MATH+ KALENDER

Aufgaben und Lösungen 2019

www.mathekalender.de

Inhaltsverzeichnis

1 Mondrian

Autoren: Hajo Broersma (Universiteit Twente),
Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

1.1 Aufgabe

Der Malwichtel Mondrian hat eine quadratische Weihnachtskarte entworfen und in 100 Zellen in einem 10×10 Raster unterteilt. Außerdem hat Mondrian 30 kleine schwarze Kreise auf der Karte eingetragen (s. Abb. 1).

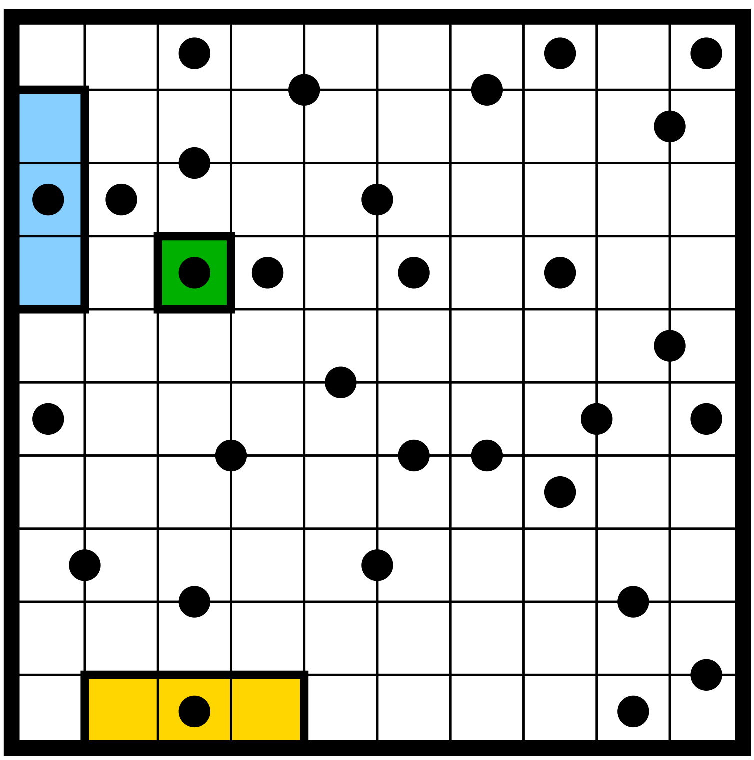
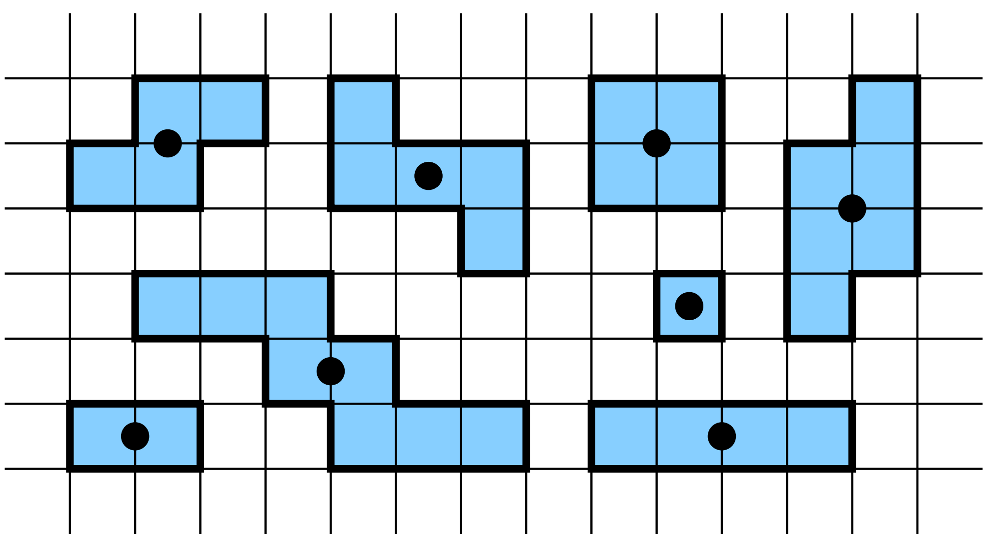


Abbildung 1: Mondrians *unfertige* Weihnachtskarte

Um jeden dieser 30 schwarzen Kreise herum hat Mondrian sodann ein Gebiet eingezeichnet und bunt ausgemalt. Das blaue, das grüne und das gelbe Gebiet sind in der Abbildung 1 bereits eingezeichnet.

- Jedes Gebiet setzt sich aus einer oder mehreren Zellen des 10×10 Rasters zusammen.
- Jede Zelle gehört zu genau einem Gebiet.
- Die Zellen jedes Gebietes hängen zusammen: Man kann jede Zelle des Gebietes von jeder anderen Zelle des Gebietes aus erreichen, indem man einige horizontale und vertikale Schritte innerhalb des Gebietes macht.
- Die Gebiete haben keine Löcher.
- Jedes Gebiet enthält genau einen vollständigen zusammenhängenden schwarzen Kreis in seinem Inneren. Zusätzliche Kreisteile sind einem Gebiet *nicht* erlaubt.
- Jedes Gebiet ist rotationssymmetrisch: Dreht man das Gebiet um 180 Grad um seinen schwarzen Mittelpunkt herum, so ist das gedrehte Gebiet deckungsgleich mit dem ursprünglichen nicht gedrehten Gebiet.

Hier sind einige Beispiele für derartige rotationssymmetrische Gebiete mit einem schwarzen Kreis als Mittelpunkt:



Frage: Wie groß ist die Fläche des größten Gebietes auf Mondrians *fertiger* Weihnachtskarte (vgl. Abb. 1)?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Das größte Gebiet besteht aus 9 Zellen.
2. Das größte Gebiet besteht aus 10 Zellen.
3. Das größte Gebiet besteht aus 11 Zellen.
4. Das größte Gebiet besteht aus 12 Zellen.
5. Das größte Gebiet besteht aus 13 Zellen.
6. Das größte Gebiet besteht aus 14 Zellen.
7. Das größte Gebiet besteht aus 15 Zellen.
8. Das größte Gebiet besteht aus 16 Zellen.
9. Das größte Gebiet besteht aus 17 Zellen.
10. Das größte Gebiet besteht aus 18 Zellen.

1.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Einige Zellen enthalten einen schwarzen Kreis, oder einen schwarzen Halbkreis, oder einen schwarzen Viertelkreis. Diese Zellen können dann dem entsprechenden Kreis k zugeordnet werden und liegen in dem Gebiet, das diesen schwarzen Kreis k enthält. Zum Beispiel ist die Zelle in der rechten oberen Ecke dem Kreis in ihrem Inneren zugeordnet und die Zelle in der rechten unteren Ecke ist dem Kreis an ihrem oberen Rand zugeordnet.
Wenn nun zwei Zellen horizontal oder vertikal benachbart sind und wenn diese Zellen zwei verschiedenen Kreisen zugeordnet sind, dann muss ihre gemeinsame (horizontale oder vertikale) Kante zu den Begrenzungslinien der Gebiete gehören. In der ersten Phase zeichnen wir alle derartigen Kanten in Mondrians Weihnachtskarte ein (siehe Abb. 2).

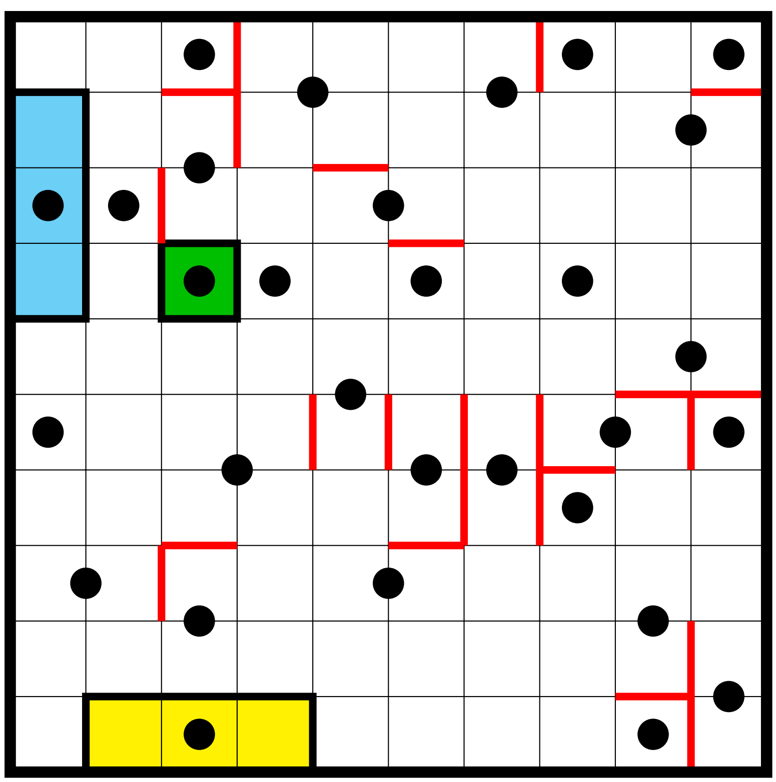


Abbildung 2: Begrenzungslinien benachbarter Quadrate

Nun kennen wir also einige Begrenzungslinien der Gebiete. Natürlich gehören auch alle 40 am Rand der Weihnachtskarte gelegenen Kanten zu den uns bekannten Begrenzungslinien. Jede bekannte Begrenzungslinie ℓ gehört zu einer Zelle z und diese Zelle z gehört zu einem schwarzen Kreis k. Wenn man nun die Begrenzungslinie ℓ um 180 Grad um k herum dreht, so erhält man eine zu ℓ symmetrisch gelegene Begrenzungslinie ℓ'. Da laut Angabe jedes Gebiet rotationssymmetrisch ist, muss auch die Begrenzungslinie ℓ' zum Kreis k gehören.
In der zweiten Phase zeichnen wir alle derartigen symmetrisch gelegenen Begrenzungslinien ℓ' in Mondrians Weihnachtskarte ein. Damit man die alten Linien von den neuen unterscheiden kann, zeichnen wir die neuen Linien in rot ein (siehe Abb. 3).

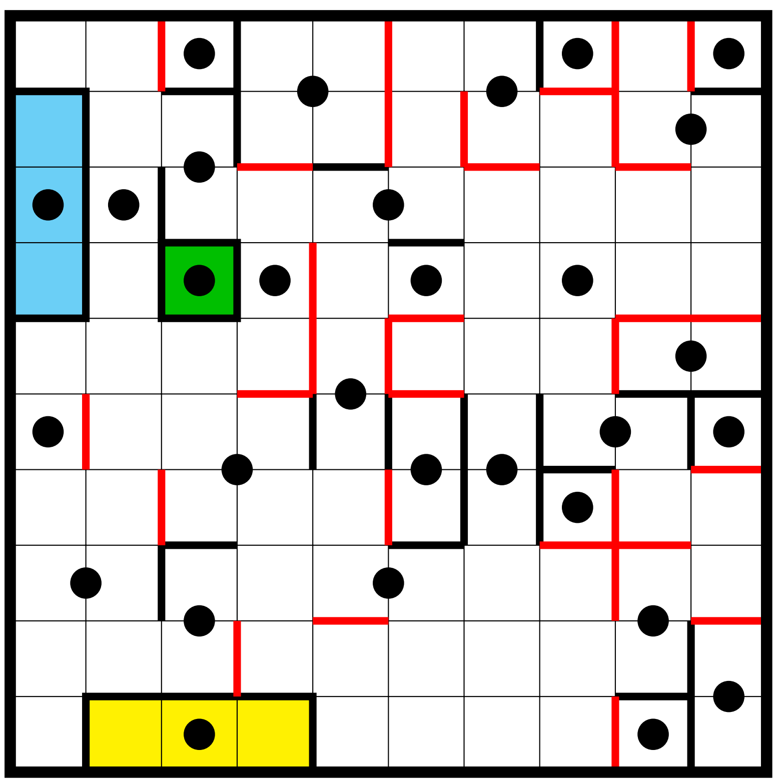


Abbildung 3: Rotationssymmetrische Begrenzungslinien

In der nächsten Phase zeichnen wir zunächst alle Begrenzungslinien ein, die symmetrisch zu den in der zweiten Phase gefundenen Linien liegen. Dann können weitere Zellen eindeutig zu Gebieten zugeordnet werden. Nach einigen Iterationen kommt man auf folgendes Bild (Abb. 4).

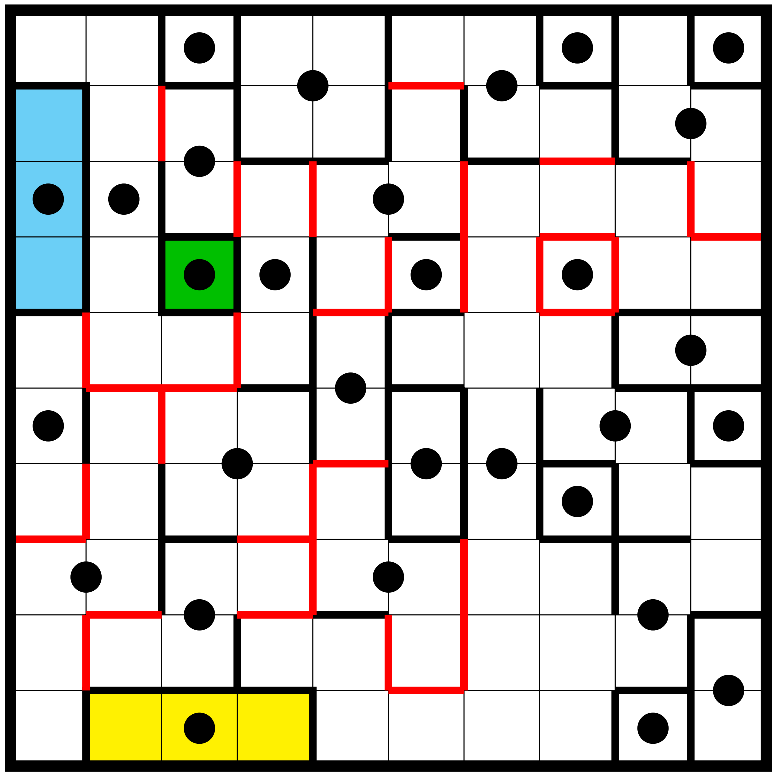


Abbildung 4: Begrenzungen nach mehreren Iterationen

Die letzen drei Kreise (blau) lassen sich schlussendlich durch Fallunterscheidungen eindeutig drei Gebieten zuordnen. Das flächengrößte Gebiet besteht aus 18 Zellen und ist im folgenden Bild (Abb. 5) grau eingezeichnet.

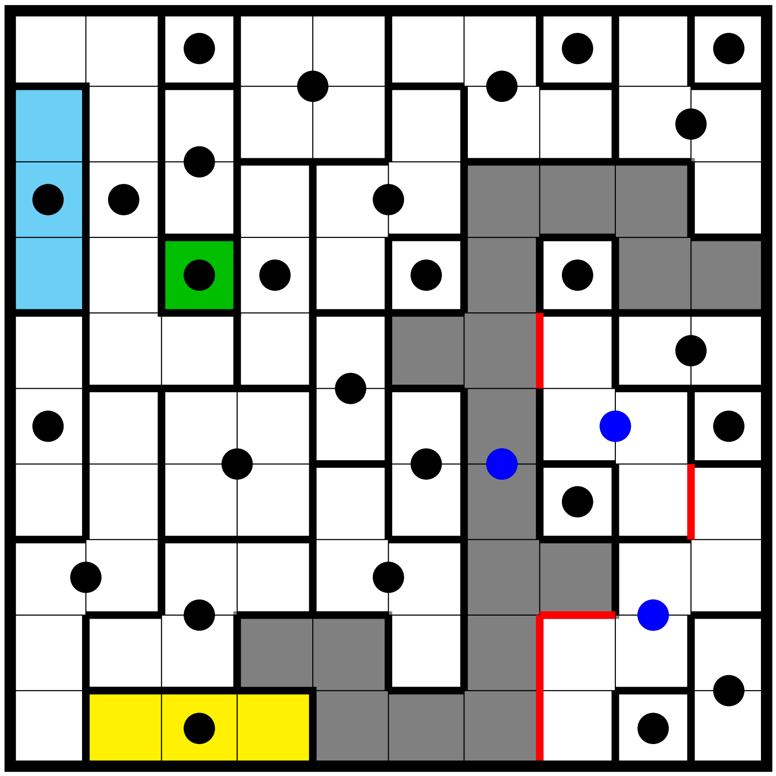


Abbildung 5: Die fertige Weihnachtskarte

2 Xmasium

Autoren: Cor Hurkens (TU Eindhoven),
Frits Spieksma (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

2.1 Aufgabe

Im Forschungslabor des Weihnachtsmanns wurde vor ein paar Jahren ein neues chemisches Element entdeckt und (in Anlehnung an Rubidium, Cäsium und Technetium) auf den Namen *Xmasium* getauft. Xmasium tritt unter Laborbedingungen in drei Typen auf: Es gibt α-Xmasium, β-Xmasium und γ-Xmasium. Wenn nun zwei Xmasium-Atome mit verschiedenem Typ aufeinanderprallen, so verschmelzen sie manchmal zu einem einzigen Xmasium-Atom des dritten Typs. Wenn zwei Xmasium-Atome vom gleichen Typ aufeinandertreffen, so stoßen sie einander ab und es passiert weiter nichts.

Knecht Ruprecht legt 91 α-Xmasium-Atome, 25 β-Xmasium-Atome und 4 γ-Xmasium-Atome in einen Kochtopf, legt den Deckel auf den Kochtopf und geht in die Kantine Mittag essen. Als er zurückkommt, haben alle Xmasium-Atome im Topf denselben Typ.

Was ist die größtmögliche Anzahl z von Xmasium-Atomen, die nach der Mittagspause im Kochtopf liegen?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gilt $20 \leq z \leq 23$.
2. Es gilt $24 \leq z \leq 27$.
3. Es gilt $28 \leq z \leq 31$.
4. Es gilt $32 \leq z \leq 35$.
5. Es gilt $36 \leq z \leq 39$.
6. Es gilt $40 \leq z \leq 43$.
7. Es gilt $44 \leq z \leq 47$.
8. Es gilt $48 \leq z \leq 51$.
9. Es gilt $52 \leq z \leq 55$.
10. Es gilt $56 \leq z \leq 59$.

2.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Wir bezeichnen die Anzahl der α-Atome, β-Atome, γ-Atome mit a, b bzw. c. Wenn zwei Xmasium-Atome verschiedenen Typs zu einem Xmasium-Atom des dritten Typs verschmelzen, so ändert sich gleichzeitig die *Parität* (die Eigenschaft einer Zahl durch 2 teilbar zu sein) von allen drei Zahlen a, b, c: Zwei Zahlen werden dadurch um 1 kleiner und die dritte Zahl wird dadurch um 1 größer.

Da am Anfang $(a, b, c) = (91, 25, 4)$ gilt, werden a und b immer dieselbe Parität haben, während c immer eine andere Parität als a und b haben wird. Da am Ende der Mittagspause zwei der drei Zahlen a, b, c gleich 0 sind, muss dann $a = b = 0$ und c ungerade sein. Insbesondere müssen alle 91 α-Atome verschwunden sein, sodass *mindestens* 91 Verschmelzungen stattgefunden haben müssen. Von den anfänglichen $91 + 25 + 4 = 120$ Atomen können also am Ende *höchstens* $120 - 91 = 29$ Atome übrig bleiben.

Wir beschreiben nun einen möglichen Prozess mit genau 91 Verschmelzungen und 29 übrig bleibenden γ-Atomen:

- Zuerst prallen 25-mal ein α-Atom und ein β-Atom zusammen:
$$(91, 25, 4) \to (66, 0, 29)$$
- Dann prallen 29-mal ein α-Atom und ein γ-Atom zusammen:
$$(66, 0, 29) \to (37, 29, 0)$$
- Dann prallen 29-mal ein α-Atom und ein β-Atom zusammen:
$$(37, 29, 0) \to (8, 0, 29)$$
- Dann prallen 4-mal ein α-Atom und ein γ-Atom zusammen:
$$(8, 0, 29) \to (4, 4, 25)$$
- Dann prallen 4-mal ein α-Atom und ein β-Atom zusammen:
$$(4, 4, 25) \to (0, 0, 29)$$

Nach diesen $25 + 29 + 29 + 4 + 4 = 91$ Verschmelzungen sind keine α-Atome, keine β-Atome und genau 29 γ-Atome im Kochtopf. Daher gilt $z = 29$.

3 Fünf listige Elfen

Autorin: Ariane Beier (TU Berlin)
Projekt: MATH+ Schulaktivitäten

3.1 Aufgabe

Die fünf listigen Weihnachtselfen Charlie, Kim, Luca, Mika und Ulli haben als Belohnung für ihre harte Arbeit am heutigen Tag eine große Box mit endlich vielen, ganzen, leckeren Kokosmakronen vom Weihnachtsmann bekommen. Sie tragen sie geschafft nach Hause und gehen laut gähnend ins Bett. In der Elfen-Küche steht die Box nun auf dem Tisch und wird von Anouk, dem Hund der Elfen, bewacht.

Um 22:34 Uhr schleicht sich Charlie in die Küche, gibt Anouk eine der Kokosmakronen aus der Box, teilt die übrigen Makronen in fünf gleiche Teile (wobei *keine* einzelne Makrone geteilt wird), steckt sich einen Teil ein, schiebt die verbleibenden vier Teile wieder zu einem Makronenhaufen zusammen und geht grinsend wieder ins Bett. Um 23:56 Uhr huscht Kim auf Zehenspitzen in die Küche, gibt Anouk eine Kokosmakrone aus der Box, teilt die verbleibenden Makronen in fünf gleiche Teile (*ohne* auch nur eine Makrone zu teilen), packt sich einen Teil in die Pyjamatasche, schiebt die übrigen vier Teile wieder zu einem Haufen zusammen und verkrümelt sich zufrieden ins Bett. Um 1:45 Uhr, 3:17 Uhr und 4:23 Uhr wiederholen Luca, Mika bzw. Ulli dieses Vorgehen.

Trotz der unruhigen Nacht treffen sich die listigen Elfen um 9:00 Uhr gut gelaunt zum Frühstück. Sie geben Anouk eine Frühstücksmakrone und teilen den Rest der Kokosmakronen aus der Box zu gleichen Teilen untereinander auf (wobei auch hier *keine* Makrone geteilt werden muss).

Über wie viele Kokosmakronen kann sich **Kim** insgesamt *mindestens* freuen?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. 35
2. 352
3. 3.522
4. 35.223
5. 352.230
6. 3.522.300
7. 35.223.004
8. 352.230.042
9. 3.522.300.421
10. 35.223.004.219

3.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Sei n die Zahl der Kokosmakronen am Anfang der Nacht. Seien c, k, l, m bzw. u die Zahl der Makronen, die sich Charlie, Kim, Luca, Mika bzw. Ulli im Laufe der Nacht stibitzen; sei j die Anzahl der Makronen, die jede Elfe am Morgen jeweils noch dazu bekommt. Es gilt also:

$$\begin{aligned} n &= 5c + 1, \\ 4c &= 5k + 1, \\ 4k &= 5l + 1, \\ 4l &= 5m + 1, \\ 4m &= 5u + 1, \\ 4u &= 5j + 1. \end{aligned}$$

Addiert man nun 4 zu beiden Seiten aller sechs Gleichungen, erhält man:

$$\begin{aligned} n + 4 &= 5(c + 1), \\ 4(c + 1) &= 5(k + 1) \\ 4(k + 1) &= 5(l + 1), \\ 4(l + 1) &= 5(m + 1), \\ 4(m + 1) &= 5(u + 1), \\ 4(u + 1) &= 5(j + 1). \end{aligned}$$

Multipliziert man alle linken bzw. rechten Gleichungsseiten miteinander, ergibt sich:

$$4^5(n+4)(c+1)(k+1)(l+1)(m+1)(u+1) = 5^6(c+1)(k+1)(l+1)(m+1)(u+1)(j+1).$$

Da $c, k, l, m, u \geq 0$ sind, können wir beide Seiten dieser Gleichung durch $(c + 1)(k + 1)(l + 1)(m + 1)(u + 1)$ teilen und es verbleibt:

$$4^5(n + 4) = 5^6(j + 1).$$

Damit diese Gleichung ganzzahlige Lösungen für n und j liefert, muss $n + 4$ durch $5^6 = 15.625$ und $j + 1$ durch $4^5 = 1.024$ teilbar sein. Die kleinste natürliche Zahl, die die Gleichungen erfüllt, ist somit $n = 5^6 - 4 = 15.621$. Für $n = 15.621$ ergeben zudem auch die anderen Unbekannten

$$c = 3.124,\ k = 2.499,\ l = 1.999,\ m = 1.599,\ u = 1.279,\ j = 1.023,$$

positive natürliche Zahlen.

Die gesuchte Anzahl an Kokosmakronen, die Kim insgesamt mindestens erhält, ist somit

$$k + j = 2.499 + 1.023 = \mathbf{3.522}.$$

Wir sehen also, dass die Kokosmakronen entweder sehr, sehr klein sind, oder die Elfen riesige Verstecke für ihre Beute haben. Außerdem hoffen wir, dass sie sich die Makronen gut einteilen und keine Bauchschmerzen bekommen...

4 Fußball

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

4.1 Aufgabe

Am großen Fußballturnier haben vier Wichtelteams aus Eisstedt, Frostberg, Gletscherdorf und Kaltburg teilgenommen. Im Laufe des Turniers hat jedes Team genau einmal gegen jedes der Teams aus den anderen drei Orten gespielt. Für einen Sieg gab es dabei drei Punkte, für eine Niederlage keine Punkte und für ein Unentschieden einen Punkt. Erstaunlicherweise endeten keine zwei verschiedenen Spiele im Turnier mit dem gleichen Ergebnis. (Also zum Beispiel: Wenn ein Spiel 3:2 endete, dann endete kein einziges anderes Spiel mit 2 Toren der einen Mannschaft und 3 Toren der anderen Mannschaft.) Die Schlusstabelle des Turniers sah so aus:

Team	Siege	Unentschieden	Niederlagen	Tore : Gegentore	Punkte
Eisstedt	2	0	1	5 : 1	6
Frostberg	2	0	1	3 : 5	6
Gletscherdorf	1	0	2	5 : 6	3
Kaltburg	1	0	2	4 : 5	3

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 1:0 gewonnen.
2. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 0:1 verloren.
3. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 2:0 gewonnen.
4. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 0:2 verloren.
5. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 3:0 gewonnen.
6. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 0:3 verloren.
7. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 2:1 gewonnen.
8. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 1:2 verloren.
9. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 3:1 gewonnen.
10. Kaltburg hat das Spiel gegen Gletscherdorf 1:3 verloren.

4.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Da beim großen Fußballturnier jedes der vier Teams genau einmal gegen jedes der Teams aus den anderen drei Orten gespielt hat, haben insgesamt $3 + 2 + 1 = 6$ Spiele stattgefunden. Aus der Tabelle liest man leicht ab, dass kein Spiel mit einem Unentschieden endete und dass insgesamt

$$5 + 3 + 5 + 3 + 4 = 1 + 5 + 6 + 5 = 17$$

Tore geschossen wurden.

Wir zeigen nun, dass in jedem einzigen der sechs Spiele höchstens vier Tore gefallen sein können. Dazu betrachten wir alle möglichen verschiedenen Ergebnisse, die kein Unentschieden liefern und bei denen höchstens vier Tore geschossen werden:

$$1{:}0,\ 2{:}0,\ 3{:}0,\ 2{:}1,\ 4{:}0 \text{ und } 3{:}1. \tag{1}$$

Wir sehen, dass es genau sechs solche Ergebnisse gibt. Außerdem liefern diese schon eine Gesamtzahl von 17 Toren. In keinem der sechs Spiele des großen Fußballturniers können also mehr als vier Tore geschossen worden sein, und die sechs Spiele des Turniers endeten somit 1:0, 2:0, 3:0, 2:1, 4:0 und 3:1.

Nun machen wir eine Reihe von Beobachtungen.

- *Frostberg* hat zwei Spiele gewonnen, ein Spiel verloren und hat eine Tordifferenz von -2 erreicht.

  Angenommen, die beiden gewonnenen Spiele wurden mit Tordifferenz $+x$ und $+y$ gewonnen und das dritte Spiel wurde mit Tordifferenz $-z$ verloren, dann gilt $x, y \geq 1$ und $z \leq 4$, und die Tordifferenz ist

  $$-2 = x + y - z \geq 1 + 1 - 4 = -2.$$

  Dies impliziert $x = y = 1$ und $z = 4$. Frostberg hat also zwei Spiele mit einer Tordifferenz von $+1$ gewonnen und ein Spiel mit einer Tordifferenz vom -4 verloren. Aus der Liste der möglichen Ergebnisse (1) kommen also für Frostberg nur folgende in Frage:

  $$2 \text{ Siege: } 1{:}0,\ 2{:}1 \quad \text{und} \quad 1 \text{ Niederlage: } 0{:}4.$$

- *Eisstedt* hat nur ein Spiel verloren und nur ein einziges Gegentor kassiert. Daher hat Eisstedt dieses Spiel mit 0:1 verloren, und wir wissen auch schon, dass der Gewinner dieses Spiels Frostberg war.

