac{a+c}{b+d}$ als Mediant bezeichnet wird.

Dies kann leicht nachgerechnet werden.

Gesucht ist also eine rationale Zahl $z = \frac{p}{q}$, $(p, q \in \mathbb{N}, p < q)$ mit kleinstmöglichem q, für die gilt: $\frac{p}{q} \approx 0,6907$.

Aus dem auf zwei Stellen gerundeten Wahlergebnis ergibt sich folgende Ungleichung:
$0,69065 \leq z < 0,69075$
Eine erste grobe Abschätzung der Zahl ergibt:

$$\frac{2}{3} \leq z < \frac{7}{10} \qquad z = \frac{9}{13} \approx 0,6923$$

und weiter:

$$\frac{2}{3} \leq z < \frac{9}{13} \qquad z = \frac{11}{16} \approx 0,6875$$
$$\frac{11}{16} \leq z < \frac{9}{13} \qquad z = \frac{20}{29} \approx 0,6895$$
$$\frac{20}{29} \leq z < \frac{9}{13} \qquad z = \frac{29}{42} \approx 0,69047$$
$$\frac{29}{42} \leq z < \frac{9}{13} \qquad z = \frac{38}{55} \approx 0,6909$$
$$\frac{29}{42} \leq z < \frac{38}{55} \qquad z = \frac{67}{97} \approx 0,69072$$

$z = \dfrac{67}{97}$ ist also eine Zahl,welche die geforderte Bedingung erfüllt.

Da die Mindestanzahl von Wichteln gesucht wird, ist noch zu zeigen, dass zwischen $\frac{29}{42}$ und $\frac{67}{97}$ keine weitere Zahl $z = \frac{p}{q}$ mit $q < 97$ existiert.

Aus $\frac{29}{42} < \frac{p}{q} < \frac{67}{97}$ folgt wegen

$$\frac{29}{42} < \frac{p}{q} \qquad \begin{array}{ll} 29q < 42p & (p, q \in \mathbb{N}) \\ 42p - 29q > 0 & (42p \in \mathbb{N} \text{ und } 29q \in \mathbb{N}) \\ 42p - 29q \geq 1 & \text{1 ist die erste natürliche Zahl,} \\ & \text{für die die Ungleichnug erfüllt sein kann.} \end{array}$$

wegen

$$\frac{p}{q} < \frac{67}{97} \qquad \begin{array}{l} 97p < 67q \\ 67q - 97p > 0 \\ 67q - 97p \geq 1 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcrcrl} 42p & - & 29q & \geq & 1 & | \cdot 97 \\ -97p & + & 67q & \geq & 1 & | \cdot 42 \\ \hline 4074p & - & 2813q & \geq & 97 & \\ -4074p & + & 2814q & \geq & 42 & \\ & & q & \geq & 137 & \end{array}$$

Schlussfolgerung: $q = 97$ ist das kleinstmögliche q!

12 Weihnachten in Diffusetien

Autor: Martin Weiser
Projekt: A1

12.1 Aufgabe

Im fernen Land Diffusetien wird, wenn Heiligabend der Weihnachtsmann kommt, traditionell ein Spiel zwischen Kindern und Erwachsenen gespielt, das in seiner streng befolgten Regelhaftigkeit geradezu ein Ritual ist. Diffusetien ist ein zwar sehr geselliges, aber auch kinderreiches Land (jede Familie besteht aus Eltern und zehn Kindern), und so hat es sich eingebürgert, dass angesichts beschränkter Platzverhältnisse immer nur drei Familien gemeinsam Weihnachten feiern.

An Heiligabend also stellen sich alle 36 Familienmitglieder in Form eines Weihnachtssterns auf, so daß jeder höchstens 6 Nachbarn hat. Der Weihnachtsmann steht in der Mitte und die Eltern an den Spitzen. Der Weihnachtsmann bringt einen ganzen Sack voll Zuckerperlen mit, die während der Runden des Spiels verteilt werden.

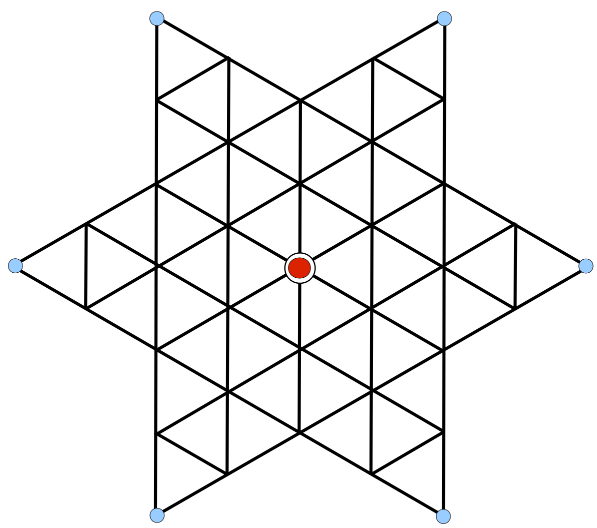


Abbildung 3: Spielaufstellung. Die blauen Spitzen werden von den Eltern eingenommen, in der Mitte steht der Weihnachtsmann. Die anderen Kreuzungspunkte werden von den Kindern besetzt.

Zu Beginn jeder Spielrunde prüft jeder Spieler, auch der Weihnachtsmann, wie viele Zuckerperlen er selbst hat. Nachdem dies geklärt ist, gibt jeder

Spieler genau ein Zehntel der zuvor festgestellten Anzahl an jeden seiner direkten Nachbarn ab (auch an den Weihnachtsmann, wenn er ein Nachbar ist). Die Zuckerperlen sind so fein und so viele, dass wir uns nicht mit der Frage beschäftigen wollen, ob das überhaupt geht, ohne Zuckerperlen zu zerteilen. Die Eltern — stets um die Gesundheit ihrer Sprösslinge besorgt — lassen alle Süßigkeiten, die ihnen in die Hände fallen, sofort verschwinden, und stehen daher zu Beginn einer jeden Runde ganz ohne Zuckerperlen da. Das Spiel endet, sobald die Kinder keine Lust mehr zum Weiterspielen haben. Während des Spiels ist der Verzehr von Zuckerperlen natürlich streng untersagt.
Wie hierzulande auch verbünden sich die Diffusetier Kinder nur zu gerne gegen ihre Eltern, wenn es Süßigkeiten zu erlangen gilt. Dementsprechend teilen sie alle Perlen, die sie am Spielende noch haben, brüderlich und schwesterlich unter sich auf. Und natürlich sind sich alle Kinder einig, wann sie die Lust am Spiel verlieren — nämlich nachdem sie das erste Mal insgesamt weniger Süßigkeiten haben, als in der Vorrunde.

Wie viele Runden werden gespielt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Das Spiel kommt gar nicht erst in Gang.
2. 1
3. 2
4. 3
5. 5
6. 7
7. 11
8. 13
9. 17
10. Das hängt von der Anzahl der Zuckerperlen beim Weihnachtsmann ab.

Projektbezug:
Das Diffusetier Weihnachtsspiel ist ein zwar einfaches, aber recht treffendes Modell für zeitabhängige Diffusionsprozesse, wie sie in vielen Anwendungsproblemen in Form partieller Differentialgleichungen auftreten. Insbesondere lässt sich so auch die Wärmeleitung beschreiben, was in den Projekten A1, C9 und F9 eine wichtige Rolle spielt. Auch die Art der Zuckerperlenverteilung ähnelt einem wichtigen Baustein der Simulation von Diffusionsprozessen.

12.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6: 7 Runden

Offenbar ist die Spielsituation sehr symmetrisch. So haben alle Kinder direkt neben dem Weihnachtsmann stets die gleiche Menge Zuckerperlen. Aufgrund der Symmetrie genügt es, die in Abbildung 4 numerierten Spieler zu betrachten. Das läßt sich auch so auffassen, daß es auf dem Spielfeld nur fünf verschiedene äquivalenzklassen von Spielern gibt. Diese Vereinfachung reduziert die Anzahl der zu betrachtenden Unbekannten schon mal von 30 auf 5. In

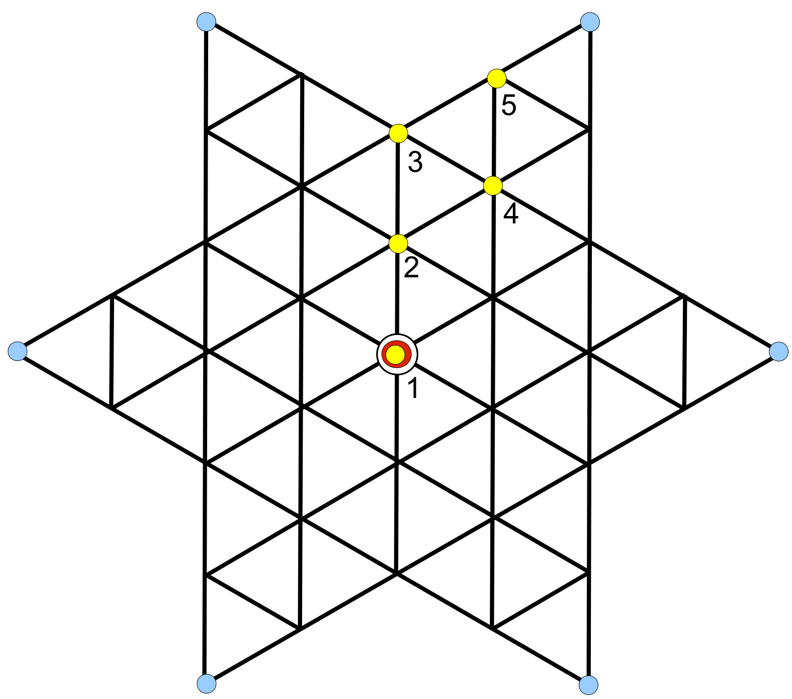


Abbildung 4: Zu betrachtende Mitspieler und ihre Numerierung.

Runde i ändert sich die Zuckerperlenmenge a_k^i der Spieler k, $k = 1, \ldots, 5$

gemäß

$$\begin{aligned}
a_1^{i+1} &= a_1^i - \frac{6}{10}a_1^i + \frac{6}{10}a_2^i \\
a_2^{i+1} &= a_2^i - \frac{4}{10}a_2^i + \frac{1}{10}a_1^i + \frac{1}{10}a_3^i + \frac{2}{10}a_4^i \\
a_3^{i+1} &= a_3^i - \frac{5}{10}a_3^i + \frac{1}{10}a_2^i + \frac{2}{10}a_4^i + \frac{2}{10}a_5^i \\
a_4^{i+1} &= a_4^i - \frac{6}{10}a_4^i + \frac{2}{10}a_2^i + \frac{2}{10}a_3^i + \frac{2}{10}a_5^i \\
a_5^{i+1} &= a_5^i - \frac{2}{10}a_5^i + \frac{1}{10}a_3^i + \frac{1}{10}a_4^i.
\end{aligned} \tag{1}$$

Dabei wird berücksichtigt, dass jeder Spieler einerseits an seine Nachbarn etwas abgeben muss, gleichzeitig aber auch wieder etwas erhält. (Die hochgestellten Zahlen geben den Rundenindex an und sind keine Potenzen!) Ausgehend von diesem Schritt kann man unterschiedlich weiterrechnen. Ohne Hilfsmittel aus der Linearen Algebra kommt man um das Rechnen nicht herum. Mit nur 5 Unbekannten ist das aber noch überschaubar. Was noch zu betrachten ist, ist der Anteil an Zuckerperlen, der bei den Kindern ist. Dieser ist in Runde i durch $z^i = 6a_2^i + 6a_3^i + 6a_4^i + 12a_5^i$ gegeben, weil der Weihnachtsmannanteil a_1^i ja nicht mit zu zählen ist. Nimmt man an, dass der Zuckerperlenanteil zu Beginn beim Weihnachtsmann 1 und überall sonst 0 ist, dann ergibt sich in den nachfolgenden Runden das Folgende.

Runde i	0	1	2	3	4	5	6	7
a_1^i	1	0,4	0,22	0,148	0,1114	0,08950	0,074992	0,0647482
a_2^i	0	0,1	0,10	0,087	0,0749	0,06532	0,057919	0,0521727
a_3^i	0	0,0	0,01	0,019	0,0248	0,02805	0,029681	0,0303510
a_4^i	0	0,0	0,02	0,030	0,0338	0,03486	0,034770	0,0341926
a_5^i	0	0,0	0,00	0,003	0,0070	0,01076	0,013823	0,0161212
z^i	0	0,6	0,78	0,852	0,8850	0,89850	0,900096	0,8937522

Leicht erkennt man, dass in Runde 6 das Maximum von etwas mehr al 90% erreicht wird und die Kinder in Runde 7 erstmalig weniger Zuckerperlen bekommen und mit dem Spiel aufhören.

Mit wahrscheinlich nicht in der Schule vermittelten Methoden aus der Linearen Algebra können wir die Lösung deutlich eleganter erhalten.
Die Spielvorschrift in jeder Runde (1) läßt sich als Matrix-Vektor-Multiplikation $a^{i+1} = (I + \frac{1}{10}A)a^i$ schreiben. Dabei ist I die Einheitsmatrix und

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 6 & & & \\ 1 & -4 & 1 & 2 & \\ & 1 & -5 & 2 & 2 \\ & 2 & 2 & -6 & 2 \\ & & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sehen wir uns die Eigenwerte und Eigenvektoren der Iterationsmatrix $M = I + \frac{1}{10}A$ genauer an. Es gilt $MV = V\Lambda$ mit der Diagonalmatrix $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda)$ der Eigenwerte

$$\lambda = [0.96922, 0.74028, 0.15224, 0.46108, 0.27719]$$

und der invertierbaren Eigenvektormatrix

$$V = \begin{bmatrix} 0.522371 & 0.803478 & 0.837463 & -0.810660 & -0.838144 \\ 0.495574 & 0.455674 & -0.345820 & -0.082526 & 0.171561 \\ 0.430123 & -0.126608 & -0.102554 & 0.442500 & -0.391913 \\ 0.438632 & -0.018833 & 0.406771 & 0.241403 & 0.338117 \\ 0.322693 & -0.361109 & -0.055538 & -0.286248 & 0.012723 \end{bmatrix}.$$

Wählen wir für a^i die Darstellung $a^i = Vb^i$ mit einem passenden Koeffizientenvektor b^i, so gilt offenbar $Vb^{i+1} = a^{i+1} = Ma^i = MVb^i = V\Lambda b^i$. Rekursiv gilt daher $a^i = V\Lambda^i b^0 = V\Lambda^i V^{-1}a^0$.
Zu Beginn gilt $a_1^0 = 1$ und $a_k^0 = 0$ für $k > 1$. Die nach Runde i im Besitz der Kinder befindliche Zuckerperlenmenge ist $z^i = [0, 6, 6, 6, 12]a^i$. Definieren wir

$$l = [0, 6, 6, 6, 12]V = [12.05829, -2.47191, -0.91608, 0.17328, 0.85927]$$

und

$$r = V^{-1}a^0 = [0.099302, 0.226045, 0.333414, -0.252875, -0.336802]^T,$$

so erhalten wir

$$z^i = l\Lambda^i r = \sum_{k=1}^{5} l_k r_k \lambda_k^i,$$

woraus sich einfach berechnen läßt, daß die Kinder nach 6 Spielrunden mit gut 90% den maximalen Zuckerperlenanteil ihr eigen nennen und nach der 7. Runde aufhören.

13 Die Sache mit dem Pfosten

Autor: Falk Ebert

13.1 Aufgabe

Eisfußball - da kann der Weihnachtsmann nur lachen. Diese Sportart wird von seinen Wichteln seit Generationen praktiziert. Deutschland als Neuling in dieser Disziplin spielt ja noch auf kleine Eishockey-Tore. In Spitzbergen und nördlich davon wird aber auf normale rechteckige Fußballtore geschossen. Diese sind bis zur Querlatte $2,44$ m hoch und sie haben innen eine Breite von $7,32$ m. Die Pfosten und die Querlatte sind Zylinder aus Aluminium mit einem Durchmesser von 12 cm. Gespielt wird mit kälteunempfindlichen Bällen aus synthetischem Rentierleder mit einem Umfang von 70 cm.
Auch nördlich des Polarkreises gilt: „Das Runde muss ins Eckige!". Was passiert aber, wenn das Runde *ans* Eckige geht? Genauer: wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ball, der an den Pfosten oder die Querlatte geht, doch noch *im* Tor landet?

