Aufgaben und Lösungen
2020

www.mathekalender.de

Inhaltsverzeichnis

1 Wichtelmütze

Autor: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

1.1 Aufgabe

In einer alten Wichtelmütze liegen genau 80 Euroscheine. Der Weihnachtsmann sagt zu Knecht Ruprecht: „Wenn du zufällig 69 Scheine aus der Mütze ziehst, dann befinden sich darunter *garantiert*

- ein 100 €-Schein,
- drei 50 €-Scheine,
- fünf 20 €-Scheine,
- sieben 10 €-Scheine und
- neun 5 €-Scheine.“

Was ist der Gesamtwert aller Geldscheine in der Mütze?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2500 €.
2. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2845 €.
3. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2075 €.
4. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2465 €.
5. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2920 €.
6. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2695 €.
7. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2150 €.
8. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2330 €.
9. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2285 €.
10. Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt 2710 €.

1.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 1.

Wir bezeichnen die Anzahl der 100 €-Scheine, 50 €-Scheine, 20 €-Scheine, 10 €-Scheine und 5 €-Scheine in der Wichtelmütze mit

$$x_{100},\ x_{50},\ x_{20},\ x_{10} \text{ bzw. } x_5$$

und machen folgende Beobachtungen:

- Falls $x_{100} \leq 11$ gilt, könnte Ruprecht alle 100 €-Scheine im Hut lassen und 69 andere Scheine ziehen. Wir folgern, dass $x_{100} \geq 12$.
- Falls $x_{50} \leq 13$ gilt, könnte Ruprecht nur zwei der 50 €-Scheine ziehen und alle übrigen im Hut lassen. Wir folgern, dass $x_{50} \geq 14$.
- Falls $x_{20} \leq 15$ gilt, könnte Ruprecht nur vier der 20 €-Scheine ziehen und alle übrigen im Hut lassen. Wir folgern, dass $x_{20} \geq 16$.
- Falls $x_{10} \leq 17$ gilt, könnte Ruprecht nur sechs der 10 €-Scheine ziehen und alle übrigen im Hut lassen. Wir folgern, dass $x_{10} \geq 18$.
- Falls $x_5 \leq 19$ gilt, könnte Ruprecht nur acht der 5 €-Scheine ziehen und alle übrigen im Hut lassen. Wir folgern, dass $x_5 \geq 20$.

Wir addieren diese fünf Ungleichungen und erhalten

$$x_{100} + x_{50} + x_{20} + x_{10} + x_5 \geq 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 80.$$

Da aber insgesamt nur 80 Geldscheine im Wichtelmütze sind, muss in jeder dieser fünf Ungleichungen Gleichheit gelten, d. h.

$$x_{100} = 12,\ x_{50} = 14,\ x_{20} = 16,\ x_{10} = 18,\ x_5 = 20.$$

Der Gesamtwert aller Geldscheine beträgt daher

$$12 \cdot 100\,€ + 14 \cdot 50\,€ + 16 \cdot 20\,€ + 18 \cdot 10\,€ + 20 \cdot 5\,€ = \mathbf{2500\,€}.$$

2 Schneeflockengas

Autor: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

2.1 Aufgabe

Die Physikwichtelin Philomena erzählt beim Abendessen über ihren Arbeitstag: „Im Physiklabor haben wir heute mit Schneeflockengas experimentiert. Wie ihr alle sicherlich wisst, gehört Schneeflockengas zu den idealen Gasen, die allen mathematischen Gesetzen der Thermodynamik perfekt gehorchen. Insbesondere erfüllt Schneeflockengas die *allgemeine Gasgleichung*:

$$p \cdot V = k_B \cdot N \cdot T.$$

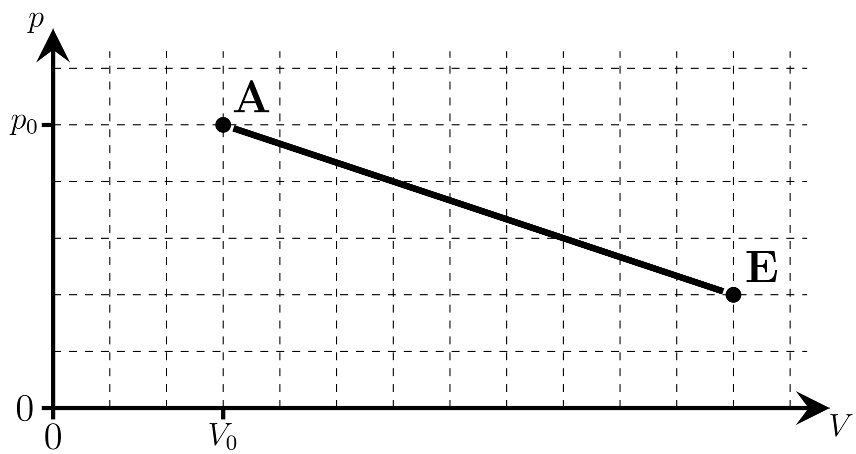
In der allgemeinen Gasgleichung bezeichnet

- p den Druck des Gases,
- V sein Volumen,
- N seine Teilchenzahl und
- T die Temperatur.