  Die anderen beiden Spiele hat Eisstedt mit insgesamt fünf geschossenen und null erhaltenen Toren gewonnen. Da das (4:0)-Spiel von Frostberg verloren wurde (und Eisstedt nicht zweimal gegen Frostberg gespielt hat), muss Eisstedt seine beiden anderen Gegner (Gletscherdorf und Kaltburg) und mit 2:0 und mit 3:0 besiegt haben.

- Für das **Spiel zwischen Gletscherdorf und Kaltburg** bleibt dann nur noch das **Ergebnis 3:1 (oder 1:3)** übrig.

- *Kaltburg* hat insgesamt vier Tore geschossen. Da Kaltburg mindestens ein Tor im Spiel gegen Gletscherdorf geschossen hat, hat es höchstens drei Tore gegen Frostberg gemacht. Daher kann Kaltburg nicht 4:0 gegen Frostberg gewonnen haben.

- Daher hat Frostberg 0:4 gegen den letzten möglichen Gegner Gletscherdorf verloren.

Wir fassen die *Ergebnisse von Frostberg* zusammen:

Frostberg hat 0:4 gegen Gletscherdorf verloren, 1:0 gegen Eisstedt gewonnen, und sein drittes Spiel gegen Kaltburg 2:1 gewonnen.

Wir fassen die *Ergebnisse von Kaltburg* zusammen:

Kaltburg hat 1:2 gegen Frostberg verloren und entweder 0:2 oder 0:3 gegen Eisstedt verloren. **Daher hat Kaltburg sein verbleibendes Spiel gegen Gletscherdorf gewonnen – und zwar mit 3:1**. Für das Spiel gegen Eisstedt bleibt dann nur eine 0:2 Niederlage übrig.

Alles in allem ergibt das die folgende Ergebnistabelle:

	Eisstedt	Frostberg	Gletscherdorf	Kaltburg
Eisstedt	—	0 : 1	3 : 0	2 : 0
Frostberg	1 : 0	—	0 : 4	2 : 1
Gletscherdorf	0 : 3	4 : 0	—	1 : 3
Kaltburg	0 : 2	1 : 2	**3 : 1**	—

5 Zahlenraten

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven)
Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

5.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann überreicht jedem der drei Klugwichtel Alpha, Beta und Gamma einen Briefumschlag und sagt: „In diesen drei Umschlägen stecken Karten mit drei verschiedenen Zahlen aus dem Bereich $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Die größte dieser drei Zahlen ist die Summe der beiden kleineren Zahlen. Öffnet jetzt bitte Eure Umschläge, seht Euch Eure Zahl gut an, aber zeigt sie nicht den beiden anderen!“

Alpha, Beta und Gamma öffnen ihre Umschläge und betrachten ihre Zahlen.

1) **Alpha** sagt nach einigem Nachdenken: „Meines Wissens nach gibt es höchstens acht mögliche Kandidaten für Betas Zahl.“

2) Dann sagt **Beta**: „Meines momentanen Wissens nach gibt es genau drei mögliche Kandidaten für Gammas Zahl.“

3) **Gamma** ruft: „Aha! Jetzt kenne ich Alphas Zahl.“

4) **Alpha** denkt nach und sagt: „Ich kenne Betas Zahl noch immer nicht.“

5) **Beta** ruft: „Aha! Jetzt kenne auch ich Alphas Zahl.“

Und wir wollen jetzt natürlich von Euch wissen: Wie lautet denn Alphas Zahl?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Alphas Zahl ist 1.
2. Alphas Zahl ist 2.
3. Alphas Zahl ist 3.
4. Alphas Zahl ist 4.
5. Alphas Zahl ist 5.
6. Alphas Zahl ist 6.
7. Alphas Zahl ist 7.
8. Alphas Zahl ist 8.
9. Alphas Zahl ist 9.
10. Alphas Zahl ist 10.

5.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Wir bezeichnen Alphas Zahl mit A, Betas Zahl mit B und Gammas Zahl mit C. Wir halten zuerst fest: Kennt man zwei der drei Zahlen A, B, C, dann ist die dritte Zahl entweder die Summe oder die Differenz dieser beiden Zahlen. Daraus folgt sofort:

- Die zwei Zahlen 4 und 8 können nicht gleichzeitig zu $\{A, B, C\}$ gehören.
- Die zwei Zahlen 5 und 10 können nicht gleichzeitig zu $\{A, B, C\}$ gehören.

Wir analysieren nun der Reihe nach die Aussagen der drei Wichtel.

Was aus der ersten Aussage folgt:

Falls $A = 4$ gilt, kann Alpha sofort $B \notin \{4, 8\}$ schließen. Und analog kann Alpha aus $A = 5$, $A = 8$, $A = 10$ sofort $B \notin \{5, 10\}$, $B \notin \{4, 8\}$ bzw. $B \notin \{5, 10\}$ schließen.

Falls $A \in \{4, 5, 8, 10\}$ gilt, so gibt es also Alphas Wissen nach tatsächlich höchstens acht Kandidaten für B. Tabelle 1 zeigt Beispiele für Kombinationen (A, B, C) mit $A \in \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$, aus denen wir ablesen können, dass es für $A \in \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$ jeweils neun Kandidaten für B gibt.

Was aus der zweiten Aussage folgt:

Der Wichtel Beta hat genau wie wir hergeleitet, dass $A \in \{4, 5, 8, 10\}$ gelten muss, und seines Wissens nach gibt es nun noch genau drei Kandidaten für C. Tabelle 2 listet alle möglichen Situationen auf.

Wir sehen, dass Beta im Fall $B = 1$ sechs Kandidaten $(3, 4, 5, 6, 7, 9)$ für C hat. Und in den Fällen $B = 2$, $B = 3$, $B = 6$, $B = 8$, $B = 10$ hat Beta fünf, fünf, vier, zwei bzw. zwei Kandidaten für C. Nur für $B \in \{4, 5, 7, 9\}$ hat Beta genau drei Kandidaten für C.

Was aus der dritten Aussage folgt:

Gamma weiß natürlich genau wie wir, dass $A \in \{4, 5, 8, 10\}$ und dass $B \in \{4, 5, 7, 9\}$ gelten muss. Wir diskutieren rasch die möglichen Fälle für C:

	B=1	B=2	B=3	B=4	B=5	B=6	B=7	B=8	B=9	B=10
A=1	—	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,4,5)	(1,5,4)	(1,6,7)	(1,7,6)	(1,8,9)	(1,9,8)	(1,10,9)
A=2	(2,1,3)	—	(2,3,1)	(2,4,6)	(2,5,7)	(2,6,4)	(2,7,9)	(2,8,6)	(2,9,7)	(2,10,8)
A=3	(3,1,4)	(3,2,1)	—	(3,4,1)	(3,5,2)	(3,6,9)	(3,7,4)	(3,8,5)	(3,9,6)	(3,10,7)
A=6	(6,1,5)	(6,2,4)	(6,3,9)	(6,4,2)	(6,5,1)	—	(6,7,1)	(6,8,2)	(6,9,3)	(6,10,4)
A=7	(7,1,6)	(7,2,5)	(7,3,4)	(7,4,3)	(7,5,2)	(7,6,1)	—	(7,8,1)	(7,9,2)	(7,10,3)
A=9	(9,1,8)	(9,2,7)	(9,3,6)	(9,4,5)	(9,5,4)	(9,6,3)	(9,7,2)	(9,8,1)	—	(9,10,1)

Tabelle 1: Kandidaten für B für $A \in \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$.

	B=1	B=2	B=3	**B=4**	**B=5**	B=6	**B=7**	B=8	**B=9**	B=10
A=4	(4,1,**3**) (4,1,**5**)	(4,2,**6**)	(4,3,**1**) (4,3,**7**)	—	(4,5,**1**) (4,5,**9**)	(4,6,**2**) (4,6,**10**)	(4,7,**3**)	—	(4,9,**5**)	(4,10,**6**)
A=5	(5,1,**4**) (5,1,**6**)	(5,2,**3**) (5,2,**7**)	(5,3,**2**) (5,3,**8**)	(5,4,**1**) (5,4,**9**)	—	(5,6,**1**)	(5,7,**2**)	(5,8,**3**)	(5,9,**4**)	—
A=8	(8,1,**7**) (8,1,**9**)	(8,2,**6**) (8,2,**10**)	(8,3,**5**)	—	(8,5,**3**)	(8,6,**2**)	(8,7,**1**)	—	(8,9,**1**)	(8,10,**2**)
A=10	(10,1,**9**)	(10,2,**8**)	(10,3,**7**)	(10,4,**6**)	—	(10,6,**4**)	(10,7,**3**)	(10,8,**2**)	(10,9,**1**)	—

Tabelle 2: Kandidaten für C.

- Für $C \in \{7, 8, 10\}$ gibt es *keine Kombination* (A, B, C) mit $A \in \{4, 5, 8, 10\}$ und $B \in \{4, 5, 7, 9\}$.
- Für $C = 1$ gibt es *vier Möglichkeiten* für A:

$$\begin{aligned} &A = 4 \text{ (mit } B = 5), \\ &A = 5 \text{ (mit } B = 4), \\ &A = 8 \text{ (mit } B = 7 \text{ oder } B = 9), \\ &A = 10 \text{ (mit } B = 9). \end{aligned}$$

  Für $C = 3$ gibt es *drei Möglichkeiten* für A:

$$\begin{aligned} &A = 4 \text{ (mit } B = 7), \\ &A = 8 \text{ (mit } B = 5), \\ &A = 10 \text{ (mit } B = 7). \end{aligned}$$

  Für $C = 9$ gibt es *zwei Möglichkeiten* für A:

$$\begin{aligned} &A = 4 \text{ (mit } B = 5), \\ &A = 5 \text{ (mit } B = 4). \end{aligned}$$

  In diesen Fällen kann Gamma die Zahl A also nicht eindeutig bestimmen.

- Für $C = 2$ ist nur $A = 5$ und $B = 7$ möglich.

  Für $C = 4$ ist nur $A = 5$ und $B = 9$ möglich.

  Für $C = 5$ ist nur $A = 4$ und $B = 9$ möglich.

  Für $C = 6$ ist nur $A = 10$ und $B = 4$ möglich.

Da Gamma Alphas Zahl kennt, folgern wir, dass $C \in \{2, 4, 5, 6\}$ gilt. Für das Zahlentripel (A, B, C) kommen nur noch

$$(5, 7, 2), \quad (5, 9, 4), \quad (4, 9, 5) \quad \text{und} \quad (10, 4, 6)$$

in Frage.

Was aus der vierten Aussage folgt:

Alpha weiß genau wie wir, dass nur noch $(5, 7, 2)$, $(5, 9, 4)$, $(4, 9, 5)$ und $(10, 4, 6)$ Kandidaten für das Zahlentripel (A, B, C) sind.

- Im Fall $A = 4$ könnte Alpha sofort $B = 9$ folgern.
- Im Fall $A = 10$ könnte Alpha sofort $B = 4$ folgern.

Daher muss $A = 5$ gelten.

Was aus der fünften Aussage folgt:

Beta hat genau wie wir $A = 5$ hergeleitet und kennt somit Alphas Zahl.

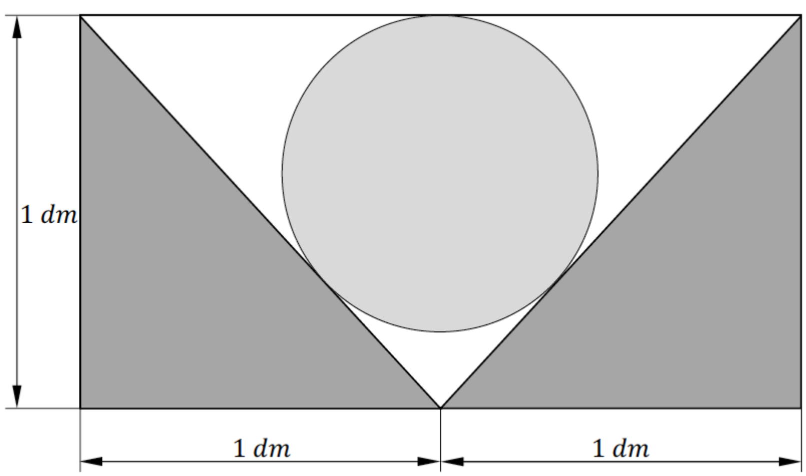
6 Schneeballschlacht

Autor: Oliver Kaufmann (Immanuel-Kant-Gymnasium Berlin, HU Berlin)

6.1 Aufgabe

Die zehn Weihnachtswichtel Elisa, Frida, Gustav, Heinrich, Ida, Johann, Karla, Ludwig, Marta und Norwin hatten in den letzten Wochen alle Hände voll zu tun: Sie haben gebastelt, gemalt und gesägt. Nun aber sind alle Geschenke verpackt. Stolz auf ihre getane Arbeit klatschen sie sich ab – als Elisa plötzlich aus dem Fenster schaut und feststellt: „Es schneit ja heftig!“
„Kommt, lasst uns jetzt eine Schneeballschlacht machen!“, sagt Gustav aufgeregt. Unsere zehn Wichtel ziehen sich warm an, rennen nach draußen und veranstalten eine lange und lustige Schneeballschlacht.

Irgendwann stellt Ida fest: „Leute, dieser perfekt kugelförmige Schneeball hier passt genau in die schneefreie Regenrinne. Er berührt die beiden Flächen in jeweils genau einem Punkt und schließt oben bündig ab.“
Diese sagenhafte Entdeckung führt dazu, dass die Weihnachtswichtel sogleich ihre Schneeballschlacht beenden. Da sie nämlich nicht nur einen ausgeprägten Sinn für liebevolle Weihnachtsgeschenke haben, sondern darüber hinaus auch eine starke Liebe zur Mathematik hegen, wollen sie das Volumen des kugelförmigen Schneeballs berechnen. Hierfür nutzen sie die folgende, *nicht maßstabsgetreue* Querschnittsabbildung, die die längliche Regenrinne sowie den Schneeball zeigt:



Alle Wichtel rechnen eifrig drauf los, kommen aber zu unterschiedlichen Resultaten. Wer hat Recht?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Elisa berechnet nach kurzer Zeit
$$V = \frac{\pi}{6}\, dm^3.$$
2. Frida benötigt mehr Zeit und ruft als Ergebnis Folgendes in den Raum:
$$V = \sqrt{3}\,\pi\, dm^3.$$
3. Gustav knobelt geduldig und teilt zuversichtlich sein Resultat mit:
$$V = \frac{\sqrt{2}}{6}\,\pi\, dm^3.$$
4. Heinrich freut sich insgeheim sehr, da er eine solche Aufgabe letztens erst gelöst hat. Ziemlich schnell ermittelt er
$$V = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right) dm^3.$$

5. Ida rechnet sehr konzentriert. Schließlich erhält sie

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2 dm^3.$$

6. Johann sitzt vertieft am Tisch, lächelt kurz und gibt dann sein Ergebnis bekannt:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\left(5\sqrt{2}-7\right) dm^3.$$

7. Karla verwendet verschiedene geometrische Herleitungen, sodass sie letztlich folgendes Volumen ermittelt:

$$V = \left(\frac{20\sqrt{3}-28}{3}\right)\pi\, dm^3.$$

8. Ludwig ist mit großer Freude dabei und fertigt eine eigene optimierte Skizze an, sodass er nach einigen geometrischen und analytischen Überlegungen sein Ergebnis präsentiert:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\left(3\sqrt{2}-4\right) dm^3.$$

9. Marta vertraut ihren besonderen mathematischen Fähigkeiten und ist verblüfft über ihr Ergebnis:

$$V = 1\, dm^3.$$

10. Norwin lehnt sich entspannt zurück, schaut die Abbildung lange an und sagt schließlich: „Ohne weitere Angaben kann dieses Volumen nicht berechnet werden!“

6.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Eine **Lösungsmöglichkeit** besteht darin, analytisch-geometrisch vorzugehen. Dafür legen wir ein Koordinatensystem ($1\,LE = 1\,dm$) über den Querschnitt und beschriften geeignete Elemente (s. Abb. 6).

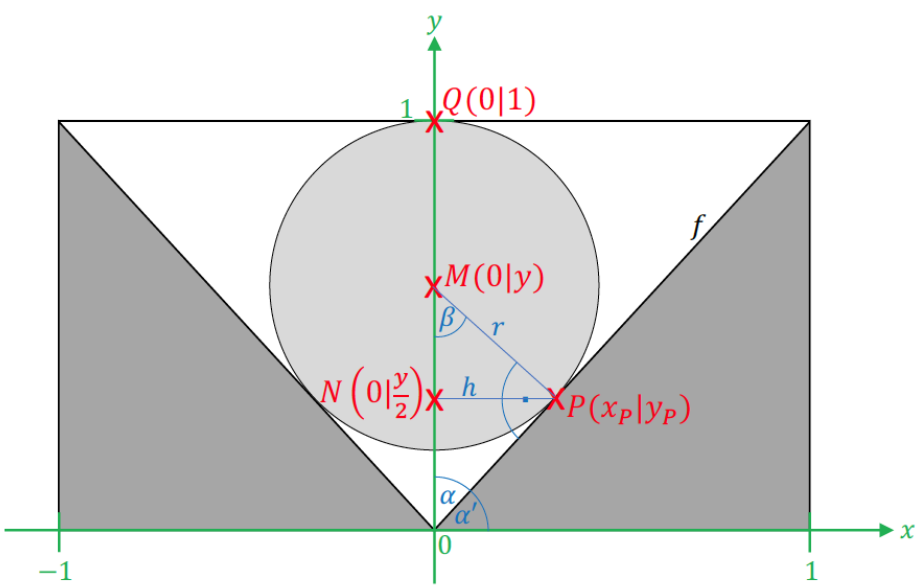


Abbildung 6: Querschnitt der Regenrinne mit Schneeball

Um das Volumen der Kugel zu berechnen, ermitteln wir zunächst den Radius r der Kugel. Dazu legen wir folgende Punkte fest:

- $\mathbf{M(0 \mid y)}$: der Mittelpunkt der Schneekugel, auf der y-Achse,
- $\mathbf{Q(0 \mid 1)}$: Berührpunkt der Schneekugel und der oberen (gedachten) Regenrinnenkante, auf der y-Achse,
- $\mathbf{P(x_P \mid y_P)}$: Berührpunkt der Kugel mit der Regenrinnenseite.

Die Strecke f kann als Teil des Graphen einer linearen Funktion mit der Steigung 1 aufgefasst werden. Daher gelten für die Winkel α und α':

$$\alpha = \alpha' = 45^\circ.$$

Da f in P tangential am Kreis mit dem Radius r anliegt, stehen r und f orthogonal aufeinander, d. h. $\angle MPO = 90°$. Es folgt weiter

$$\beta = 180° - \angle MPO - \alpha' = 180° - 90° - 45° = 45°.$$

Das Dreieck $\triangle MOP$ ist damit gleichschenklig mit einem rechten Winkel bei P. Es gilt also

$$r = d(M, P) = d(0, P).$$

Weiterhin folgern wir, dass die zur Seite $\overline{MO}$ gehörige Höhe h (mit Fußpunkt N) das Dreieck $\triangle MOP$ somit in zwei kongruente Teildreiecke teilt, wobei die Seite $\overline{MO}$ halbiert wird, d. h.

$$N = \left(0 \mid \frac{y}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad y_P = \frac{y}{2}.$$

Da f Teil der linearen Funktion mit der Gleichung $f(x) = x$ ist, folgt zudem:

$$x_P = y_P = \frac{y}{2},$$

Somit ergibt sich mithilfe des Satzes des Pythagoras für den Radius r:

$$\begin{aligned} r &= d(0, P) \\ &= \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2\,\frac{y^2}{4}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber

$$r = d(M, Q) = 1\,dm - y$$

und somit

$$1\,dm - y = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Stellen wir diese Gleichung nach y um, erhalten wir

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\,dm = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\,dm = (2-\sqrt{2})\,dm$$

und entsprechend

$$r = 1\,dm - y = \Big(1-(2-\sqrt{2})\Big)\,dm = \Big(\sqrt{2}-1\Big)\,dm.$$

Schließlich bestimmen wir das Schneeballvolumen mithilfe der Volumenformel für die Kugel mit dem Radius r:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^3 dm^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}^3-3\sqrt{2}^2+3\sqrt{2}-1\right)dm^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1\right)dm^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(5\sqrt{2}-7\right)dm^3 \end{aligned}$$

Folglich hat Johann das Volumen des Schneeballs korrekt ermittelt. Die anderen Lösungsmöglichkeiten sind allesamt nicht korrekt, wie einfache Termumformungen belegen.

Ein **weiterer Lösungsweg** macht sich die Tatsache zunutze, dass es sich beim Querschnitt des Schneeballs um den Inkreis des Regenrinnenquerschnittsdreiecks handelt (s. Abb. 7).

Für den Radius r des Inkreises eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit Hypotenuse c können wir beweisen, dass

$$r = \frac{a\cdot b}{a+b+c}$$

gilt. Dazu zerlegen wir das Dreieck $\triangle ABC$ in die drei Teildreiecke $\triangle ACM$, $\triangle CBM$ und $\triangle ABM$ (s. Abb. 8).

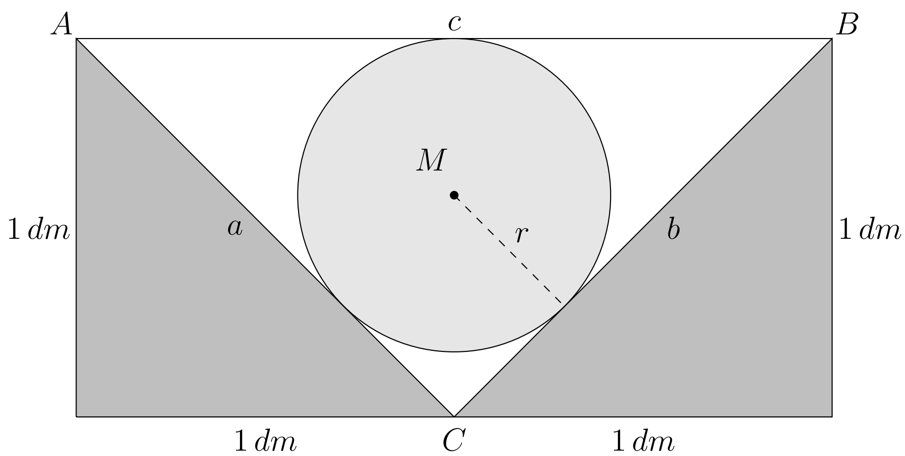


Abbildung 7: Querschnitt des Schnellballs in der Regenrinne

Für die Flächeninhalte des Dreiecks $\triangle ABC$ und Teildreiecke $\triangle ACM$, $\triangle CBM$ und $\triangle ABM$ gilt

$$area(\triangle ABC) = area(\triangle ACM) + area(\triangle CBM) + area(\triangle ABM) \tag{2}$$

sowie

$$\begin{aligned} area(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\, a \cdot b, \\ area(\triangle ACM) &= \frac{1}{2}\, a \cdot h_a = \frac{1}{2}\, a \cdot r, \\ area(\triangle CBM) &= \frac{1}{2}\, b \cdot h_b = \frac{1}{2}\, b \cdot r, \\ area(\triangle ABM) &= \frac{1}{2}\, c \cdot h_c = \frac{1}{2}\, b \cdot r. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Flächeninhalte in Gleichung (2) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, a \cdot b &= \frac{1}{2}\, a \cdot r + \frac{1}{2}\, b \cdot r + \frac{1}{2}\, c \cdot r \\ &= \frac{1}{2}\, r\,(a + b + c). \end{aligned}$$

Diese Gleichung können wir äquivalent umformen zu:

$$r = \frac{a \cdot b}{a + b + c}.$$

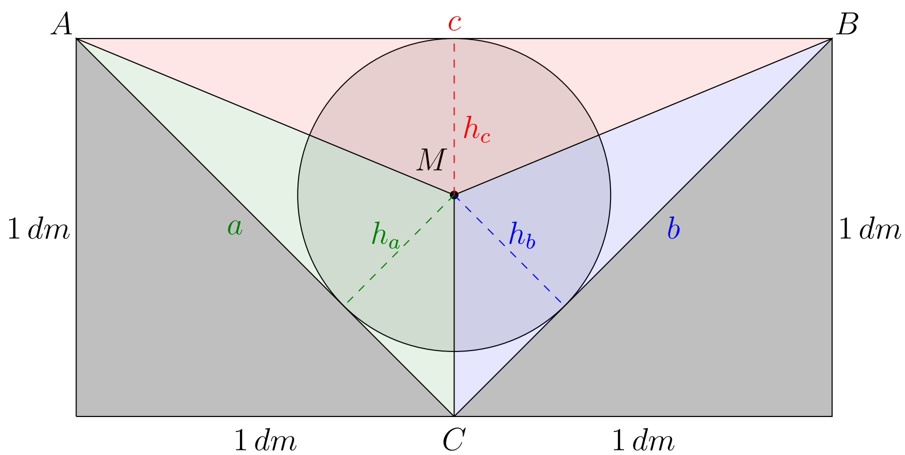


Abbildung 8: Die drei Teildreiecke des Dreiecks $\triangle ABC$

Mit dieser Formel berechnen wir nun den Radius r unseres Schneeballs:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a \cdot b}{a+b+c} \\ &= \frac{\sqrt{2}\,dm \cdot \sqrt{2}\,dm}{\sqrt{2}\,dm + \sqrt{2}\,dm + 2\,dm} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}+1}\,dm \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\,dm \\ &= \left(\sqrt{2}-1\right)dm. \end{aligned}$$

Für das Volumen ergibt sich dann – wie im obigen Lösungsweg –

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(5\sqrt{2}-7\right)dm^3.$$

Anmerkung: Ganz allgemein kann man zeigen, dass für den Radius r des Inkreises eines beliebigen Dreiecks $\triangle ABC$ gilt

$$r = \frac{2 \cdot area(\triangle ABC)}{a+b+c}.$$

7 Würfel

Autoren: Judith Keijsper (TU Eindhoven)
Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

7.1 Aufgabe

Der Zählwichtel Zacharias besitzt einen großen roten Spielwürfel – und zwar die klassische Variante, die man in jedem Spielwarenladen kaufen kann. Die sechs Seiten zeigen die Augenzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$, und die Augenzahlen auf zwei gegenüberliegenden Seiten addieren sich immer zur Summe 7 auf. Zacharias sitzt ein wenig schläfrig vor einem großen 101×101 Schachbrett. Da bemerkt er auf einmal, dass jede Seitenfläche seines Würfels genau so groß ist wie jedes einzelne Feld des Schachbretts. Zacharias ist auf einen Schlag hellwach.

Er legt seinen Würfel auf das südwestlichste Feld des Schachbretts und merkt sich die Augenzahl auf der Oberseite. Dann kippt er den Würfel auf ein nördlich oder östlich benachbartes Feld und merkt sich wieder die Augenzahl auf der Oberseite. Er kippt und kippt und kippt und kippt den Würfel – immer wieder – und zwar immer um ein Feld nach Norden oder nach Osten, bis dass der Würfel schlussendlich am nordöstlichsten Feld des Schachbretts angekommen ist. Insgesamt hat sich Zacharias nun 201 Augenzahlen gemerkt, diese addiert er alle auf und schreibt ihre *Summe* in sein Notizbuch.

Dann wiederholt er die Prozedur und schreibt die Summe der 201 Augenzahlen wieder in sein Notizbuch. Dieses Spiel wiederholt Zacharias mehrere Tage lang und schreibt so nach und nach hunderte Augensummen auf.

Wir wollen von Euch wissen: Wie viele **verschiedene** Augensummen kann Zacharias höchstens in sein Notizbuch schreiben?