Für alle Schlaumeier und Querdenker seien die folgenden Hinweise vermerkt:

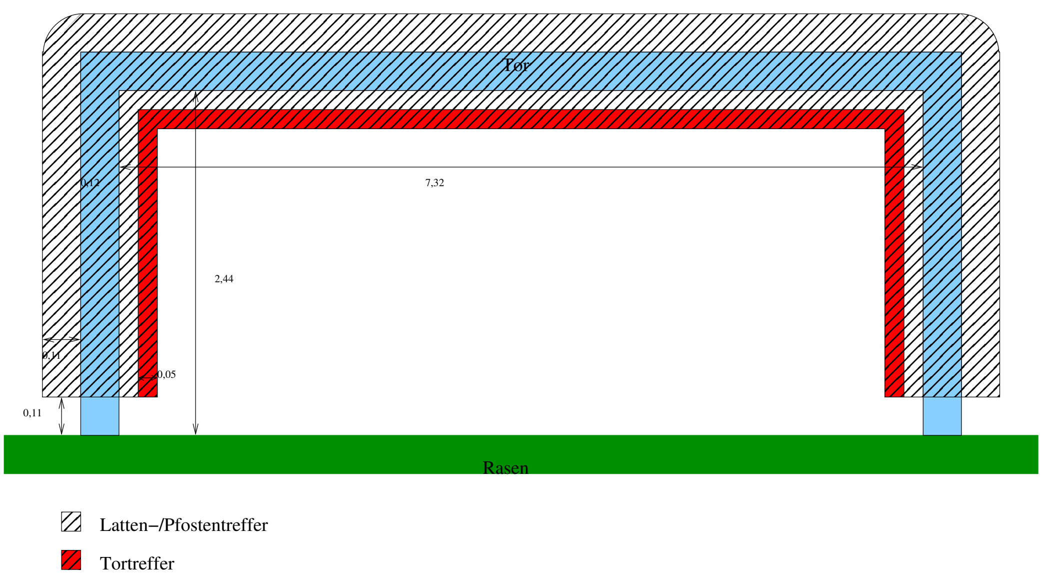
- Es werden nur Schüsse auf das Tor betrachtet, welche senkrecht zur Torebene einfallen.
- Es gibt keinerlei bevorzugte Schussbahn. Jede Bahn senkrecht zur Torebene hat die gleiche Wahrscheinlichkeit aufzutreten.
- Die Bälle fliegen absolut langweilig geradlinig und haben keinerlei Drall.
- Ein abprallender Ball verhält sich physikalisch sinnvoll. Das heißt: „Einfallswinkel=Reflexionswinkel". Die Verformung/Eindrückung der Oberfläche ist dabei zu vernachlässigen.
- Ein abprallender Ball führt dann zu einem Tor, wenn seine weitere Bewegungsrichtung sowohl weiter *hinter* die Torlinie geht als auch ins Innere des Tors.

Antwortmöglichkeiten:

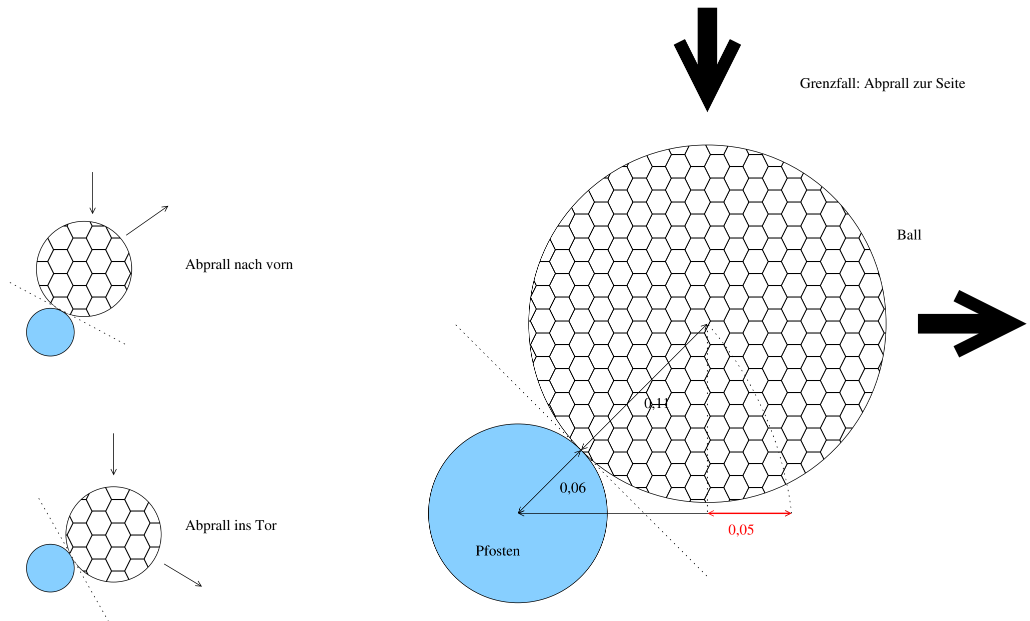
1. 3%
2. 10%
3. 12%
4. 14%
5. 21%
6. 25%
7. 29%
8. 38%
9. 49%
10. 52%

13.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4: 14%
Ein kugelförmiger Ball mit einem Umfang von $0,7\,m$ hat einen Radius von $0,7\,m/(2\pi) \approx 0,11\,m$. Das heißt, dass der Mittelpunkt des Balls sich dem Pfosten auf $11\,cm$ nähern muss, sonst kommt es nicht zu einem Pfostentreffer. Ein Ball, der sich in der Torebene mehr als $11\,cm$ vom Pfosten befindet, fliegt also entweder vorbei oder ins Tor, ohne zu touchieren. Dieser Fall interessiert uns bei der Aufgabenstellung aber nicht.
Ein weiterer Aspekt ist, dass der Mittelpunkt des Balles sich natürlich auch mindestens $11\,cm$ über dem Boden befinden muss (wenn wir mal ausschließen, dass er Furchen in den Rasen zieht). Die mögliche Fläche in der Torebene, in der es zu einem Zusammenstoß von Tor und Ball kommt, ist in der folgenden Graphik schraffiert dargestellt.



Darin rot eingezeichnet ist auch der Bereich, in dem der Ball den Pfosten/die Querlatte weit genug innen trifft, so dass er ins Innere des Tors abprallt. Um die Breite des roten Bereichs zu bestimmen, werfen wir eine Blick auf die folgende Graphik.



Hier sind 3 mögliche Fälle angedeutet, wie der Ball auf den zylindrischen Pfosten auftreffen kann. Wenn der Ball zu sehr mittig auf den Pfosten trifft, prallt er in die Richtung zurück, aus der er kam (Fall links oben). Nur wenn er weit genug seitlich auftrifft, geht die Flugbahn weiter ins Innere des Tors (Fall links unten). Der Grenzfall ist der, in dem der Ball im rechten Winkel zur Einfallsrichtung abprallt. Dies tritt genau dann ein, wenn die Berührungsebene zwischen Ball und Pfosten einen Winkel von 45 Grad gegenüber der Einfallsrichtung hat. Die rot eingezeichnete Strecke s ist die Entfernung zwischen der Position, in der der Ball gerade noch den Pfosten berühren würde und der Position, in der es zu einem rechtwinkligen Abprallen kommt. Bestimmt wird s mit

$$s = (11\,cm + 6\,cm) - \cos(45^\circ)(11\,cm + 6\,cm) \approx 5\,cm.$$

Was jetzt noch bleibt, ist die rot schraffierte Fläche A_{Tor} zur gesamten schraffierten Fläche $A_{Treffer}$ ins Verhältnis zu setzen.

$$\begin{aligned}
A_{Treffer} &= \underbrace{(7,32m + 2 \cdot 0,12m + 2 \cdot 0,11m) \cdot (2,44m + 0,12m)}_{\text{äußeres begrenzendes Rechteck}} \\
&\quad - \underbrace{(7,32m - 2 \cdot 0,11m) \cdot (2,44m - 2 \cdot 0,11m)}_{\text{inneres begrenzendes Rechteck}} \\
&\quad \underbrace{-2 \cdot (0,11m)^2 + 2\frac{\pi}{4} \cdot (0,11m)^2}_{\text{abgerundete Ecken}} \\
&\approx 4,15m^2, \\
A_{Tor} &= \underbrace{(7,32m - 2 \cdot 0,11m + 2 \cdot 0,05m) \cdot (2,44m - 2 \cdot 0,11m + 0,05m)}_{\text{äußeres begrenzendes Rechteck der roten Fläche}} \\
&\quad - \underbrace{(7,32m - 2 \cdot 0,11m) \cdot (2,44m - 2 \cdot 0,11m)}_{\text{inneres begrenzendes Rechteck der roten Fläche}} \\
&\approx 0,58m^2.
\end{aligned}$$

Und $A_{Tor}/A_{Treffer} \approx 14\%$. Eine Rechnung mit höherer Genauigkeit der Zwischenergebnisse ändert das letztendliche Resultat nur unwesentlich.

14 Der böse Kobold

Autor: Alexander Weiß
Projekt: E1

14.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann will dieses Jahr hart durchgreifen. Kinder, die sich im Laufe des Jahres schlecht benommen haben, sollen keine Geschenke kriegen. Um zu ermitteln, welche Kinder dies betrifft, hat der Weihnachtsmann über das Benehmen eines jeden Kindes eine Akte angelegt und nun zehn Elfen damit beauftragt zu entscheiden, welche Kinder zu böse waren, um Geschenke zu bekommen.
Die zehn Elfen teilen die Aktenberge gleichmäßig unter sich auf. Vor lauter Eifer bemerkt aber keiner, dass der zehnte Elf in Wahrheit ein böser Kobold ist, der es am liebsten hätte, wenn gar kein Kind Geschenke kriegen würde. Daher erklärt er alle Kinder, deren Akten er zu bearbeiten hat, für böse. Erst nachdem der Weihnachtsmann von seiner Bescherungstour zurück ist, erfährt er vom Saboteur, den die restlichen Elfen inzwischen entdeckt und überwältigt haben. Unter der Drohung, dass es nie wieder Geschenke für ihn geben könnte, wenn er nicht kooperativ sei, gesteht der Kobold schließlich seine perfide Tat.
Dem Weihnachtsmann bleibt nur noch, den Rechenelf darum zu bitten auszurechnen, wieviel Prozent aller Kinder, die nun keine Geschenke bekommen haben, eigentlich welche verdient hätten. Dabei kann man davon ausgehen, dass im Allgemeinen zwei Prozent aller Kinder nicht brav genug für Geschenke sind.
Auf welche (gerundete) Zahl kommt der Rechenelf?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1 %
2. 2 %
3. 9 %
4. 10 %
5. 20 %
6. 37 %
7. 62 %
8. 77 %

9. 83 %
10. 98 %

Projektbezug:
Die Preise vieler Güter werden heutzutage durch Angebot und Nachfrage bestimmt. Diese Preisermittlung ist allerdings auch für Spekulanten attraktiv, die nicht am Gut selbst interessiert sind, sondern darauf spekulieren, dass Schwankungen in Angebot und Nachfrage zu Preisbewegungen führen, die es ihnen ermöglichen, die Güter mit Gewinn weiterzuhandeln. Mit ihrem Handel erzeugen Spekulanten allerdings selbst Preisbewegungen und die daraus resultierenden zeitlichen Preisverläufe sind von großer statistischer Komplexität.
Im Projekt E1 simulieren wir Handelsmärkte und versuchen, statistische Merkmale, die aus realen Preisverläufen gewonnen wurden, durch das Verhalten der Handelsakteure zu erklären. Hierzu ist es natürlich zuallerst wichtig zu klären, welche statistischen Merkmale es gibt. Die Aufgabe verdeutlicht, dass man bei statistischen Untersuchungen immer größte Sorgfalt walten lassen muss, da die Ergebnisse nicht unbedingt intuitiv sein müssen.

14.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9: 83%

Die Aufgabe ist typisch für die Bayessche Statistik. Zwei Prozent der Kinder sind tatsächlich böse und werden von den neun Elfen als auch vom Kobold als böse deklariert. Andererseits sind 98 Prozent der Kinder lieb, allerdings haben davon zehn Prozent der Kinder das Pech, vom Kobold auch als böse eingestuft zu werden. Der Anteil der eigentlich lieben Kinder, die aber als ungezogen eingestuft wurden, in Bezug auf alle als böse eingestuften Kinder ist also einfach:

$$\frac{0,098}{0,098 + 0,02} \approx 0,83.$$

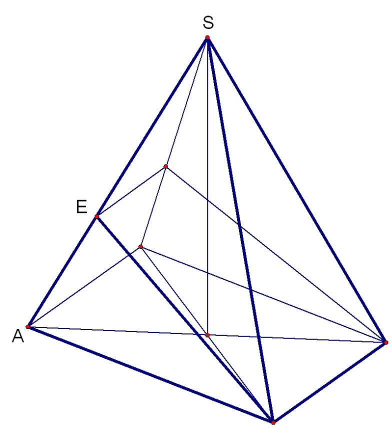
d.h. ca. 83% der vom bösen Kobold eingeordneten Kinder wurden falsch eingestuft.

15 Der verzwickte Baustein

Autoren: Ingmar Lehmann, Elke Warmuth
Projekt: Z1.2

15.1 Aufgabe

In der Geschenkemanufaktur des Weihnachtsmannes wird jedes Jahr angestrengt über neue Geschenke nachgedacht.
Traditio, einer der ältesten Geschenke-Entwickler, besinnt sich auf die guten alten Holzbauklötze, die schon in Vergessenheit geraten sind. Er will die Klötze so herstellen, dass man aus ihnen geometrische Grundkörper zusammenstellen kann. Ein Satz an Bausteinen soll wie folgt hergestellt werden: Eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche soll durch einen ebenen Schnitt durch eine Grundkante in zwei inhaltsgleiche Teilkörper zerlegt werden:



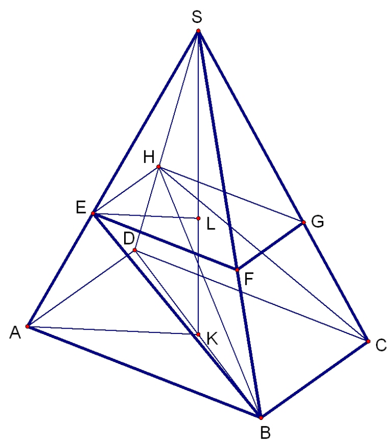
Gesucht ist das Verhältnis, in dem der Punkt E die Strecke $\overline{AS}$ teilt.

Antwortmöglichkeiten:

1. $\overline{AE} = \dfrac{1}{2}\ \overline{AS}$
2. $\overline{AE} = \dfrac{1}{3}\ \overline{AS}$
3. $\overline{AE} = \dfrac{1}{4}\ \overline{AS}$
4. $\overline{AE} = \dfrac{1}{5}\ \overline{AS}$
5. $\overline{AE} = \dfrac{3}{5}\ \overline{AS}$
6. $\overline{AE} \approx 0,3820 \cdot \overline{AS}$
7. Es gibt kein eindeutiges q, so dass gilt $\overline{AE} = q \cdot \overline{AS}$
8. $\overline{AE} \approx 0,7071 \cdot \overline{AS}$
9. $\overline{AE} \approx 0,8660 \cdot \overline{AS}$
10. $\overline{AE} \approx 1,2990 \cdot \overline{AS}$

15.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6: $\overline{AE} \approx 0,3820 \cdot \overline{AS}$



Die Streckenlängen von $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{AS}$ bzw. $\overline{KS}$ seien a, b, l bzw. h. Dann gibt es ein q mit $0 < q < 1$, so dass

$$\overline{LS} = q \cdot h,\ \overline{EH} = q \cdot a,\ \overline{AE} = \overline{DH} = (1-q)l.$$

Weiterhin gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2 = l^2.$$

Dies vereinfacht sich zu $4h^2 + b^2 = 4l^2 - a^2 \qquad (*)$.

Der untere Teilkörper $ABCDEH$ wird zerlegt in die schiefe Pyramide $BCDH$ mit der Spitze H und die schiefe Pyramide $ADHEB$ mit der Spitze B. Wir berechnen zunächst die Volumina dieser beiden Pyramiden:

Pyramide $BCDH$: Die Grundfläche ist das Dreieck BCD mit dem Flächeninhalt $\frac{ab}{2}$, die Höhe $\overline{KL}$ hat die Länge $(1-q)h$. Somit beträgt ihr Volumen $\dfrac{1}{3}\dfrac{ab}{2}(1-q)h$.

Pyramide $ADHEB$: Die Grundfläche ist das Trapez $ADHE$ mit der Höhe

$h_1 = (1-q)\dfrac{\sqrt{4l^2-a^2}}{2}$ und dem Flächeninhalt $h_1\, a\, \dfrac{q+1}{2}$. Die Höhe der Pyramide ist gleich dem Abstand des Punktes B von der durch A, D und H aufgespannten Ebene ε. Um diesen Abstand zu bestimmen, legen wir ein rechtwinkliges xyz-Koordinatensystem so, dass der Ursprung der Punkt D ist, die Richtung der x-Achse durch den Vektor $\overrightarrow{DA}$ und die Richtung der y-Achse durch den Vektor $\overrightarrow{DC}$ bestimmt wird. Der Punkt S hat die Koordinaten $S(\frac{a}{2}|\frac{b}{2}|h)$. Die Ebene ε wird durch die Vektoren $\overrightarrow{DA}$ und $\overrightarrow{DS}$ aufgespannt. Ein Normalenvektor zu ε ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2h \\ b \end{pmatrix}$. Damit können wir den Abstand $d(B,\varepsilon)$ von B zu ε mit Hilfe der Hesseschen Normalform der Ebenengleichung bestimmen und erhalten $d(B,\varepsilon) = \dfrac{2hb}{\sqrt{4h^2+b^2}}$. Somit beträgt das Volumen der Pyramide

$$\frac{1}{3}h_1\, a\, \frac{q+1}{2}\frac{2hb}{\sqrt{4h^2+b^2}}$$

bzw. nach Ersetzen von h_1

$$\frac{1}{3}(1-q)\frac{\sqrt{4l^2-a^2}}{2}\, a\, \frac{q+1}{2}\frac{2hb}{\sqrt{4h^2+b^2}}.$$

Dieser Ausdruck kann – unter anderem wegen (*) – vereinfacht werden zu:

$$\frac{1}{3}\frac{1-q^2}{2}abh.$$

Wir addieren die beiden Volumina und erhalten für das Volumen des unteren Teilkörpers

$$\frac{1}{3}\frac{ab}{2}(1-q)h + \frac{1}{3}\frac{1-q^2}{2}abh = \frac{1}{6}(2-q-q^2)abh.$$

Da dieses Volumen gerade halb so groß wie das Volumen des ganzen Körpers sein soll, erhalten wir die Bedingung

$$\frac{1}{6}(2-q-q^2)abh = \frac{1}{2}\frac{1}{3}abh.$$

Diese ist äquivalent zu $q^2 + q - 1 = 0$ und die positive Lösung $q_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ dieser Gleichung führt zu dem Verhältnis $\overline{SE} : \overline{EA} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, was den Goldenen Schnitt bedeutet. Und für das gesuchte Längenverhältnis gilt dann $\overline{AE} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\overline{AS} \approx 0,3820 \cdot \overline{AS}$.