Außerdem enthält diese Gleichung noch die berühmte *Boltzmann-Konstante*

$$k_B \approx 1{,}380\,652 \cdot 10^{-23}\, J/K.$$

Während des gesamten Experiments blieb die Teilchenzahl N konstant und hatte den Wert …“ In diesem Moment verschluckt sich Philomena an einem Bissen und hustet, sodass die anderen Wichtel den Wert von N nicht verstehen können. Dann kramt Philomena ein Diagramm (siehe Abbildung) aus ihrer Aktentasche hervor.



Philomena erklärt dazu: „Unser Experiment hat 8 Stunden gedauert. Während des Experiments haben wir ununterbrochen Druck, Volumen und Temperatur des Gases gemessen. Am Anfang des Experiments betrug der Gasdruck $p_0 = 8{,}0\,\text{bar}$ und das Volumen betrug $V_0 = 800\,\text{Liter}$. Das Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen Gasvolumen V und Gasdruck p vom Anfang (A) bis zum Ende (E) des Experiments als schnurgerade Linie."

Die Mathematikwichtelin Mathilda hat aufmerksam zugehört und sagt: „Aha, alles klar, ich verstehe! Während des Experiments ist die Temperatur T des Gases zunächst eine Zeit lang gestiegen und danach ist sie bis zum Ende des Experiments ununterbrochen gefallen."

Philomena nickt und sagt: „Ja, völlig richtig, genau so hat sich unser Experiment abgespielt!"

Wie groß war denn der Druck p^* des Gases zu dem Zeitpunkt, als das Gas seine höchste Temperatur erreicht hatte?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 3{,}6\,\mathrm{bar}$.
2. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 4{,}0\,\mathrm{bar}$.
3. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 4{,}4\,\mathrm{bar}$.
4. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 4{,}8\,\mathrm{bar}$.
5. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 5{,}2\,\mathrm{bar}$.
6. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 5{,}6\,\mathrm{bar}$.
7. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 6{,}0\,\mathrm{bar}$.
8. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 6{,}4\,\mathrm{bar}$.
9. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 6{,}8\,\mathrm{bar}$.
10. Der Gasdruck betrug $p^* \approx 7{,}2\,\mathrm{bar}$.

2.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Dieses Rätsel hat eine simple und sehr kurze Lösung, die die meisten Informationen aus dem Aufgabentext einfach ignoriert:

Da im Diagramm der Druck p_0 fünf (vertikalen) Einheitslängen entspricht und das Volumen V_0 drei (horizontalen) Einheitslängen, skalieren wir die Maßeinheit des Volumens derart, dass

$$\frac{V_0}{p_0} = \frac{3}{5}$$

gilt. Die Gerade im Diagramm geht durch die Punkte

$$A = (V_0, p_0) = \left(\frac{3p_0}{5}, p_0\right),$$
$$E = \left(4V_0, \frac{2p_0}{5}\right) = \left(\frac{12p_0}{5}, \frac{2p_0}{5}\right).$$

Die resultierende Geradengleichung lautet dann

$$p(V) = -\frac{V}{3} + \frac{6p_0}{5}.$$

bzw.

$$V(p) = 3\left(\frac{6p_0}{5} - p\right).$$

Da die Teilchenzahl N und die Boltzmann-Konstante k_B konstant sind, liefert die allgemeine Gasgleichung einen proportionalen Zusammenhang zwischen der Temperatur T und dem Produkt $p \cdot V$ aus Druck und Volumen:

$$T = \frac{p \cdot V}{k_B \cdot N}.$$

Die Temperatur erreicht demnach ihren Höchstwert, wenn das Produkt

$$p \cdot V = p \cdot V(p) = 3p \cdot \left(\frac{6p_0}{5} - p\right)$$

maximal ist. Die Parabel

$$f(p) = 3p \cdot \left(\frac{6p_0}{5} - p\right)$$

hat ihren Scheitelpunkt (d. h. ihr Maximum) bei

$$p^* = \frac{3p_0}{5} = \frac{3}{5} \cdot 8\,\text{bar} = 4{,}8\,\text{bar}.$$

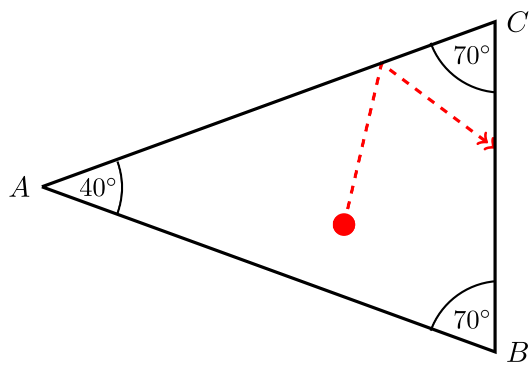
Die Temperatur erreicht also ihren Höchstwert bei $p^* = \mathbf{4{,}8\,bar}$.

3 Billardtisch

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

3.1 Aufgabe

Im Aufenthaltsraum der Wichtel steht ein großer dreieckiger Billardtisch. Der Winkel beim Eckpunkt A beträgt 40°. Die Winkel an den Ecken B bzw. C betragen jeweils 70°. Trifft eine Billardkugel auf eine der beiden Banden AB oder AC, so wird sie perfekt reflektiert, d. h. Einfalls- und Ausfallwinkel sind gleich groß. Trifft die Kugel aber auf die Bande BC oder eine der drei Ecken A, B, C, so bleibt sie dort kleben und bewegt sich nicht weiter fort.



Knecht Ruprecht spielt praktischerweise mit einer punktförmigen Billardkugel. Diese Kugel liegt am Anfang an einem beliebigen Punkt im Inneren des Dreiecks und bewegt sich nur auf geraden Linien.

Was ist die größtmögliche Zahl von Bandenberührungen, die Ruprecht mit einem einzigen Billardstoß erzielen kann, bevor die Kugel an einer Bande oder in einem Punkt kleben bleibt?


Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

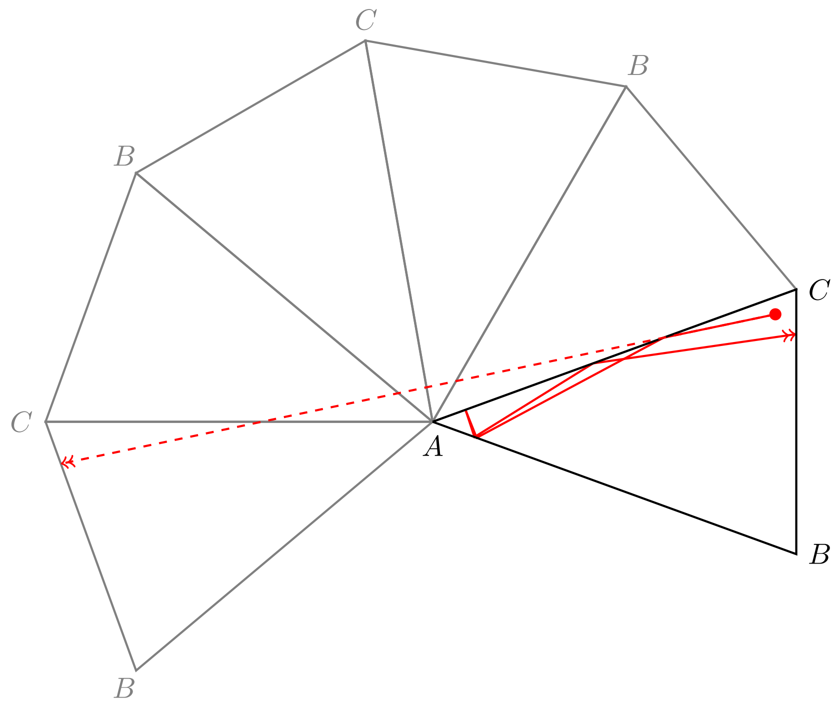
1. Die größtmögliche Zahl ist 4.
2. Die größtmögliche Zahl ist 5.
3. Die größtmögliche Zahl ist 6.
4. Die größtmögliche Zahl ist 7.
5. Die größtmögliche Zahl ist 8.
6. Die größtmögliche Zahl ist 12.
7. Die größtmögliche Zahl ist 16.
8. Die größtmögliche Zahl ist 24.
9. Ruprecht kann unendlich viele Bandenberührungen erzielen.
10. Die größtmögliche Zahl hängt von der Länge der Bande BC ab.

3.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Da die dritte Bande BC des Billardtisches absorbierend ist, kann die Kugel nur zwischen den beiden Banden AB und AC hin- und herrollen. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass die Kugel zuerst die Bande AC berührt, dann AB, dann wieder AC usw.

In der folgenden Abbildung sehen wir den Billardtisch (rechts in der Mitte) zusammen mit fünf geeignet gespiegelten Kopien.