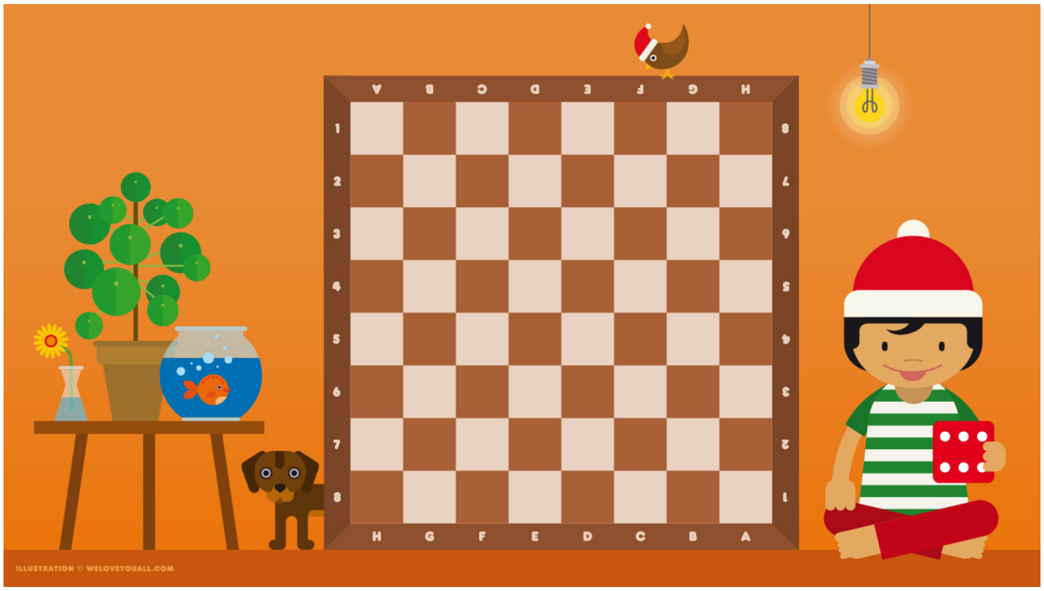


Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Höchstens 6 verschiedene Augensummen.
2. Höchstens 10 verschiedene Augensummen.
3. Höchstens 12 verschiedene Augensummen.
4. Höchstens 24 verschiedene Augensummen.
5. Höchstens 120 verschiedene Augensummen.
6. Höchstens 216 verschiedene Augensummen.
7. Höchstens 256 verschiedene Augensummen.
8. Höchstens 720 verschiedene Augensummen.
9. Höchstens 1006 verschiedene Augensummen.
10. Höchstens 1206 verschiedene Augensummen.

7.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Wir wollen zuerst verstehen, wie sich die Augensummen, die Zacharias in sein Notizbuch schreibt, zusammensetzen können: Angenommen, die Oberseite des Würfels zeigt im Moment x Augen (wobei $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Wenn Zacharias den Würfel zweimal nach Norden oder zweimal nach Osten kippt, dann sind danach $7-x$ Augen oben. Wenn Zacharias den Würfel zuerst einmal nach Norden und dann beliebig oft nur nach Osten kippt, so bleibt die Seite mit x Augen immer auf der Hinterseite des Würfels; der Würfel zeigt dann weder x noch $7 - x$ Augen. Wenn Zacharias den Würfel zuerst einmal nach Osten und dann beliebig oft nur nach Norden kippt, sieht man mit einem symmetrischen Argument, dass der Würfel währenddessen weder x noch $7 - x$ Augen zeigt.

Aus dem vorangehenden Absatz kann man Folgendes herleiten: Wenn man während einer Reise des Würfels über das gesamte Schachbrett nur die beiden Seiten mit x Augen und mit $7-x$ Augen protokolliert, so wechseln sich diese beiden Seiten immer ab. Zwischen zwei Auftreten der Augenzahl x muss außerdem immer auch einmal die Augenzahl $7 - x$ auftreten. Wir kennen daher die ungefähre Form der Würfelreise:

- Die Augenzahlen 1 und 6 wechseln einander ab (mit anderen Zahlen dazwischen). Man kann diese beiden Augenzahlen daher in lauter Paare mit Summe 7 zusammenfassen. Ganz am Ende bleibt vielleicht eine einzelne Augenzahl 1 oder eine einzelne Augenzahl 6 ungepaart.
- Analog kann man die Augenzahlen 2 und 5 in Paare mit Summe 7 zusammenfassen. Am Ende bleibt vielleicht eine einzelne Augenzahl 2 oder 5 ungepaart.
- Und auch die Augenzahlen 3 und 4 können in Paare mit Summe 7 zusammengefasst werden. Eine einzelne Augenzahl 3 oder 4 kann ungepaart bleiben.

Die 201 Augenzahlen können daher in 99 Paare mit Summe 7 und in drei verbleibende Augenzahlen aufgeteilt werden – zwei dieser drei Augenzahlen können natürlich noch ein weiteres Paar mit Summe 7 bilden. (Es können aber niemals vier oder mehr ungepaarte Augenzahlen verbleiben, da sich aus je vier der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ mindestens ein Paar mit Summe 7 finden lässt.)

Die 99 Paare tragen genau $7 \cdot 99 = 693$ zur Summe bei, und die drei einzelnen Augenzahlen tragen mindestens $1 + 2 + 3 = 6$ und höchstens $4 + 5 + 6 = 15$ bei. Daher kommen nur die zehn Werte

$$693 + 6 = 699, \quad \dots \quad , 693 + 15 = 708$$

für die Augensumme in Frage.

Wir geben nun Beispiele für Würfelreisen an, in denen die Augensummen die zehn Werte zwischen 99 und 708 annehmen:

1. Sei $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

   > Wir beginnen mit der Augenzahl x auf der Oberseite, rollen den Würfel dann 100-mal nach Osten und danach 100-mal nach Norden. Die resultierende Augensumme ist x plus $50 \cdot 7$ plus $50 \cdot 7$, und beträgt daher $700 + x$.

   Damit erledigen wir die sechs Summen 701, 702, 703, 704, 705, 706.

2. Wir betrachten nun eine Ecke des Würfels, an der im Uhrzeigersinn gesehen drei Seitenflächen mit den drei Augenzahlen x, y und z (mit $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) anliegen:

   > Wir beginnen mit der Augenzahl x auf der Oberseite. Kippen wir den Würfel nach Norden, liegt y auf der Oberseite. Kippen wir anschließend nach Osten, liegt z auf der Oberseite.
   >
   > Danach nach Osten (plus $7 - y$), Osten (plus $7 - z$), Norden (plus $7 - x$), Norden (plus z), Osten (plus y) und Norden (plus x). Diese ersten neun Augenzahlen ergeben eine Summe von $x + y + z + 21$.
   >
   > Nun rollen wir den Würfel noch 96-mal nach Osten und danach 96-mal nach Norden. Die Gesamtsumme beträgt dann
   >
   > $$x + y + z + 21 + 96 \cdot 7 = x + y + z + 693.$$

Da ein Spielwürfel (u. a.) die vier Ecken

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= (1,2,3) \quad \text{mit} \quad x+y+z = 1+2+3 = 6,\\
(x,y,z) &= (1,4,2) \quad \text{mit} \quad x+y+z = 1+4+2 = 7,\\
(x,y,z) &= (3,6,5) \quad \text{mit} \quad x+y+z = 3+6+5 = 14,\\
(x,y,z) &= (4,5,6) \quad \text{mit} \quad x+y+z = 4+5+6 = 15
\end{aligned}$$

hat, erledigt diese Art von Würfelreise die verbleibenden vier Summen 699, 700, 707 und 708.

Alles in allem erhalten wir die **zehn verschiedenen Augensummen**

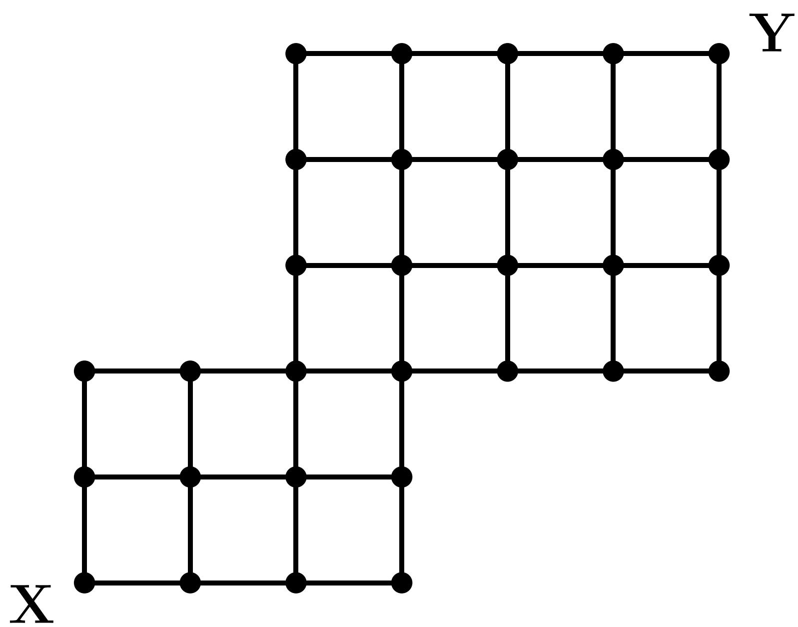
$$699, \ldots, 708.$$

8 Treffpunkt

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

8.1 Aufgabe

In der folgenden Abbildung beträgt der Abstand zwischen zwei (horizontal oder vertikal) benachbarten Punkten jeweils 1 km.



Knecht Ruprecht startet mit dem Schlitten in X und fährt nach Y. Der Grinch startet zur selben Zeit mit seinem Schlitten in Y und fährt nach X. Beide fahren mit derselben konstanten Geschwindigkeit entlang des oben abgebildeten Gitters. Beide wählen völlig unabhängig voneinander einen 11 km langen Weg aus. Diese Wahl passiert jeweils völlig zufällig, d. h. alle möglichen 11 km langen Wege von X nach Y (bzw. von Y nach X) werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ausgewählt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p (auf drei Nachkommastellen gerundet), dass sich die beiden unterwegs treffen?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gilt $p \approx 0{,}263$.
2. Es gilt $p \approx 0{,}268$.
3. Es gilt $p \approx 0{,}274$.
4. Es gilt $p \approx 0{,}279$.
5. Es gilt $p \approx 0{,}283$.
6. Es gilt $p \approx 0{,}288$.
7. Es gilt $p \approx 0{,}291$.
8. Es gilt $p \approx 0{,}296$.
9. Es gilt $p \approx 0{,}302$.
10. Es gilt $p \approx 0{,}307$.

8.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Falls sich die beiden treffen, dann muss ihr Treffpunkt genau 5,5 km von X und Y entfernt liegen. Dafür kommen nur die vier Punkte A, B, C, D in Frage (s. Abb.9).

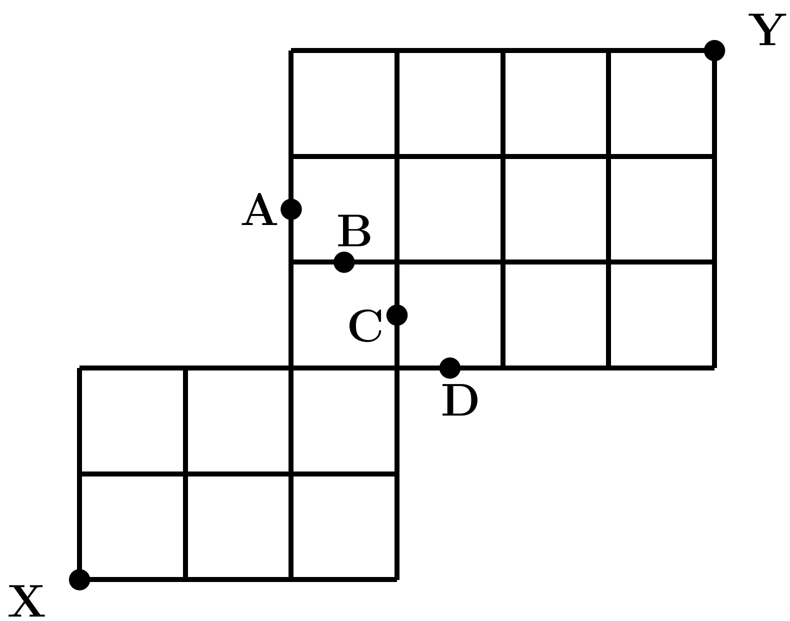


Abbildung 9: Mögliche Treffpunkte A, B, C, D.

Zur Vereinfachung der folgenden Erklärungen legen wir nun ein Koordinatensystem über unser Gitter, dessen Ursprung $(0, 0)$ in X liegt. Wir stellen fest, dass die Anzahl der kürzesten Wege vom Ursprung in $X = (0, 0)$ bis zu einem Gitterpunkt mit den Koordinaten (n, m) immer gleich der Anzahl der kürzesten Wege von X zu $(n - 1, n)$ plus der Anzahl der kürzesten Wege von X zu $(n, m - 1)$ ist. So ergibt sich z. B. für die Anzahl der kürzesten Wege von X zum Gitterpunkt $(1, 1)$ (s. Abb.10) als Summe der Anzahl der kürzesten Wege von X zu $(0, 1)$ und der Anzahl der kürzesten Wege von X zu $(1, 0)$:

$$1 + 1 = 2.$$

Analog ergibt sich für den Gitterpunkt $(3, 2)$ (s. Abb.10):

$$6 + 4 = 10.$$

Aus Abbildung 10 kann man auch die Anzahl der kürzesten Wege von X zu weiteren Punkte in der unteren Hälfte des Gitternetzes ablesen:

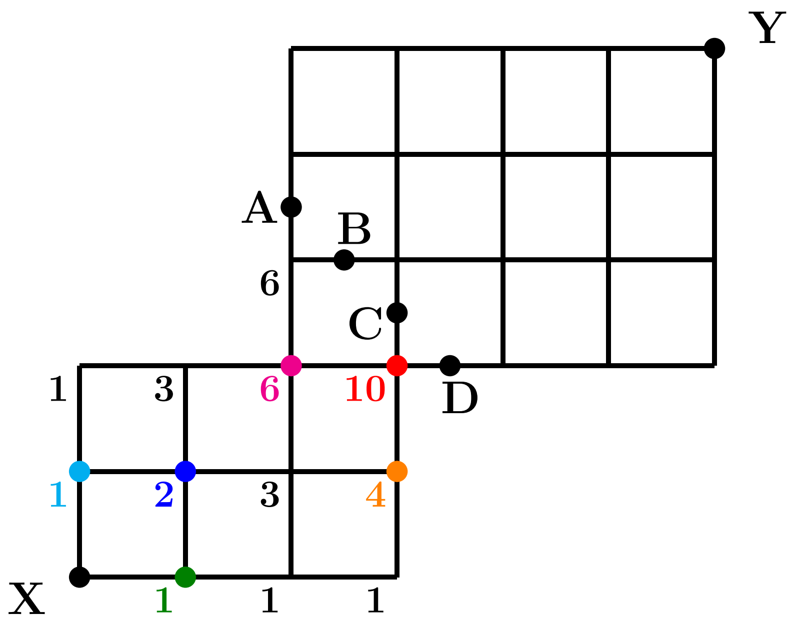


Abbildung 10: Anzahl der kürzesten Wege von X zu A, B, C, D.

Abbildung 11 zeigt nun sowohl die Anzahl der kürzesten Wege von X zu einigen Punkten in der unteren Hälfte des Gitternetzes, als auch die Anzahl der kürzesten Wege von Y zu einigen Punkten in der oberen Hälfte des Gitternetzes.

Aus Abbildung 11 liest man nun leicht ab, dass es genau

- $6 \cdot 5 = 30$ Wege der Länge 11 von X nach Y durch A gibt;
- $6 \cdot 10 = 60$ Wege der Länge 11 von X nach Y durch B gibt;
- $10 \cdot 10 = 100$ Wege der Länge 11 von X nach Y durch C gibt;
- $10 \cdot 10 = 100$ Wege der Länge 11 von X nach Y durch D gibt.

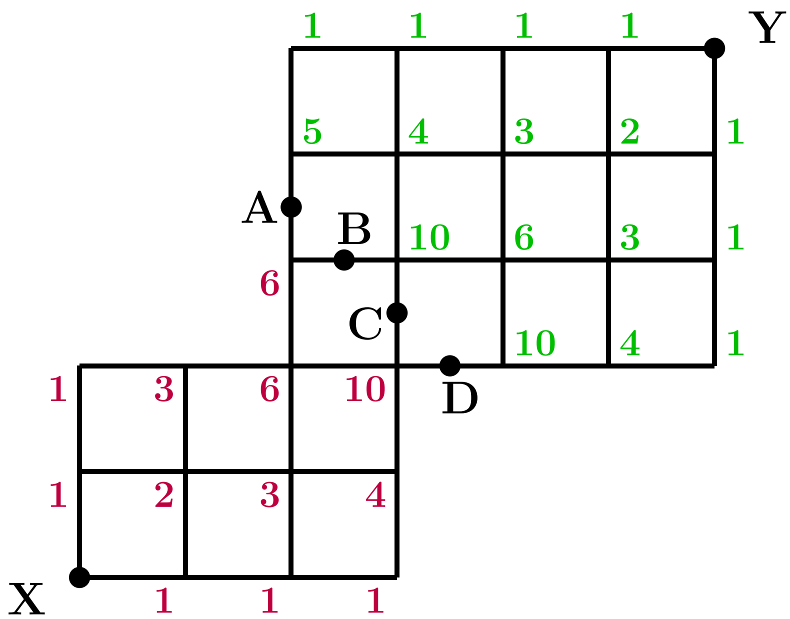


Abbildung 11: Anzahl der kürzesten Wege von X und Y zu A, B, C, D.

Die Gesamtzahl aller Wege der Länge 11 von X nach Y ist dementsprechend

$$30 + 60 + 100 + 100 = 290.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl Ruprecht als auch der Grinch

- durch den Punkt A fahren, beträgt demnach $\frac{30}{290} \cdot \frac{30}{290} = \left(\frac{3}{29}\right)^2$;
- durch den Punkt B fahren, beträgt demnach $\frac{60}{290} \cdot \frac{60}{290} = \left(\frac{6}{29}\right)^2$;
- durch den Punkt C fahren, beträgt demnach $\frac{100}{290} \cdot \frac{100}{290} = \left(\frac{10}{29}\right)^2$;
- durch den Punkt D fahren, beträgt ebenfalls $\frac{100}{290} \cdot \frac{100}{290} = \left(\frac{10}{29}\right)^2$.

Die Wahrscheinlichkeit p beläuft sich daher auf

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{3}{29}\right)^2 + \left(\frac{6}{29}\right)^2 + \left(\frac{10}{29}\right)^2 + \left(\frac{10}{29}\right)^2 \\ &= \frac{9 + 36 + 100 + 100}{841} \\ &= \frac{245}{841} \approx \mathbf{0{,}2913}3198573. \end{aligned}$$

9 Palmwein

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven)
Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

9.1 Aufgabe

In Knecht Ruprechts Keller stehen zehn versiegelte Flaschen, die alle völlig gleich ausssehen. In n dieser Flaschen ist köstlicher Palmwein, während die anderen $10 - n$ Flaschen hochgiftigen Stechpalmensaft enthalten. Ruprecht erinnert sich genau, dass $n \geq 2$ eine positive gerade ganze Zahl ist, hat aber leider den genauen Wert vergessen.

Ruprechts Magische Palmwein-Test-Maschine (MPTM) hat zwei Fächer, einen großen Knopf und eine Glühbirne. Wenn man in jedes der beiden Fächer eine Flasche stellt und danach auf den Knopf drückt, beginnt die MPTM lautstark zu arbeiten. Eine Stunde später leuchtet dann die Glühbirne rot oder grün auf: Leuchtet sie grün, so enthält mindestens eine der beiden Flaschen Palmwein. Leuchtet sie rot, dann ist in keiner der beiden Flaschen Palmwein enthalten.

Knecht Ruprecht möchte dem Weihnachtsmann zwei Flaschen Palmwein schenken. Wie oft muss er die MPTM im schlimmsten Fall benutzen, um garantiert zwei Flaschen Palmwein zu identifizieren?

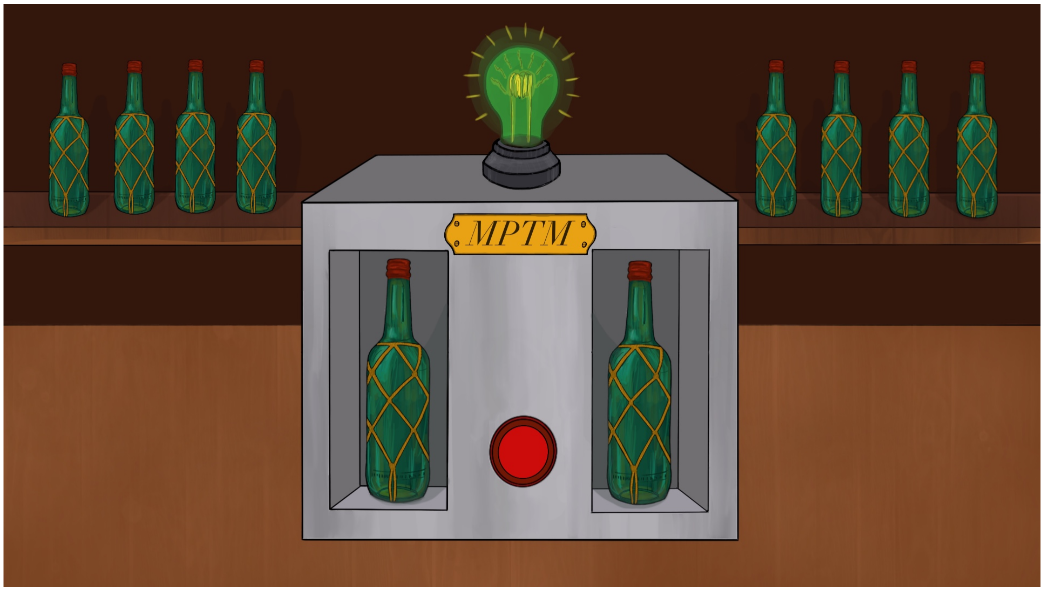


Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. 11-mal.
2. 13-mal.
3. 15-mal.
4. 17-mal.
5. 19-mal.
6. 21-mal.
7. 25-mal.
8. 28-mal.
9. 36-mal.
10. 44-mal.

9.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Zuerst zeigen wir, dass 17 Tests **hinreichend** sind:

Knecht Ruprecht benennt die zehn Flaschen $F_1, \ldots, F_{10}$. Und testet zunächst die neun Flaschenpaare

$$(F_1, F_2), (F_1, F_3), (F_1, F_4), (F_1, F_5), (F_1, F_6), (F_1, F_7), (F_1, F_8), (F_1, F_9)(F_1, F_{10}).$$

Fall 1: Bei einem dieser neun Tests leuchtet die rote Glühlampe auf.

Die Flasche F_1 enthält somit den giftigen Stechpalmensaft. Da aber mindestens zwei Flaschen Palmwein enthalten, fallen auch mindestens zwei der neun Tests $(F_1, F_j), (F_1, F_k)$, mit $2 \leq j, k \leq 10,\ j \neq k$, positiv aus (d. h. die grüne Lampe leuchtet auf). Die Flaschen F_j und F_k enthalten somit Palmwein und Knecht Ruprecht kann die Suche in diesem (günstigen) Fall schon nach neun Tests beenden.

Fall 2: Bei allen der neun Tests leuchtet die grüne Glühbirne auf.

Die Flasche F_1 enthält somit den schmackhaften Palmwein. (Andernfalls enthielten nämlich alle neun Flaschen $F_2, \ldots, F_{10}$ Palmwein. Die Anzahl der Flaschen, die Palmwein enthalten, wäre somit ungerade.) Knecht Ruprecht stellt F_1 beiseite und testet nachfolgend die acht Paare

$$(F_2, F_3), (F_2, F_4), (F_2, F_5), (F_2, F_6), (F_2, F_7), (F_2, F_8), (F_2, F_9), (F_2, F_{10}).$$

Fall 2a: Bei einem der acht Tests leuchtet die rote Glühlampe auf.

Wie in Fall 1 folgert Knecht Ruprecht, dass die Flasche F_2 Stechpalmensaft enthält und mindestens ein Paar (F_2, F_l), $2 \leq l \leq 10$, positiv (d. h. mit grüner Lampe) getestet wird. Die Flasche F_l ist dann Knecht Ruprechts zweite Flasche mit Palmwein und die Suche kann nach ingesamt $9 + 8 = 17$ Tests beendet werden.

Fall 2b: Bei allen der acht Tests leuchtet die grüne Glühlampe auf.

Wie oben folgert Knecht Ruprecht, dass sich in der Flasche F_2 Palmwein befinden muss. (Andernfalls enthielten die neun Flaschen F_1 sowie $F_3, \ldots, F_{10}$ Palmwein und die Anzahl der Palmwein enthaltenden Flaschen wäre ungerade.) Knecht Ruprecht kann seine Suche also nach insgesamt $9 + 8 = 17$ Tests beenden und dem Weihnachtsmann guten Gewissens die Flaschen F_1 und F_2 schenken.

Nun zeigen wir noch, dass 17 Tests im ungünstigen Fall auch **notwendig** sind:

Dazu nehmen wir an, dass 16 Tests positiv ausfielen (d. h. die grüne Glühlampe aufleuchtete). Knecht Ruprecht kann sich dann nicht sicher sein, dass zwei feste Flaschen F_1 und F_2 Palmwein enthalten.

Fall 1: Ruprecht hat das Paar (F_1, F_2) getestet.

Da Ruprecht nur 16 Tests durchgeführt hat, wurde mindestens eines der 16 Paare

$$(F_1, F_3), (F_1, F_4), (F_1, F_5), (F_1, F_6), (F_1, F_7), (F_1, F_8), (F_1, F_9), (F_1, F_{10}),$$
$$(F_2, F_3), (F_2, F_4), (F_2, F_5), (F_2, F_6), (F_2, F_7), (F_2, F_8), (F_2, F_9), (F_2, F_{10})$$

nicht getestet. Wir bezeichnen dieses Paar mit (F_j, F_k), wobei $1 \leq j \leq 2$ und $3 \leq k \leq 10$. Dann können die beiden Flaschen F_j (also entweder F_1 oder F_2) und F_k Stechpalmensaft enthalten und die anderen acht Flaschen Palmwein.

Fall 2: Ruprecht hat das Paar (F_1, F_2) *nicht* getestet.

In diesem Fall wäre es möglich, dass die beiden Flaschen F_1 und F_2 Stechpalmensaft enthielten und die anderen acht Flaschen Palmwein.

In beiden Fällen könnte es also sein, dass mindestens eine der beiden Flaschen keinen Palmwein enthält. Knecht Ruprecht kann das Problem mit 16 Tests somit nicht lösen.

10 Renntiere

Autor: Christian Hercher (Europa-Universität Flensburg)

10.1 Aufgabe

Weihnachten nähert sich mit großen Schritten, und damit auch der große Tag der Rentiere, die den Schlitten des Weihnachtsmanns ziehen. Und wie jedes Jahr gibt es Streit, wer denn an der Spitze der Zugtiere laufen darf. Um hier eine objektive Auswahl treffen zu können, wird ein Einzelzeitrennen unter den Rentieren angesetzt. Dabei gehen die Rentiere nacheinander einzeln auf die Strecke und das schnellste gewinnt den begehrten Platz vor dem Schlitten.

Jedes Rentier kennt natürlich die Zeiten der vor ihm gestarteten. Alle Rentiere sind gleich stark, d. h., wenn sich die Rentiere eine bestimmte Zeit vornehmen, dann erreichen sie diese Zeit mit einer *Durchhalte-Wahrscheinlichkeit* p, die für alle Rentiere gleich ist, während ihnen mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ unterwegs die Puste ausgeht, und sie das Rennen folglich abbrechen müssen. (Natürlich fällt p mit höherer Geschwindigkeit.) Bei einem Gleichstand gewinnt jeweils das später gestartete Rentier.

(a) Rudolph tritt nur gegen ein weiteres Rentier an, muss aber als Erster starten. Wie sollte er seine Geschwindigkeit wählen, damit er mit höchstmöglicher Wahrscheinlichkeit gewinnt? (Gesucht ist die zu dieser angestrebten Geschwindigkeit zugehörige Durchhalte-Wahrscheinlichkeit p.)

(b) Nun tritt Rudolph gegen alle Tiere aus seiner Herde an, die (inkl. Rudolph) aus zehn Rentieren besteht. Rudolph muss wieder als Erster starten. Wenn alle Rentiere eine optimale Strategie verfolgen, mit welcher Wahrscheinlichkeit W gewinnt Rudolph dann?

Zusatzfrage: Nun muss sich Rudolph zwar wieder in einem aus zehn Rentieren bestehenden Starterfeld behaupten, startet diesmal jedoch als Letzter. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er in diesem Szenario?