16 Weihnachten jetzt noch gerechter: nicht mehr nur einmal im Jahr!

Autoren: Madeleine Theile, Andreas Wiese

16.1 Aufgabe

Nach dem vergangenen Weihnachtsfest haben die Weihnachtsmänner festgestellt, dass wieder alle Kinder auf der Welt Geschenke bekommen haben, obwohl nicht alle gleich artig gewesen sind. Es gab Fälle, dass solche Kinder, die das ganze Jahr über ungezogen waren, trotzdem tolle Geschenke wie eine große Autorennbahn bekommen hatten. Und noch viel mehr ärgerte es die Weihnachtsmänner, dass sich viele gar nicht für ihre Geschenke bedankt haben. Die ganz dreisten unter den Kindern haben ihre tollen Sachen sogar gleich am nächsten Tag bei eBay verkauft!

Doch damit ist jetzt Schluss! Um für mehr Gerechtigkeit zu sorgen, überlegen sich die Weihnachtsmänner, dass ab dem 01. Januar 2010 Weihnachten nicht mehr genau alle 365 Tage am 24. Dezember stattfinden soll. Vielmehr soll der Turnus in jedem Land davon abhängen, wie artig die dortigen Kinder sind. Die Kinder in Chaoslandia sind meistens sehr artig, deswegen findet Weihnachten dort ab jetzt alle 146 Tage statt. Die Kinder in Ganzbösland sind nicht besonders nett, daher ändert sich für sie nichts, sie bekommen weiterhin nur alle 365 Tage Geschenke. In Immernettseiland gibt es die freundlichsten Kinder, sie besucht der Weihnachtsmann alle 52 Tage. Streichspielhausen wird alle 208 Tage beschenkt, die Kinder in Angeberlandia dürfen sich doppelt so häufig, nämlich alle 104 Tage, freuen. Lüttland wird alle 255 Tage beschenkt, in Wirrland muss man 231 Tage auf das nächste Weihnachten warten. Australopolis hat es da besser, hier gibt es schon nach jeweils 208 Tagen neue Geschenke. In Seltenbravland schließlich ist es nach jeweils 270 Tagen wieder soweit. (Nur zum Sicherstellen: Alle x Tage heißt, dass Weihnachten an einem Tag stattfindet und dann an $x - 1$ Tagen nicht, bevor wieder Weihnachten gefeiert wird.)

Bisher war jeder Weihnachtsmann für genau ein Land verantwortlich, wo er zwischen einem und zwei Tagen benötigt hat, um die Geschenke an alle Kinder zu verteilen. Nun haben die Weihnachtsmänner aber festgestellt, dass durch den neuen Rhythmus gar nicht mehr so viele von ihnen gebraucht werden, so dass die nicht benötigten Weihnachtsmänner auf eine neue Aufgabe als Weihnachtswichtel oder Osterhase umschulen können. Jeder noch aktive Weihnachtsmann beliefert damit eventuell in Zukunft mehr als nur ein Land - aber es bleibt dabei, dass sich kein Weihnachtsmann die Belieferung eines Landes mit einem anderen Weihnachtsmann teilt oder sich dabei abwechselt. Auch zukünftig muss also der ausliefernde Weihnachtsmann einen Tag ein-

planen, um die Kinder von Chaoslandia oder Lüttland zu beschenken. Für Ganzbösland sind zwei Tage notwendig, weil dort mehr Kinder leben. Auch in Immernettseiland nimmt sich der Weihnachtsmann viel Zeit und kommt ebenso wie in Streichspielhausen, Angeberlandia, Wirrland, Seltenbravland und Australopolis auf zwei Tage Auslieferzeit.
Nun wollen die Weihnachtsmänner noch festlegen, wie viele von ihnen nach dem 01. Januar 2010 noch im Dienst bleiben müssen, damit an jedem Weihnachten für jedes Land ein Weihnachtsmann verfügbar ist, der alle Kinder mit Geschenken versorgt. Der Tag, an dem zum ersten Mal das neue Weihnachten stattfinden soll kann noch gewählt werden. Er sollte aber innerhalb der neuen Weichnachtsabstandszeit ab dem 01. Januar 2010 stattfinden (in Immernettseiland also innerhalb der ersten 52 Tage).

Wie viele Weihnachtsmänner erfordert die neue Regelung mindestens?

Antwortmöglichkeiten:

1. Aufgabe nicht lösbar
2. Neun Weihnachtsmänner
3. Acht Weihnachtsmänner
4. Sieben Weihnachtsmänner
5. Sechs Weihnachtsmänner
6. Fünf Weihnachtsmänner
7. Vier Weihnachtsmänner
8. Drei Weihnachtsmänner
9. Zwei Weihnachtsmänner
10. Ein Weihnachtsmann

Hinweis:
Es ist hilfreich, zuerst einmal herauszufinden, wie viele Weihnachtsmänner benötigt werden, wenn die Kinder so nett waren, dass in den Ländern z.B. alle 2, 3, 4, 5 oder 8 Tage Weihnachten stattfindet und die Auslieferzeit jeweils einen Tag beträgt.
Als Beispiel kann man zwei (nicht in der Aufgabe betrachtete) Länder mit einem Turnus von drei und acht Tagen heraus. Die beiden Länder müssen von zwei unterschiedlichen Weihnachtsmännern beliefert werden, weil sonst nach spätestens 24 Tagen Weihnachten in beiden Ländern auf denselben Tag fällt. Auch das Verschieben der Startzeit in einem der beiden Länder führt auf jeden Fall dazu, dass früher oder später in beiden Ländern gleichzeitig Weihnachten stattfindet.
Für die zwei Länder mit einem Turnus von zwei und acht Tagen reicht insgesamt ein Weihnachtsmann aus. Für das erste Land wird der Starttermin für das neue Weihnachten auf den zweiten Tag gesetzt, im zweiten Land findet das erste neue Weihnachten schon am ersten Tag statt.

Schalttage sind übrigens immer frei und können bei der Weihnachtsberechnung getrost ignoriert werden.

16.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7: 4 Weihnachtsmänner

Da die Aufgabenstellung aus dem periodic real-time scheduling stammt, werden im folgenden die Weihnachten als Jobs bezeichnet und die Anzahl von Tagen, nach denen sich Weihnachten in einem Land wiederholt, als Periode. Die Auslieferdauer heißt Bearbeitungszeit und die Belieferung durch einen Weihnachtsmann wird als Bearbeitung auf einer Maschine bezeichnet.
Als Vorüberlegung versuchen wir einmal zwei Jobs mit Periodenlängen 4 und 5 von einer Maschine bearbeiten zu lassen und wählen den ersten und den zweiten Tag als Starttage:

A	B			A		B		A			B	A				A B			

Das geht schief, am 17. Tag müssten beide Jobs gleichzeitig ausgeführt werden. Auch wenn man die Offsets (die ersten festzulegenden Starttage) ändert, wird es immer einen Tag geben, an dem beide Jobs gleichzeitig ausgeführt werden müssten. Das liegt daran, dass der größte gemeinsame Teiler (ggT) von 4 und 5 gerade 1 ist.
Im Allgemeinen gilt, dass zwei Jobs mit Periodenängen p_A und p_B auf jeden Fall irgendwann kollidieren, wenn der größte gemeinsame Teiler (ggT) der Periodenlängen 1 ist (also $ggt\,(p_A, p_B) = 1$). Das sieht man so ein: Wir gehen davon aus, dass Job A zum ersten Mal an Tag o_A und Job B zum ersten Mal an Tag o_B startet. Dann gibt es laut dem chinesischen Restklassensatz eine Zahl x mit

$$x \equiv o_A \bmod p_A$$

und

$$x \equiv o_B \bmod p_B$$

Das ist äquivalent dazu, dass es natürliche Zahlen k_A und k_B gibt, sodass $k_A \cdot p_A + o_A = x = k_B \cdot p_B + o_B$ gilt. Das bedeutet wiederum, dass die k_A-te Ausführung von Job 1 mit der k_B-ten Ausführung von Job 2 kollidiert.
Es ist also offenbar eine gute Idee, die Jobs so zu gruppieren, dass der ggT der Periodenlängen möglichst groß ist. Im folgenden Beispiel hat Job A die Periode 4, Job B hat die Periode 6, und beide Jobs haben eine Bearbeitungsdauer von jeweils 1.

A	B			A			B	A				A	B			A			B	A			

Das funktioniert und im Bild sieht man, dass sich nach dem Zeitpunkt $12 = kgV(4,6)$ der Ablauf der ersten zwölf Tage wiederholt.
Was passiert nun, wenn die Jobs nicht alle eine Bearbeitungszeit von einem Tag haben, sondern mehr Zeit benötigen? Im folgenden Beispiel hat Job A eine Bearbeitungsdauer von 1 und Job B eine Bearbeitungsdauer von 2 (Periodenlängen sind wie oben 4 bzw. 6).

A	B	B		A			B	A B				A	B	B		A			B	AB			

A		B	B	A				AB	B			A		B	B	A				AB	B		

B	B	A				AB	B			A		B	B	A				AB	B			A	

B	B		A			B	AB				A	B	B		A			B	AB				A

Egal wie die Offsets gewählt werden (hier sind nur vier der vielen Kombinationen für die Offsets angegeben) wird es immer einen Tag geben, an dem zwei Jobs kollidieren. Das liegt daran, dass der ggT der Periodenlängen 2 beträgt, die Gesamtbearbeitungszeit aber bei 3 Tagen liegt, also echt größer ist.
Im Allgemeinen gilt folgendes: Falls die Periodenlängen p_A und p_B nicht teilerfremd sind, dann gibt es eine Lösung x wie oben angegeben (und damit einen Kollisionstag) nach dem chinesischen Restklassensatz genau dann, wenn $o_A \equiv o_B \bmod ggt(p_A, p_B)$ ist. Wenn nun ein Weihnachten zwei Tage dauert, dann ist das äquivalent dazu, dass es zwei genau hintereinander liegende Offsets bekommt. Wenn im obigen Beispiel also Job B zwei Tage benötigt, dann bekommt er die Offsets o_B und o'_B zugewiesen. Da $o_B \neq o'_B$ brauchen wir also, dass $o_A \bmod ggt(p_A, p_B)$, $o_B \bmod ggt(p_A, p_B)$, und $o'_B \bmod ggt(p_A, p_B)$ paarweise verschieden sind. Das geht aber nur, wenn $ggt(p_A, p_B) \geq 3$.
Nach diesen Vorüberlegungen wollen wir uns nun die Jobs aus der Aufgabe anschauen. Die Primfaktorzerlegung der Periodendauern unter Zusammenfassung gleicher Primfaktoren lautet wie folgt:

- Chaoslandia $146 = 2 \cdot 73$, Dauer 1 Tag
- Ganzbösland: $365 = 5 \cdot 73$, Dauer 2 Tage
- Immernettseiland: $52 = 4 \cdot 13$, Dauer 2 Tage
- Streichspielhausen: $208 = 16 \cdot 13$, Dauer 2 Tage
- Angeberlandia: $104 = 8 \cdot 13$, Dauer 2 Tage
- Lüttland: $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, Dauer 1 Tag
- Wirrland: $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$, Dauer 2 Tage
- Australopolis: $208 = 16 \cdot 13$, Dauer 2 Tage
- Seltenbravland: $270 = 2 \cdot 5 \cdot 27$, Dauer 2 Tage

Welche Jobs können nun bei der Wahl eines geeigneten Offsets zur Abarbeitung durch einen Weihnachtsmann zusammen gruppiert werden, ohne jemals eine Kollision zu verursachen?

- Die Jobs Chaoslandia und Ganzbösland können zusammen gruppiert werden, indem Chaoslandia zum ersten Mal am 1. Januar (Offset $o_A = 0$) und Ganzbösland zum ersten Mal am 2. und 3. Januar (Offsets $o_B = 1$ und $o'_B = 2$) Weihnachten feiert. Warum klappt das? Falls es einen Tag x gäbe, an dem z.B. der erste Ausführungstag von Job B mit Job A zusammenfallen würde, dann würde gelten:

  $$o_A + k_A \cdot p_A = x = o_B + k_B \cdot p_B$$

  für passende natürliche Zahlen k_1 und k_2 und deswegen

  $$o_A + k_A \cdot p_A \bmod 73 = o_A = o_B = o_B + k_B \cdot p_B \mathrm{mod} 73$$

  Da $o_A \neq o_B$ kann das aber nicht passieren, weswegen so ein Tag x nicht existiert.

- Die Jobs Immernettseiland, Streichspielhausen, Angeberlandia und Australopolis können zusammen gruppiert werden, indem Immernettseiland am 1. und 2. Januar, Streichspielhausen am 3. und 4. Januar, Angeberlandia am 5. und 6. Januar und Australopolis am 7. und 8. Januar zum ersten Mal Weihnachten feiern. Beim ersten neuen Weihnachten kollidieren sie nicht. Mit gleicher Argumentation wie oben kollidieren sie aber auch später nicht mehr.

- Lüttland und Wirrland können zusammen gruppiert werden, indem Lüttland am 1. Januar und Wirrland zum ersten Mal am 2. und 3. Januar Weihnachten feiert.

- Seltenbravland bildet eine eigene Gruppe und feiert am 1. Januar zum ersten Mal das neue Weihnachten.

Warum kommt man nicht mit weniger Weihnachtsmännern aus?

- In einer optimalen Lösung muss Chaoslandia auf irgendeiner Maschine bearbeitet werden. Der einzige Job, den wir noch auf diese Maschine hinzugefügen können, ist Ganzbösland (alle anderen Jobs scheiden aufgrund der obigen Vorüberlegungen aus). Dies können wir wie oben beschrieben erledigen und anschließend beide Länder von der weiteren Betrachtung ausschließen.

- In einer optimalen Lösung wird Wirrland auf einer Maschine bearbeitet. Der Job ist bis auf Lüttland teilerfremd zu allen weiteren Jobs. Lüttland kann also wie weiter oben beschrieben noch zur Maschine hinzugefügt werden, und die beiden gruppierten Länder können von weiterer Betrachtung ausgeschlossen werden.

- In einer optimalen Lösung muss Seltenbravland auf einer Maschine bearbeitet werden. In der verbliebenen Menge von Jobs hat Seltenbravland einen ggT von 2 mit allen weiteren Jobs. Da Seltenbravland allein bereits eine Bearbeitungsdauer von zwei Tagen hat, und die Gesamtbearbeitungszeit von zwei Jobs auf einer Maschine (nach unseren Vorüberlegungen) den ggT der beiden Jobs nicht überschreiten darf, muss Seltenbravland einer eigenen Maschine zugewiesen werden, zu der kein weiterer Job hinzugefügt werden kann.

- Damit verbleiben noch Immernettseiland, Steichspielhausen, Angeberlandia und Australopolis, welche gemeinsam auf einer Maschine bearbeitet werden können. Die Zuweisung mit Offsets funktioniert wie oben beschrieben.

17 Ein neues Haus für den Weihnachtsmann

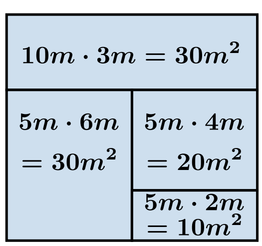
Autor: Armin Fügenschuh
Projekt: B20

17.1 Aufgabe

Das ganze Jahr über ist das Haus des Weihnachtsmannes über und über vollgestellt. Aber jetzt, kurz vor Weihnachten, platzt es aus allen Nähten. Sobald das letzte Geschenk ausgeliefert ist, möchte sich der Weihnachtsmann endlich einen neuen Bungalow am Nordpol bauen lassen. Schön geräumig soll er sein: eine Küche ($30\,m^2$), ein Wohnzimmer ($60\,m^2$), ein Schlafzimmer ($40\,m^2$), ein Badezimmer ($50\,m^2$), eine Abstellkammer ($10\,m^2$), eine Geschenkewerkstatt ($70\,m^2$), eine Lagerhalle ($80\,m^2$) und eine Garage für den Schlitten ($20\,m^2$) soll das Haus bekommen. Doch, welch ein Graus, die Baumaterialien müssen von weit her angeliefert werden und sind deshalb horrend teuer! Um das Budget des Weihnachtsmannes nicht zu sprengen, soll das Haus mit möglichst wenig Material gebaut werden. Seine einzige Vorgabe ist, das Haus auf einem rechteckigen Grundriss zu erstellen, und alle Zimmer ebenfalls rechteckig anzulegen. Die Bauwichtel möchten natürlich wissen, wie viele Meter dann alle Innen- und Außenwände des Hauses zusammen in etwa haben. (Türen und Fenster können dabei vorerst komplett vernachlässigt werden.)

Hinweis: Die korrekte Antwort sollte über eine Abschätzung ermittelt werden.