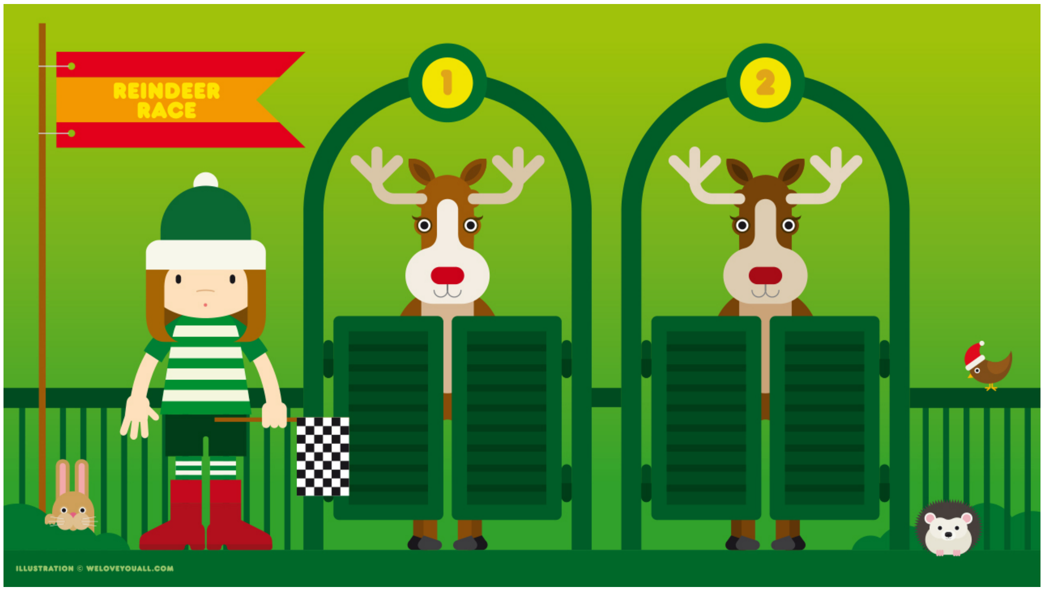


Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. (a) $p = \frac{1}{3}$ und (b) $0\,\% < W \leq 2\,\%$.
2. (a) $p = \frac{1}{3}$ und (b) $2\,\% < W \leq 4\,\%$.
3. (a) $p = \frac{1}{3}$ und (b) $4\,\% < W \leq 5\,\%$.
4. (a) $p = \frac{1}{2}$ und (b) $0\,\% < W \leq 2\,\%$.
5. (a) $p = \frac{1}{2}$ und (b) $2\,\% < W \leq 3\,\%$.
6. (a) $p = \frac{1}{2}$ und (b) $3\,\% < W \leq 4\,\%$.
7. (a) $p = \frac{1}{2}$ und (b) $4\,\% < W \leq 5\,\%$.
8. (a) $p = \frac{2}{3}$ und (b) $0\,\% < W \leq 2\,\%$.
9. (a) $p = \frac{2}{3}$ und (b) $2\,\% < W \leq 4\,\%$.
10. (a) $p = \frac{2}{3}$ und (b) $4\,\% < W \leq 5\,\%$.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

(a) Damit Rudolph gewinnt, muss er zuerst einmal ins Ziel kommen. Dies schafft er mit der (noch zu bestimmenden) Wahrscheinlichkeit p. Ist dies der Fall, dann wird das zweite Rentier auch mit einer gleichen angedachten Zielzeit loslaufen, da es ja bei einem Gleichstand gewinnen würde. Damit das nicht passiert, darf das zweite Rentier nicht ins Ziel kommen, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-p$ passiert. Demnach gewinnt Rudolph das Rennen mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$W(p) = p(1-p).$$

Diese Wahrscheinlichkeit gilt es (in Rudolphs Sinne) zu maximieren. Die Funktion $W(p)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen 0 und 1. Ihr Scheitelpunkt befindet sich also bei $p = \frac{1}{2}$ und ist ein Maximum der Funktion (siehe Abbildung 12). Rudolph sollte also so schnell laufen, dass er mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ das Ziel erreicht, um mit höchstmöglicher Wahrscheinlichkeit zu gewinnen.

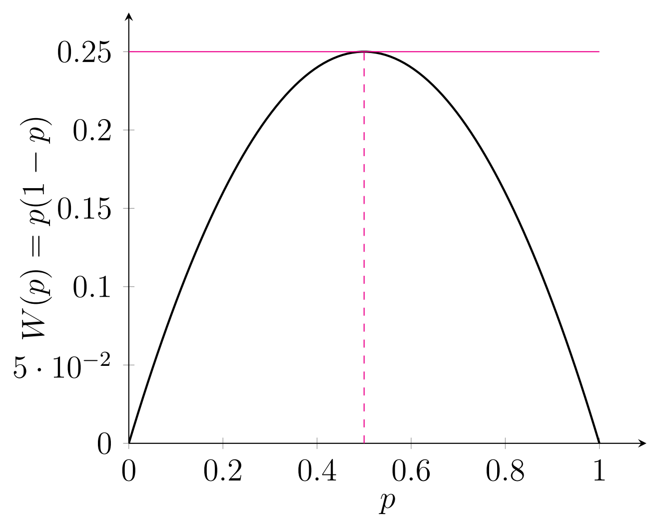


Abbildung 12: Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(p) = p(1-p)$.

(b) Auch in diesem Szenario muss Rudolph erst einmal ins Ziel kommen, um das Rennen gewinnen zu können. Dies schafft er mit der Wahrscheinlichkeit p. Danach darf jedoch keines der neun anderen Rentiere ins Ziel kommen. Für jedes Rentier nach Rudolph gilt dann also, dass bisher nur Rudolph das Ziel erreicht hat und es wird daher die gleiche Geschwindigkeit wie Rudolph wählen, da es bei Gleichstand gewinnen würde. Die neun Rentiere kommen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-p$ nicht ins Ziel. Alle neun Rentiere kommen entsprechend mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-p)^9$ nicht ins Ziel. Daraus ergibt sich folgende Gewinnwahrscheinlichkeit für Rudolph:

$$W(p) = p(1-p)^9,$$

die wir abermals maximieren wollen.

Wer der Differentialrechnung mächtig ist, bestimmt dazu die Ableitung von W,

$$W'(p) = (1-p)^9 - 9p(1-p)^8 = (1-p)^8(1-p-9p) = (1-p)^8(1-10p),$$

und deren Nullstellen $p_{10} = \frac{1}{10}$ und $p_1 = 1$. Anschließend muss man durch Einsetzen der Nullstelle p_0 von W' in die zweite Ableitung von W,

$$W''(p) = 18(5p-1)(1-p)^7,$$

verifizieren, dass es sich bei $p_1 = \frac{1}{10}$ tatsächlich um ein Maximum der Funktion handelt:

$$W''(p_0) = 18\left(5\tfrac{1}{10} - 1\right)\left(1 - \tfrac{1}{10}\right)^7 = -\frac{43046721}{10000000} = -4{,}3046721 < 0.$$

Zuletzt berechnet man noch den Funktionswert

$$W = W(p_0) = \tfrac{1}{10}\left(1 - \tfrac{1}{10}\right)^9 = \frac{387420489}{10000000000} = 0{,}0387420489 = 3{,}87420489\,\%$$

Rudolph gewinnt das Rennen also mit einer Wahrscheinlichkeit von rund $W = 3{,}9\,\%$.

Wer (noch) nicht ableiten kann, kann sich auch mit einer Analyse des Graphen der Funktion W behelfen (s. Abbildung 13) und die gesuchte Gewinnwahrscheinlichkeit W eingrenzen: $3\,\% < W \leq 4\,\%$.

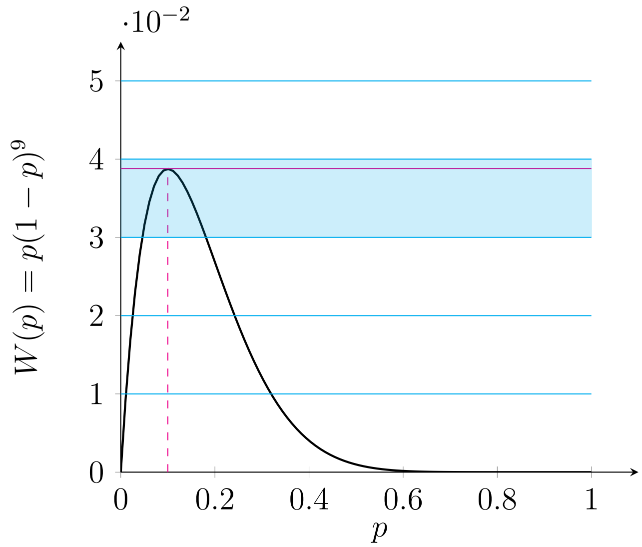


Abbildung 13: Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(p) = p(1-p)^9$.

Zusatzfrage: Hier muss man die Strategie aller Rentiere betrachten, die sich in Abhängigkeit der Ergebnisse, der jeweils davor laufenden Rentiere, ändert:

Wir betrachten dazu das Rentier mit dem Startplatz k, $1 \leq k \leq 10$. Hat keines der ersten $k-1$ Rentiere das Ziel erreicht, dann ist das k-te Rentier in der gleichen Situation wie ein Rentier mit dem ersten Startplatz in einem Rennen mit insgesamt $10-(k-1) = 11-k$ teilnehmenden Rentieren. Es sollte also – analog zu (a) und (b) – mit einer Geschwindigkeit laufen, sodass die Wahrscheinlichkeit

$$W(p) = p(1-p)^{11-k-1} = p(1-p)^{10-k}$$

maximiert wird. Um W zu maximieren, berechnet man wie in (b) die Ableitung von W,

$$W'(p) = ((k-11)p+1)(1-p)^{9-k},$$

und deren Nullstellen $p_k = \frac{1}{11-k}$ und $p_* = 0$. Da

$$W''(p_k) > 0$$

ist p_k tatsächlich ein Maximum der Wahrscheinlichkeitsfunktion W mit Wert

$$W(p_k) = \tfrac{1}{11-k}\left(1 - \tfrac{1}{11-k}\right)^{10-k}.$$

Das k-te Rentier sollte also mit der Geschwindigkeit loslaufen, die zur Durchhaltewahrscheinlichkeit $p_k = \frac{1}{11-k}$ gehört. Kommt dieses k-te Rentier ins Ziel, dann werden die nachfolgenden Rentiere ebenfalls mit dieser Geschwindigkeit (zur Durchhaltewahrscheinlichkeit p_k) laufen, da sie bei Gleichstand gewinnen würden. Schafft es das k-te Rentier nicht ins Ziel, dann läuft das $(k+1)$-te Rentier entsprechend mit der Durchhaltegeschwindigkeit von $p_{k+1} = \frac{1}{10-k}$. Und so weiter und so fort.

Demnach gewinnt Rudolph das Rennen, falls er so schnell läuft, wie das erste Rentier, das (vor ihm) ins gekommen ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das erste Rentier *und* Rudolph ins Ziel kommen, ist

$$\tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{1}{10}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das erste Rentier nicht ins Ziel kommt, aber das zweite Rentier *und* Rudolph ins Ziel kommen, beträgt

$$\tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{1}{9}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das erste und zweite Rentier nicht ins Ziel kommen, das dritte *und* Rudolph aber schon, ist

$$\tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{1}{8}.$$

Und so weiter und so fort. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es die ersten $k-1$ Rentiere nicht ins Ziel schaffen, das k-te *und* Rudolph aber schon, ist

$$\tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{1}{11-k},$$

wobei $1 \leq k \leq 9$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass vor Rudolph keines der Rentiere ins Ziel kommt, Rudolph aber schon ist

$$\tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \cdots \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 = \tfrac{1}{20}.$$

Insgesamt beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Rudolph das Rennen der zehn Rentiere gewinnt

$$\tfrac{1}{10} \cdot \left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{2} + 1\right) = \tfrac{7381}{25200} = 0{,}2928\overline{968253} \approx 29{,}29\,\%$$

und ist damit gut 7,5 mal so hoch wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er gewinnt, wenn er als Erster startet.

11 Kuchenteilung

Autor: Frits Spieksma (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

11.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht hat einen riesengroßen Kuchen gebacken und 100 Wichtel zum Kuchenessen eingeladen. Die Wichtel sind mit den Zahlen von 1 bis 100 durchnummeriert und besuchen Ruprecht der Reihe nach im Laufe des Nachmittags.

- Der Wichtel mit der Nummer 1 erhält 1 % des Kuchens.
- Der Wichtel mit der Nummer 2 erhält 2 % des restlichen Kuchens.
- Der Wichtel mit der Nummer 3 erhält 3 % des restlichen Kuchens.
- Der Wichtel mit der Nummer 4 erhält 4 % des restlichen Kuchens.
- Und so weiter.
- Der Wichtel mit der Nummer k erhält k % des restlichen Kuchens.
- Und so weiter.
- Der Wichtel mit der Nummer 99 erhält 99 % des restlichen Kuchens.
- Der Wichtel mit der Nummer 100 erhält schließlich 100 % und somit den gesamten Rest.

Der Wichtel mit der Nummer N hat das größte Kuchenstück erhalten. Welche der folgenden Aussagen über diese Nummer N ist richtig?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Einerstelle von N ist 1.
2. Die Einerstelle von N ist 2.
3. Die Einerstelle von N ist 3.
4. Die Einerstelle von N ist 4.
5. Die Einerstelle von N ist 5.
6. Die Einerstelle von N ist 6.
7. Die Einerstelle von N ist 7.
8. Die Einerstelle von N ist 8.
9. Die Einerstelle von N ist 9.
10. Die Einerstelle von N ist 0.

11.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir bezeichnen mit S_k die Größe des Kuchenstücks des Wichtels mit Nummer k, und wir bezeichnen mit R_k den restlichen Teil des Kuchens, nachdem der Wichtel mit Nummer k sein Stück erhalten hat.

Man sieht leicht, dass $S_1 = 1/100$ und $R_1 = 99/100$ gilt. Da der Wichtel mit Nummer k genau $k\%$ von R_{k-1} erhält, gilt für $k \geq 2$

$$R_k = \left(1 - \frac{k}{100}\right) R_{k-1} = \frac{100-k}{100} R_{k-1}.$$

Zusammen mit $R_1 = 99/100$ erhält man nun sofort für $1 \leq k \leq 99$

$$R_k = \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{100} \cdots \frac{100-k}{100} = \frac{99!}{(99-k)!\ 100^k}.$$

Da der Wichtel mit Nummer k genau $k\%$ von R_{k-1} erhält, gilt weiters für $1 \leq k \leq 100$

$$S_k = \frac{k}{100} R_{k-1} = \frac{k}{100} \cdot \frac{99!}{(100-k)!\ 100^{k-1}} = \frac{99! \cdot k}{(100-k)!\ 100^k}. \tag{3}$$

Nun wollen wir verstehen, für welche k die Ungleichung

$$S_k < S_{k+1} \tag{4}$$

gilt. Wegen (3) gilt:

$$
\begin{aligned}
& & S_k &< S_{k+1} \\
&\iff & \frac{99!\cdot k}{(100-k)!\;100^k} &< \frac{99!\cdot(k+1)}{(99-k)!\;100^{k+1}}, \\
&\iff & \frac{k}{(100-k)!} &< \frac{k+1}{(99-k)!\cdot 100}, \\
&\iff & \frac{100k}{(100-k)(99-k)!} &< \frac{k+1}{(99-k)!}, \\
&\iff & 100k &< (k+1)(100-k) \\
&\iff & 100k &< 100k - k^2 + 100 - k \\
&\iff & k(k+1) &< 100
\end{aligned}
$$

Daher ist die Ungleichung (4) für $1 \leq k \leq 9$ erfüllt. Entsprechend gilt

$$S_k > S_{k+1}$$

für alle $k \geq 10$.

Somit steigt die Größe der Kuchenstücke vom ersten bis zum zehnten Kuchenstück streng monoton an und fällt danach (also vom zehnten bis zum hundertsten Kuchenstück) streng monoton ab. Wichtel Nummer 10 erhält also das größte Kuchenstück.

12 Die Mützenaufgabe 2019

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven)
Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

12.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann sagt zu den drei Intelligenzwichteln Atto, Bilbo und Chico: „Meine lieben Intelligenzwichtel! Auch in diesem Jahr soll es im mathematischen Adventskalender wieder eine knifflige Denkaufgabe mit bunten Mützen auf Wichtelköpfen geben. Darum lade ich Euch morgen wieder einmal zu einem gemütlichen Nachmittag mit Kaffee und Kuchen ein.“
„Fein, wir kommen gerne!“, rufen die drei Wichtel.

Der Weihnachtsmann freut sich: „Gut, dann werde ich heute Abend neun Wichtelmützen vorbereiten: Drei blaue, drei gelbe und drei rote Mützen. Morgen setze ich dann jedem von Euch hinterrücks und blitzschnell eine der neun Mützen auf den Kopf, sodass keiner die Farbe der eigenen Mütze zu sehen kriegt. Ihr könnt die Farben der beiden anderen Mützen sehen, dürft aber keinerlei Informationen untereinander austauschen.“

Der Weihnachtsmann fährt fort: „Dann muss jeder von Euch gleichzeitig einige Finger in die Höhe strecken.

- **Ein Finger** bedeutet, dass die eigene Mütze **blau** ist.
- **Zwei Finger** bedeuten, dass die eigene Mütze **gelb** ist,
- und **drei Finger** bedeuten, dass sie **rot** ist.
- **Null oder vier oder mehr Finger** bedeuten, dass Ihr nicht raten wollt.

Wenn auch nur einer von Euch falsch rät, schicke ich Euch wieder nach Hause. Wenn aber keiner falsch und mindestens einer die eigene Mützenfarbe korrekt errät, dann bekommt jeder von Euch dreien ein Stück Sachertorte und eine Tasse Kaffee.“

Atto fragt: „Wie wählst Du denn unsere Mützen aus?“
„Die wähle ich völlig zufällig aus, sodass jede der 27 möglichen Farbkombinationen auf Euren Köpfen genau gleich wahrscheinlich ist“, sagt der Weihnachtsmann.

Dann fragt Bilbo: „Können wir denn die sechs unbenutzten Mützen sehen?“
„Nein!“, antwortet der Weihnachtsmann. „Die unbenutzten Mützen verstecke ich im Wandschrank!“

Chico möchte wissen: „Was passiert denn, wenn keiner von uns raten will und wenn zum Beispiel jeder vier Finger hochstreckt?“
„Dann schicke ich Euch auch nach Hause“, sagt der Weihnachtsmann. „Kaffee und Kuchen gibt es nur dann, wenn mindestens einer richtig und keiner falsch rät. Ist das klar?“

Die Wichtel beginnen zu überlegen. Sie diskutieren und sie denken nach. Sie denken nach und sie diskutieren. Dann diskutieren sie noch mehr und denken noch länger nach. Sie arbeiten schließlich eine wirklich geniale Strategie aus, die die Anzahl M unter den 27 möglichen Farbkombinationen maximiert, mit denen sie Kaffee und Kuchen erhalten.

Unsere Frage lautet: Wie groß ist M?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. $M = 9$.
2. $M = 10$.
3. $M = 11$.
4. $M = 12$.
5. $M = 13$.
6. $M = 14$.
7. $M = 15$.
8. $M = 16$.
9. $M = 17$.
10. $M = 18$.

12.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Warum M=15 möglich ist:

Die folgende Strategie garantiert den Wichteln Erfolg in mindestens 15 der 27 möglichen Fälle: Jeder Wichtel sieht sich die Mützen der beiden anderen an.

- Ist keine der beiden Mützen blau, so rät er BLAU.
- Sind beide Mützen blau, so rät er GELB.
- Ist genau eine der beiden Mützen blau, so rät er gar NICHT.

Nun wollen wir die 27 möglichen Farbkombinationen unter dieser Strategie untersuchen:

- Es gibt genau 8 Farbkombinationen ohne blaue Mütze:

  GGG, GGR, GRG, RGG, RGG, RGR, GRR, RRR.

  In diesen 8 Fällen raten alle drei Wichtel BLAU als ihre Mützenfarbe und liegen damit alle falsch.

- Es gibt genau 12 Farbkombinationen, in denen genau ein Wichtel eine blaue Mütze hat:

  BGG, BGR, BRG, BRR, GBG, GBR,
  RBG, RBR, GGB, GRB, RGB, RRB.

  In diesen 12 Fällen rät nur der Wichtel mit der blauen Mütze, und er rät die korrekte Farbe BLAU.

- Es gibt genau 3 Farbkombinationen mit zwei blauen und einer gelben Mütze:

  BBG, BGB, GBB.

In diesen 3 Fällen rät nur der Wichtel mit der gelben Mütze, und er rät die korrekte Farbe GELB.

- Es gibt genau 3 Farbkombinationen mit zwei blauen und einer roten Mütze:

  BBR, BRB, RBB.

  In diesen 3 Fällen rät nur der Wichtel mit der roten Mütze; er rät GELB und liegt damit falsch.

- Im einzigen verbleibenden Fall BBB haben alle drei Wichtel eine blaue Mütze. Alle drei raten GELB und liegen falsch.

In Summe garantiert diese Strategie also tatsächlich $M = 12 + 3 = 15$ Farbkombinationen mit Kaffee und Kuchen.

Warum M=16 *nicht* möglich ist:

Wir nehmen zwecks Widerspruchs an, dass eine Strategie S existiert, die den drei Wichteln Erfolg bei mindestens 16 Farbkombinationen garantiert. Für Atto gibt es genau neun verschiedene Farbkombinationen, die er auf den Köpfen von Bilbo und Chico wahrnehmen kann:

xBB, xGG, xRR, xBG, xGB, xBR, xRB, xBG, xGB,

wobei x für Attos unbekannte Mützenfarbe steht. Die Strategie S legt für jede dieser neun Farbkombinationen fest, ob Atto BLAU, GELB, ROT oder gar NICHT raten soll. Wenn Atto sich entschließt, einen Tipp abzugeben, so liegt er in einem Fall richtig und in zwei Fällen falsch (da sein Tipp nur in einem Fall seiner Mützenfarbe entspricht). Falls Atto nun bei $a \geq 6$ der neun Farbkombinationen einen Tipp abgibt, so rät er in $2a$ Fällen falsch, woraus $M \leq 27 - 2a \leq 15$ folgt. Das bedeutet, dass Atto bei $a \leq 5$ der neun Farbkombinationen einen Tipp abgibt und insbesondere in $a \leq 5$ der insgesamt 27 möglichen Situationen einen korrekten Tipp abgibt.

Symmetrische Argumente zeigen, dass Bilbo in $b \leq 5$ der insgesamt 27 möglichen Situationen einen korrekten Tipp abgibt und dass Chico in $c \leq 5$ der insgesamt 27 möglichen Situationen einen korrekten Tipp abgibt. Da jeder der drei Wichtel höchstens fünf korrekte Tipps liefert, gilt wie gewünscht die Ungleichung $M \leq 5 + 5 + 5 = 15$.

13 Printenpacken

Autor: Falk Ebert (Herder-Gymnasium Berlin)

13.1 Aufgabe

In der Weihnachtsbäckerei „Zum süßen Plunder“ am Nordpol duftet es herrlich nach allerlei Leckereien, denn hier werden die besten Lebkuchen, Plätzchen und Stollen der Welt gebacken.

Packwichtel Paul hat die Aufgabe, die allerleckersten Printen (nahezu quaderförmige Lebkuchen der Breite 5 cm und Länge 15 cm[1]) in große Versandkartons zu packen. Die genormten Versandkartons sind jeweils 40 cm breit und 40 cm lang. Paul packt immer mehrere Schichten aus Printen mit einem Blatt Papier dazwischen in die Kisten. Wie er die länglichen Lebkuchen dabei anordnet, ist ihm überlassen. Natürlich ist es Ehrensache für einen Packwichtel, so effizient zu packen, dass für keine andere Anordnung mehr Printen in eine Schicht passen.

Eine Sache fällt ihm dabei sofort auf. In jeder Lage Printen bleibt ein kleiner Bereich frei und lässt sich nicht füllen – egal, wie er die Printen anordnet. Nach einigen gepackten Kisten stellte er aber verblüfft fest, dass bei möglichst effizienter Anordnung der Printen in jeder Schicht das gleiche Phänomen auftritt.

Welches Phänomen ist das?

[1] Da die Höhe der Lebkuchen zur Lösung der Aufgabe irrelevant ist, wird sie hier auch nicht angegeben.

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt exakt 1 mögliche Position für den freibleibenden Bereich.
2. Es gibt exakt 4 mögliche Positionen für den freibleibenden Bereich.
3. Es gibt exakt 8 mögliche Positionen für den freibleibenden Bereich.
4. Es gibt exakt 16 mögliche Positionen für den freibleibenden Bereich.
5. Es gibt exakt 64 mögliche Positionen für den freibleibenden Bereich.
6. Der freibleibende Bereich grenzt stets an den Rand der Kiste.
7. Der freibleibende Bereich hat stets eine Printenlänge (15 cm) Abstand vom Rand der Kiste.
8. Der freibleibende Bereich ist nie zusammenhängend.
9. Das freibleibende Loch ist immer ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge.
10. Das freibleibende Loch ist immer wie ein **L** geformt.

13.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Wir können die Grundfläche des Versandkartons gedanklich in 64 kleine Felder der Fläche 5 cm x 5 cm unterteilen. Die Printen lassen sich ebenfalls in drei kleine Felder der Fläche 5 cm x 5 cm unterteilen (s. Abb. 14).

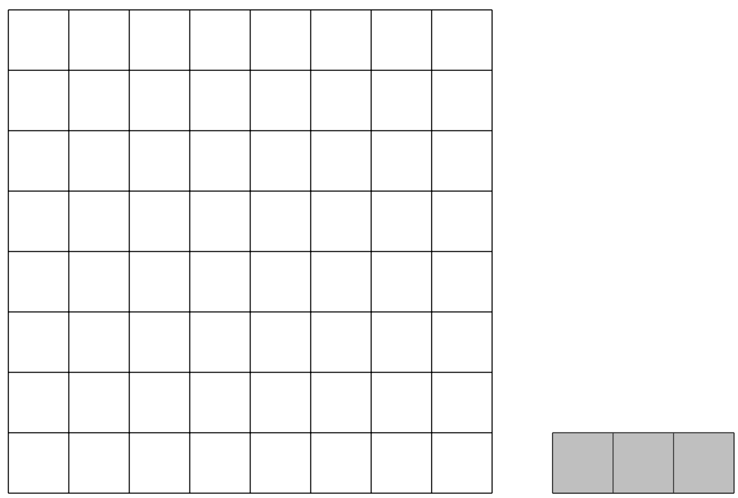


Abbildung 14: Links: Grundfläche des Versandkartons. Rechts: Eine Printe.

Sofort erkennen wir (wie auch Paul), dass 64 bei der Teilung durch 3 den Rest 1 lässt: $64 = 21 \cdot 3 + 1$. Folglich können wir höchstens 21 Printen in einer Lage unterbringen. Wie dieses Kunststück z. B. gelingen kann, zeigt Abbildung 15.

Wir zeigen nun, dass es genau vier Möglichkeiten gibt, 21 Printen in den Versandkarton zu legen: Dafür färben wir die Grundfläche des Versandkartons wie in Abbildung 16 mit drei verschiedenen Farben ein.

Wir beobachten, dass eine Printe – egal, wie wir sie (senkrecht oder waagerecht) in den Karton legen – immer genau ein gelbes, pinkes und blaues Feld bedeckt. Wir zählen insgesamt 21 gelbe, 21 blaue, aber 22 pinke Felder. Wenn wir also 21 Printen in die Packung legen möchten, bleibt am Ende ein pinkes Feld frei. Da das Packungsproblem aber spiegelungs- und rotationssymmetrisch ist, kommen als leere Felder nur solche pinken in Frage, die bei Spiegelung oder Rotation (um 90°, 180° bzw. 270°) wieder in pinke Felder

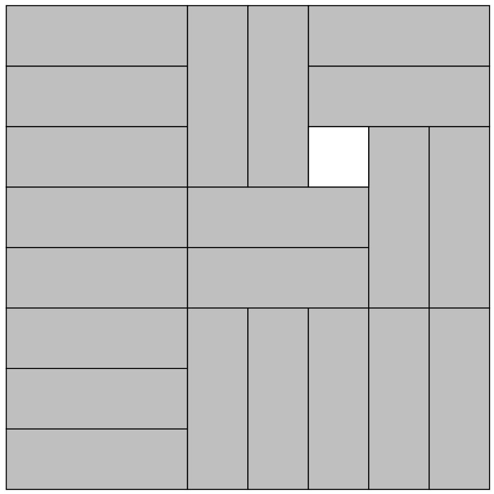


Abbildung 15: Eine Möglichkeit, 21 Printen in den Versandkarton zu legen.

übergehen. Denn, nehmen wir z. B. an, dass das unterste linke, pinke Feld am Ende leer bleibt, dann wäre das äquivalent dazu, dass auch das oberste linke, *gelbe* Feld frei bliebe. Dies haben wir ja aber schon ausgeschlossen. Als Felder, die bei einer möglichst effizienten Packung der Printen am Ende frei bleiben, kommen also nur genau **vier Felder** in Frage (s. Abb. 17). In Abbildung 15 haben wir auch gesehen, dass es tatsächlich möglich ist, die 21 Printen so im Versandkarton unterzubringen, dass genau eines dieser vier pinken Felder frei bleibt.

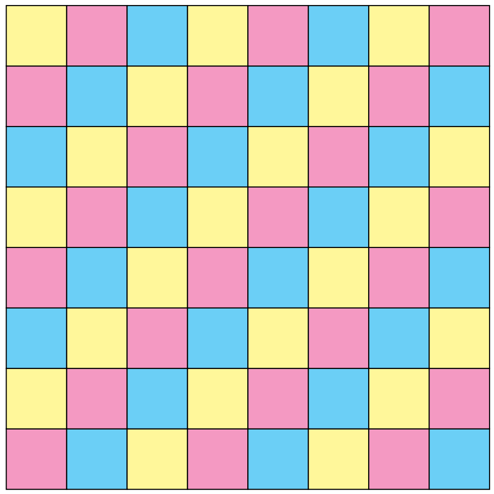


Abbildung 16: Färbung der Grundfläche des Versandkartons mit drei verschiedenen Farben.