Hier zum Vergleich der bisherige Bungalow des Weihnachtsmannes:



Außenwände $= \mathbf{38m}$
Innenwände $= \mathbf{21m}$

$\sum = \mathbf{59m}$

Antwortmöglichkeiten (auf zwei Nachkommastellen gerundet):

1. $135,74\,m$
2. $138,43\,m$
3. $141,06\,m$
4. $141,97\,m$
5. $152,14\,m$
6. $154,31\,m$
7. $157,45\,m$
8. $161,86\,m$
9. $175,11\,m$
10. $179,31\,m$

Projekbezug:
Im Matheon Projekt B20 arbeiten Wissenschaftler an der Entwicklung von Computerprogrammen zur numerischen Lösung von gemischt-ganzzahligen nichtlinearen Optimierungsproblemen. Mit einem solchen Programm kann man nicht nur dem Weihnachtsmann seinen Wunsch vom Traumhaus möglichst günstig erfüllen. Unzählige andere Fragestellungen der Industrie gehören ebenso in diese Klasse von Optimierungsproblemen. Ein Beispiel, welches am Matheon gerade untersucht wird, ist die kostengünstigste Erweiterung bestehender Gasnetze, um den künftig steigenden Bedarf an Erdgas von den Lagerstätten zu den Endverbrauchern leiten zu können.

17.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4 $141,97\,m$

Zuerst bestimmen wir uns eine eine einfache Formel für die gesuchte Länge. Wir bezeichnen die Seitenlängen von Raum i mit a_i und b_i. Dann hat jeder Raum den Umfang $2(a_i + b_i)$. Allerdings wird jede Wandlänge entweder von einem anderen Raum mitgenutzt oder ist eine Außenwand. Bezeichnen wir die Außenabmessungen mit a_a und b_a, dann wird bei der Summe

$$2\sum_{i=1}^{8}(a_i + b_i) + 2(a_a + b_a)$$

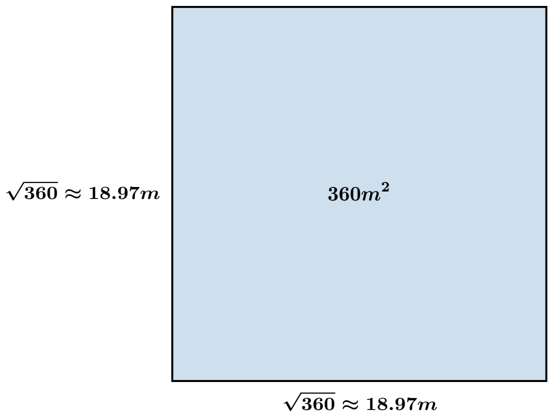
jede Wand insgesamt zweimal gezählt. Folglich ist

$$L = \sum_{i=1}^{8}(a_i + b_i) + (a_a + b_a)$$

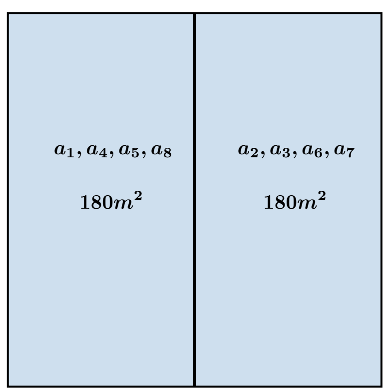
die betrachtete Gesamtlänge der Wände.
Wir schätzen den Wert der Optimallösung, d.h. die Gesamtlänge aller Wände, auf zwei Arten ab. Dazu bezeichnen wir die Flächeninhalte der Zimmer mit $A_1 = 10, A_2 = 20, \ldots, A_8 = 80$.
Als erstes leiten wir eine untere Schranke her, also einen Wert, den auch die bestmögliche Lösung vielleicht annehmen, aber keinesfalls mehr unterschreiten kann. Unter der Vorgabe, dass das Haus rechtwinklige Wände haben soll, wäre eine Lösung dann unschlagbar, wenn alle Zimmer als Quadrate und der Umriss des Hauses ebenso als ein großes Quadrat realisiert werden könnten. Die Gesamtlänge aller Wände wäre dann:

$$L := 2\sqrt{\sum_{i=1}^{8} A_i} + 2\sum_{i=1}^{8}\sqrt{A_i} = 141,075\ldots. \tag{2}$$

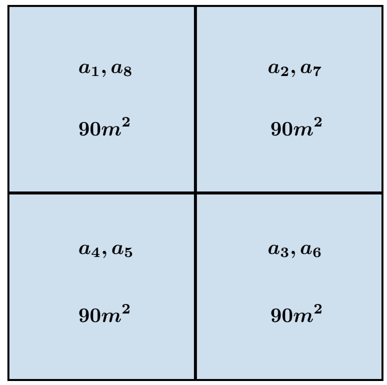
Damit fallen die Lösungsmöglichkeiten 1-3 weg.
Nun überlegen wir uns eine obere Schranke, also einen Wert, den die bestmögliche Lösung mindestens erreichen kann (eventuell ist sie sogar noch besser). Dazu geben wir ein Verfahren, einen Algorithmus, an, der eine möglichst gute Lösung konstruiert. Einen quadratischen Grundriss zu haben, ist ein guter Ausgangspunkt, dann sind die Außenwände optimal kurz:



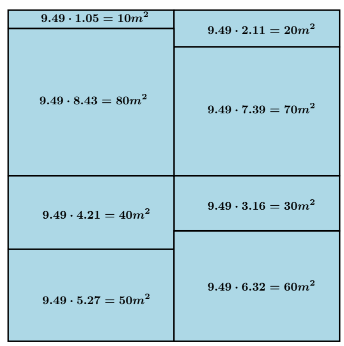
Wir starten also mit einem Quadrat mit der Kantenlänge $\sqrt{\sum_{i=1}^{8} A_i} = 18.973\ldots$. Dann teilen wir die Zimmer in zwei möglichst gleich große Gruppen, also A_1, A_4, A_5, A_8 auf der einen Seite und A_2, A_3, A_6, A_7 auf der anderen Seite. In diesem Falle geht es glatt auf: Beide Gruppen sind $180m^2$ groß, also die halbe Gesamtfläche.



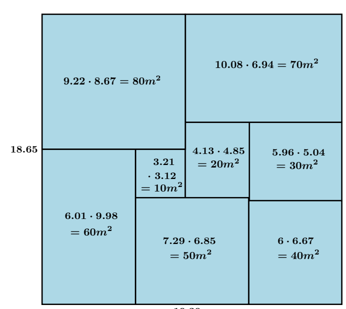
Auf jeder Hälfte des Grundrisses wenden wir die gleiche Überlegung an. Auf der einen Seite erhalten wir die gleich großen Gruppen A_1, A_8 und A_4, A_5, und auf der anderen Seite sind dies A_2, A_7 und A_3, A_6.



Als letztes wendet man selbige Überlegungen auf jedes Viertel an. Damit erhält man die folgende Lösung:



Diese zulässige Lösung liefert $U = 151,790\ldots$ als obere Schranke. Damit fallen die Lösungsvorschläge 5-10 weg. Nach dem Sherlock-Holmes-Ausschluss-Prinzip muss also der übrig gebliebene Vorschlag 4 die richtige Antwort sein. Eine solche Lösung tatsächlich zu finden, ist nicht einfach. Durch Anwenden der im Matheon entwickelten Verfahren kann man die folgende Lösung errechnen, die eine Wandlänge von $141,97\ldots$ aufweist:



Diese Lösung liegt schon sehr nahe an der unteren Schranke von $141,075\ldots$. Der Beweis, dass es sich hierbei tatsächlich um die bestmögliche, also optimale Lösung handelt, konnte allerdings noch nicht erbracht werden.

18 Der Wunschzettel

Autor: Heino Hellwig
Projekt: Z 1.1

18.1 Aufgabe

Ein von Mathematik begeisterter Schüler verfasst seinen Wunschzettel in einer Geheimschrift und übergibt diesen in dunkler, mondloser Nacht einem Wichtel, wobei er ein Weihnachtslied in die Stille hinein pfeift. Der Weihnachtsmann ist ratlos. Der in Geheimschrift verfasste Wunschzettel enthält u.a. folgenden Wunsch:

JTLPX EPHGY MGXXW TXMVQ USSAT...

Lange betrachtet er diesen Zettel. Da fällt ihm ein, vor vielen hundert Jahren vom jungen Blaise de Vigenère (1523-1596) einen ähnlichen Brief erhalten zu haben.

Welcher Anfang eines Bücherwunsches ist oben verschlüsselt unter der Voraussetzung, dass der Schlüssel aus sinnvollen Wörtern der deutschen Sprache besteht (Satzzeichen und Leerzeichen wurden fortgelassen)?

1. Aigner, Ziegler: Das Buch der Beweise
2. Biermann u.a.: Besser als Mathe
3. Gardner: Codes, Ciphers and Secret Writing
4. Glaeser, Polthier: Bilder der Mathematik
5. Havil: Verblüfft?! Mathematische Beweise
6. Herrmann: Mathematik ist überall
7. Kippenhahn: Verschlüsselte Botschaften
8. Kramer: Zahlen für Einsteiger
9. Rademacher, Toeplitz: Von Zahlen und Figuren
10. Tao: Solving mathematical problems

Projektbezug:
Im Projekt Z1.1 werden Seminarkurse zum Thema „Kryptologie“ für die Sekundarstufe II entwickelt und erprobt. Die Verschlüsselung von Informationen ist heute in der Datenübertragung für die Sicherheit eine unverzichtbare Methode, beispielsweise beim Onlinebanking.

18.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9: Rademacher, Toeplitz: Von Zahlen und Figuren

Die Vigenère -Verschlüsselung geht auf Blaise de Vigenère zurück und stellt eine Erweiterung des Caesar-Algorithmus dar. Das Schlüsselwort bestimmt Anzahl und Art der notwendigen Verschiebungen. Ist der Schlüssel z. B. das Wort „Adam“, so gilt: Da „A“ an erster Stelle des Alphabets steht, wird der erste Buchstabe des Klartextes um 0 Stellen im Alphabet verschoben. Das „D“ in „Adam“ steht an 4-ter Stelle, also wird der zweite Buchstabe des Klartextes um 3 Stellen verschoben usw.
Noch einfacher wird die Verschlüsselung bei Anwendung des Vigenère-Quadrates.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

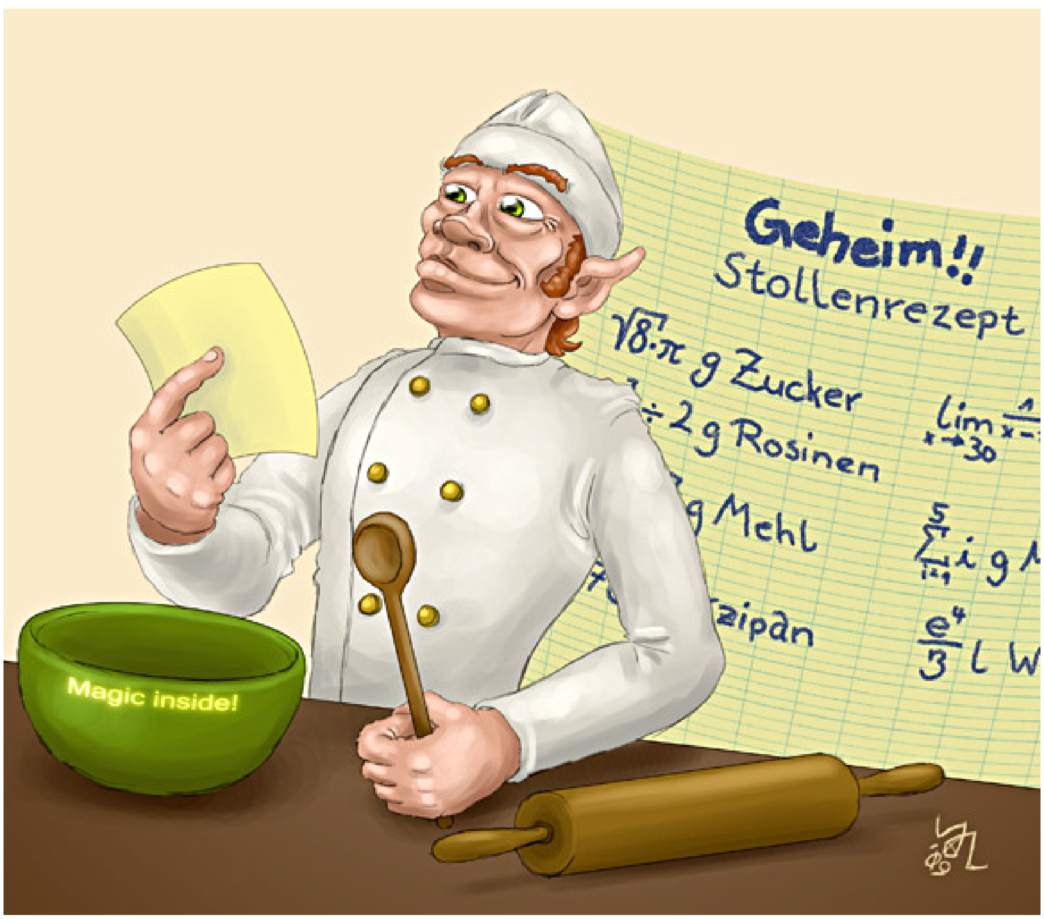
Man ordnet der Zeile mit dem Schlüsselbuchstaben die Spalte mit dem Buchstaben des Klartextes zu und erhält den Buchstaben des Geheimtextes. Der Schlüssel wird periodisch unter den Klartext geschrieben.
Beispiel:

```
Klartext:  HEUTE IST EIN WUNDERSCHOENER TAG
Schlüssel: ADAMA DAM ADA MADAMADAMADAMA DAM
```

Zeile A, Spalte H ergibt H, kurz [A,H]=H; [D,E]=H [A,U]=U; [M,T]=F usw. Da in der Aufgabe der Schlüssel nicht bekannt ist, müssen wir das Vorgehen umkehren. Wir nehmen die möglichen Klartexte, z. B. den 1-ten Buchtitel „Aigner, Ziegler: Das Buch der Beweise“
(nach Vigenère: AIGNERZIEGLERDASBUCHDERBEWEISE) und den verschlüsselten Text :„JTLPX “ .
Zur Spalte A suchen wir den Buchstaben J aus der Tabelle und finden die Zeile J, also jetzt [A,J]=J. Auf diese Weise finden wir das allseits bekannte Weihnachtslied „Stille Nacht“ als Schlüsselwort und können entscheiden, welches Buch auf dem Wunschzettel steht, nämlich der Titel 9.

19 Der Stollenteig

Autor: Falk Ebert



19.1 Aufgabe

Backwichtel Balthasar bäckt für sein Leben gern. Ganz besonders gut bäckt er aber einen Stollen, welcher nach einem uralten Familienrezept gemacht wird. Laut diesem Rezept setzt man abends in einer schwierigen Prozedur eine große Schüssel mit einem Hefeteig an und wirft neben Mehl, lauwarmem Wasser, Zucker und natürlich Hefe so ziemlich alles rein, was die Backstube hergibt: Rosinen, Korinthen, Mandeln, Marzipanreste, Mohn und auch diverse Gewürze. Der Knackpunkt ist aber, wie man am nächsten Tag mit dem Teig verfährt. Schon Balthasars Vater, der Bäckermeister Benoit, hatte ihm eingeschärft, an jedem Tag nur einen ganz bestimmten Anteil des Hefeteiges zu verwenden. Nämlich exakt $1/e$, wobei $e \approx 2,7182818\ldots$ die *Eulersche Zahl* ist. Wenn man diesen Anteil zu einem Stollen verbäckt und den Rest über Nacht stehen läßt, dann ist am kommenden Tag die Schüssel wieder voll und man kann problemlos weiterbacken. Insgeheim hat Balthasar als Bäckerlehrling manchmal ausprobiert, was passiert, wenn man mal etwas mehr oder etwas weniger Teig nimmt. Jedes Mal war am nächsten Tag die Schüssel wieder exakt voll. Nur ein einziges Mal, als er die Schüssel wirklich bis auf den letzten Krumen geleert hatte, war auch am nächsten Morgen nichts mehr da. Diese Aktion brachte ihm eine Tracht Prügel ein und einen wirklich anstrengenden Abend, in dem er einen neuen Teig ansetzen musste - und das mit schmerzendem Hosenboden! Obwohl Balthasar also weiß, dass man durchaus auch mal etwas mehr nehmen kann, hält er sich jetzt an die uralte Vorschrift und misst immer $T = 1/e$ des Teiges ab. Zumindest tat er das bis vor Kurzem. Da kam nämlich sein Freund Conrad vorbei, angelockt von dem tollen Duft und wollte auch einen Stollen haben. Balthasar brachte es nicht übers Herz, ihm diese Bitte abzuschlagen und trennte ein weiteres Stück der Größe $T = 1/e$ vom Stollenteig in der großen Schüssel ab. Dann maß er das noch verbleibende Stück vom Stollenteig in der großen Schüssel ab und nahm sich vor, falls Conrad am nächsten Tag wiederkommen sollte, nur noch 2 so große Stücken wie das eben abgemessene abzuschneiden. Und prompt kam Conrad am nächsten Tag wieder und er hatte auch noch Detlef mitgebracht, dem er von dem tollen Stollen vorgeschwärmt hatte. Die Stollenteigschüssel war wieder voll, aber jetzt musste Balthasar schon 3 Stücken, von der Größe auf die er sich festgelegt hatte, abschneiden. Glücklicherweise ging das immer noch auf und es blieb etwas vom Teig übrig. Diesen Rest maß Balthasar wieder ab und nahm sich vor, am Folgetag nur noch Stücken dieser

Größe abzuschneiden. Am Folgetag kam neben Conrad und Detlef jetzt noch Eddy mit dazu. Balthasar verdrehte die Augen. An jedem Tag kam jetzt ein Gast mehr dazu, der einen Stollen wollte. Jedes mal blieb ein kleiner Rest, den Balthasar am nächsten Tag als Maß für die abzuschneidenden - zugegeben immer kleiner werdenden - Stücke verwendete bis ...

1. ... in alle Ewigkeit.
2. ... der 10. Gast dazukam und der Teig nicht mehr reichte.
3. ... der 11. Gast dazukam und der Teig nicht mehr reichte.
4. ... der 12. Gast dazukam und der Teig nicht mehr reichte.
5. ... der 13. Gast dazukam und der Teig nicht mehr reichte.
6. ... der 14. Gast dazukam und der Teig nicht mehr reichte.
7. ... der 15. Gast dazukam und der Teig nicht mehr reichte.
8. ... der 16. Gast dazukam und der Teig nicht mehr reichte.
9. ... der 17. Gast dazukam und der Teig nicht mehr reichte.
10. ... der 18. Gast dazukam und der Teig nicht mehr reichte.

19.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 1: Bis in alle Ewigkeit.

Wir nennen die Menge Teig, die Balthasar für sich allein abschneidet

$$T_1 = \frac{1}{e}.$$

Die Menge Teig, die übrigebleibt, nachdem er *einen* Gast (Conrad) hatte, sie also zu zweit sind, nennen wir T_2. Dabei bestimmt sich

$$T_2 = 1 - 2T_1.$$

Analog kommt mit dem 2. Gast ein weiterer Esser dazu und der übrige Teig T_3 berechnet sich als

$$T_3 = 1 - 3T_2.$$

Wir erhalten also eine Folge von Zahlen, wobei sich die Menge des übrigen Teiges nach n Essern als

$$T_n = 1 - nT_{n-1}$$

berechnet. Wenn T_n also irgendwann negativ wird, waren wohl zu viele Esser da und der Teig hat nicht mehr gereicht. Dann rechnen wir also einfach mal los und starten mit $T_1 = 0,36787944117144...$

	8-stelliger Taschenrechner	10-stelliger Taschenrechner	EXCEL (16 Stellen)
T_1	$0,3678794$	$0,3678794412$	$0,3678794411714420$
T_2	$0,2642412$	$0,2642411177$	$0,2642411176571150$
T_3	$0,2072764$	$0,2072766470$	$0,2072766470286540$
T_4	$0,1708944$	$0,1708934119$	$0,1708934118853840$
T_5	$0,1455280$	$0,1455329406$	$0,1455329405730800$
T_6	$0,1268320$	$0,1268023562$	$0,1268023565615190$
T_7	$0,1121760$	$0,1123835069$	$0,1123835040693630$
T_8	$0,1025920$	$0,1009319450$	$0,1009319674450920$
T_9	$0,0766720$	$0,0916124953$	$0,0916122929941707$
T_{10}	$0,2332800$	$0,0838750464$	$0,0838770700582927$
T_{11}	$-1,5660800$	$0,0773744896$	$0,0773522293587803$
T_{12}	-	$0,0715061248$	$0,0717732476946367$
T_{13}	-	$0,0704203776$	$0,0669477799697233$
T_{14}	-	$0,0141147136$	$0,0627310804238732$
T_{15}	-	$0,7882792960$	$0,0590337936419019$
T_{16}	-	$-11,612468740$	$0,0554593017295701$
T_{17}	-	-	$0,0571918705973076$
T_{18}	-	-	$-0,0294536707515363$

Mit einem 8-stelligen Taschenrechner ist also bereits bei 10 Gästen Schluss, bei einem 10-stelligen erst bei 15 Gästen und EXCEL kann immerhin bis zu 17 Gästen rechnen, bevor das erste Ergebnis negativ wird (Balthasar selbst will ja auch ein Stück haben). Welches Ergebnis ist jetzt aber richtig?

Nachtrag vom 20. Dezember:
Ein besonders eifriger Teilnehmer hat sogar noch mehr rumprobiert. Seine Ergebnisse waren die folgenden:

- Einfacher Taschenrechner: 11 Iterationen
- Taschenrechner vom Handy: 13 Iterationen
- Schulrechner von meinem Sohn: 15 Iterationen
- Visual-Basic 6.0: 18 Iterationen
- Rechner vom Palm-PDA: 19 Iterationen
- Rechner von Windows XP: Mindestens 35 Iterationen

1. Möglichkeit (intuitiv)
In der Erwartung, dass Taschenrechner und Konsorten nicht immer das richtige Ergebnis liefern, könnte man ja mal ausrechnen, wann denn der Teig exakt aufgebraucht werden würde, also wann $T_n = 0$ ist. Startet man bei einem genügend großen n, d.h. einem n, das in dem Bereich liegt, bei dem T_n laut Tabelle schon unsinnig ist, dann kann man ja ausgehend von $T_n = 0$ zurückrechnen mit

$$T_{n-1} = \frac{1 - T_n}{n}.$$

Ist das n wirklich hinreichend groß, dann wird $T_1 = 0,367879441171\,44...$, bzw. die bestmögliche Darstellung, die der verwendete Rechner hergibt, sein. Dabei sind alle Zwischenschritte positiv. Im Umkehrschluss heißt das also, dass, exakt gerechnet, man von T_1 ausgehend nach beliebig vielen Schritten den Teig exakt aufbraucht. Und wenn man n beliebig groß wählen kann, dann ist zwangsläufig Antwort 1 richtig.

2. Möglichkeit (mit Reihen)
Wir schauen uns mal an, was in den einzelnen Schritten T_i exakt stehen sollte:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{e}, \\
T_2 &= 1 - 2T_1 = 1 - \frac{2}{e}, \\
T_3 &= 1 - 3T_2 = 1 - 3 + \frac{3 \cdot 2}{e}, \\
T_4 &= 1 - 4T_3 = 1 - 4 + 12 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{e}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_n &= 1 - nT_{n-1} \\
&= 1 - n + n(n-1) - n(n-1)(n-2) + \dots \\
&\quad \dots + (-1)^n n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 - (-1)^n \frac{n!}{e}.
\end{aligned}$$

Anders geschrieben und angeordnet ist der letzte Wert

$$T_n = (-1)^n n! (\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \pm \frac{1}{n!} - \frac{1}{e})$$

Entweder weiß man es schon oder hat es durch Stöbern im Netz zur Eulerschen Zahl gefunden: die Summe

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \pm \frac{1}{n!}$$

nähert sich mit grösser werdendem n immer mehr der Zahl $\frac{1}{e}$ an. Dabei sind die S_n mit geradem Index n größer als $\frac{1}{e}$ und die mit ungeradem Index kleiner als $\frac{1}{e}$. Der Term $(-1)^n(S_n - \frac{1}{e})$ ist also stets positiv und damit kann T_n niemals negativ werden. Ergo ist Antwort a) richtig. Warum passiert das aber in der Rechnung? Der Knackpunkt besteht darin, dass der Startwert T_1 für die ganze Iteration eben *nicht* $\frac{1}{e}$ ist, sondern nur die Näherung, die der Taschenrechner/Computer zur Verfügung hat. Die liegt zwar in der Nähe von $\frac{1}{e}$, ist aber eben nicht exakt. Das führt dazu, dass der Ausdruck $(S_n - T_1)$

zwar anfangs immer kleiner wird, irgendwann sich aber nicht mehr verbessert und bei einem kleinen aber nicht verschwindenden Wert stagniert. Im Gegenzug dazu wird der Vorfaktor $(-1)^n n!$ betragsmäßig immer größer, so dass $(-1)^n n!(S_n - T_1)$ irgendwann einen beliebig großen Betrag haben kann. Das Ganze ist nichts anderes als der mittlerweile weitbekannte *Schmetterlingseffekt*: Kleine Ungenauigkeiten können sich mit der Zeit zu riesigen Unterschieden aufschaukeln.

3. Möglichkeit (mit Analysis)
Wir betrachten das folgende Integral:

$$\int_0^1 x^n e^{x-1} dx.$$

Das läßt sich mit partieller Integration etwas vereinfachen zu

$$\int_0^1 x^n e^{x-1} dx = \underbrace{[x^n e^{x-1}]_0^1}_{=1-0} - n \int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx.$$

Mit der Substitution $T_i = \int_0^1 x^i e^{x-1} dx$ ergibt sich daraus genau die Teigstückformel:

$$T_i = 1 - iT_{i-1}.$$

Es bleibt noch ein Startwert zu bestimmen und der ist für

$$T_1 = \int_0^1 x^1 e^{x-1} dx = 1 - \int_0^1 e^{x-1} dx = [e^{x-1}]_0^1 = 1 - (1 - \frac{1}{e}) = \frac{1}{e}.$$

Und damit lässt sich also jedes Teigstück T_i als Integral

$$T_i = \int_0^1 x^i e^{x-1} dx$$

schreiben. Da die Funktion $x^i e^{x-1}$ auf dem gesamten Intervall $[0, 1]$ nichtnegativ ist, kann auch das Integral nicht negativ werden. Man kann T_i sogar noch genauer eingrenzen, indem man für den Faktor e^{x-1} jeweils den kleinstmöglichen bzw. den größtmöglichen Wert auf dem Intervall einsetzt:

$$\int_0^1 x^i e^{0-1} dx \leq \underbrace{\int_0^1 x^i e^{x-1} dx}_{T_i} \leq \int_0^1 x^i e^{1-1} dx.$$

Die verbleibenden Integrale der oberen und unteren Grenze lassen sich leicht berechnen und es gilt:

$$\frac{1}{(i+1)e} \leq T_i \leq \frac{1}{i+1}.$$

Wenn die Teigstücken T_i also exakt berechnet werden würden, dann läge ihre Größe immer zwischen $\frac{1}{(i+1)e}$ und $\frac{1}{i+1}$ und wäre niemals negativ oder 0. Folglich ist Antwort 1 richtig.

Projektbezug Diese Aufgabe beschreibt ein Phänomen, mit dem man sich in der Numerik häufig herumschlagen muss. Jede Berechnung auf einem Computer bringt Fehler mit sich und diese pflanzen sich in Berechnungen fort. Selbst das Rechnen mit besseren Computern verhindert diese Fehler nicht, sondern lässt sie nur später auftreten. Um das Denken hilft also auch ein noch so guter Computer nicht herum.

20 Weihnachtliches Management

Autor: Lars Putzig
Projekt: E8

20.1 Aufgabe

Da die Zahl der zu beschenkenden Kinder in den letzten hundert Jahren massiv angestiegen ist, verlangt die Gewerkschaft der spielzeugschaffenden Zauberwesen vom Weihnachtsmann, bereits ein Jahr vor Auslieferung verbindliche Produktionsquoten festzulegen. Für die Abteilung „Klassische Holzspielzeuge“ haben die Elfen des statistischen Weihnachtsamtes eine Marktanalyse durchgeführt. Auf Grundlage einer repräsentativen Umfrage unter vorzugsweise artigen Kindern (d.h. schlafend) prognostizieren sie, dass die Beliebtheit der produzierbaren Spielzeuge Schaukelpferde, Holzeisenbahnen und Puppenstuben sich bis Weihnachten 2010 wie folgt ändern wird:

- Die Beliebtheit von Schaukelpferden nimmt um 2% zu.
- Holzeisenbahnen werden um 1% unbeliebter.
- Puppenstuben sind Dauerbrenner und werden dieses Jahr sogar um 3% wichtiger.

Außerdem wurde festgestellt, dass sich Kinder (im Durchschnitt) dieses Jahr über jedes dieser Geschenke gleich viel freuen würden. Die Rechenelfen empfehlen daher die Produktion auf Puppenstuben zu verlagern, da so die durchschnittliche Weihnachtsfreude auf 103% des diesjährigen Wertes gesteigert werden kann.

Das Institut für Wichtelwirtschaftsforschung und -entwicklung kommentierte den Bericht der Elfen wie folgt:

`Während die Datenerhebung des statistischen Weihnachtsamtes nach wie vor über jeden Zweifel erhaben ist, muss doch an der Schlußfolgerung gezweifelt werden. Die geschätzten Kollegen haben in ihrer Analyse leider vergessen, die statistischen Schwankungen mit einzubeziehen. Unabhängige Untersuchungen zeigen:`

- `Schaukelpferde variieren in ihrer Beliebtheit um bis zu 6%-Punkte.`
- `Die Beliebtheit von Holzeisenbahnen kann sich um bis zu 5%-Punkte ändern.`
- `Puppenstuben schwanken sogar um bis zu 7%-Punkte in ihrer Beliebtheit.`

`Zusätzlich wirken sich die Veränderungen bei den Schaukelpferden auch auf die anderen beiden Spielzeuge aus, für jeden Prozentpunkt Steigerung bei den Schaukelpferden, werden die Holzeisenbahnen um` $\frac{1}{2}$%`-Punkte und die Puppenstuben um` $\frac{1}{3}$%`-Punkte fallen. Entsprechende Steigerungen treten auf bei fallender Beliebtheit von Schaukelpferden. Eine Beschränkung auf Puppenstuben kann also im schlimmsten Fall zu einem Rückgang der Weihnachtsfreude auf`

$$\underbrace{103\%}_{\texttt{Prognose}} - \underbrace{7\%}_{\texttt{Schwankung}} - \underbrace{2\%}_{\texttt{Schaukelpferdeffekt}} = 94\%$$

`führen. Um für den schlimmsten Fall gewappnet zu sein, empfehlen wir ...`

Leider scheint das Schreiben im Wichtelkindergarten optisch verschönert worden zu sein. Statt der Empfehlung der Wichtel ist nur eine Kinderzeichnung des Weihnachtsmanns (mit übertriebenem Bauchumfang) auf einem viel zu kleinen Rentierschlitten zu erkennen. Welche Produktionsraten sollte der Weihnachtsmann vorgeben, um selbst im schlimmsten Fall die höchst mögliche Zufriedenheit zu erzielen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Nur Schaukelpferde
2. Nur Holzeisenbahnen
3. Nur Puppenstuben
4. 50% Schaukelpferde, 50% Holzeisenbahnen
5. 50% Schaukelpferde, 50% Puppenstuben
6. 50% Holzeisenbahnen, 50% Puppenstuben
7. Gleiche Anteile für alle drei Spielzeugarten
8. 25% Schaukelpferde, 75% Puppenstuben
9. 25% Puppenstuben, 75% Holzeisenbahnen

10. 25% Holzeisenbahnen, 75% Schaukelpferde

Projektbezug:
Das Problem ist ein Beispiel für Risikominimierung und -kontrolle durch Diversifikation. Im Matheon Anwendungsbereich E wird unter anderem daran gearbeitet, Finanzrisiken zu erkennen, einzuschätzen und zu minimieren. Um Letzteres zu erreichen, werden Beziehungen von Anlagen untereinander ausgenutzt, so dass das gestreute Portfolio weniger Risiken enthält als die einzelnen Anlagen.

20.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8:

Bezeichnen wir die Produktionsraten als p_1 (Schaukelpferde), p_2 (Holzeisenbahnen) und p_3 (Puppenstuben) so erhalten wir als Gleichung für die Beliebtheit $\tilde{B}$ (ohne Schwankungen):

$$\tilde{B} = 1{,}02 p_1 + 0{,}99 p_2 + 1{,}03 p_3.$$

Nun seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in [-1, 1]$ die Schwankungsfaktoren, dann ist die Beliebtheit B (mit Schwankungen):

$$B = (1{,}02 + 0{,}06\varepsilon_1)p_1 + (0{,}99 - 0{,}03\varepsilon_1 + 0{,}05\varepsilon_2)p_2 + (1{,}03 - 0{,}02\varepsilon_1 + 0{,}07\varepsilon_3)p_3.$$

Nehmen wir nun für einen Moment an, dass die Produktionsraten bekannt sind, dann suchen wir nun den schlimmsten Fall, daher $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ so, dass B möglichst klein ist. Stellen wir dazu B um:

$$B = (0{,}06p_1 - 0{,}03p_2 - 0{,}02p_3)\varepsilon_1 + 0{,}05p_2\varepsilon_2 + 0{,}07p_3\varepsilon_3 + 1{,}02p_1 + 0{,}99p_2 + 1{,}03p_3.$$

Da p_1, p_2 und p_3 alle größer oder gleich Null sind, sieht man sofort: ε_2 und ε_3 müssen möglichst klein sein, d.h. $\varepsilon_2 = -1$ und $\varepsilon_3 = -1$. Für ε_1 müssen wir zwei Fälle unterscheiden:
1. Fall: Für den Vorfaktor gilt:

$$0{,}06p_1 - 0{,}03p_2 - 0{,}02p_3 \geq 0, \qquad (1)$$

so ist ε_1 ebenfalls möglichst klein zu wählen, d.h. $\varepsilon_1 = -1$.
2. Fall: Ist dagegen

$$0{,}06p_1 - 0{,}03p_2 - 0{,}02p_3 \leq 0, \qquad (2)$$

so muss ε_1 möglichst groß werden, d.h. $\varepsilon_1 = 1$. Schauen wir uns nun die Beliebtheit in beiden Fällen an.