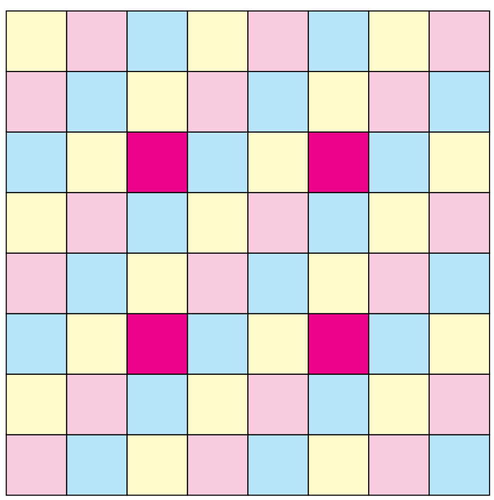


Abbildung 17: Nur die vier kräftig pinken Felder kommen als freie Positionen in Frage.

14 Zylinderhut

Autor: Jacques Resing (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

14.1 Aufgabe

Die Wahrscheinlichkeitswichtel Waff, Weff und Wiff haben 900 kleine Zettel mit nicht-negativen ganzen Zahlen beschriftet und in einen Zylinderhut gegeben. Der Weihnachtsmann zieht einen Zettel, betrachtet die Zahl darauf und legt den Zettel zurück in den Zylinderhut.

Waff sagt: „Wenn Du das sehr, sehr, sehr oft wiederholst, dann ist die durchschnittliche gezogene Zahl gleich 1.“
Weff sagt: „Und das durchschnittliche Quadrat der gezogenen Zahl ist gleich 2.“
Wiff sagt: „Und die durchschnittliche dritte Potenz der gezogenen Zahl ist gleich 5.“

Der Weihnachtsmann überlegt stirnrunzelnd: „Wenn diese Zettel wirklich nur nicht-negative ganze Zahlen enthalten sollen, dann müssen sehr viele Zettel mit Null beschriftet sein.“
Waff, Weff und Wiff antworten: „Ja, genau! Viele Zettel sind mit Null beschriftet.“

Wir fragen Euch: Was ist die kleinstmögliche Zahl N von Zetteln im Zylinderhut, die mit Null beschriftet sind?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 280$.
2. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 289$.
3. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 295$.
4. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 300$.
5. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 312$.
6. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 314$.
7. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 324$.
8. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 333$.
9. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 345$.
10. Diese kleinstmögliche Zahl ist $N = 352$.

14.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Sei A_n die Anzahl der Zettel, die die ganze Zahl $n \geq 0$ tragen. Laut Aufgabenstellung gilt dann:

$$1 \cdot 900 = 0 \cdot A_0 + 1 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 3 \cdot A_3 + 4 \cdot A_4 + \cdots + n \cdot A_n + \cdots,$$
$$2 \cdot 900 = 0 \cdot A_0 + 1 \cdot A_1 + 4 \cdot A_2 + 9 \cdot A_3 + 16 \cdot A_4 + \cdots + n^2 \cdot A_n + \cdots,$$
$$5 \cdot 900 = 0 \cdot A_0 + 1 \cdot A_1 + 8 \cdot A_2 + 27 \cdot A_3 + 64 \cdot A_4 + \cdots + n^3 \cdot A_n + \cdots.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 11 und die zweite mit -6, und addieren die beiden dann zur dritten Gleichung:

$$4 \cdot 900 = \sum_{n \geq 1} (11n - 6n^2 + n^3)\, A_n.$$

Da

$$11n - 6n^2 + n^3 = (n-1)(n-2)(n-3) + 6 \geq 6$$

für $n \geq 1$ gilt, erhalten wir

$$4 \cdot 900 = \sum_{n \geq 1} (11n - 6n^2 + n^3)\, A_n \geq 6 \sum_{n \geq 1} A_n$$

$$\iff \qquad 600 \geq \sum_{n \geq 1} A_n$$

Daher tragen *höchstens* 600 der Zettel eine Zahl $n \geq 1$, und *mindestens* 300 der Zettel tragen die Zahl 0.

Wenn man $A_0 = 300$, $A_1 = 450$, $A_3 = 150$ und alle übrigen $A_n = 0$ setzt, so erhält man eine Situation, in der genau 300 Zettel mit Null beschriftet sind und

$$\tfrac{1}{900}(0 \cdot A_0 + 1 \cdot A_1 + 0 + 3 \cdot A_3 + 0) = \tfrac{1}{900}(450 + 3 \cdot 150) = 1,$$
$$\tfrac{1}{900}(0 \cdot A_0 + 1 \cdot A_1 + 0 + 9 \cdot A_3 + 0) = \tfrac{1}{900}(450 + 9 \cdot 150) = 2,$$
$$\tfrac{1}{900}(0 \cdot A_0 + 1 \cdot A_1 + 0 + 27 \cdot A_3 + 0) = \tfrac{1}{900}(450 + 27 \cdot 150) = 5$$

gilt.

15 Rudolphs Fahrplan

Autor: Niels Lindner (Zuse-Institut Berlin)

Projekt: MATH+ Transition Project MI7:
Routing Structures & Periodic Timetabling

15.1 Aufgabe

Am Nordpol wird ein kleines Eisenbahnnetz errichtet, auf dem drei Züge fahren sollen: Der **Nordpolexpress** (durchgehend), der **Postzug** (gestrichelt) und die **Spekulatiusbahn** (gepunktet), siehe Abbildung 18.

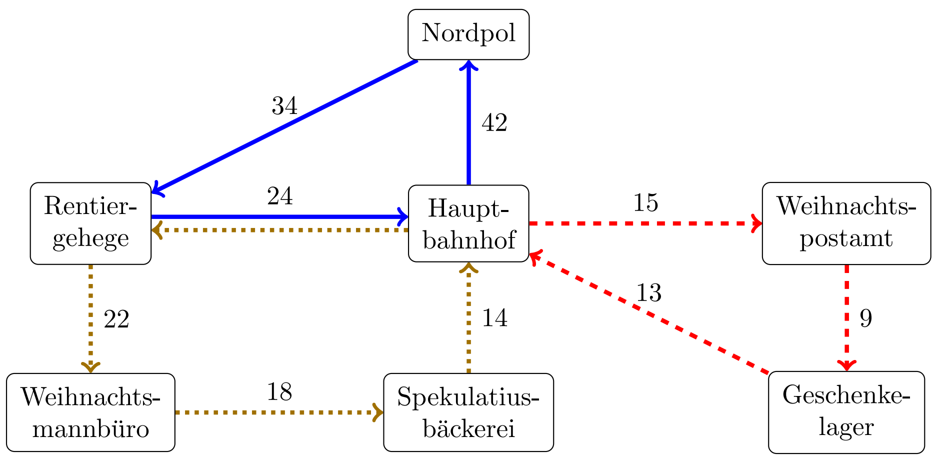


Abbildung 18: Das Nordpol-Eisenbahnnetz

Es stehen bereits die Fahrzeiten zwischen zwei benachbarten Bahnhöfen fest (siehe Abbildung 18). So dauert zum Beispiel die Fahrt des Postzugs vom Hauptbahnhof zum Weihnachtspostamt 15 Minuten. Die Züge fahren nur in die abgebildete Richtung.

Der Weihnachtsmann fährt täglich von seinem Haus am Nordpol zum Weihnachtsmannbüro und möchte daher, dass er am Rentiergehege nicht zu lange warten muss. Weil er ansonsten nicht viel von Fahrplänen versteht, bittet er Rudolph, das Rentier, um Hilfe. Rudolph hat ein paar Semester Mathematik studiert und kann einen Fahrplan, d. h., Ankunfts- und Abfahrtszeiten für jeden Zug an jedem Bahnhof, mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(a) Der Fahrplan wiederholt sich alle T Minuten.

(b) Die Ankunftszeit an einem Bahnhof ergibt sich aus der Summe der Abfahrtszeit am vorherigen Bahnhof und der Fahrzeit.

(c) Ankunft und Abfahrt eines Zuges am gleichen Bahnhof können zur selben Minute erfolgen, es kann aber auch Zeit dazwischen liegen.

(d) Von der Abfahrt am Hauptbahnhof bis zur nächsten Ankunft am Hauptbahnhof benötigt jeder Zug höchstens T Minuten.

(e) Nordpolexpress, Postzug und Spekulatiusbahn fahren immer alle zur gleichen Zeit am Hauptbahnhof ab.

(f) Nordpolexpress und Spekulatiusbahn fahren zur gleichen Zeit am Rentiergehege ab.

(g) T ist die kleinstmögliche natürliche Zahl, für die diese Eigenschaften alle erfüllt sind.

Die Rentiere Dasher, Comet, Cupid, Donner und Blitzen kommentieren Rudolphs Fahrplan:

Dasher: „Wahnsinn! Es fährt alle 100 Minuten ein Zug."

Comet: „Super! Ich muss am Hauptbahnhof nie länger als eine halbe Stunde warten, wenn ich vom Rentiergehege zum Geschenkelager fahren möchte."

Cupid: „Toll! Alle Züge kommen am Hauptbahnhof zur gleichen Zeit an."

Donner: „Fantastisch! Der Nordpolexpress kommt zur gleichen Minute am Rentiergehege an, zu der die Spekulatiusbahn abfährt."

Blitzen: „Das ist doof! Ich brauche länger als 90 Minuten vom Hauptbahnhof zur Spekulatiusbäckerei."

Welche drei Rentiere haben Recht?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Dasher, Comet und Cupid.
2. Dasher, Comet und Donner.
3. Dasher, Comet und Blitzen.
4. Dasher, Cupid und Donner.
5. Dasher, Cupid und Blitzen.
6. Dasher, Donner und Blitzen.
7. Comet, Cupid und Donner.
8. Comet, Cupid und Blitzen.
9. Comet, Donner und Blitzen.
10. Cupid, Donner und Blitzen.

Projektbezug:

Das Projekt *Routing Structures & Periodic Timetabling* widmet sich der Berechnung von optimalen Taktfahrplänen in Nahverkehrsnetzen. Dabei wird berücksichtigt, dass der Fahrplan einen Einfluss auf die Routenwahl der Fahrgäste ausübt. Umgekehrt werden die Wege der Fahrgäste in die Fahrplanerstellung miteinbezogen. Das oberste Ziel ist hierbei, die Umsteigezeiten für alle Fahrgäste möglichst kurz zu gestalten.

15.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Wir berechnen zunächst eine untere Schranke für T: Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass Nordpolexpress, Postzug und Spekulatiusbahn zur Minute 0 am Hauptbahnhof abfahren. Für die gemeinsame Abfahrtszeit Z von Nordpolexpress und Spekulatiusbahn am Rentiergehege ergibt sich dann:

$$Z \geq 34 + 42 = 76 \qquad \text{und} \qquad Z \geq 24,$$

denn das sind die Mindestfahrzeiten vom Hauptbahnhof zum Rentiergehege. Außerdem müssen Nordpolexpress und Spekulatiusbahn nach höchstens T Minuten wieder im Hauptbahnhof sein. Damit gilt

$$Z + 24 \leq T \qquad \text{und} \qquad Z + 22 + 18 + 14 = Z + 54 \leq T$$

Wir erhalten also

$$T \geq Z + 54 \geq 76 + 54 = 130.$$

Tatsächlich kann man einen Fahrplan mit den angegeben Eigenschaften (a)–(g) konstruieren, der sich alle $T = 130$ Minuten wiederholt:

Nordpolexpress	Ankunft	Abfahrt
Hauptbahnhof		**0**
Nordpol	42	42
Rentiergehege	**76**	**76**
Hauptbahnhof	**100**	

Postzug	Ankunft	Abfahrt
Hauptbahnhof		**0**
Weihnachtspostamt	15	15
Geschenkelager	24	24
Hauptbahnhof	**37**	

Spekulatiusbahn	Ankunft	Abfahrt
Hauptbahnhof		**0**
Rentiergehege	**24**	**76**
Weihnachtsmannbüro	98	98
Spekulatiusbäckerei	116	116
Hauptbahnhof	**130**	

Nun zu den Aussagen der fünf Rentiere:

- **Dasher liegt falsch:** Wie oben gezeigt, ist der kleinstmögliche Wert $T = 130 > 100$.

- **Comet hat Recht:** Vom Rentiergehege gelangt man zum Geschenkelager mit dem Nordpolexpress und dem Postzug oder mit der Spekulatiusbahn und dem Postzug – jeweils mit Umstieg am Hauptbahnhof.

  Im angegebenen Fahrplan beträgt die Wartezeit am Hauptbahnhof bei Fahrt mit dem Nordpolexpress 30 Minuten, mit der Spekulatiusbahn 0 Minuten.

  Ganz allgemein gilt Folgendes: Aus $T = 130$ folgt gemäß obiger Rechnung auch $Z = 76$. Somit folgt aus (b), dass die Ankunftszeiten am Hauptbahnhof bereits festgelegt sind auf $Z + 24 = 100$ für den Nordpolexpress bzw. $Z + 54 = 130$ Minuten für die Spekulatiusbahn. Der Postzug verlässt den Hauptbahnhof zu den Minuten $0, 130, 260$, etc. Die Wartezeit beim Umstieg vom Nordpolexpress zum Postzug beträgt also 0 Minuten und die Wartezeit beim Umstieg von der Spekulatiusbahn zum Postzug 30 Minuten. Insgesamt muss man also bei Ankunft am Hauptbahnhof *höchstens* 30 Minuten auf den Postzug warten.

- **Cupids Aussage stimmt nicht:** Weil der Nordpolexpress und die Spekulatiusbahn am Rentiergehege zur gleichen Zeit Z losfahren, ist die Ankunftszeit des Nordpolexpresses am Hauptbahnhof $Z + 24$, aber die Ankunft der Spekulatiusbahn am Hauptbahnhof mindestens $Z + 54$. Die beiden Züge kommen also *nicht* zur gleichen Zeit am Hauptbahnhof an.

- **Donner hat Recht:** $Z = 76$ ist die frühestmögliche Ankunft des Nordpolexpresses und die spätestmögliche Abfahrt der Spekulatiusbahn. Da beide zur gleichen Zeit $Z = 76$ abfahren müssen, kommt der Nordpolexpress also zur gleichen Minute ($Z = 76$) am Rentiergehege an, zu der die Spekulatiusbahn abfährt.

- **Blitzen hat auch Recht:** Vom Hauptbahnhof zur Spekulatiusbäckerei muss man (egal, ob man den Nordpolexpress oder die Spekulatiusbahn nimmt) über das Rentiergehege fahren. Bei Abfahrt am Hauptbahnhof zur Minute 0, erfolgt die Abfahrt am Rentiergehege mit der Spekulatiusbahn aber erst bei $Z = 76$. Demnach dauert es mindestens

$$Z + 22 + 18 = 76 + 40 = 116 > 90$$

Minuten vom Hauptbahnhof zur Spekulatiusbäckerei.

16 Rendezvous bei Neumond

Autor: Khai Van Tran (TU Berlin)

16.1 Aufgabe

Wie an jedem Neumond sind die Wichtel Yann und Max zu einem Nachtspaziergang mit anschließendem gemeinsamen Knobeln verabredet. Beide wohnen an der (schier unendlich) langen vollkommen geraden Weihnachtsstraße. Da sie zwei Meilen voneinander entfernt wohnen, gehen normalerweise beide Wichtel genau eine Stunde vor der vereinbarten Zeit los und laufen eine Meile auf den jeweils anderen zu. Nach einer Stunde treffen sie sich dann in der Mitte ihrer Häuser (auf kurzen Wichtelbeinen ist man nicht so flott unterwegs).

Auch heute gehen Yann und Max zu genau demselben Zeitpunkt los. Nun hat es sich aber zugetragen, dass ein Tropensturm (der Klimawandel macht aber auch wirklich vor gar nichts halt) durch die Straße gefegt ist und dabei insbesondere auch die Wegweiser mitgenommen und das Telekommunikationssystem zum Erliegen gebracht hat.
Yann und Max können zwar für sich selbst die beiden Richtungen, in die die Straße führt, unterscheiden, sie wissen allerdings nicht, in welcher Richtung sich das Haus des jeweils anderen befindet – im Weihnachtsstress sind sie wohl sehr vergesslich geworden. Da es Nacht ist, können die beiden sich nicht am Sonnenstand orientieren. Und auch wenn die beiden den Polarstern sehen können, hilft er nicht, da sie sich ja bereits in der Nähe des Nordpols befinden. Auch Lichtsignale oder Rauchzeichen sind verboten, da sie die anderen Bewohner der Weihnachtsstraße stören würden – kurzum: die beiden Wichtel können nicht miteinander kommunizieren...

Es gibt nun verschiedene Strategien, die die Wichtel verfolgen können, um sich dennoch zu treffen:

(A) Beide Wichtel werfen eine faire Münze, die entscheidet, in welche Richtung sie jeweils eine Meile laufen. Dies wiederholen sie so lange, bis sie sich treffen.

(B) Beide Wichtel werfen eine faire Münze, die entscheidet, in welche Richtung sie jeweils eine Meile laufen. Falls sie den anderen nicht getroffen haben, gehen sie daraufhin *eine* Meile in die Gegenrichtung. Dies wiederholen sie so lange, bis sie sich treffen.

(C) Beide Wichtel werfen eine faire Münze, die entscheidet, in welche Richtung sie jeweils eine Meile laufen. Falls sie den anderen nicht getroffen haben, gehen sie daraufhin *zwei* Meilen in die Gegenrichtung. Dies wiederholen sie so lange, bis sie sich treffen.

Da Yann und Max ein Herz und eine Seele sind, können sie sich sicher sein, dass beide dieselbe Strategie auswählen. Es bleibt aber die Frage, wie gut die Strategien jeweils sind.
Seien a, b bzw. c jeweils die Zeiten (in Stunden), die im Durchschnitt vergehen, bis die Wichtel sich treffen, wenn sie Strategie A, B bzw. C verfolgen.

Welche der folgenden Aussagen stimmt?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. $a < b < c$
2. $a < c < b$

3. $a < b = c$
4. $b < a < c$
5. $b < c < a$
6. $b < a = c$
7. $c < a < b$
8. $c < b < a$
9. $c < a = b$
10. $a = b = c$

16.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

In jeder Strategie bestimmt ein fairer Münzwurf die Richtung, in welche die Wichtel jeweils laufen. Jeder Wichtel geht also (unabhängig davon, was der andere macht) zunächst mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf den anderen zu und geht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ vom anderen fort. Jeder der vier Fälle, die in Tabelle 3 dargestellt sind, tritt also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ein. Insbesondere gibt es eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, dass die Wichtel parallel zueinander laufen, d. h. dieselbe Bewegungsrichtung haben.

	Max bewegt sich hin: $p = 1/2$	Max bewegt sicht fort: $p = 1/2$
Yann bewegt sich hin: $p = 1/2$	sie laufen aufeinander zu: $p = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$	sie laufen parallel: $p = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
Yann bewegt sicht fort: $p = 1/2$	sie laufen parallel: $p = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$	sie laufen voneinander weg: $p = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

Tabelle 3: Was in der ersten Stunde mit welcher Wahrscheinlichkeit passieren könnte.

Betrachten wir zunächst **Strategie B**: Die Wichtel können sich hier nur nach einer Stunde treffen, falls sie aufeinander zulaufen. Dieser Fall tritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ ein.
Andernfalls treffen sie sich nicht und kehren innerhalb von zwei Stunden jeweils zu ihrem Ausgangspunkt zurück. Die Zeit, die sie dann noch brauchen, um sich zu treffen, ist wieder b Stunden. Es gilt also:

$$
\begin{aligned}
& & b &= \tfrac{1}{4} \cdot 1 + \tfrac{3}{4} \cdot (2 + b) \\
&\Leftrightarrow & b &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{6}{4} + \tfrac{3}{4}b \\
&\Leftrightarrow & \tfrac{1}{4}b &= \tfrac{7}{4} \\
&\Leftrightarrow & b &= 7
\end{aligned}
$$

Betrachten wir nun **Strategie C**: Auch hier gibt es eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$, dass sich Yann und Max nach einer Stunde treffen.

Gehen beide Wichtel zunächst vom anderen davon, so haben sie nach einer Stunde ihre Distanz auf vier Meilen erhöht. Dann aber drehen beide um und laufen zwei Meilen auf den anderen zu und die Wichtel treffen sich nach drei Stunden. Auch dieser Fall trifft mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ ein.
Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ laufen die beiden Wichtel drei Stunden lang parallel zueinander und können sich währenddessen nicht treffen. Danach hat sich ihr Abstand nicht verändert und die Wichtel brauchen c Stunden, um sich zu treffen. Es gilt also:

$$\begin{aligned} & c = \tfrac{1}{4} \cdot 1 + \tfrac{1}{4} \cdot 3 + \tfrac{1}{2}(3 + c) \\ \Leftrightarrow \quad & c = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{6}{4} + \tfrac{1}{2}c \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{1}{2}c = \tfrac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & c = 5 \end{aligned}$$

Kommen wir nun zu **Strategie A**: Wieder gibt es eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$, dass sich die Wichtel nach einer Stunde treffen.
Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ laufen die beiden Wichtel eine Stunde lang parallel zueinander und können sich währenddessen nicht treffen. Danach hat sich ihr Abstand nicht verändert und die Wichtel brauchen a Stunden, um sich zu treffen.
Falls beide Wichtel eine Meile voneinander weglaufen, dann erhöht sich ihr Abstand auf vier Meilen. Um sich zu treffen, müssen die beiden zunächst ihren Abstand auf zwei Meilen verringern. Dann wären sie in der Ausgangssituation und sie brauchen a Stunden um sich zu treffen. Den Abstand von vier auf zwei Meilen zu verringern dauert genau so lange, wie den Abstand von zwei auf null Meilen zu verringern, also auch a Stunden. In diesem Fall benötigen die Wichtel also $2a$ Stunden, um sich zu treffen. D. h.:

$$\begin{aligned} & a = \tfrac{1}{4} \cdot 1 + \tfrac{1}{2}(1 + a) + \tfrac{1}{4}(1 + 2a) \\ \Leftrightarrow \quad & a = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}a \\ \Leftrightarrow \quad & a = a + 1 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist unerfüllbar (wenn a eine endliche reelle Zahl ist) und daher kann a keine endliche reelle Zahl sein. Man könnte fast meinen, dass a

eine 8 ist, die gestolpert und *ähem* in liegender Position verblieben ist...

Auf jeden Fall gilt

$$c < b < a.$$

Bemerkung: Die Problemfamilie, aus der diese Aufgabe stammt, ist in der Literatur unter dem Namen „Rendezvous on the Line“ bekannt. Es wird vermutet, dass es *keine* Strategie gibt, deren Erwartungswert unter 4,25 Stunden liegt. In dieser Aufgabe haben wir gezeigt, dass eine Strategie mit Erwartungswert 5 Stunden existiert. Es ist sogar eine Strategie bekannt, deren Erwartungswert nur knapp über 4,25 Stunden liegt. Diese konnte nur mithilfe von Computern gefunden werden und in ihr wiederholen die Wichtel ein recht komplizierte fünfzehnstündiges Suchmuster, die sie mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten ausführen. Siehe, z. B.

`http://garden.irmacs.sfu.ca/op/rendezvous_on_a_line`.

17 Lichterketten

Autorin: Luise Fehlinger (HU Berlin)

17.1 Aufgabe

Die Lichterkettenproduktion am Nordpol läuft wie am Schnürchen. Die Wichtel Dincho, Antonia und Bogdan sind sehr zufrieden mit ihrer neu erfundenen Maschine, die die Arbeit enorm erleichtert. Sie laden daher alle anderen Wichtel zu einer Spielerunde ein.

Leider passen sie dabei nicht mehr auf die Produktion auf und der Grinch kann sich in die Fabrik schleichen. Er sabotiert die neue Maschine und wirft auch noch die aussortierten kaputten Lämpchen wieder in den Vorrat der funktionierenden Lämpchen. Wichtel Sinan merkt dies als erstes. Die Aufregung ist groß: Was wird Nicolas, der Oberwichtel, nur sagen, wenn die Lichterketten nicht pünktlich geliefert werden können? Die Wichtel Daria und Thore beginnen sofort mit der Reparatur. Die Wichtel Bendix und Jan fangen an, die Lämpchen zu testen und wieder auseinander zu sortieren.

Doch die Zeit rennt davon. Wichtel Joana meint: „Das Testen aller Lämpchen dauert zu lange. Wir sollten einfach die Maschine die Lichterketten bauen lassen und dann die kompletten Ketten testen.“
Auch Wichtel Lennart ist dafür: „Die Lämpchen sind nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 % kaputt – viele Lichterketten werden also funktionieren, wenn wir sie einfach so zusammenbauen.“
Wichtel Kai legt also fest: „Wir bauen die Lichterketten und testen dann die Ketten. Dann, wenn eine Kette nicht funktioniert, testen wir alle Lämpchen dieser Kette einzeln und tauschen die kaputten gegen die ganzen, die Bendix und Jan schon kontrolliert haben.“
Wichtel Philipp sieht noch auf den Plan: „Für die nächste Lieferung brauchen wir 100 Lichterketten mit jeweils 100 Lämpchen.“
Und die Testexpertin Sara meint: „Für jeden Test – egal ob komplette Lichterkette oder einzelnes Lämpchen – brauchen wir 3 Sekunden.“

Nun sind alle voll bei der Arbeit. Und da Wichtel sich sehr gut mit Mathematik auskennen, vergnügen sie sich währenddessen damit, Vorhersagen zu den Tests zu finden. Ein Wichtel hat sich allerdings geirrt. Welcher?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Wichtel Taha sagt: „Wenn wir Glück haben, sind wir nach genau 5 Minuten mit dem Testen fertig.“
2. Wichtel Marwan meint: „Wenn wir aber Pech haben, brauchen wir 8 Stunden und 25 Minuten zum Testen.“
3. Wichtel Lara gibt zu bedenken: „Im schlimmsten Fall, d. h. wenn alle Lichterketten kaputt sind, wären wir fünf Minuten schneller, wenn wir alle Lämpchen einzeln testeten.“
4. Wichtel Andi erwidert: „Aber eine Lichterkette ist mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90 % ganz.“
5. Wichtel Katharina ergänzt sofort: „Allerdings tritt der beste Fall – also dass alle Lichterketten funktionieren – mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 0,005 % ein.“

6. Wichtel Jonathan weist darauf hin: „Der schlimmste Fall, d. h. dass alle Lichterketten kaputt sind, tritt mit einer viel kleineren Wahrscheinlichkeit ein, nämlich nur mit weniger als $10^{-200}\,\%$."

7. Wichtel Yura meint: „Auf jeden Fall ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Ketten defekt sind, nicht genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau drei Ketten defekt sind."

8. Und Wichtel Isabella ergänzt: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau fünf Lichterketten kaputt sind, ist kleiner als $5\,\%$."

9. Wichtel Fabian sagt: „Wir können erwarten, dass weniger als elf der hundert Lichterketten kaputt sind."

10. Wichtel Clemens schlussfolgert: „Damit können wir also erwarten, dass wir weniger als eine Stunde für das Testen der hundert Lichterketten brauchen."

17.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

1. **Taha hat recht:** Wenn die Wichtel Glück haben, sind alle 100 Lichterketten ganz. Sie müssen also nacheinander nur die 100 Lichterketten testen. Für jeden dieser Tests benötigen sie 3 Sekunden. Insgesamt also:

$$100 \cdot 3\,s = 300\,s = 5\,\mathrm{min}\,.$$

2. **Marwan hat recht:** Wenn die Wichtel Pech haben, sind alle 100 Lichterketten defekt. Sie müssen also nacheinander die 100 Lichterketten testen und dann noch die jeweils 100 Lämpchen aller 100 Lichterketten. Für jeden dieser Tests benötigen sie 3 Sekunden. Insgesamt:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 3\,s + 100 \cdot 100 \cdot 3\,s &= (1 + 100) \cdot 100 \cdot 3\,s \\ &= 101 \cdot 5 \cdot 60\,s \\ &= 505\,min \\ &= 8\,h\ 25\,min. \end{aligned}$$

3. **Lara hat recht:** Im schlimmsten Fall, d. h. wenn alle Lichterketten defekt sind, brauchen die Wichtel – wie eben berechnet – 505 Minuten. Testeten sie alle Lämpchen einzeln, bräuchten sie dafür nur

$$100 \cdot 100 \cdot 3\,s = 500 \cdot 20 \cdot 3\,s = 500\,min.$$

Sie wären dann also 5 Minuten schneller.

4. **Andi hat recht:** Da eine Lichterkette aus 100 Lämpchen besteht und jedes der Lämpchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9 % ganz ist, ist die komplette Lichterkette mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\left(\frac{999}{1000}\right)^{100} \approx 0{,}905 = 90{,}5\,\% > 90\,\%$$

ganz.

5. **Katharina hat recht:** Im besten Fall sind jeweils alle 100 Lämpchen aller 100 Lichterketten ganz. Da ein einzelnes Lämpchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9 % ganz ist, sind alle 100 Lichterketten mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\left(\frac{999}{1000}\right)^{100\cdot 100} = \left(\frac{999}{1000}\right)^{10.000} \approx 0{,}000045 = 0{,}0045\,\% < 0{,}005\,\%$$

ganz.

6. **Jonathan liegt falsch:** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass *eine* Lichterkette kaputt ist, ist die Gegenwahrscheinlichkeit zur Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lichterkette ganz ist. Diese Wahrscheinlichkeit haben wir in (4) berechnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 100 Lichterketten kaputt sind, beträgt demnach

$$\left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}\right)^{100} \approx 7 \cdot 10^{-103} = 7 \cdot 10^{-101}\,\% > 10^{-200}\,\%.$$

Viele Taschenrechner streiken bei diesen kleinen Zahlen schon. Aber wir können das Ergebnis approximieren:

$$\left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}\right)^{100} \approx \left(0,095\right)^{100}.$$

liegt zwischen

$$0,01^{100} = 10^{-200} = 10^{-198}\,\%$$

und

$$0,1^{100} = 10^{-100} = 10^{-98}\,\%.$$

Selbst die sehr grobe untere Abschätzung liegt noch über dem Wert von Jonathan.

7. **Yura hat recht:** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lichterkette ganz bzw. kaputt ist, haben wir in (4) bzw. in (6) berechnet. Die Anzahl der Möglichkeiten, wie die zwei bzw. drei defekten Lichterketten auf die 100 Lichterketten verteilt sein können, ist $\binom{100}{2}$ bzw. $\binom{100}{3}$. Insgesamt ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei bzw.

drei Lichterketten (der 100) kaputt sind, als

$$P(\text{genau 2 defekt}) = \binom{100}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{999}{1000}\right)^{100}\right)^{98}$$
$$\approx 0{,}0025 = 0{,}25\,\%$$

und

$$P(\text{genau 3 defekt}) = \binom{100}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}\right)^3 \cdot \left(\left(\frac{999}{1000}\right)^{100}\right)^{97}$$
$$\approx 0{,}0085 = 0{,}85\,\%.$$

8. **Isabella hat recht:** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lichterkette ganz bzw. kaputt ist, haben wir in (4) bzw. in (6) berechnet. Die Anzahl der Möglichkeiten, wie die fünf defekten Lichterketten auf die 100 Lichterketten verteilt sein können, ist $\binom{100}{5}$. Insgesamt ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau fünf Lichterketten (der 100) kaputt sind, als

$$\binom{100}{5} \cdot \left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}\right)^5 \cdot \left(\left(\frac{999}{1000}\right)^{100}\right)^{95} \approx 0{,}044 = 4{,}4\,\% < 5\,\%.$$

9. **Fabian hat recht:** Da eine Lichterkette mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}$$

kaputt ist, können wir erwarten, dass von 100 Lichterketten

$$100 \cdot \left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}\right) \approx 9{,}52 < 10$$

defekt sind. Natürlich muss dieser Wert nicht exakt angenommen werden. Aber wenn vorher auf die Anzahl der defekten Lichterketten gewettet wird, ist das ein guter Wert.

10. **Clemens hat recht:** Mit den Überlegungen von (9) erwarten wir weniger als 10 defekte Lichterketten. Für diesen Fall müssen also die 100 Ketten getestet werden und von den 10 defekten Ketten noch alle Lämpchen. Dazu brauchen die Wichtel dann

$$(10 \cdot 100 + 100) \cdot 3\,s = 3300\,s = 55\,min < 1\,h$$

für ihre Tests.

18 Bredelebacken

Autoren: Rafael Arndt (George Mason University),
Jo Andrea Brüggemann (WIAS),
Olivier Huber (WIAS)

Projekt: MATH+ Emerging Field EF3-5:
Direct Reconstruction of Biophysical Parameters Using Dictionary Learning and Robust Regularization

Aufgabe

Jedes Jahr, ziemlich kurzfristig vor dem Fest, zerbrechen sich die kleinen Helferlein des Weihnachtsmanns im Elsass den Kopf, um die perfekte Kombination aus *Bredele*, der elsässischen Plätzchenvariante, zu finden, die sie dann in 20 gleich bestückte Geschenktütchen packen wollen.

Glücklicherweise gibt es die Internetplattform `www.bredele.alsace`, die alle gängigen Bredele-Rezepte mit Bewertungen von unzähligen Probanden aus aller Welt enthält (siehe Abb. 19). Jedes Rezept listet die Zutaten auf, die für eine Charge von 60 Bredele benötigt werden (plus eine ausreichende Menge an Teig und Bredele für die Qualitätskontrolle durch jeden der kleinen Helferlein).

Die Helfer suchen die aktuellen Bewertungen (siehe Abb. 19) und stellen fest, dass die *Spitzbuben* eine durchschnittliche Bewertung von 25 $\heartsuit$ haben, während *Butterbredele* und *Spritzbredele* eine durchschnittliche Bewertung von 20 $\heartsuit$ und 15 $\heartsuit$ haben. Die *Kokosbredele* haben nur eine durchschnittliche Bewertung von 10 $\heartsuit$, da einige Leute den Geschmack von Kokosnuss lieben, während andere ihn nicht ausstehen können. Sie gehören aber zu den Lieblingsbredele der kleinen Helferlein, da sie doch sehr leicht zu backen sind.

Die Herstellung der Bredelegeschenktütchen wird allerdings nicht nur durch die mäßigen Backkünste der kleinen Helfer beeinträchtigt. Es ist zudem auch noch recht knapp, alle benötigten Zutaten rechtzeitig zu organisieren. Im Frühjahr konnten die Helferlein exquisite Erdbeer- und Sauerkirschmarmelade herstellen. Aber jetzt, nach vielen köstlichen Frühstücken, haben sie nur noch ein Glas von jeder Sorte übrig.

Abbildung 19: Rezepte und durchschnittliche Bewertung für Butterbredele, Spritzbredele, Spitzbuben und Kokosbredele.

Glücklicherweise gibt es die drei Anbieter *Lebkuchenhausen*, *Elisenheim* und *Himmelsberg*, die „Rundum-Sorglos-Pakete“ anbieten. Die drei Pakete werden zum gleichen Preis verkauft, beinhalten aber unterschiedliche Mengen an Zutaten, die in der Tabelle 4 aufgeführt sind.

Anbieter	Lebkuchenhausen	Elisenheim	Himmelsberg
Mehl (g)	3500	4000	3000
Zucker (g)	2000	2000	2000
Butter (g)	3000	3000	1000
Eier (#)	30	22	16
Haselnuss (g)	500	1000	500
Kokosnuss (g)	0	0	400

Tabelle 4: Anbieter und Zutaten derer Pakete.

Die kleinen Helferlein haben genug gespart, um genau eines der drei Pakete zu kaufen. Zudem sind sie zwar recht gut im Addieren und Multiplizieren, haben aber ihre Probleme mit der Division. Daher entscheiden sie sich, nur (nicht-negative) ganzzahlige Vielfache der gegebenen Rezepte zu backen.

Natürlich möchten die kleinen Helferlein die „besten“ Bredeletüten zusammenstellen. Genauer: Sie wollen den *Glücksfaktor* der Bredeletüten maximieren, d. h. die Summe der ♡-Bewertung (gegeben durch `www.bredele.alsace`) aller Bredele in einer einzelnen Tüte. Leider sind sich die Helferlein nicht einig, welche Strategie sie zu diesem Zweck verfolgen sollten:

(A) Annika meint: „Wir sollten das Paket aus Lebkuchenhausen wählen.“

(B) Bernd denkt: „Wir sollten das Paket aus Elisenheim wählen.“

(C) Chrisleine „: ”Wir sollten das Paket aus Himmelsberg wählen.“

(D) Daniël ist sich sicher: „Es werden nicht mehr als zwei Chargen von jeder Bredelesorte gebacken.“

(E) Etienne antwortet: „Eine Bredelesorte wird fünfmal gebacken.“

(F) Fleurianne fügt hinzu: „Mindestens zwei Arten von Bredele werden mindestens dreimal gebacken.“

(G) Gustav sagt: „Es werden keine Spitzbuben gebacken.“

Welche der gegebenen Antworten ist richtig?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Nur Annika und Etienne haben recht.
2. Nur Annika und Fleurianne haben recht.
3. Nur Annika, Etienne, und Gustav haben recht.
4. Nur Annika, Etienne, Fleurianne, und Gustav haben recht.
5. Nur Bernd und Daniël haben recht.
6. Nur Bernd und Fleurianne haben recht.
7. Nur Bernd, Etienne, Fleurianne und Gustav haben recht.
8. Nur Chrisleine, Daniël, and Etienne haben recht.
9. Nur Chrisleine, Daniël, Fleurianne und Gustav haben recht.
10. Nur Chrisleine, Etienne und Fleurianne haben recht.

Projektbezug:

Optimierungsprobleme entstehen in verschiedenen realen Anwendungen. Die Suche nach optimalen Lösungen für verschachtelte Optimierungsproblem, bei denen ein Problem (das Problem der unteren Ebene) in ein anderes (das Problem der oberen Ebene) eingebettet ist, werden als *Bilevel Optimization Problems* bezeichnet. Bilevel Optimization Problems entstehen z. B. bei der Modellierung von Leader-Follower-Spielen in der Spieltheorie (sogenannte *Stackelberg*-Spiele), bei der Investitionsplanung oder bei der Minimierung von Kosten unter bestimmten Gleichgewichtsbedingungen (MPECs). Die vorliegende Maximierungsaufgabe beinhaltet ein lineares, eingeschränktes Optimierungsproblem.

Die Modellierung des Problems ist auch ein wichtiges Thema in der Optimierung: Wenn wir mehr über die Präferenzen der Beschenkten wissen würden, z. B. über ihre Wertschätzung von Kokosbredele, könnten wir die Möglichkeit einbeziehen, einige Geschenktütchen mit und einige ohne Kokosbredele zuzubereiten.

Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Zunächst stellt man fest, dass es am besten ist, möglichst viele Spitzbuben zu backen und nicht etwa Butterbredele oder Spritzbredele. Das liegt daran, dass man außer der Marmelade immer mehr Zutaten braucht, um eine Charge Butterbredele oder Spitzbredele zu backen, und dass die Spitzbuben eine bessere Bewertung haben. Man kann also immer eine Charge Butterbredele oder Spitzbredele durch eine Charge Spitzbuben ersetzen und damit die Bewertung der Bredele-Geschenktüten erhöhen. Wenn wir die gesamte verfügbare Marmelade verwenden, können wir **zwei Chargen Spitzbuben** backen. Für diese zwei Chargen benötigen wir zusätzlich 1000 g Mehl, 400 g Zucker, 500 g Butter und 4 Eier. Zieht man diese Mengen von den Paketen ab, bleiben folgende Zutaten übrig:

Lieferant	Lebkuchenhausen	Elisenheim	Himmelsberg
Mehl (g)	2500	3000	2000
Zucker (g)	1600	1600	1600
Butter (g)	2500	2500	500
Eier (#)	26	28	12
Haselnuss (g)	500	1000	500
Kokosnuss (g)	0	0	400

Tabelle 5: Zutaten der Pakete nach dem Backen von zwei Chargen Spitzbuben.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass Kokosbredele nicht Teil einer optimalen Lösung sind: Der einzige Lieferant, der die notwendigen Kokosflocken liefert, ist Himmelsberg, dessen Paket ausreicht, um eine Charge Kokosbredele zu backen. Außerdem ist zu beachten, dass die Pakete aus Lebkuchenhausen und Elisenheim (außer den Kokosflocken) mindestens so viele Zutaten enthalten wie das Paket aus Himmelsberg. Wenn wir also keine Kokosbredele herstellen, gibt es keinen Vorteil, diesen Lieferanten zu wählen. Wenn wir eine Charge Kokosbredele backen, bleiben uns folgende Zutaten: 2000 g Mehl, 1200 g Zucker, 500 g Butter, 12 Eier und 500 g Haselnüsse.
Beachte, dass die Menge der Butter der begrenzende Faktor ist: Wir sind nun in der Lage, nur noch zwei weitere Chargen Bredele zu backen. Da Butterbredele höher bewertet sind als Spritzbredele, ist es am besten, zwei Chargen

Butterbredele zu backen.
Zwei Chargen Spitzbuben, eine Charge Kokosbredele und zwei Chargen Butterbredele würden zu einer Bewertung von insgesamt 100 ♡ führen. Dies ist aber nicht optimal, da wir (mit den Packungen aus Lebkuchenhausen oder Elisenheim) immer zwei Chargen Spitzbuben und drei Chargen Butterbredele backen könnten, was eine Gesamtbewertung von 110 ♡ ergeben würde.
Also werden wir in einer optimalen Lösung **keine Kokosbredele** backen.

Schließlich müssen wir die Anzahl der zu backenden Chargen von Butterbredele und Spitzbredele bestimmen. Dazu werden wir dieses Entscheidungsproblem als *Linear Programming* Problem darstellen und es mit einer grafischen Methode lösen.
Seien x_B bzw. x_S die Anzahl der Chargen von Butterbredele bzw. Spritzbredele. Dann können wir das Optimierungsproblem, wie folgt, aufschreiben:

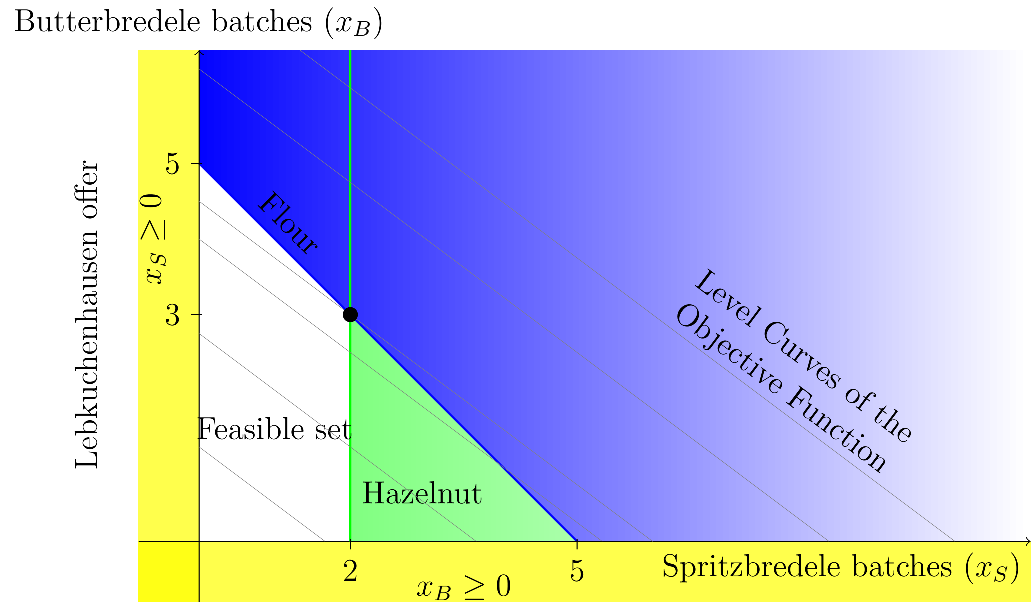
Lebkuchenhausen:

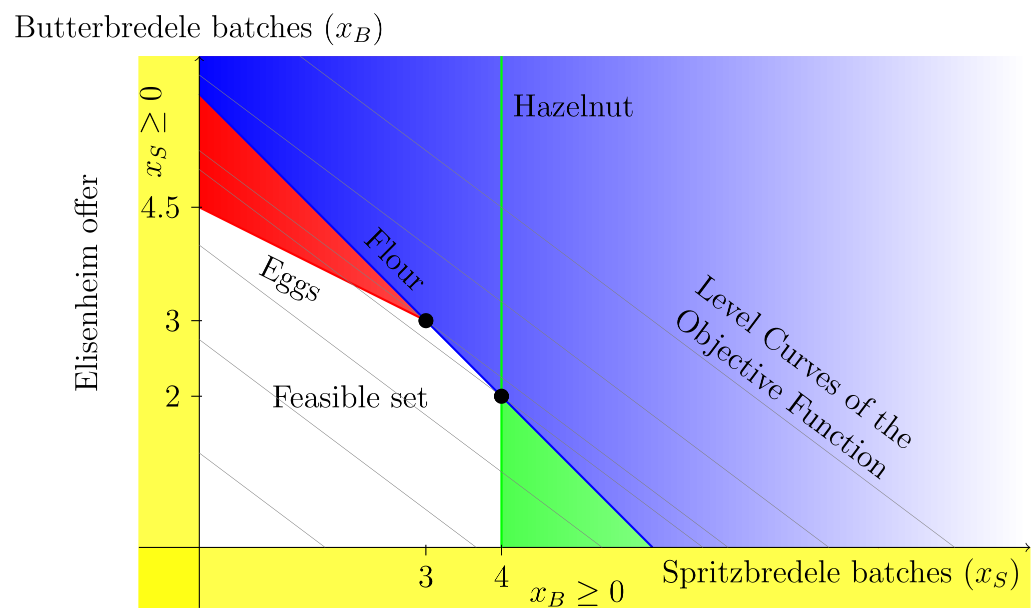
$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & 20x_B + 15x_S \\ \text{sodass} \quad & 0.5x_B + 0.5x_S \leq 2.5 \\ & 0.25x_B + 0.2x_S \leq 1.6 \\ & 0.25x_B + 0.25x_S \leq 2.5 \\ & 4x_B + 2x_S \leq 26 \\ & 0x_B + 0.25x_S \leq 0.5 \\ & x_B \geq 0 \text{ and } x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Elisenheim:

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & 20x_B + 15x_S \\ \text{sodass} \quad & 0.5x_B + 0.5x_S \leq 3.0 \\ & 0.25x_B + 0.2x_S \leq 1.6 \\ & 0.25x_B + 0.25x_S \leq 2.5 \\ & 4x_B + 2x_S \leq 18 \\ & 0x_B + 0.25x_S \leq 1 \\ & x_B \geq 0 \text{ and } x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Die Ungleichungen beschreiben eine Menge, die wir *zulässige Menge* nennen. Die Darstellung der zulässigen Menge erfolgt folgendermaßen: Zeichne eine Gerade, die dem Gleichheitsfall jeder Ungleichung entspricht. Die Halbebene, die der durch die Ungleichung beschriebenen Menge entspricht, ist gegeben durch die Normale auf die Gerade, entlang derer der Wert der linken Seite abnimmt.
Für beide Optimierungsprobleme erhalten wir die folgende Darstellung:





Die optimale Auswahl wird auf folgende Weise gefunden: Die Werte von x_B und x_S, bei denen die zu maximierende Zutaten konstant ist, können als Geraden dargestellt werden. Der Schnittpunkt dieser Gerade mit der zulässigen Menge gibt uns den Wert, der durch die Wahl der Chargen gegeben ist. Die optimale Auswahl besteht darin, den höchsten Wert der Zielfunktion so zu finden, dass die zugehörige Gerade noch die machbare Menge schneidet.

Für das Paket aus **Elisenheim** ist eine solche optimale Auswahl gegeben durch **drei Chargen Butterbredele** und **drei Chargen Spritzbredele** – mit einer optimalen Bewertung von 105 ♡ für diese beiden Bredelesorten. Insgesamt (d. h. mit den zwei Chargen Spitzbuben) erhalten wir 155 ♡.

Zusätzlich möchten wir einen **alternativen Lösungsansatz** ohne den Einsatz von grafischen Methoden vorstellen:

Nach wie vor wissen wir, dass eine optimale Lösung darin besteht, zwei Chargen Spitzbuben und keine Kokosbredele zu backen. Außerdem wird das Paket von Himmelsberg in einer optimalen Lösung nicht gewählt.
Wir erweitern die Tabelle 5, indem wir alle möglichen Chargen von Spritzbredele (begrenzt durch das Haselnussangebot) durchzählen. Die Tabelle zeigt die Anzahl der Chargen Spritzbredele (SB), die restlichen Zutaten nach dem Backen des Spritzbredele, die Anzahl der Chargen Butterbredele (BB), die mit den restlichen Zutaten gebacken werden können und die Gesamtbewertung der Bredele-Geschenktüten (einschließlich der 50 ♡ für die beiden Chargen Spitzbuben):

Lieferant	# SB	Mehl	Zucker	Butter	Eier	Hasel	# BB	♡
Lebkuchen-hausen	0	2500	1600	2500	26	500	5	150
	1	2000	1400	2250	24	250	4	145
	2	1500	1200	2000	22	0	3	140
Elisen-heim	0	3000	1600	2500	28	1000	4	130
	1	2500	1400	2250	26	750	4	145
	2	2000	1200	2000	24	500	3	140
	3	1500	1000	1750	22	250	3	**155**
	4	1000	800	1500	20	0	2	150

Schließlich lesen wir aus der Tabelle ab, dass es am besten ist, das **Elisenheim**-Angebot zu wählen und **zwei Chargen Spitzbuben** sowie **drei Chargen Butterbredele** zu backen.

Zusammenfassend stellen wir fest:

(A) Annika liegt falsch,

(B) Bernd hat recht,

(C) Chrisleine liegt falsch,

(D) Daniël liegt falsch,

(E) Etienne liegt falsch,

(F) Fleurianne hat recht und

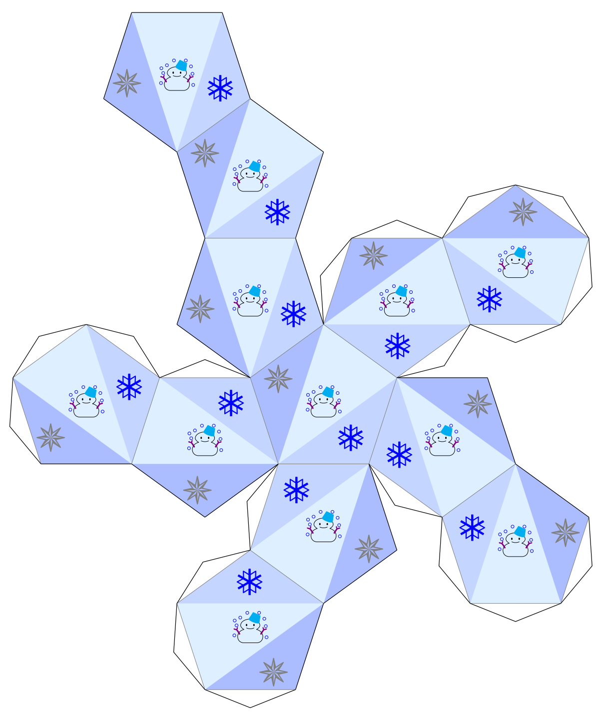
(G) Gustav liegt falsch.

19 Glitzergeschenke

Autorin: Fleurianne Bertrand (HU Berlin)

19.1 Aufgabe

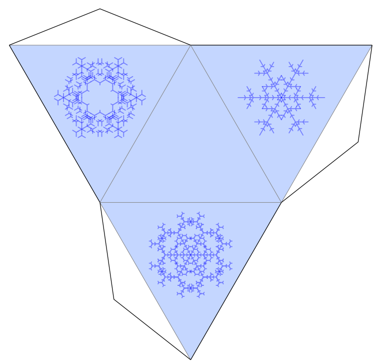
Letztes Jahr gab es in der Wichtelfabrik auch für die Wichtel ein Geschenk – eine neue Verzierungsmaschine, die direkt mit einem Tablet gesteuert werden kann: Die Wichtel können sich dort einen Bastelbogen aussuchen, der von der Software in Dreiecke unterteilt wird. Auf diesen können dann Verzierungen platziert werden (dabei werden die Klebeflächen natürlich ausgespart). Anschließend füllt man Pailletten in die Maschine und, *hop!*, fertig ist der verzierte Bastelbogen. Bei einem internen Wettbewerb zum Design einer Geschenkschachtel im Juni hat das folgende Modell von Wichtelin Nora in Form eines Dodekaeders gewonnen:



Seitdem ist Oberwichtelin Veronoella allerdings sehr oft damit beschäftigt, die kreativen Wichtel daran zu erinnern, dass die Verzierungen möglichst effizient eingesetzt werden sollen. Pro gewählter Verzierung werden nämlich

1 g Pailletten verwendet. Aus Stabilitätsgründen wird bei jedem Bogen aber noch *zusätzlich* eine bestimmte Menge M an Pailletten auf dem Modell verteilt.

So musste Veronoella erst letztens ein ernstes Wörtchen mit Wichtelin Anna reden: Anna meinte, dass es nicht sinnvoll sei, auch die Unterseite einer Pyramide zu verzieren und hatte daher folgenden Entwurf gestaltet:



Darauf hatte Veronoella erklärt, dass die Maschine in diesem Fall 3 g für die gewünschten Verzierung verwendet und zusätzlich 6 g für die Stabilität. „Hättest Du eine vierte Verzierung auf das vierte Dreieck gelegt, wären keine Pailletten für die Stabilität notwendig gewesen und wir hätten nur 4 g Pailletten verwenden müssen. Also sei bitte sparsamer, damit wir für alle Kinder wunderschöne Verzierungen erstellen können, und lege sie einfach gleichmäßiger. Um die Menge M der zusätzlichen stabilisierenden Pailletten auszurechnen, müssen alle Dreiecke verglichen werden und dazu habe ich keine Lust und schon gar keine Zeit!“, sagte sie.

Ella ist nun sehr neugierig, wie sich die Menge M genau berechnet. Daher schnappt sie sich die Bedienungsanleitung der Verzierungsmaschine und liest laut vor:

> Für einen Bastelbogen aus n Dreiecken $T_1, T_2, \dots, T_n$ berechnet sich die **Stabilitätsmenge** M wie folgt:

Für jedes Dreieck T_i $(i = 1, \dots, n)$ bezeichne $|T_i|$ den **Anteil der Fläche dieses Dreiecks an der Gesamtfläche** des Bastelbogens (ohne Klebeflächen), d. h.

$$|T_i| = \frac{area(T_i)}{area(T_1) + area(T_2) + \cdots + area(T_n)}.$$

Für jedes Dreieck T_i sei n_i die **Anzahl der Verzierungen** auf diesem Dreieck. Sei $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_n$ die **Gesamtzahl der Verzierungen** auf dem Bastelbogen.

Für jedes Dreieck T_i sei die **Stabilitätsindex** ρ_i von T_i gegeben als

$$\rho_i = \frac{n_i}{|T_i|},$$

d. h. als Anzahl an Verzierungen auf diesem Dreieck geteilt durch den Anteil der Fläche dieses Dreiecks an der Gesamtfläche.

Für je zwei Dreiecke T_i und T_j sei die (i, j)-**Stabilitätszahl** m_{ij} gegeben durch

$$m_{ij} = |T_i|\,|T_j|\,(\rho_i - \rho_j)^2.$$

Die **Stabilitätsmenge** M berechnet sich dann als die Summe der m_{ij} über alle Dreieckspaare (T_i, T_j), d. h.

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \qquad \text{(DEF)} \\ &= \quad m_{11} + m_{12} + \cdots + m_{1n} \\ &\quad + m_{21} + m_{22} + \cdots + m_{2n} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + m_{n1} + m_{n2} + \cdots + m_{nn}. \end{aligned}$$

Die anderen Wichtelinnen hören interessiert zu und machen sich ihre eigenen Gedanken:

Liah behauptet: Man könnte auch

$$\begin{aligned} M &= 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |T_i|\,|T_j|\,(\rho_i - \rho_j)^2 \qquad \text{(LIAH)} \\ &= 2 \Big(\quad |T_2|\,|T_1|\,(\rho_2 - \rho_1)^2 \\ &\quad + |T_3|\,|T_1|\,(\rho_3 - \rho_1)^2 + |T_3|\,|T_2|\,(\rho_3 - \rho_2)^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + |T_n|\,|T_1|\,(\rho_n - \rho_1)^2 + \cdots + |T_n|\,|T_{n-1}|\,(\rho_n - \rho_{n-1})^2 \Big) \end{aligned}$$

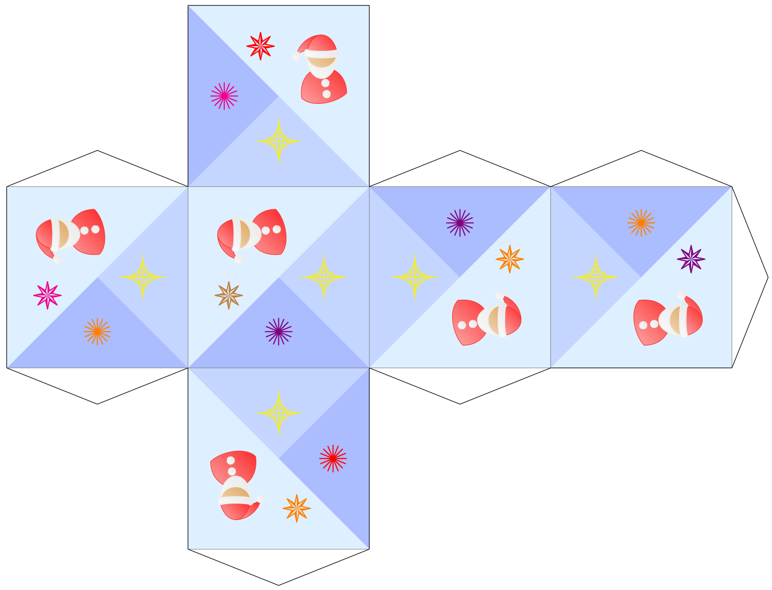
berechnen.