1. Fall: Hier gilt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. Somit ist B:

$$B = 0{,}96p_1 + 0{,}97p_2 + 0{,}98p_3.$$

Die Produktionsraten müssen sich zu 1 ergänzen, d.h. gilt für p_3:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2, \qquad (3)$$

und somit ist

$$B = -0{,}02p_1 - 0{,}01p_2 + 0{,}98; \qquad 0{,}08p_1 - 0{,}01p_2 - 0{,}02 \geq 0. \qquad (3)in(1)$$

Offensichtlich muss nun p_2 möglichst klein gewählt werden, d.h. $p_2 = 0$ und

$$B = -0{,}02p_1 + 0{,}98; \qquad 0{,}08p_1 \geq 0{,}02; \qquad p_1 \geq 0{,}25.$$

Nun muss auch p_1 möglichst klein werden, d.h. $p_1 = 0{,}25$, somit ist

$$B = 0{,}975; \qquad p_1 = 0{,}25; \qquad p_2 = 0; \qquad p_3 = 0{,}75.$$

2. Fall: Nun gilt $\varepsilon_1 = 1$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. Somit ist B gerade

$$B = 1{,}08p_1 + 0{,}91p_2 + 0{,}94p_3.$$

Auch hier müssen die Produktionsraten zusammen 1 ergeben, daher ist auch hier:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2,$$

was bedeutet:

$$B = 0{,}14p_1 - 0{,}03p_2 + 0{,}94; \qquad 0{,}08p_1 \leq 0{,}01p_2 + 0{,}02.$$

Dieses Mal müssen wir p_1 möglichst groß wählen, also ist $p_1 = 0{,}125p_2 + 0,25$ und somit:

$$B = -0{,}0125p_2 + 0{,}975.$$

Wieder muss p_2 möglichst klein sein, also ist auch hier $p_2 = 0$ und daher ist auch in diesem Fall:

$$B = 0{,}975; \qquad p_1 = 0{,}25; \qquad p_2 = 0; \qquad p_3 = 0{,}75.$$

Die Diskussion der Fälle $p_1 = 1 - p_2 - p_3$ bzw. $p_2 = 1 - p_1 - p_3$ führt zu ungünstigeren Werten von B. Somit kann der Weihnachtsmann den möglichen Schaden auf 2,5% begrenzen, wenn er Antwort 8 wählt.

21 Schiffe verschenken...
...ungern Zeit, aber dieses Jahr Weihnachtsgeschenke

Autor: Elisabeth Günther

21.1 Aufgabe

In der Werkstadt des Weihnachtsmannes laufen die Vorbereitungen für das diesjährige Weihnachtsfest auf Hochtouren. Dieses Jahr müssen sich die Wichtel beeilen, denn die Rentiere sind krank und die Geschenke sollen auf dem Schiffsweg in der Welt verteilt werden. Einige Schiffe sind bereits unterwegs, so auch das von Wichtelkapitän Rotbär, der die Ladung für Deutschland an Bord hat. Dabei passieren sie auf ihrem Weg von Lappland zunächst die Ostseeküste, kürzen dann über den Nord-Ostsee-Kanal ab um die zweite Hälfte an der Nordseeküste zu verteilen. Nachdem sie in den Kanal geschleust wurden, kommt Lotse Valentin an Bord, der ihnen beim Navigieren im Kanal helfen soll. Als sie bereits zum zweiten Mal in einer Weiche warten müssen, um andere Schiffe vorbei zu lassen, entwickelt sich folgendes Gespräch:

Rotbär: „Mensch, hier muss man 'ne ganze Menge stehen und warten, erst vor der Schleuse und jetzt hier schon zum zweiten Mal. Wir haben es doch eilig!"

Valentin: „Das lässt sich leider nicht vermeiden. Der Kanal ist zu schmal, als dass überall alle Schiffe aneinander vorbeipassen würden. Und wir haben an jeder Seite nur vier Schleusenkammern, um die Schiffe in den bzw. aus dem Kanal zu schleusen. Schau mal hier, das sind die Abmessungen (1) der Schleusenkammern und die dazugehörigen Schleusungszeiten (2) in Brunsbüttel. Wir wollen dort nachher wieder raus aus dem Kanal, andere wollen in Brunsbüttel reingeschleust werden. Die Ankunftszeiten der nächsten Schiffe, die dort geschleust werden müssen und noch nicht eingeplant sind, stehen in der Tabelle dort (3). Die zugehörigen Maße enthalten bereits die nötigen Sicherheitsabstände. Am Anfang sind jeweils eine große und eine kleine Schleusenkammer auf jeder Seite. Um 18:06 Uhr kommen wir an."

Jetzt mischt sich der vorlaute Wichtel Schlaumeier ein.

Schlaumeier: „Das ist ja interessant. Dann können wir uns überlegen, wann wir wieder aus der Schleuse rauskommen und endlich an der Nordseeküste unsere Geschenke verteilen können. Wenn ich das hier mit den Zeiten richtig verstehe, dauert die Einfahrt in eine Schleusenkammer eine Weile. Und wenn vor uns ein Schiff in die Schleuse einfährt, müssen wir etwas warten, bis wir mit unserer Einfahrt beginnen können."

Valentin: „Ja, genau. Würden beispielsweise Cellus und King Everest in der gleichen großen Schleusenkammer geschleust werden, so könnte King Everest erst 14:16 losfahren und mit dem Schließen des Tores könnte erst 14:26 begonnen werden.“

Rotbär: „Verstehe, dann will doch am liebsten jedes Schiff direkt nach seiner Ankunft an der Schleuse geschleust werden, und zwar am liebsten ganz alleine.“

Valentin: „Das ist richtig. Genauso messen wir die Wartezeit eines Schiffes an der Schleuse. Sie ist die Differenz der Zeit, zu der das Schiff tatsächlich aus der Schleuse kommt, und der frühestmöglichen Zeit, das Schleusentor zu passieren.“

Und dann gehen die Spekulationen los:

Schlaumeier 1: „Ich hab mal ein wenig rumgebastelt. Ich würde sagen, wir könnten ganz ohne Wartezeit durchkommen, ohne dass ein anderes Schiff mehr als 16min warten muss und die Gesamtwartezeit den Wert 1h31min überschreitet.“

Rotbär 1: „Sag mal, wenn ich das richtig sehe, geht nie mehr als ein Schiff in eine kleine Schleusenkammer. Es gibt bestimmt eine Lösung mit kleinstmöglicher Summe der Wartezeiten, in der jedes Schiff, das in eine kleine Schleusenkammer passt, alleine in einer kleinen Schleusenkammer geschleust wird.“

Valentin 1: „Puh, das klingt nach ganz schön viel Schleusungsaufwand. Wir wollen eigentlich gerne möglichst wenig Schleusungsvorgänge durchführen, um Wasser und Energie zu sparen. Nur mal so theoretisch, ungeachtet der Wartezeiten, können doch bestimmt alle Schiffe in acht Schleusungen auf die andere Seite gebracht werden, oder?“

Schlaumeier 2: „Na klar, man kriegt es bestimmt hin, in der großen Kammer sechs mal jeweils drei Schiffe zu schleusen und zwei mal jeweils zwei Schiffe.“

Valentin 2: „Guck mal, selbst die ersten vier Schiffe, die aus dem Kanal rausgeschleust werden wollen, passen zusammen in eine große Kammer.“

Rotbär 2: „Dann reichen vielleicht ja auch sieben Schleusevorgänge.“

Aber was ist denn nun richtig?
Antwortmöglichkeiten:

1. Keine der Aussagen ist falsch.
2. Den beiden Wichteln fehlt wohl noch Nord-Ostsee-Kanal-Erfahrung. Nur Lotse Valentin gibt richtige Vermutungen ab.
3. Wichtel Schlaumeier ist gewitzt. Seine beiden Vermutungen sind korrekt. Dann stimmt auch Vermutung 1 von Valentin. Die anderen Aussagen sind leider falsch.
4. Nur Vermutung 2 von Valentin ist korrekt.
5. Jeder der drei liegt mit genau einer Aussage richtig.
6. Valentin und Schlaumeier haben beide zwei Mal Recht, Kapitän Rotbär leider überhaupt nicht.
7. Valentin ist mit seinen beiden Vermutungen im Gegensatz zu Kapitän Rotbär auf der sicheren Seite. Schlaumeier hat zwar am Anfang gut getüftelt und seine erste Aussage stimmt, dann aber nicht mehr ordentlich nachgedacht, weswegen seine zweite Vermutung Quatsch ist.
8. Keine der Vermutungen ist korrekt.
9. Die letzten vier Vermutungen zur minimalen Anzahl von Schleusungsvorgängen treffen zu, aber die erste Aussage von Kapitän Rotbär über die Wartezeiten stimmt nicht.
10. Kapitän Rotbär weiß im Gegensatz zu seinem blauen Namensvetter genau, was er sagt, und hat beide Male Recht. Auch Lotse Valentin versteht sein Fach. Nur Schlaumeier sollte besser genauer überlegen, bevor er den Mund aufmacht. Seine beiden Aussagen sind falsch.

Projektbezug:
Da das Verkehrsaufkommen im „Nord-Ostsee-Kanal“ erwartungsgemäß stark ansteigen wird, müssen Maßnahmen unternommen werden, um die Wartezeiten erträglich zu halten. Der Kanal soll ausgebaut werden. Dazu entstand ein

Projekt zur Verkehrslenkung im „Nord-Ostsee-Kanal“. Informationen zum Projekt findet man auf `http://www.math.tu-berlin.de/coga/projects/canal/`. Außerdem gibt es unter `http://www.dfg-science.tv/de/projekte/diskrete-optimierer/` interessante und lustige Filme über unsere Arbeit an diesem Projekt.

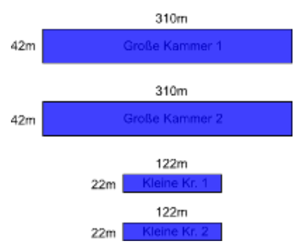


Tabelle 1: Abmessungen der Schleusenkammern.

Zeiten in Minuten	Große Kammern	Kleine Kammern
Einfahrtzeit	10	8
frühestmögliche Abfahrt nach Vorgänger	5	4
Torschließzeit	6	5
Füll- bzw. Leerzeit	10	6
Toröffnungszeit	6	5
Ausfahrtzeit pro Schiff	2	3

Tabelle 2: Schleusungszeiten.

Name	Ankunftszeit	Breite in m	Länge in m	Richtung
Almerode	14:10	17	86	raus
Cellus	14:11	25	110	rein
King Everest	14:15	32	193	rein
Transjorund	14:50	26	152	raus
Merwedijk	14:58	24	143	raus
Heinrich Burmester	15:09	16	72	raus
Elusive	15:26	23	143	rein
Anne Sibum	15:29	28	162	rein
Betty Theresa	15:30	23	125	raus
Emma	15:52	20	100	rein
Birkaland	16:25	27	145	rein
Hanse Spirit	16:32	26	152	rein
Klazina C.	16:44	23	119	raus
Vela	16:51	19	98	raus
Mamry	16:53	20	91	raus
Sormovskiy 49	17:00	21	120	raus
Fehn Mistral	17:06	21	96	raus
Rossiyanin	17:32	24	119	raus
Sarah Rousing	17:41	17	92	raus
Rudolf	18:06	26	151	raus
Arctic Swan	18:14	20	109	raus
Marina	18:15	16	94	rein

Tabelle 3: Schiffe, die in Brunsbüttel geschleust werden müssen.

21.2 Lösung

Achtung! Die Musterlösung beinhaltet einen Fehler, weswegen die Aufgabe auch nicht gewertet wurde. Eine korrigierte Fassung wird noch erstellt. Die Grundgedanken sind aber die gleichen wie in der angegebenen Fassung.

Richtige Lösung: Antwort 7: Valentin ist mit seinen beiden Vermutungen im Gegensatz zu Kapitän Rotbär auf der sicheren Seite. Schlaumeier hat zwar am Anfang gut getüftelt und seine erste Aussage stimmt, dann aber nicht mehr ordentlich nachgedacht, weswegen seine zweite Vermutung Quatsch ist.

Zielfunktion Wartezeitsumme

Schlaumeier 1 Abbildung 5 zeigt den Schleusenplan, den Wichtel Schlaumeier erstellt hat. Er ist korrekt und somit stimmt die erste Aussage von Schlaumeier. Auf beiden Seiten sind die zu schleusenden Schiffe zu sehen. Die blau markierten passen auch in eine kleine Schleusenkammer. Außen an den Seiten ist jeweils zu sehen, welche Schleusenkammern gerade jeweils auf der Seite sind. Ein Schleusungsvorgang ist in der Mitte in einem Rechteck dargestellt. Eine Linie verbindet dieses Rechteck mit dem Event, der das Schleusen in Gang setzt, entweder die Ankunft des letzten Schiffes, das mitgeschleust werden soll, oder die Ankunft der nötigen Schleusenkammer. Diese Ankunft wird mit einem Pfeil vom Rechteck gekennzeichnet. Bei Leerschleusungen gibt es evtl. kein auslösendes Event. Diese sollte nur rechtzeitig durchgeführt sein, bevor die Schleusenkammer auf der anderen Seite gebraucht wird. Hinter dem Schiffsnamen in einem Schleusungsrechteck steht immer, wann dieses aus der Kammer fährt. In Klammern dahinter ist die frühestmögliche Ankunftszeit und die daraus resultierende Wartezeit gegeben. Das Maximum unter diesen ist 16min, die Summe ergibt 1h31min.

Rotbär 1 Betrachte einen Schleusenplan S, bei dem jedes blaue Schiff alleine in einer kleinen Schleusenkammer geschleust wird. In einem solchen Plan müssen die Schiffe Vela, Mamry, Sormovskiy und Fehn Mistral in vier Schleusungsdurchgängen in kleinen Kammern geschleust werden. Dies erfolgt

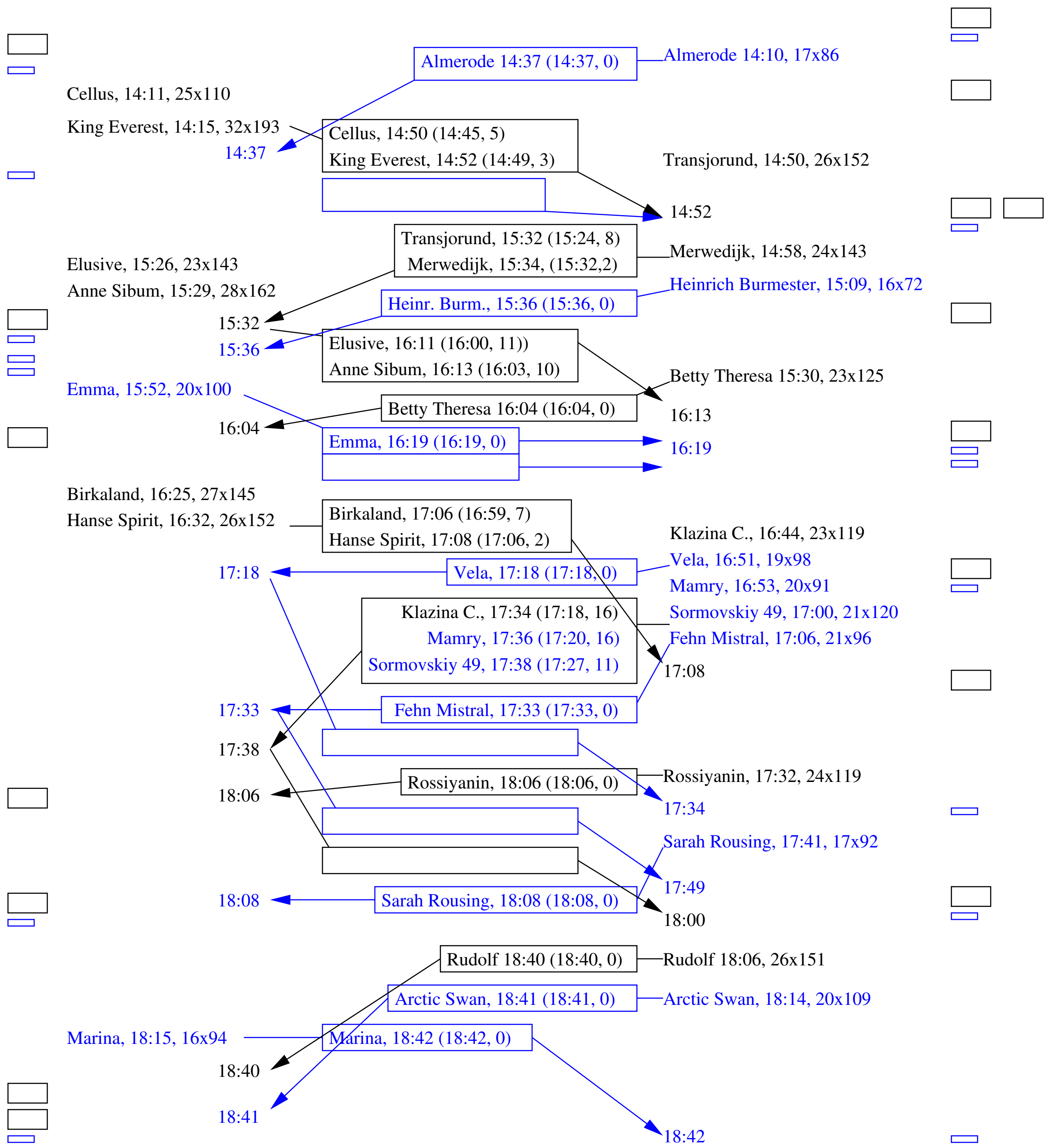


Abbildung 5: Der von Schlaumeier erstellte Schleusenplan.

o.B.d.A. in der Reihenfolge ihrer Ankunft und beginnt ab der Ankunftszeit von Vela, da erstens sonst durch Vertauschung der Reichenfolge Wartezeit verringert werden kann und zweitens das Schleusen der ersten vier blauen Schiffe wie gefordert möglich ist, sodass beide kleinen Kammern der Kanalseite rechtzeitig zur Verfügung stehen. Somit liegt zwischen dem Schleusen von Vela und Sormovskiy eine Leerschleusung, und eine zwischen dem Schleusen von Mamry und Fehn Mistral. So fällt beim Schleusen dieser vier mindestens eine Wartezeit von 34 min für Sormovskiy und von 30 min für Fehn Mistral an. Zusätzlich wird Sarah Rousing mindestens 2min warten müssen. Die Wartezeit einer solchen Lösung beträgt also mindestens 1h06min. Weiterhin können wir davon ausgehen, dass Klazina C. in S alleine geschleust wird, da die Wartezeitsumme sonst 1h31min überschreiten würde. Dann wäre S keine Optimallösung, weil es eine Lösung mit besserer Wartezeitsumme gibt.
Sei nun T der Zeitpunkt, an dem die große Schleusenkammer, mit der Klazina C. geschleust wird, die Kanalseite erreicht. Dann ist $x := \max\{T - 16{:}44, 0\}$ die Wartezeit von Klazina C.. Liegt T hinter dem Zeitpunkt $16{:}44 + 25 = 17{:}09$, so liegt die Wartezeitsumme dieser Lösung insgesamt über 1h31min und es handelt sich nicht um eine Optimallösung.
Ist T nicht größer als 16:50, können die Schiffe Klazina C., Vela, Mamry, Sormovskiy, Fehn Mistral und Sarah Rousing wie im Plan 5 geschleust werden und die Wartezeitsumme verändert sich wie folgt:

$$\Delta W = -66 - x + 16 + 16 + 11 \leq -23.$$

In dem Fall wäre S also auch keine Optimallösung. Betrachte nun die übrigen Fälle:
$16{:}50 < T < 16{:}56$:
Auch in diesem Fall soll Klazina C. zusammen mit Mamry und Sormovskiy geschleust werden. Allerdings ist das Schleusentor dann erst zum Zeitpunkt $T + 5 + 5 + 10 = T + 20$ geschlossen und nach dem Schleusungsvorgang zum Zeitpunkt $T + 42$ wieder offen. Dadurch ergeben sich folgende Wartezeit-Differenzen:

Klazina C.: $\leq 44 - 34 = 10$

Mamry: $\leq (16{:}44 + x + 46 - 17{:}20) - 0 = x + 10$

Sormovskiy: $\leq (16{:}44 + x + 48 - 17{:}27) - 34 = x + 5 - 34 = x - 29$

Fehn Mistral: ≤ -30

Sarah Rousing: ≤ -2

Das ergibt in Summe:

$$\Delta W \leq 10+x+10+x-29-30-2 < 10+12+10+12-29-30-2 = -17.$$

Damit kann S verbessert werden und ist keine Optimallösung.
16:56 $\leq T \leq$ 17:09:
In diesem Fall kann Klazina C. nun mit Sormovskiy und Fehn Mistral zusammen geschleust werden, Vela und Mamry allein. Das Schleusentor kann dann zum Zeitpunkt $T+5+5+10 = T+20$ geschlossen werden und dann wieder auf der anderen Seite zum Zeitpunkt $T+42$ geöffnet werden. Dadurch ergeben sich folgende Wartezeit-Differenzen:

Klazina C.: $\leq 44 - 34 = 10$

Sormovskiy: $\leq (16{:}44 + x + 46 - 17{:}27) - 34 = x + 3 - 34 = x - 31$

Fehn Mistral: $\leq (16{:}44 + x + 48 - 17{:}33) - 30 = x - 1 - 30 = x - 31$

Sarah Rousing: ≤ -2

Das ergibt in Summe:

$$\Delta W \leq 10 + x - 31 + x - 31 \leq 10 + 25 - 31 + 25 - 31 = -2.$$

Damit folgt schließlich die Behauptung.

Zielfunktion Anzahl Schleusungsvorgänge

Um die Anzahl der benötigten Schleusungsvorgänge zu minimieren, ist es am Besten die Schiffe nur in den großen Kammern zu Schleusen. Dabei ist eine Partition der rausfahrenden Schiffe in möglichst wenige Teilmengen von Schiffen, die zusammen in einer Schleuse anlegen können, und eine der reinfahrenden Schiffe. Eine Lösung in 8 Teilmengen sieht wie folgt aus:
Reinfahrende Schiffe:

1. Cellus (25x110) und King Everest (32x193)

2. Elusive (23x143) und Anne Sibum (28x162)

3. Emma (20x100) und Birkaland (27x145)

4. Hanse Spirit (26x152) und Marina (16x94)

Rausfahrende Schiffe:

1. Almerode (17x86), Transjorund (26x152), Merwedijk (24x143), Heinrich Burmester (16x72)

2. Betty Theresa (23x125), Klazina C. (23x119), Vela (19x98)

3. Mamry (20x91), Sormovskiy 49 (21x120), Fehn Mistral (21x96), Arctic Swan (20x109)

4. Rossiyanin (24x119), Sarah Rousing (17x92), Rudolf (26x151)

Nun lässt sich auch zeigen, dass von jeder Seite auch mindestens vier Schleusungsvorgänge nötig sind, um alle Schiffe zu schleusen. (Die einfachste untere Schranke, Summe der Flächeninhalte der Schiffe durch Flächeninhalt der Schleusenkammer aufgerundet, reicht hierfür nicht.)
Betrachte zunächst die Schiffe, die in den Kanal geschleust werden müssen. Alle Schiffe, deren Breite über $42/2 = 21$ liegt, können nicht nebeneinander in einer Schleusenkammer liegen. Da diese Schiffe Breite ≥ 23 haben, kann auch Emma mit Breite 20 nicht neben diesen Schiffen liegen. So werden mindestens

$$\left\lceil \frac{110 + 193 + 143 + 162 + 100 + 145 + 152}{310} \right\rceil = \left\lceil \frac{1005}{310} \right\rceil = 4$$

Schleusevorgänge für diese Schiffe benötigt.
Betrachte nun die Schiffe, die aus dem Kanal geschleust werden sollen. Definiere die beiden folgenden Schiffsteilmengen:

$$A = \{s \text{ ist rausfahrendes Schiff } \mid \text{ Breite}(s) > 22\}$$

und

$$B = \{s \text{ ist rausfahrendes Schiff } \mid 20 \leq \text{ Breite}(s) \leq 21\}.$$

Dann können alle Schiffe in A nicht nebeneinander geschleust werden und kein Schiff aus B kann neben einem Schiff aus A geschleust werden. Zwei

Schiffe in B können nebeneinander geschleust werden. Die Länge einer Packung der Schiffe in B kann aber folgenden Wert nicht unterschreiten:

$$\frac{\sum_{s \in B} A(s)}{42} = \frac{20 \cdot 91 + 21 \cdot 120 + 21 \cdot 96 + 20 \cdot 109}{42} = \frac{8536}{42} = 203,24$$

Somit werden mindestens

$$\left\lceil \frac{152 + 143 + 125 + 119 + 119 + 151 + 203,24}{310} \right\rceil = \left\lceil \frac{809 + 203,24}{310} \right\rceil = 4$$

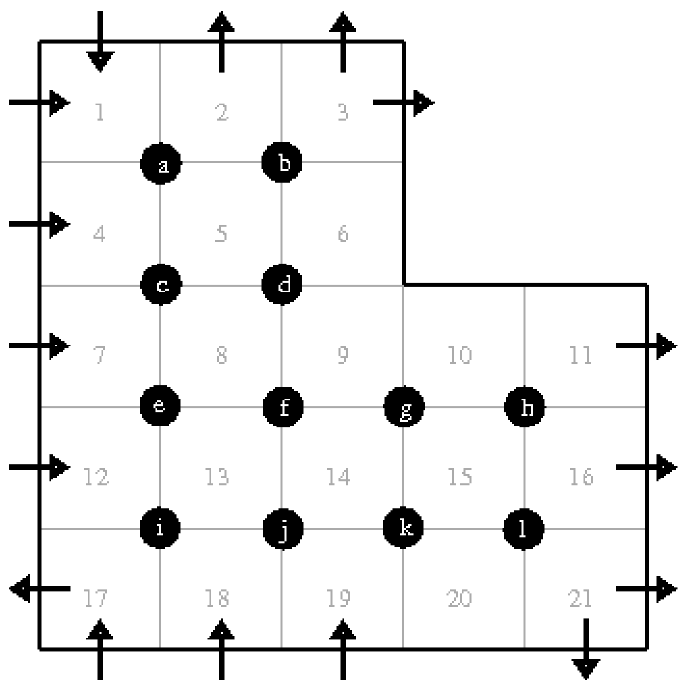
Schleusungsvorgänge benötigt.
Somit ist gezeigt, dass die Aussagen Valentin 1 und Valentin 2 stimmen sowie dass Aussage Rotbär 2 nicht stimmen kann. Ebenso können die reinfahrenden Schiffe nicht in zwei Dreier-Teilmengen und einer Zweier-Teilmenge geschleust werden, da mindestens vier Schleusevorgänge nötig sind. So kann auch Aussage Schlaumeier 2 nicht stimmen.

22 Alles dreht sich...

Autor: Falk Ebert

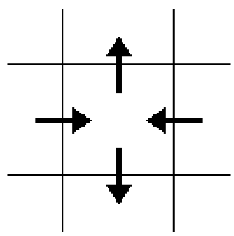
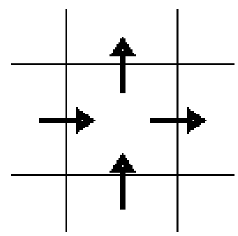
22.1 Aufgabe

Georg und Gabriel, ihres Zeichens Oberaufseher der Nordpol-Geschenke-manufaktur, trauen ihren Augen kaum. In ihren Händen halten sie ein Schreiben der Weltklimakonferenz, das sie für den Klimawandel verantwortlich macht. Angeblich soll die Geschenkemanufaktur die Erdrotation verlangsamen und sie sollten doch schleunigst etwas dagegen tun. Zugegeben, in der Manufaktur läuft einiges umher, manches sicher auch im Kreis. Und wenn sich so nahe an der Erdachse etwas dreht, dann hat das auch einen gewissen Einfluss auf die Erddrehung. Aber, dass es so schlimm ist, hätten sie nicht gedacht. Georg breitet die Blaupausen der Manufaktur aus. Vieles ist mit der Zeit verblasst und nicht mehr lesbar. Aber die grundlegenden Strukturen sind erkennbar.

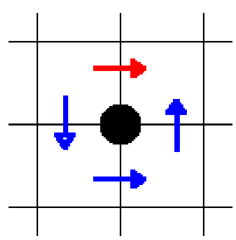


Insgesamt besteht die Manufaktur aus 21 Räumen, in denen emsig gewerkelt wird. Jeder der Räume ist durch seine 4 Wände entweder mit Nachbarräumen oder mit der äußeren Umgebung verbunden. Die dicken Pfeile geben an, von wo nach wo alle 10 Sekunden ein Rohmaterial, ein Zwischenprodukt, ein Geschenk oder etwas Vergleichbares bewegt wird. (Für die i-Punktzerbeißer: Ja, alle betrachteten Objekte sind absolut gleich schwer.) Sehr viele solcher

Pfeile sind leider Kaffeeflecken und Rentierhufstapfen zum Opfer gefallen. Aber Gabriel weiß eines mit Sicherheit: In keinem der Räume hat sich über die Jahrhunderte irgendetwas angesammelt oder war jemals ein Mangel an einem Gut. Es muss also immer gleich viel in einen Raum hineingehen wie rausgeht.

Beispiel:  oder 

Georg fragt sich noch immer, was das jetzt mit der Erddrehung zu tun hat. Gabriel zeichnet etwas in den Schnee. „Betrachten wir doch mal irgendeine der Säulen innerhalb der Manufaktur.“ Er zeichnet noch ein paar Pfeile ein. „Wenn wir jetzt entgegen dem Uhrzeigersinn - das ist die Richtung, die die Erde langsamer macht - einmal um die Säule herumgehen, dann bewegen wir uns teilweise mit den Gütern und teilweise entgegen der Transportrichtung. Jeder Pfeil steht dabei für eine Vierteldrehung um die Säule. Hier in diesem Beispiel bewegen sich die Güter also drei Viertel entgegen dem Uhrzeiger und ein Viertel im Uhrzeigersinn. Insgesamt beschreiben sie also eine halbe Drehung um die Säule - und das alle 10 Sekunden.“



„Aber da drin gibt es doch insgesamt 12 Säulen.“ „Richtig! Jetzt müssen wir herausfinden, wie viele Vierteldrehungen die Waren in der Manufaktur insgesamt jeweils um die Säulen machen. Dabei sind immer nur die direkt angrenzenden Warenflüsse wichtig. Für weiter entfernte Warenbewegungen sind andere Säulen verantwortlich.“ Mit einem grimmigen, in die Ferne schweifenden Blick, fügt er hinzu: „Jawoll, und auch nur die Drehungen um die Säulen sind wichtig. Was draußen oder in den Wänden passiert, ist nicht unsere Sache!“ „Und was machen wir, wenn wir diese ganzen Drehungen kennen?“

Gabriel grinst zufrieden. „Ganz einfach, wir zählen sie zusammen und dann darfst du die entsprechende Zahl von Viertelrunden, diesmal *in die entgegengesetzte Richtung* um den Nordpol dort drüben laufen, um die Verlangsamung zu kompensieren.“

Wie viele Runden soll der arme Georg denn jetzt alle 10 Sekunden um den Nordpol drehen?

Antwortmöglichkeiten:

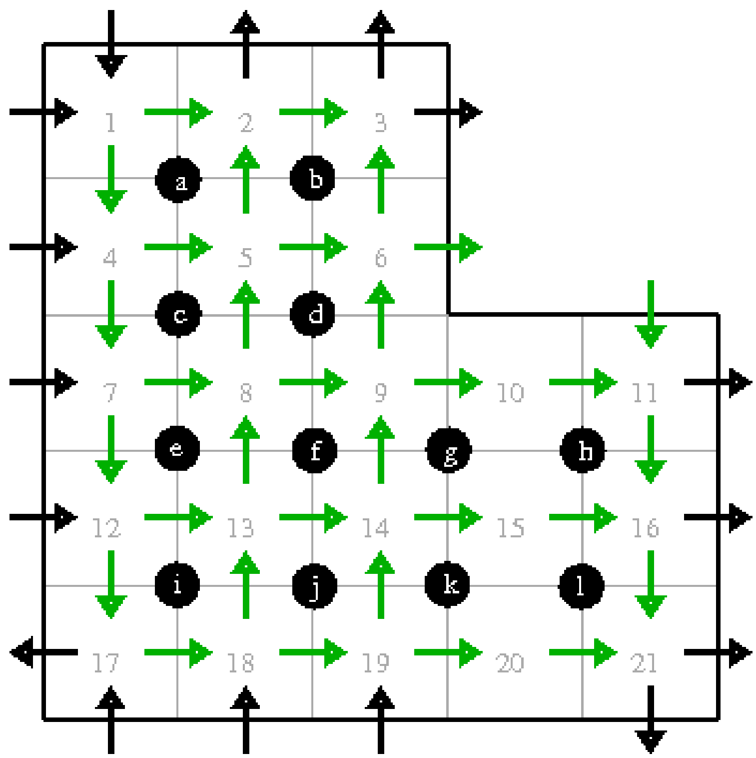
1. acht Runden im Uhrzeigersinn
2. zwei Runden im Uhrzeigersinn
3. eine und eine halbe Runde im Uhrzeigersinn
4. eine Runde im Uhrzeigersinn
5. er muss gar nicht laufen
6. eine viertel Runde gegen den Uhrzeigersinn
7. eine halbe Runde gegen den Uhrzeigersinn
8. eine Runde gegen den Uhrzeigersinn
9. zwei und eine Viertelrunde gegen den Uhrzeigersinn
10. das kann mit den Angaben nicht bestimmt werden

Wer diese Argumentation für unphysikalischen Unsinn hält, der sei auf `http://de.wikipedia.org/wiki/Astronomische_Chronologie` verwiesen. Die Erde wird nämlich tatsächlich langsamer.

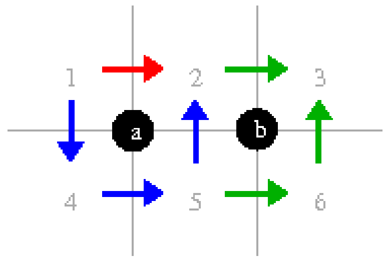
22.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4: Eine Runde im Uhrzeigersinn.

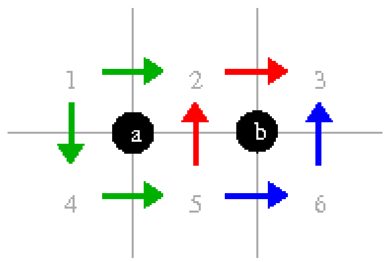
In der Aufgabe kommt einiges zusammen. Zuerst sollte man versuchen, die in der Zeichnung fehlenden Warenflüsse zu finden. Dabei ist klar, dass sobald in ein Feld 2 Pfeile hineinführen, 2 wieder herausführen müssen. Und umgekehrt. Man hat anfangs 3 Felder (1, 3 und 21), in denen man so argumentieren kann und füllt somit fast den gesamten Rest des Hauses aus.