Sara erklärt: Ich werde immer nur eine Verzierung pro Dreieck legen, dann gilt

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (|T_i| - |T_j|)^2 \qquad \text{(SARA)} \\ &= \quad (|T_1| - |T_1|)^2 + (|T_1| - |T_2|)^2 + \cdots + (|T_1| - |T_n|)^2 \\ &\quad + (|T_2| - |T_1|)^2 + (|T_2| - |T_2|)^2 + \cdots + (|T_2| - |T_n|)^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (|T_n| - |T_1|)^2 + (|T_n| - |T_2|)^2 + \cdots + (|T_n| - |T_n|)^2. \end{aligned}$$

Nora verkündet: Ich möchte gerne jede Seite eines Würfels in ein großes und zwei halb so große Dreiecke unterteilen. Auf die großen Dreiecke lege ich jeweils zwei Verzierungen und auf die kleinen jeweils eine. Dann benötige ich keine zusätzlichen Pailletten, d. h. $M = 0$.

Anna erwidert: Nein, hier ist ein Gegenbeispiel für einen Würfel, bei dem $M \neq 0$ gilt:



Elsa murmelt: Haben alle Dreiecke die gleiche Fläche, dann gilt

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\rho_i^2-\rho_j^2) \qquad \text{(ELSA)}\\ &= \quad (\rho_1^2-\rho_1^2)+(\rho_1^2-\rho_2^2)+\cdots+(\rho_1^2-\rho_n^2)\\ &\quad +(\rho_2^2-\rho_1^2)+(\rho_2^2-\rho_2^2)+\cdots+(\rho_2^2-\rho_n^2)\\ &\quad +\dots\\ &\quad +(\rho_n^2-\rho_1^2)+(\rho_n^2-\rho_2^2)+\cdots+(\rho_n^2-\rho_n^2); \end{aligned}$$

das bedeutet, dass keine Pailletten zusätzlich für die Stabilität verwendet werden müssen, wenn jedes Dreieck mit der gleichen Anzahl an Verzierungen dekoriert wird.

Ella meint: Es gilt

$$\begin{aligned} M &= 2\sum_{i=1}^{n}|T_i|(N-\rho_i)^2\\ &= 2\Big(|T_1|(N-\rho_1)^2+|T_2|(N-\rho_2)^2+\dots|T_n|(N-\rho_n)^2\Big). \end{aligned}$$

Welche Wichtelinnen liegen denn nun aber richtig?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Anna und Elsa.
2. Anna und Ella.
3. Anna und Sara.
4. Anna und Nora.
5. Elsa und Liah.
6. Liah und Sara.
7. Nora und Sara.
8. Anna, Ella und Elsa.
9. Ella, Liah und Nora.
10. Ella, Nora und Sara.

Projektbezug:

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein numerisches Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, das bei unterschiedlichen physikalischen Aufgabenstellungen angewendet wird. Das Berechnungsgebiet wird dabei in endlich viele Teilgebiete aufgeteilt. Bei der HHO-Methode können beliebige Polyeder verwendet werden. Für die numerische Analysis kann es allerdings manchmal von Vorteil sein, solche Polyeder in Dreiecke zu unterteilen.

19.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Liah liegt richtig: Es gilt

$$m_{ij} = |T_i|\,|T_j|\,(\rho_i - \rho_j)^2 = |T_j|\,|T_i|\,(\rho_j - \rho_i)^2 = m_{ji},$$

woraus

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} m_{ij}$$

folgt. Weiterhin sieht man, dass

$$m_{ii} = |T_i|\,|T_i|\,(\rho_i - \rho_i)^2 = 0$$

gilt. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} m_{ij} + \sum_{i=1}^{n} m_{ii} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} m_{ij} \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} m_{ij} \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} |T_i|\,|T_j|\,(\rho_i - \rho_j)^2, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung der Aussage von (LIAH) entspricht.

Sara liegt falsch: Wir formen zunächst die Formel (DEF) in der Definition der Stabilitätsmenge M um:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |T_i|\,|T_j|\,(\rho_i - \rho_j)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |T_i|\,|T_j| \left(\frac{n_i}{|T_i|} - \frac{n_j}{|T_j|}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|T_i||T_j|}\,(n_i|T_j| - n_j|T_i|)^2 \end{aligned}$$

Setzen wir nun $n_i = 1$, für alle $i = 1, \ldots, n$, sehen wir, dass Sara in ihrer Formel (SARA) vergessen hat, jeden Summanden durch $|T_i|\,|T_j|$ zu teilen.

Nora liegt richtig: Jede der sechs Würfelseiten sei in ein großes Dreieck und zwei halb so große unterteilt. Dies bedeutet, dass die großen Dreiecke T jeweils einen Anteil an der Gesamtfläche von

$$|T| = \frac{1}{2} : 6 = \frac{1}{12}$$

haben, während die kleinen Dreiecke t einen Anteil von

$$|t| = \frac{1}{4} : 6 = \frac{1}{24}$$

besitzen. Entsprechend stimmen die Stabilitätskennzahlen ρ_T und ρ_t der großen bzw. kleinen Dreiecke überein:

$$\rho_T = \frac{2}{|T|} = 2 : \frac{1}{12} = 24 = 1 : \frac{1}{24} = \frac{1}{|t|} = \rho_t.$$

Es gilt also für alle Dreiecke $m_{ij} = 0$ und folglich auch

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 0.$$

Anna liegt falsch: Wie wir eben gezeigt haben, gilt auch für Annas Würfel $m_{ij} = 0$ und somit $M = 0$.

Elsa liegt ebenfalls falsch: Für Annas Tetraederentwurf gilt

$$|T_1| = |T_2| = |T_3| = |T_4| = \frac{1}{4}$$

sowie

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 4 \qquad \text{und} \qquad \rho_4 = 0.$$

Es folgt $m_{ii} = m_{kl} = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$ und $k, l = 1, 2, 3$. Außerdem

$$m_{k4} = |T_k|\,|T_4|\,(\rho_k - 0)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 1$$

für $k = 1, 2, 3$. Laut (DEF) gilt also

$$M = 2\,(m_{14} + m_{24} + m_{34}) = 2\,(1 + 1 + 1) = 6.$$

Mit Elsas Formel (ELSA) erhält man jedoch

$$M = (\rho_1^2 - 0) + (\rho_2^2 - 0) + (\rho_3^2 - 0) + (0 - \rho_1^2) + (0 - \rho_2^2) + (0 - \rho_2^2) = 0.$$

Schließlich hat Wichtelin Ella recht: Die Formel

$$2 \sum_{i=1}^{n} |T_i|\,(N - \rho_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |T_i|\,|T_j|\,(\rho_i - \rho_j)^2$$

kann wie folgt gezeigt werden.

$$2 \sum_{i=1}^{n} |T_i|\,(N - \rho_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |T_i|\,|T_j|\,(\rho_i - \rho_j)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2\,|T_i|\,(N^2 - 2N\rho_i + \rho_i^2) - \sum_{j=1}^{n} |T_i|\,|T_j|(\rho_i^2 - 2\rho_i\rho_j + \rho_j^2) \right]$$

Da $\rho_i = \frac{n_i}{|T_i|}$ erhalten wir:

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2\,|T_i| \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right)^2 - 2 \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right) \frac{n_i}{|T_i|} + \frac{n_i^2}{|T_i|^2} \right\} - \sum_{j=1}^{n} |T_i|\,|T_j| \left\{ \frac{n_i^2}{|T_i|^2} - 2 \frac{n_i\, n_j}{|T_i|\,|T_j|} + \frac{n_j^2}{|T_j|^2} \right\} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2\,|T_i| \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right)^2 - 4 \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right) n_i + 2 \frac{n_i^2}{|T_i|} - \sum_{j=1}^{n} \frac{n_i^2\,|T_j|}{|T_i|} + 2 \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right) n_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{n_j^2\,|T_i|}{|T_j|} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2\,|T_i| \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right)^2 - 2\, n_i \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right) \right] + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i^2}{|T_i|} - \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i^2}{|T_i|} \left(\sum_{j=1}^{n} |T_j| \right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{n_j^2}{|T_j|} \left(\sum_{i=1}^{n} |T_i| \right)$$

Durch Umbenennung der Indizes ($j \to i$) im letzten Summanden und wegen $\sum_{j=1}^{n} |T_j|$ folgt:

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2\,|T_i| \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right)^2 - 2\, n_i \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right) \right] + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i^2}{|T_i|} - 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i^2}{|T_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2\,|T_i| \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right)^2 - 2\, n_i \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right) \right]$$

$$= 2 \left(\sum_{i=1}^{n} |T_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} n_i \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right)$$

Abermals nutzen wir die Identität $\sum_{j=1}^{n} |T_j| = 1$ aus:

$$= 2 \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} n_i \left(\sum_{j=1}^{n} n_j \right)$$

$$= 0$$

Zusammenfassend stellen wir fest, dass **Liah, Nora und Ella richtig** liegen sowie Sara, Anna und Elsa falsch.

20 Geschenkband

Autoren: Christian Hercher (Europa-Universität Flensburg)
Michael Schmitz (Europa-Universität Flensburg)

20.1 Aufgabe

Man sollte meinen, dass Willi Wichtel, welcher in der Weihnachtsgeschenkeverpackungsfabrik werkelt, gerade jetzt viel zu tun hat. Doch weit gefehlt! Gerade macht er Pause und beschäftigt sich mit einem interessanten Problem:

In der Hand hält er mittig drei nicht unterscheidbare Schnüre eines Geschenkbands. Schließt er die Hand zu einer Faust, baumeln also sechs lose Enden aus dieser heraus (s. Abbildung 20).

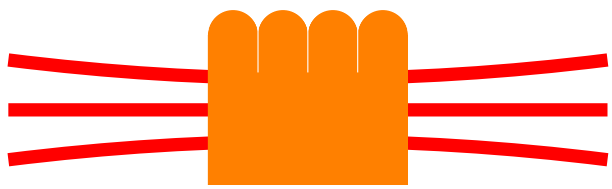


Abbildung 20: Willis Faust mit den drei Schnüren bzw. sechs losen Enden.

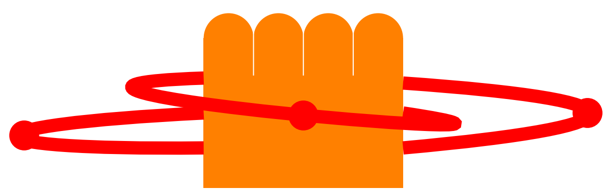


Abbildung 21: Ein Verknotungsbeispiel. In diesem Fall entsteht ein einzelner Ring.

Hector Hilfswichtel verknotet nun völlig zufällig immer zwei dieser sechs Schnurenden, bis keine losen Enden mehr übrig sind – Hector macht also insgesamt drei Knoten. Willi öffnet seine Hand und betrachtet nun ein, zwei oder drei geschlossenen Ringe (s. Abbildung 21). Eine alte Wichtelweisheit besagt übrigens, dass, sollte sich beim Verknoten nur ein einzelner Ring ergeben, man den Tag nach Weihnachten frei hat :)

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_3, dass Willi nach dem Verknoten genau zwei Ringe erhält?

(b) Nun will es Willi wissen: Wenn er die Anzahl der zu Beginn in die Hand genommenen Schnüre von drei auf vier erhöht, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit p_4, nach dem Verknoten genau zwei Ringe zu erhalten?

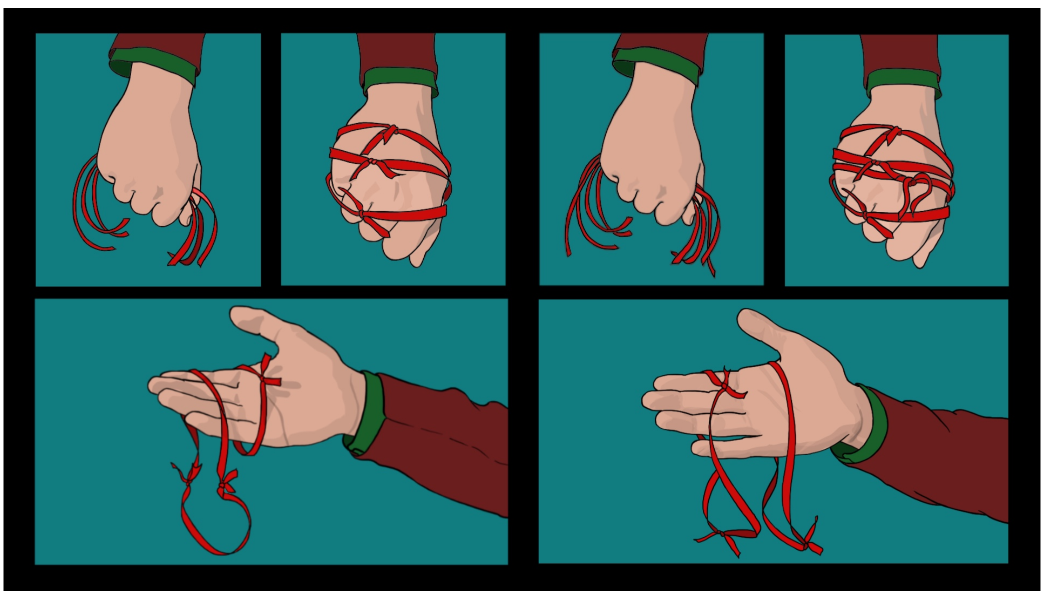


Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. (a) $p_3 = 30\,\%$ und (b) $p_4 \approx 41\,\%$.
2. (a) $p_3 = 30\,\%$ und (b) $p_4 \approx 42\,\%$.
3. (a) $p_3 = 30\,\%$ und (b) $p_4 \approx 43\,\%$.
4. (a) $p_3 = 30\,\%$ und (b) $p_4 \approx 44\,\%$.
5. (a) $p_3 = 30\,\%$ und (b) $p_4 \approx 45\,\%$.
6. (a) $p_3 = 40\,\%$ und (b) $p_4 \approx 41\,\%$.

7. (a) $p_3 = 40\,\%$ und (b) $p_4 \approx 42\,\%$.
8. (a) $p_3 = 40\,\%$ und (b) $p_4 \approx 43\,\%$.
9. (a) $p_3 = 40\,\%$ und (b) $p_4 \approx 44\,\%$.
10. (a) $p_3 = 40\,\%$ und (b) $p_4 \approx 45\,\%$.

20.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

(a) Zunächst wählt Hector ein beliebiges Schnurende aus. Nun unterscheidet man zwei Fälle:

1. Hector wählt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ das andere Ende *derselben* Schnur, wobei schon der erste Ring entsteht und zwei einzelne Schnüre verbleiben. Wieder greift Hector eines der (nun noch) vier Schnurenden. Damit am Ende *zwei* Ringe entstehen, muss er dieses mit einem Ende der *anderen* Schnur verknoten, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ passiert. Nun verbleiben noch zwei Schnurenden, die auf jeden Fall (d. h. mit Wahrscheinlichkeit 1) verknotet werden.

   Insgesamt tritt dieser Fall also mit der Wahrscheinlichkeit

   $$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

   ein.

2. Im anderen Fall verknotet Hector das erste Schnurende mit einem Ende einer *anderen* Schnur, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$ passiert. Willi hält nun eine kurze Schnur und eine lange Schnur (bestehend aus den beiden eben verknoteten) in der Faust. (Wir unterscheiden die beiden Schnüre im Folgenden nicht, da Hector seine Wahl vollkommen zufällig trifft). Damit aus diesen zwei Schnüren zwei Ringe entstehen, müssen ihre Ende jeweils miteinander verknotet werden. Hector greift wieder eines der (noch) vier Schnurenden. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ verknotet er dieses mit dem anderen Ende *derselben* Schnur und erhält den ersten Ring. Der zweite Ring entsteht nun in jedem Fall (d. h. mit Wahrscheinlichkeit 1), da nur noch die beiden Enden der letzten Schnur miteinander verknotet werden können.

   Insgesamt tritt dieser Fall also mit der Wahrscheinlichkeit

   $$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

   ein.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich abschließend als die Summe der oben bestimmten Wahrscheinlichkeiten:

$$p_3 = \tfrac{2}{15} + \tfrac{4}{15} = \tfrac{6}{15} = \tfrac{2}{5} = 40\,\%.$$

(b) Man kann diesen Aufgabenteil geschickt auf (a) zurückführen. Dazu führen wir folgende Notation ein: Es sei $P(X_n = k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man beim Verknoten von n Schnüren genau k Ringe erhält. Im Aufgabenteil (a) haben wir die Wahrscheinlichkeit $P(X_3 = 2) = p_3 = \frac{2}{5}$ berechnet. Hier ist nun $p_4 = P(X_4 = 2)$ gesucht.

Berechnen wir nun die Wahrscheinlichkeit aus vier Schnüren durch Verknoten genau zwei Ringe zu erhalten: Hector schnappt sich zunächst einen der acht Enden. Wieder unterscheiden wir zwei Fälle

1. Hector verknotet das erste Ende mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{7}$ mit dem anderen Ende *derselben* Schnur, wobei der erste Ring entsteht. Mit den verbleibenden drei Schnüren muss er nun noch einen Ring bilden. Dies passiert mit der Wahrscheinlichkeit $P(X_3 = 1)$ – die wir noch berechnen müssen. Insgesamt ergibt sich in diesem Fall eine Wahrscheinlichkeit von

$$\tfrac{1}{7} \cdot P(X_3 = 1).$$

2. Im zweiten Fall verknotet Hector das erste Schnurende mit einem Ende einer *anderen* Schnur, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{7}$ geschieht. In Willis Faust befinden sich damit eine lange Schnur (bestehend aus den beiden eben verknoteten) und zwei kurze. Da wir die Länge der Schnüre auch hier vernachlässigen können, hält Willi nun noch drei Schnüre in der Faust, die Hector zu zwei Ringen verbinden soll, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(X_3 = 2)$ passiert (die wir in (a) berechnet haben). Insgesamt ergibt sich in diesem Fall eine Wahrscheinlichkeit von

$$\tfrac{6}{7} \cdot P(X_3 = 2).$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist wieder die Summe der beiden oben berechneten Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X_4 = 2) = \tfrac{1}{7} \cdot P(X_3 = 1) + \tfrac{6}{7} \cdot P(X_3 = 2).$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(X_3 = 2) = p_3 = \frac{2}{5}$ haben wir in (a) schon bestimmt. Es verbleibt also noch $P(X_3 = 1)$ zu ermitteln, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, aus drei Schnüren nur einen Ring zu bilden. Hector muss also das erste der sechs losen Schnurenden mit dem Ende einer anderen Schnur verbinden, was mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ passiert. Dabei entstehen zwei Schnüre, aus denen nun mit Wahrscheinlichkeit $P(X_2 = 1)$ ein einziger Ring ensteht. Es gilt $P(X_2 = 1) = \frac{2}{3}$, da Hector eines der vier losen Enden (der zwei Schnüre) mit einem Ende einer *anderen* Schnur verknoten muss, um einen Ring zu erhalten. Wir erhalten demnach

$$P(X_3 = 1) = \tfrac{4}{5} \cdot P(X_2 = 1) = \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{15}.$$

Abschließend berechnet man somit

$$\begin{aligned} p_4 = P(X_4 = 2) &= \tfrac{1}{7} \cdot P(X_3 = 1) + \tfrac{6}{7} \cdot P(X_3 = 2) \\ &= \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{8}{15} + \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{2}{5} \\ &= \tfrac{1}{7} \cdot \left(\tfrac{8}{15} + \tfrac{36}{15}\right) \\ &= \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{44}{45} = \tfrac{44}{105} \\ &\approx 0{,}419 \\ &\approx 42\,\%. \end{aligned}$$

21 Alles muss raus!

Autor: Max Klimm (HU Berlin)

Projekt: MATH+ Application Area AA3-5: *Tropical Mechanism Design*

21.1 Aufgabe

Jedes Jahr, wenn sich der Trubel der Weihnachtstage gelegt hat, veranstaltet der Weihnachtsmann eine Versteigerung unter seinen Wichteln, um die vielen zurückgegebenen und nicht angenommenen Geschenke aus dem Lager zu bekommen. Die Wichtel bieten und zahlen mit Tannenzapfen, die beliebig geteilt werden können. Der Weihnachtsmann veranstaltet grundsätzlich *Zweitpreisauktionen mit Mindestpreis.* Dabei geben alle interessierten Wichtel ihr Gebot verdeckt ab. Es gewinnt das höchste Gebot, sofern es den Mindestpreis erreicht. In diesem Fall ist der **Erlös** jeweils das Maximum aus dem Mindestpreis und dem zweithöchsten Gebot – sollte es nur ein Gebot geben, dann muss eben der Mindestpreis gezahlt werden. Diesen Erlös erhält der Weihnachtsmann als Gutschrift für die Geschenke zum kommenden Weihnachtsfest.

(i) Der erste Artikel, der zur Versteigerung kommt, ist eine geschmacklose Vase. Nur Wichtel Cato hat daran Interesse. Aus Erfahrung ist bekannt, dass Cato jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen oder zwei Tannenzapfen bieten wird.

(ii) Der zweite Artikel ist ein Sockensortierer. Nur Wichtel Luca hat daran Interesse. Luca bietet jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ einen, zwei oder drei Tannenzapfen.

(iii) Der dritte Artikel ist ein solarbetriebener Briefbeschwerer. Nur Wichtel Elisa und Frana haben daran Interesse. Elisa bietet jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ einen oder drei Tannenzapfen. Frana bietet jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ zwei oder vier Tannenzapfen. Beide Wichtel bieten unabhängig voneinander.

(iv) Der vierte Artikel ist ein getöpferter Blumenstrauß. Es hat wiederum nur Cato daran Interesse. Er wird jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen oder zwei Tannenzapfen bieten. Catos Interesse an dem Blumenstrauß ist unabhängig von seinem Interesse an der geschmacklosen Vase.

Der Weihnachtsmann macht sich nun einige Gedanken darüber, wie er jeweils die Mindestpreise für vier Auktionen wählen sollte, damit der zu erwartende Erlös möglichst groß ist. Dabei ist der **erwartete Erlös** einer Auktion mit Mindestpreis die Summe aller möglichen Erlöse dieser Auktion *jeweils* multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit für das Erzielen dieses Erlöses. Folgende Hypothesen hat der Weihnachtsmann sich zu den vier Auktionen aufgeschrieben:

(A) Für die erste Auktion ergibt ein Mindestpreis von 2 einen erwarteten Erlös von 1.

(B) Für die erste Auktion ist der Mindestpreis von 2 **optimal**, das heißt, es gibt keinen anderen Mindestpreis, der einen echt größeren erwarteten Erlös erwirtschaftet.

(C) Für die dritte Auktion ist der Mindestpreis von 4 optimal.

(D) Der erwartete Erlös der zweiten Auktion mit optimalem Mindestpreis ist geringer als der der dritten Auktion mit einem Mindestpreis von 0.

(E) Anstatt Vase und Blumenstrauß einzeln zu verkaufen, könnte man auch beide Artikel zusammen als Bündel verkaufen. Nimmt man an, dass Cato auf das Bündel die Summe der Gebote der darin enthaltenen Artikel bietet, so ergibt ein Mindestpreis von 3 für das Bündel einen erwarteten Erlös von $\frac{9}{4}$.

(F) Der Mindestpreis von 3 ist für das Bündel optimal.

(G) Angenommen Cato bietet in der ersten *und* in der vierten Auktion jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen oder vier Tannenzapfen. Dann ist es besser, die Artikel zusammen im Bündel zu verkaufen als beide Artikel einzeln (wobei wir jeweils den erwarteten Erlös zum jeweiligen optimalen Mindestpreis betrachten).

Welche der Aussagen (A) bis (G) sind korrekt?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Keine der Aussagen (A) bis (G) ist korrekt.
2. Nur die Aussagen (A) und (B) sind korrekt.
3. Nur die Aussagen (A), (B) und (C) sind korrekt.
4. Nur die Aussagen (A), (B) und (D) sind korrekt.
5. Nur die Aussagen (A), (B), (D) und (E) sind korrekt.
6. Nur die Aussagen (A), (B), (C), (D) und (E) sind korrekt.
7. Nur die Aussagen (A), (B), (D), (E) und (F) sind korrekt.
8. Nur die Aussagen (A), (B), (E), (F) und (G) sind korrekt.
9. Nur die Aussagen (A), (B), (D), (E), (F) und (G) sind korrekt.
10. Jede der Aussagen (A) bis (G) ist korrekt.

Projektbezug:

Das MATH+ Projekt *Tropical Mechanism Design* betrachtet Auktionen zum Verkauf mehrerer Güter. Eine Schwierigkeit dabei ist es zu entscheiden, welche Güter zusammen im Bündel verkauft werden sollen. Diese Entscheidungen werden im Rahmen des Projektes mithilfe der tropischen Geometrie gelöst.

21.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

(A) **Diese Aussage ist korrekt:** Bei einem Mindestpreis von 2 wird die geschmacklose Vase nur verkauft, wenn Cato zwei Tannenzapfen bietet, was mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eintritt. Da es keine weiteren Bieter gibt, ist der Erlös in diesem Fall gerade der Mindestpreis, also 2. Der erwartete Erlös ist demnach $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

(B) **Diese Aussage ist korrekt:** Da Cato nur entweder einen oder zwei Tannenzapfen bietet, ist es nur sinnvoll die Mindestpreise 1 und 2 zu betrachten.

Für den Mindestpreis 2 haben wir in (A) schon den erwarteten Erlös $E(2) = 1$ berechnet.

Für den Mindestpreis 1 wird die Vase mit Wahrscheinlichkeit 1 verkauft, und zwar zum Mindestpreis 1. Der erwartete Erlös beträgt also in diesem Fall ebenfalls $E(1) = 1 = E(2)$ und damit nicht echt größer als $E(2)$. Ein Mindestpreis von 2 ist folglich optimal.

(C) **Diese Aussage ist falsch:** Elisa und Frana bieten für den solarbetriebenen Briefbeschwerer entweder einen oder drei bzw. zwei oder vier Tannenzapfen – jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Für diese Auktion gibt es also vier mögliche Paare,

$$(1,2),\ (1,4),\ (3,2),\ (3,4),$$

die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ geboten werden. Bezeichne $\pi(m,(i,j))$ den Erlös bei der Auktion mit Mindestpreis $m \in [0,\infty)$ zum Gebot (i,j), wobei $i \in \{1,3\}$ und $j \in \{2,4\}$. Der erwartete Erlös der Auktion mit Mindestpreis m ist folglich

$$E(m) = \tfrac{1}{4}\big(\pi(m,(1,2)) + \pi(m,(1,4)) + \pi(m,(3,2)) + \pi(m,(3,4))\big).$$

Es gilt

$$\pi(m,(1,2)) = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq m \leq 1, \\ m, & \text{for } 1 \leq m \leq 2, \\ 0, & \text{for } 2 < m, \end{cases}$$

$$\pi(m,(1,4)) = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq m \leq 1, \\ m, & \text{for } 1 \leq m \leq 4, \\ 0, & \text{for } 4 < m, \end{cases}$$

$$\pi(m,(3,2)) = \begin{cases} 2, & \text{for } 0 \leq m \leq 2, \\ m, & \text{for } 2 \leq m \leq 3, \\ 0, & \text{for } 3 < m, \end{cases}$$

$$\pi(m,(3,4)) = \begin{cases} 3, & \text{for } 0 \leq m \leq 3, \\ m, & \text{for } 3 \leq m \leq 4, \\ 0, & \text{for } 4 < m. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} E(0) &= \tfrac{1}{4}(1+1+2+3) = \tfrac{7}{4} = 1\,\tfrac{3}{4}, \\ E(1) &= \tfrac{1}{4}(1+1+2+3) = \tfrac{7}{4} = 1\,\tfrac{3}{4}, \\ E(2) &= \tfrac{1}{4}(2+2+2+3) = \tfrac{9}{4} = 2\,\tfrac{1}{4}, \\ E(3) &= \tfrac{1}{4}(0+3+3+3) = \tfrac{9}{4} = 2\,\tfrac{1}{4}, \\ E(4) &= \tfrac{1}{4}(0+4+0+4) = 2. \end{aligned}$$

Da $E(4) = 2 < 2\,\frac{1}{4} = E(3) = E(2)$ gilt, ist ein Mindestpreis von 4 nicht optimal für die dritte Auktion.