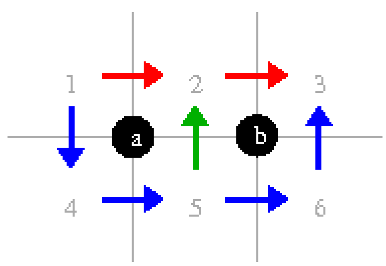
Was man damit konstruiert hat, ist so etwas wie ein diskretes divergenzfreies Vektorfeld. „Divergenzfrei" heißt hier nichts anderes als die Forderung, dass sich nirgendwo etwas ansammelt oder verschwindet. Die Felder 10, 15 und 20 sind aber nicht eindeutig. In denen können alle Pfeile noch nach oben oder alle nach unten gehen. Das ist für die letztendliche Lösung aber komplett irrelevant. Schauen wir uns ein kleines Beispiel an:



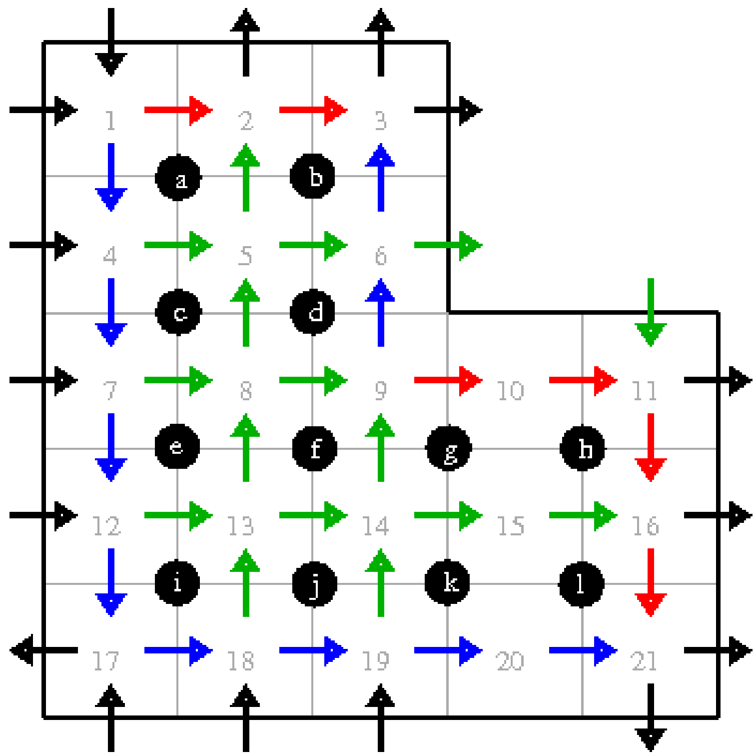
Der Umlauf um Säule a ist im Bild dargestellt. Man hat 3 Vierteldrehungen gegen den Uhrzeigersinn und eine im Uhrzeigersinn - also insgesamt eine halbe Drehung.



Um Säule b heben sich die Vierteldrehungen (je 2) genau auf. Dabei fällt auf, dass der Pfeil von 5 nach 2 um Säule a positiv und um Säule b negativ gezählt wird. Wenn man die Umläufe um Säulen a und b also aufsummiert, fällt der $(5 \rightarrow 2)$-Pfeil weg. Was übrigbleibt, ist die Summe der Pfeile, die außen um die beiden Säulen laufen.



Schnell im Bild nachgezählt liefert das ebenso 2 Vierteldrehungen.
Wir halten also fest: Wenn man die Umläufe um zusammenhängende benachbarte Säulen zusammenzählt, reicht es, nur den Umlauf um alle diese Säulen zu zählen. Und das wiederum ist nichts anderes als die Aussage des *Satzes von Stokes* (der übrigens George Gabriel mit Vornamen heißt). Siehe z.B. `http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Stokes`. Beziehen wir das jetzt auf alle betrachteten Säulen, dann ergibt sich der Umlauf wie im Bild.



Es gibt also 10 Pfeile in und 6 Pfeile entgegen dem Uhrzeigersinn. Insgesamt bleiben also 4 Vierteldrehungen übrig und Georg darf 1 Runde laufen.

Projektbezug:
Sowohl der Begriff der Divergenzfreiheit als auch der Satz von Stokes sind grundlegende Prinzipien der Analysis. In jeder Strömungssimulation oder in der Simulation von magnetischen Feldern ist es wichtig, dass nicht einfach irgendwo Flüssigkeit verschwindet oder das Magnetfeld eine Quelle hat. Die Divergenzfreiheit wird dort also immer gefordert. Genauso treten bei diesen Problemen auch Fragestellungen nach Gesamtdrehimpuls oder der gesamten magnetischen Flussdichte auf, die sich mit dem Satz von Stokes einfach beantworten lassen, indem man einfach einen Rundweg um das betrachtete Gebiet anschaut, statt jeden Punkt im Inneren einzeln zu betrachten.

23 Rasende Rentiere

Autor: Martin Groß, Melanie Schmidt
Projekt: B18

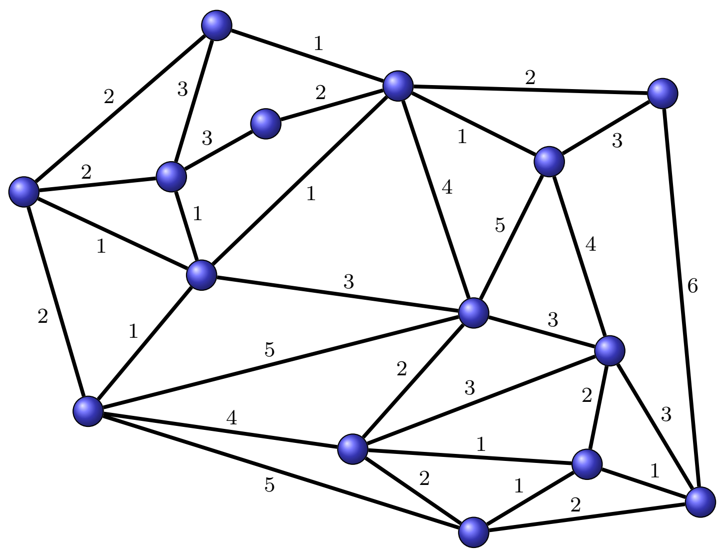
23.1 Aufgabe

Weihnachten steht vor der Tür, und der Weihnachtsmann vor einem Problem: eine Grippe-Welle hat die Wichtel erwischt. Fast alle Wichtel liegen stark verschnupft mit Fieber in ihren Betten, schnelle Besserung ist laut Wichtel-Doktor Wirrhaar nicht in Sicht. Das ist ein Problem, denn Geschenkherstellung funktioniert am Nordpol nicht wie in normalen Fabriken: Für ein Geschenk nimmt man eine Handvoll Sternenstaub, die man dann in verschiedenen Fabriken verzaubern lassen muss. In jeder Fabrik wird ein bestimmter Zauber gewirkt, und je nachdem, bei welchen Fabriken ein Gegenstand weiterverzaubert wird, kommt am Ende ein Fahrrad oder auch ein Computer heraus. Dazu müssen die Gegenstände aber zwischen verschiedenen Fabriken hin- und hertransportiert werden – und das übernehmen normalerweise die Wichtel.

Zum Glück können die Rentier-Schlitten einspringen und sich um den Transport kümmern – zum Geschenke verteilen werden sie ja noch nicht benötigt. Am Nordpol kennen sich die Rentiere zwar nicht so gut aus (es leben einfach zu wenig Kinder dort, denen sie Geschenke bringen würden), aber solange die Schlitten über die Straßen fliegen können, die die Wichtel normalerweise benutzen würden, spielt das zum Glück keine Rolle.

Der Weihnachtsmann wirft einen Blick auf seine Nordpol-Karte (siehe Abbildung): die dicken Punkte markieren die Geschenkfabriken, die Linien Wichtel-Straßen und die Zahlen an den Linien die Anzahl an Rentieren, die zum Aufrechterhalten des Transports entlang einer Wichtel-Straße nötig wären. Da seine Rentiere aber auch nicht zu erschöpft sein dürfen, wenn es an das Geschenkeaustragen geht, sollten so wenig Rentiere wie möglich zum Transport eingespannt werden. „Auf wie viele Wichtel-Straßen kann ich verzichten, ohne dass es zwei nicht miteinander verbundene Fabriken gibt?“, fragt sich der Weihnachtsmann und fängt an, herumzuprobieren. Einen halben Bleistift und einen Block Papier später hat er auf eine Menge Wege verzichtet – es gibt jetzt zwischen je zwei Geschenkfabriken immer noch einen Transportweg, aber nicht mehr.

Das müssten seine Rentiere eigentlich noch bewältigen können, denkt sich der Weihnachtsmann und will den Plan schon umsetzen... bis ihm einfällt, dass die Schlitten auch irgendwo starten und landen müssen! Eine Schlitten-Landebahn ist zwar schnell herbeigezaubert, braucht aber Platz und muss in der Nähe ihrer Geschenkfabrik sein – und unter diesen Umständen passen maximal drei Landebahnen an eine Fabrik. An beiden Enden einer Straße muss eine Landebahn sein, damit die Straße von Rentier-Schlitten benutzt werden kann. Somit muss der Weihnachtsmann noch einmal neu schauen, auf welche Wichtel-Straßen er verzichtet – er möchte nach wie vor, dass alle Geschenkfabriken erreichbar bleiben und möglichst wenig Rentiere eingesetzt werden müssen. Zusätzlich dürfen jetzt von jeder Geschenkfabrik ausgehend maximal drei Straßen genutzt werden, damit nicht zu viele Landebahnen an einer Fabrik benötigt werden. Wie viele Rentiere sind dann mindestens nötig?



Antwortmöglichkeiten:

1. 18
2. 19
3. 20
4. 21
5. 22

6. 23
7. 24
8. 25
9. 26
10. 27

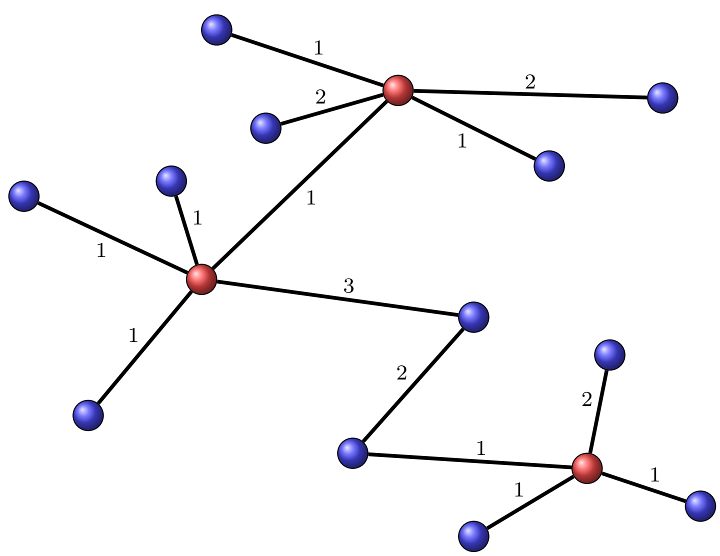
Projektbezug:
Der Aufgabe liegt das Problem aus der kombinatorischen Optimierung zu Grunde, einen grad-beschränkten minimalen Spannbaum zu finden.

23.2 Lösung

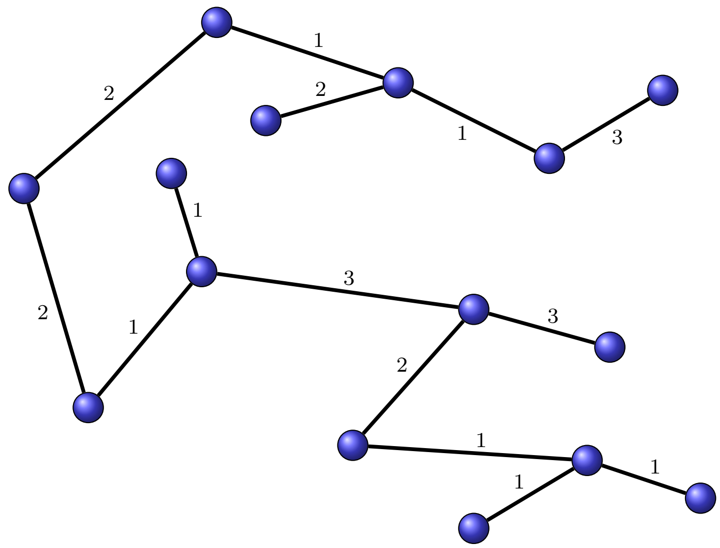
Richtige Lösung: Antwort 7: 24 Rentiere.

Verschiedene Strategien führen zu der Lösung der Aufgabe. Eine Möglichkeit besteht darin, Schritt für Schritt auf Wichtel-Straßen zu verzichten, die viele Rentiere benötigen würden und deren Schließung nicht den Transport zwischen zwei Fabriken unmöglich macht.

Verzichtet man, beginnend mit der teuersten Wichtel-Straße (also der Straße, die 6 Rentiere erfordern würde), wiederholt auf die jeweils teuerste Wichtel-Straße, bleiben schließlich die Straßen aus folgender Abbildung übrig.



Da die drei roten Fabriken mehr als drei ausgehende Straßen haben, muss diese Lösung noch angepasst werden. Wichtig ist vor allem, die Straße zwischen den beiden roten Fabriken zu vermeiden. Eine optimale Lösung ist folgende:


1
2
2
1
3
1
2
1
3
3
2
1
1
1

24 Ein Sudoku zum Advent

Autor: Günter M. Ziegler

24.1 Aufgabe

„Bald nun ist Weihnachten“. Die Crew um den Weihnachtsmann hat die Vorbereitungen auf das Weihnachtsfest fast abgeschlossen. Bevor es nun für den Weihnachtsmann auf die alljährliche, große Tour geht, gönnt er sich ein wenig Zeit zur Entspannung. In der Weihnachtsrätsel-Zeitung findet er folgendes Buchstaben-Sudoku. Für die Lösung ist der Buchstabe im roten Feld entscheidend.

D			M	A	T	H	E	
				D		M		
		E		V				
M	A	T	H	E	O	N		
	D			N				
	V			T				
	E							
V	N			M	A	T	H	E
	T		N				A	

Der Weihnachtsmann macht sich an die Arbeit und löst dieses Sudoku. Welche der Antworten ist die richtige, wenn man dem Weihnachtsmann unterstellt, dass er alle Lösungen gefunden hat. Das heißt im Klartext: Für die Buchstaben, die in den Antwortmöglichkeiten nicht erwähnt wurden, ist anzunehmen, dass das Sudoku mit diesen nicht lösbar ist.

Antwortmöglichkeiten:

1. Wenn im roten Feld ein A steht, gibt es genau drei Lösungen.
2. Wenn dort ein E steht, dann gibt es zwei Lösungen, bei O exakt eine Lösung.
3. Wenn da ein A steht, dann hat das Sudoku zwei Lösungen, wenn da ein E oder O steht, dann jeweils eine.
4. Wenn dort V steht, dann existiert keine Lösung, wenn dort ein beliebiger anderer Buchstabe steht, der dazu führt, dass das Sudoku mindestens eine Lösung hat, dann hat das Rätsel insgesamt drei Lösungen.
5. Die Buchstaben A,E,O,V liefern jeweils genau eine Lösung.
6. Wenn da ein O steht, dann hat das Sudoku zwei Lösungen, wenn da ein A oder E steht, dann jeweils eine.
7. Wenn da ein A oder O steht, dann hat das Sudoku insgesamt zwei Lösungen.
8. Wenn im roten Feld ein E oder A steht, dann gibt es jeweils zwei Lösungen. Bei O existiert nur eine Lösung.
9. Bei A oder V im roten Feld lassen sich insgesamt zwei Lösungen finden, bei E noch eine zusätzliche Lösung.
10. Das Sudoku ist inkorrekt definiert. Bei einem beliebigen Buchstaben, der im Sinne des Rätsels dort vorkommen könnte, existiert keine Lösung.

Hinweis:
Beim klassischen Sudoku gilt es, in ein 9×9 - Raster, in jede Zeile und jede Spalte die Ziffern 1 bis 9 einzutragen, wobei jede Ziffer in jeder Zeile und Spalte exakt einmal vorkommt. Zusätzlich gilt die gleiche Einmaligkeitsbedingung für jedes der neun markierten 3×3 Unterquadrate. Im vorliegenden Sudoku sind die Zahlen durch Buchstaben ersetzt.

24.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3: Wenn da ein A steht, dann hat das Sudoku zwei Lösungen, wenn da ein E oder O steht, dann jeweils eine.

D	O	V	M	A	T	H	E	N
T	H	A	E	D	N	M	$\frac{V}{O}$	$\frac{O}{V}$
N	M	E	O	V	H	$\frac{D}{A}$	$\frac{T}{D}$	$\frac{A}{T}$
M	A	T	H	E	O	N	$\frac{D}{V}$	$\frac{V}{D}$
$\frac{E}{O \mid E}$	D	H	V	N	M	$\frac{A}{E \mid O}$	$\frac{O}{T}$	$\frac{T}{A}$
$\frac{O}{E \mid O}$	V	N	A	T	D	$\frac{E}{O \mid E}$	M	H
A	E	$\frac{M \mid D}{M}$	T	H	V	$\frac{O}{D}$	N	$\frac{D \mid M}{O}$
V	N	O	D	M	A	T	H	E
H	T	$\frac{D \mid M}{D}$	N	O	E	V	A	$\frac{M \mid D}{M}$