(D) **Diese Aussage ist korrekt:** Wir bestimmen zunächst den optimalen Mindestpreis und den zugehörigen erwarteten Erlös der zweiten Auktion: Da Luca nur entweder einen, zwei oder drei Tannenzapfen für den Sockensortierer bietet, ist es nur sinnvoll die Mindestpreise 1, 2 und 3 zu betrachten. Für den Mindestpreis 1 wird der Sockensortierer mit

Wahrscheinlichkeit 1 verkauft, und zwar zum Mindestpreis 1. Der erwartete Erlös beträgt also in diesem Fall ebenfalls $E(1) = 1$. Für den Mindestpreis 2 wird der Sockensortierer verkauft, wenn Luca zwei oder drei Tannenzapfen bietet, also mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$. Da es keine weiteren Bieter gibt, ist der Erlös in diesem Fall gerade der Mindestpreis, also 2. Der erwartete Erlös beträgt also in diesem Fall $E(2) = 2\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Für den Mindestpreis 3 wird der Sockensortierer nur verkauft, wenn Luca drei Tannenzapfen bietet – dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$. Auch in diesem Fall entspricht der Erlös dem Mindestpreis 3. Der erwartete Erlös ist demnach $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Der optimale Mindestpreis der zweiten Auktion ist also 2 und der zugehörige erwartete Erlös beträgt $\frac{4}{3}$.

Für die dritte Auktion haben wir in (C) für den Mindestpreis von 0 einen erwarteten Erlös von $\frac{7}{4} > \frac{4}{3}$ ermittelt.

(E) **Diese Aussage ist korrekt:** Da Cato für die beiden im Bündel enthaltenen Artikel jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Preis von einem oder zwei Tannenzapfen bietet, ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten für die Gebote auf das Bündel:

- Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ bietet er zwei,
- mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ bietet er drei und
- mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ bietet er vier Tannenzapfen.

Bei einem Mindestpreis von 3 beträgt die Verkaufswahrscheinlichkeit genau $\frac{3}{4}$ und der erwartete Erlös $3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$.

(F) **Diese Aussage ist korrekt:** Da Cato nur zwei, drei oder vier Tannenzapfen bietet, ist es nur sinnvoll die Mindestpreise 2, 3 und 4 zu betrachten.

Bei einem Mindestpreis von 2 wird das Bündel auf jeden Fall verkauft und der erwartete Erlös ist gerade der Mindestpreis, also $E(2) = 2$.

Laut (F) ist $E(3) = \frac{9}{4}$.

Bei einem Mindestpreis von 4 wird das Bündel mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ verkauft und der erwartete Erlös ist $E(4) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Folglich gilt $E(4) < E(2) < E(3)$ und der Mindestpreis 3 ist ideal.

(G) **Diese Aussage ist falsch:** Betrachten wir zunächst jeweils die Einzelauktionen der beiden Artikel: Bei einem Mindestpreis von 1 werden die Artikel auf jeden Fall verkauft und der erwartete Erlös beträgt 1. Bei einem Mindestpreis von 4 werden die Artikel (jeweils) mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ verkauft und der erwartete Erlös beträgt 2. Werden beide Artikel einzeln zum optimalen Mindestpreis (4) verkauft, dann beträgt der erwartete Erlös für beide Güter zusammen also $2 + 2 = 4$.

Werden nun beide Artikel im Bündel verkauft, dann bietet Cato

- mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ zwei,
- mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ fünf und
- mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ acht Tannenzapfen.

Es kommen demnach nur die Mindestpreise 2, 5 und 8 in Frage. Für den Mindestpreis von 2 beträgt der erwartete Erlös für das Bündel $E(2) = 2 < 4$. Für den Mindestpreis von 5 beträgt der erwartete Erlös für das Bündel $E(5) = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3\,\frac{3}{4} < 4$. Für den Mindestpreis von 8 beträgt der erwartete Erlös für das Bündel $E(8) = 8\frac{1}{4} = 2 < 4$. Wir sehen also, dass es in diesem Falle besser ist, die Artikel einzeln zu verkaufen.

22 Baumschmuck

Autor: Jacques Resing (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

22.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann sagt zu Knecht Ruprecht: „In dieser Kiste liegen viele blaue und rote Christbaumkugeln, und es sind mehr blaue als rote Kugeln.“
Knecht Ruprecht greift in die Kiste und zieht zwei Kugeln heraus. Und tatsächlich, die eine Kugel ist blau und die andere Kugel ist rot.
Der Weihnachtsmann sagt: „Interessant! Die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln aus der Kiste zu ziehen, beträgt genau 1/2.“

Knecht Ruprecht wirft die beiden Kugeln zurück in die Kiste, greift noch einmal hinein und zieht drei Kugeln heraus. Alle drei Kugeln haben dieselbe Farbe.
Der Weihnachtsmann sagt: „Äußerst interessant! Die Wahrscheinlichkeit, drei gleichfarbige Kugeln aus der Kiste zu ziehen, beträgt genau 1/4.“

Knecht Ruprecht wirft auch diese drei Kugeln wieder zurück in die Kiste. Danach zieht er zuerst eine rote, dann eine blaue, und dann noch eine rote Kugel heraus.
Der Weihnachtsmann sagt: „Höchst interessant! Die Wahrscheinlichkeit, rot-blau-rot zu ziehen, beträgt auf sechs Nachkommastellen gerundet $0,123456$.“

Frage: Wie viele Christbaumkugeln befinden sich denn (vor den Ziehungen) in der Kiste?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. In der Kiste befinden sich 5.929 Christbaumkugeln.
2. In der Kiste befinden sich 6.084 Christbaumkugeln.
3. In der Kiste befinden sich 6.241 Christbaumkugeln.
4. In der Kiste befinden sich 6.561 Christbaumkugeln.
5. In der Kiste befinden sich 6.724 Christbaumkugeln.
6. In der Kiste befinden sich 6.889 Christbaumkugeln.
7. In der Kiste befinden sich 7.056 Christbaumkugeln.
8. In der Kiste befinden sich 7.396 Christbaumkugeln.
9. In der Kiste befinden sich 7.569 Christbaumkugeln.
10. In der Kiste befinden sich 8.281 Christbaumkugeln.

22.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Das vorliegende Problem können wir als *Urnenmodell* beschreiben. Wir ziehen ohne zurückzulegen und müssen dabei die Reihenfolge der gezogenen Kugeln beachten.

Wir nehmen an, dass die Kiste b blaue und r rote Kugeln enthält. Bei **Ruprechts erster Ziehung** gibt es dann $2\,b\,r$ Möglichkeiten, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen (blau-rot und rot-blau). Weiters gibt es $b\,(b-1)$ Möglichkeiten, zwei blaue Kugeln zu ziehen, und $r\,(r-1)$ Möglichkeiten, zwei rote Kugeln zu ziehen. Da die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, $1/2$ ist, ist auch die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, $1/2$. Wir erhalten demnach

$$\begin{aligned} & 2br = b(b-1) + r(r-1) \\ \iff\quad & 2br = b^2 - b + r^2 - r \\ \iff\quad & b + r = b^2 - 2br + r^r \\ \iff\quad & b + r = (b-r)^2. \end{aligned}$$

Die Gesamtzahl $b+r$ aller Kugeln ist somit eine Quadratzahl.

Wir setzen

$$x := b - r \tag{5}$$

und erhalten

$$b + r = x^2. \tag{6}$$

Wegen $b, r \geq 1$, gilt $x \geq 2$. Gleichungen (5) und (6) sind äquivalent zu

$$r = b - x \qquad \text{bzw.} \qquad r = x^2 - b,$$

woraus

$$b = \frac{1}{2}(x^2 + x) \tag{7}$$

folgt. Analog zeigt man, dass

$$r = \frac{1}{2}(x^2 - x). \tag{8}$$

Bei **Ruprechts zweiter Ziehung** gibt es dann $b\,(b-1)\,(b-2)$ Möglichkeiten für drei blaue Kugeln und $r\,(r-1)\,(r-2)$ Möglichkeiten für drei rote Kugeln. Insgesamt erhalten wir als Anzahl der günstigen Ereignisse in der zweiten Ziehung also:

$$\begin{aligned}
&b(b-1)(b-2)+r(r-1)(r-2)\\
&=\frac{1}{2}(x^2+x)\left(\frac{1}{2}(x^2+x)-1\right)\left(\frac{1}{2}(x^2+x)-2\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}(x^2-x)\left(\frac{1}{2}(x^2-x)-1\right)\left(\frac{1}{2}(x^2-x)-2\right)\\
&=\frac{1}{8}(x^2+x)(x^2+x-2)(x^2+x-4)+\frac{1}{8}(x^2-x)(x^2-x-2)(x^2-x-4)\\
&=\frac{1}{8}\left[x(x+1)(x-1)(x+2)(x^2+x-4)+x(x-1)(x-2)(x+1)(x^2-x-4)\right]\\
&=\frac{1}{8}\,x(x+1)(x-1)\left[(x+2)(x^2+x-4)+(x-2)(x^2-x-4)\right]\\
&=\frac{1}{8}\,x(x^2-1)(x^3+x^2-4x+2x^2+2x-8+x^3-x^2-4x-2x^2+2x+8)\\
&=\frac{1}{8}\,x(x^2-1)(2x^3-4x)\\
&=\frac{1}{4}\,x^2(x^2-1)(x^2-2). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Die Anzahl aller möglichen Ereignisse bei der zweiten Ziehung ist

$$(b+r)(b+r-1)(b+r-2)=x^2(x^2-1)(x^2-2). \qquad (10)$$

Der Quotient aus der Anzahl der günstigen Ereignisse (9) und der Anzahl aller möglichen Ereignisse (10) beträgt daher $1/4$. Die Aussage des Weihnachtsmanns zur zweiten Ziehung bringt also gar keine neue Information.

Bei **Ruprechts dritter Ziehung** gibt es schließlich $r\,b\,(r-1)$ Möglichkeiten, rot-blau-rot zu ziehen. Mit den Gleichungen (7) und (8) erhält man

$$\begin{aligned} rb(r-1) &= \frac{1}{2}(x^2-x)\,\frac{1}{2}(x^2+x)\left(\frac{1}{2}(x^2-x)-1\right) \\ &= \frac{1}{8}\,x^2(x-1)(x+1)(x^2-x-2) \\ &= \frac{1}{8}\,x^2(x-1)(x+1)(x+1)(x-2) \\ &= \frac{1}{8}(x-2)(x-1)x^2(x+1)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Da die Anzahl aller möglichen Ereignisse in der dritten Ziehung wieder durch (10) gegeben ist, beträgt der Quotient aus der Anzahl der günstigen Ereignisse (11) und aller möglichen Ereignisse (10)

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{8}(x-2)(x-1)x^2(x+1)^2}{x^2(x^2-1)(x^2-2)} &= \frac{1}{8}\,\frac{(x-2)(x-1)x^2(x+1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)(x^2-2)} \\ &= \frac{1}{8}\,\frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2} \\ &= \frac{1}{8}\,\frac{x^2-x-2}{x^2-2} \\ &= \frac{1}{8}\left[1-\frac{x}{x^2-2}\right] \end{aligned}$$

Die Funktion $p(x) = \frac{1}{8}\left[1-\frac{x}{x^2-2}\right]$ ist für $x > \sqrt{2}$ streng monoton steigend. Für $2 \leq x \leq 80$ gilt daher

$$p(x) \leq p(80) = \frac{3159}{25592} \approx 0{,}1234370.$$

Analog gilt für $x \geq 82$

$$p(x) \geq p(82) = \frac{415}{3361} \approx 0{,}1234752.$$

Für $x = 81$ erhalten wir schließlich

$$p(81) = \frac{3239}{26236} \approx 0{,}1234563.$$

Daher muss $x = 81$ gelten und die Anzahl der Baumkugeln in der Kiste ergibt sich als

$$b + r = x^2 = 81^2 = 6.561.$$

23 Streichhölzer und Papier

Autoren: Nicolas Grelier (ETH Zürich)
Saeed Gh. Ilchi (ETH Zürich)
Tillmann Miltzow (Utrecht University)
Shakhar Smorodinsky (Ben-Gurion University)

23.1 Aufgabe

Es ist Weihnachtszeit und Isabel nimmt am jährlichen obligatorischen Kerzenanzündeworkshop “Kerzen anzünden leicht gemacht!„ der Weihnachtsuniversität teil. Sie langweilt sich während des Unterrichts sehr, hört auf dem Lehrer zuzuhören und legt drei Streichhölzer auf den Tisch. Jetzt nimmt sie ein sehr großes Stück Papier und bemerkt, dass sie die Streichhölzer so anordnen kann, dass sie jedes einzelne Streichholz mit dem Papier bedecken kann, ohne die beiden anderen vollständig abzudecken. Außerdem ist sie bei dieser Streichholzanordnung in der Lage, auch zwei beliebige der Streichhölzern abzudecken, ohne den dritten vollständig abzudecken.
„Das war einfach!“, denkt Isabel und versucht dasselbe mit vier Streichhölzern. Nach kurzer Zeit findet sie eine Anordnung von vier Streichhölzern, die es ihr erlaubt, jedes einzelne Streichholz, jedes Streichholz-Paar und -Tripel abzudecken, ohne die restlichen vollständig abzudecken (siehe Abbildung 22).

Am folgenden Wochenende reist Isabel von Wolfsburg nach Leipzig, um ihren Cousin Jesko zu besuchen. Eifrig demonstriert sie ihre Beobachtungen. Jesko ist fasziniert und guter Dinge, eine ähnliche Anordnung auch für fünf Streichhölzer zu finden. Nach einer Stunde präsentiert er seine schöne Lösung: eine Anordnung von fünf Streichhölzern, bei der sich jedes einzelne Streichholz, jedes Streichholz-Paar, -Tripel und -Quadrupel mit einem Blatt Papier abdecken lässt, während die jeweils verbleibenden Streichhölzer zumindest teilweise sichtbar sind. Motiviert durch Jeskos Erfolg sucht Isabel auch für sechs Streichhölzer nach einer solchen Anordnung, gibt aber nach einer Weile auf.

Natürlich ist es nicht erlaubt, die Ecken des Papiers zu benutzen, um einige Streichhölzer zu bedecken (während andere unbedeckt bleiben). Wir betrachten das Blatt Papier eher als eine unendliche Halbebene. Daher suchen wir nach Möglichkeiten, eine Reihe von Streichhölzern $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$

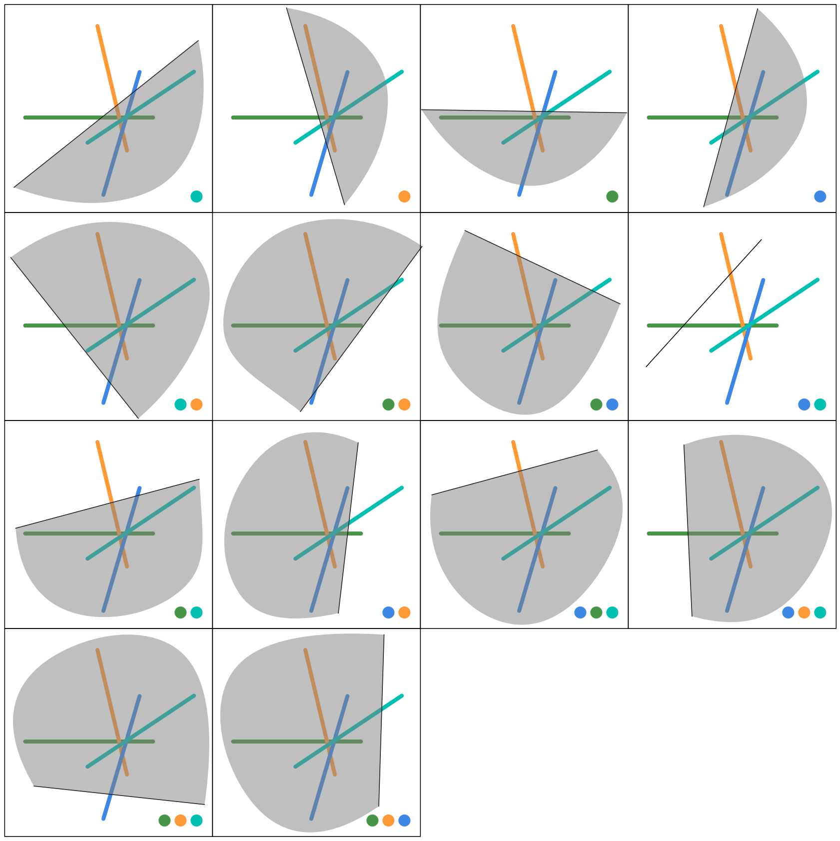


Abbildung 22: Eine Anordnung von vier Streichhölzern, sodass jede Teilmenge der Streichhölzer von dem großen Papier (grau) bedeckt wird.

($n \in \mathbb{N}$) so anzuordnen, dass jede Teilmenge $S \subset M$ *abgedeckt* werden kann. Wir sagen, dass S **abgedeckt** ist, wenn alle Streichhölzer aus S vollständig unter dem Papier liegen (d. h. unter der unendlichen Halbebene), während jedes Streichholz, das nicht in S enthalten ist, höchstens teilweise, aber nicht vollständig bedeckt ist.

Frage: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) Isabel kann ihr Resultat verbessern: Es ist möglich vier Streichhölzer auf die oben beschriebene Weise anzuordnen, wobei sich nur zwei der vier überschneiden.

(B) Jesko hat einen Fehler gemacht: Es ist unmöglich, fünf Streichhölzer auf die oben beschriebene Weise anzuordnen.

(C) Isabel und Jesko hätten es noch etwas länger herumprobieren sollen: Es ist sogar möglich, zehn Streichhölzer auf die oben beschriebene Weise anzuordnen.

(D) Es ist sogar möglich, für beliebig viele Streichhölzer eine solche Anordnung zu finden.

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Keine der Aussagen ist korrekt.
2. Nur Aussage (A) ist korrekt.
3. Nur Aussage (B) ist korrekt.
4. Nur Aussage (C) ist korrekt.
5. Nur Aussagen (A) und (B) sind korrekt.
6. Nur Aussagen (A) und (C) sind korrekt.

7. Nur Aussagen (B) und (C) sind korrekt.
8. Nur Aussagen (A), (B) und (C) sind korrekt.
9. Nur Aussagen (A), (C) und (D) sind korrekt.
10. Alle Aussagen sind korrekt.

23.2 Lösung:

Die richtige Antwort ist: 2.

Eine detaillierte Lösung und mehr über das Abdecken von Streichhölzern ist im Manuskript der Autoren zu finden: https://arxiv.org/abs/1907.01241.

Von jetzt an nennen wir die Streichhölzer *Segmente*. Das Abdecken aller Teilmengen $S \subset M$ nennen wir *Shattering*.

Als erstes zeigen wir, dass **Aussage (A) korrekt ist:** Abb. 23 zeigt eine mögliche Konfiguration von vier geshatterten Segmenten, wobei sich nur zwei der Segmente schneiden.

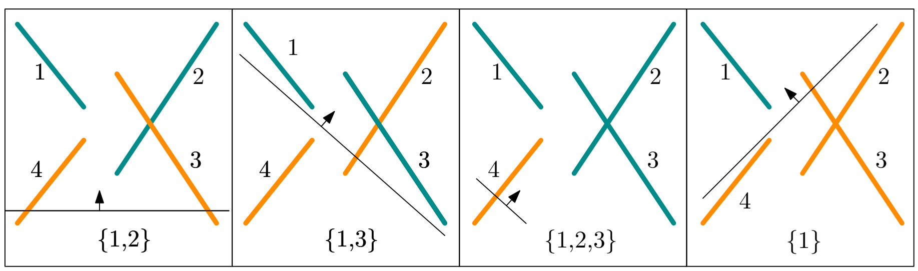


Abbildung 23: Shattering einer Menge von 4 Segmenten mit nur einer Überschneidung. Es ist abgebildet, wie die Teilmengen $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, und $\{1\}$ Abgedeckt werden können. Alle weiteren Teilmengen folgen analog.

Als Nächstes zeigen wir, dass Jesko keinen Fehler gemacht hat und dass die **Aussage (B) falsch ist:** In der Tat ist es möglich, fünf Segmente zu shattern, wie in Abbildung 24 zeigt.

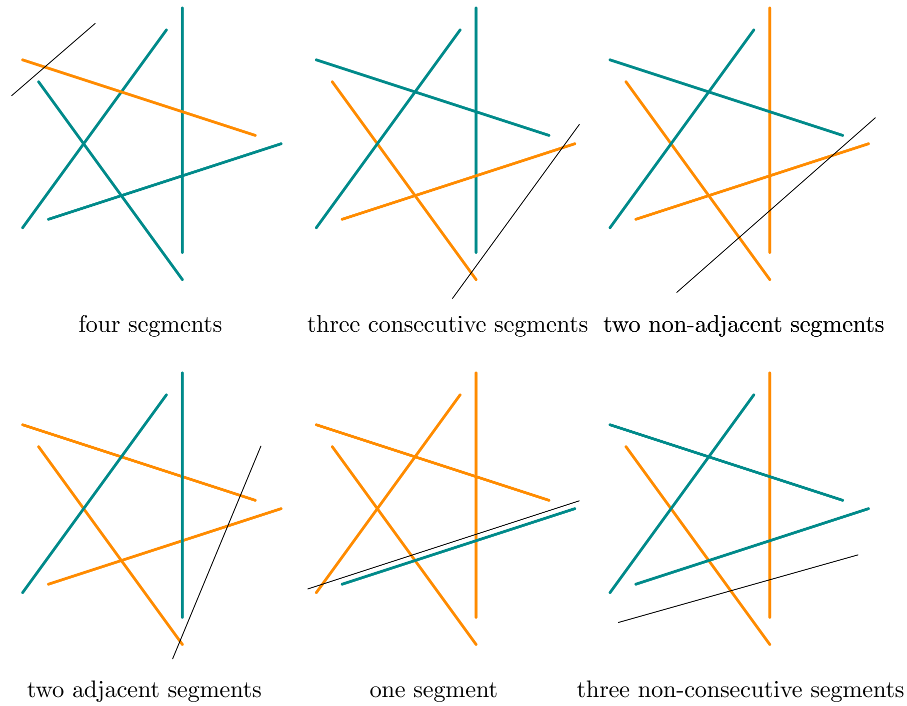


Abbildung 24: Shattering von fünf Segmenten. Die abgedeckte Teilmenge ist jeweils türkis, die restlichen Segmente sind orange abgebildet. Aufgrund der Symmetrie der Anordnung können wir so alle Teilmengen abdecken.

Schließlich zeigen wir, dass **Aussagen (C) und (D) falsch sind:** Zu diesem Zweck sei n die Anzahl der Segmente, die geshattert werden können. Beachte, dass es $2^n - 2$ verschiedene Teilmengen der Segmente gibt, die abgedeckt werden müssen. Sei S eine Teilmenge der Segmente, die durch das Papier abgedeckt werden müssen. Sei ℓ die Gerade, die den Rand des Papiers darstellt. Wir können das Papier bewegen, sodass die Eigenschaft, dass es S abgedeckt wird erhalten bleibt. An einem Punkt wird ℓ zwei Endpunkte von Segmenten berühren, siehe Abbildung 25.
Dies impliziert, dass es höchstens $4\binom{2n}{2} = 4n(2n-1)$ mögliche verschiedene Teilmengen von S gibt, die wir abdecken können, da es nur $\binom{2n}{2}$ viele Paare von Segmentendpunkten gibt und jedes Paar von Segmentendpunkten zu höchstens 4 verschiedenen Teilmengen führt (siehe Abbildung 26).
Beachte, dass $4n(2n-1) \geq 2^n - 2$ nur für $n \leq 10$ gilt (s. Tabelle 6).
Daher gibt es keine Möglichkeit, eine Konfiguration von zehn (oder mehr)

Segmenten zu shattern.

Man kann tatsächlich zeigen, dass es nicht möglich ist, mehr als fünf Segmente zu shattern; siehe dazu das Manuskript der Autoren auf

https://arxiv.org/abs/1907.01241.

Also hat Isabel vergeblich versucht, die sechs Streichhölzer abzudecken.

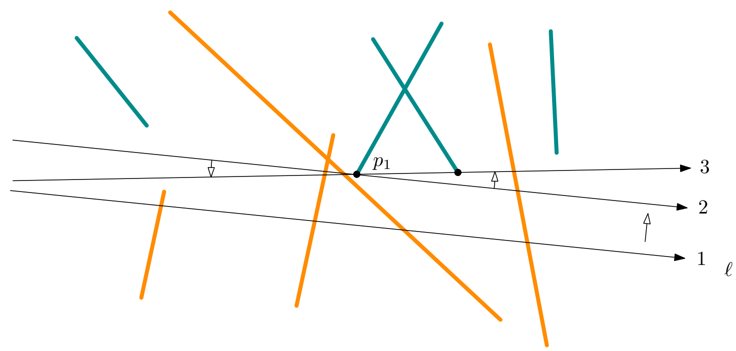


Abbildung 25: Die Gerade ℓ wird verschoben und gedreht bis sie zwei Segmentendpunkte berührt. Dies ist immer möglich.

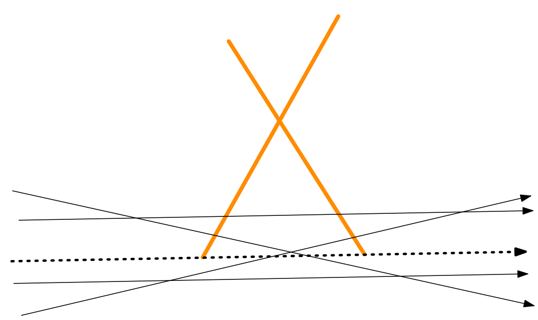


Abbildung 26: Für jedes Paar von Segmentendpunkten erhalten wir höchstens vier Teilmengen, die abgedeckt werden können.

n	$4n(2n-1)$	2^n-2
1	4	0
2	24	2
3	60	6
4	112	14
5	180	30
6	264	62
7	364	126
8	480	254
9	612	510
10	760	1022

Tabelle 6: Werte $4n(2n-1)$ und 2^n-2 für $1 \leq n \leq 10$.

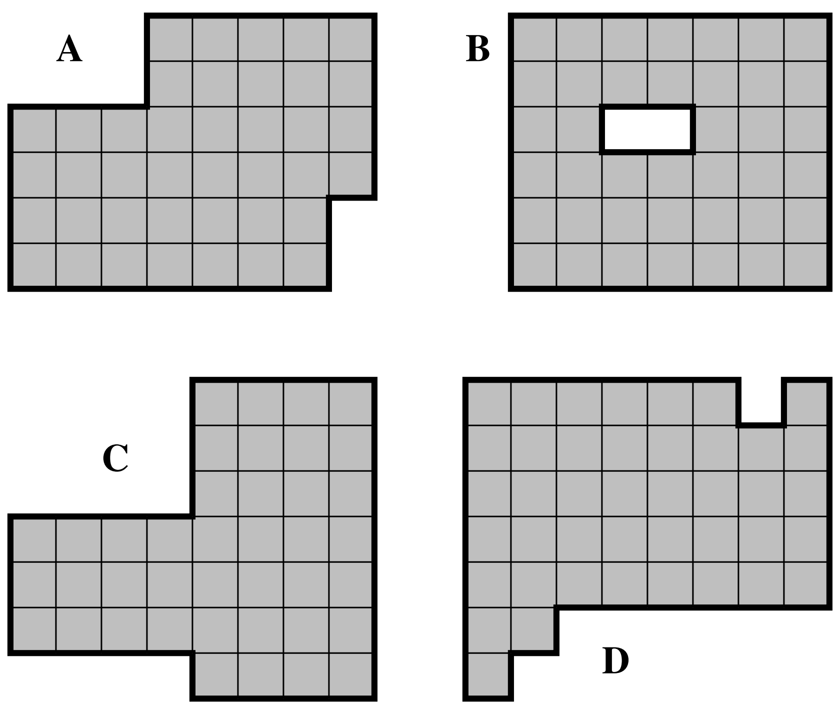
24 Sägewerk

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

24.1 Aufgabe

Die Sägewichtel Zick und Zack arbeiten im Sägewerk des Weihnachtsmannes. Der heutige Arbeitsplan verlangt, die Holzplatte A in genau zwei kongruente Teile zu zersägen. Dabei sollen nur vertikale und horizontale Schnitte (entlang der Linien in der Abbildung) gemacht werden und jedes einzelne der 40 kleinen Quadrate muss intakt bleiben. Danach sollen auch die drei Holzplatten B, C, D unter analogen Bedingungen jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.



Zick kratzt sich am Kopf und klagt: „Dieser Arbeitsplan ist doch furchtbar ungenau. Da steht kein einziges Wort darüber, wie diese kongruenten Teile aussehen sollen.“

Zack kratzt sich ebenfalls am Kopf und meckert: „Vielleicht hat uns die Zentralverwaltung auch wieder einmal einen unmöglichen Auftrag erteilt. Das wäre ja nicht das erste Mal.“

Könnt Ihr den Wichteln helfen?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Nur die Platten A und B können jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.
2. Nur die Platten A und C können jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.
3. Nur die Platten A und D können jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.
4. Nur die Platten B und C können jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.
5. Nur die Platten B und D können jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.

6. Nur die Platten A, B, C können jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.

7. Nur die Platten A, B, D können jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.

8. Nur die Platten A, C, D können jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.

9. Nur die Platten B, C, D können jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.

10. Jede der vier Platten kann jeweils in genau zwei kongruente Teile zersägt werden.

24.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Jede der vier Platten A, B, C, D kann in genau zwei kongruente Teile zersägt werden. Dieses Mal hat die Zentralverwaltung also gut gearbeitet und keinen Fehler gemacht.