Da Einfallswinkel und Ausfallwinkel bei jeder Reflexion an den Banden AB bzw. AC auf unserem Billardtisch gleich groß sind, entspricht der Weg der Billardkugel in den Kopien einer geraden Linie zwischen dem Startpunkt und dem Absorptionspunkt. Die gestrichelte Linie zeigt uns einen möglichen Weg der Billardkugel, der zu genau fünf Bandenberührungen führt. (Die zugehörige Bewegung der Kugel auf unserem Billardtisch wird durch die durchgezogene Linie repräsentiert.)

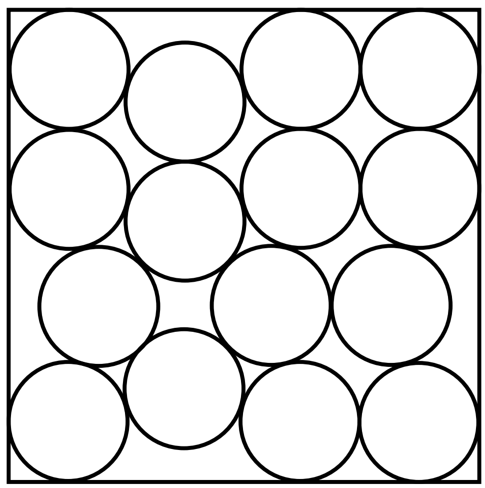
Die Bande AC am Originaltisch und die Bande AB in der fünften gespiegelten Kopie schließen einen Winkel von $5 \cdot 40^\circ = 200^\circ$ ein. Da dieser Winkel größer als 180° ist, können wir keine gerade Linie durch mehr als fünf Kopien unseres Dreiecks ABC ziehen. Somit sind sechs (oder mehr) Bandenberührungen unmöglich.

4 Weihnachtskerzen

Autoren: Cor Hurkens (TU Eindhoven), Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

4.1 Aufgabe

Packwichtel Paco packt fünfzehn aufrecht stehende Weihnachtskerzen dicht an dicht in einen Karton mit quadratischer Grundfläche. Jede Kerze ist zylinderförmig und hat eine kreisförmige Grundfläche mit Radius 1 cm. Die Abbildung zeigt die Grundfläche des Kartons als Quadrat und die Grundflächen der fünfzehn Kerzen als Kreise.



Die Abbildung gibt genau an, welche Kerzen einander und welche Kerzen den Rand des Kartons berühren. Die Seitenlänge s des Quadrats kann in der Form $s = a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ (gemessen in Zentimetern) mit drei ganzen Zahlen a, b, c geschrieben werden.

Welchen Wert hat die Summe $a + b + c$ dieser drei ganzen Zahlen?

Illustration: Frauke Jansen

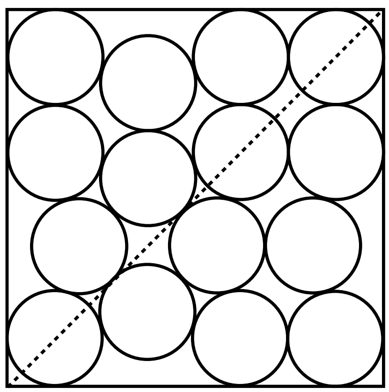
Antwortmöglichkeiten:

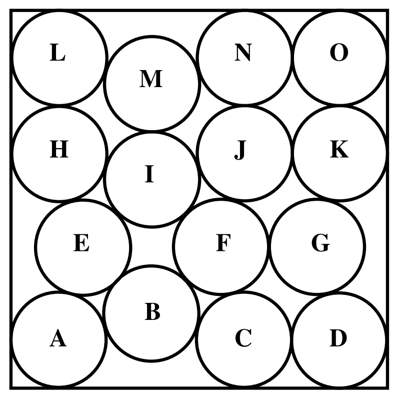
1. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 8.
2. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 9.
3. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 10.
4. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 11.
5. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 12.
6. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 13.
7. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 14.
8. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 15.
9. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 16.
10. Die Summe der drei Zahlen a, b, c ist 17.

4.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Wie in der linken Abbildung eingezeichnet, bildet die Diagonale des Quadrats eine Symmetrieachse für die gegebene Anordnung der 15 Kreise. Das kann man durch genaues Hingucken erkennen, intuitiv erraten oder wie folgt beweisen. Wir benennen zunächst die Kreise, wie in der rechten Abbildung angegeben.





Über das Bild legen wir nun ein Koordinatensystem, dessen Ursprung in der linken unteren Ecke des Quadrates liegt. Eine eine Einheit im Koordinatensystem entspricht genau 1 cm. Die Mittelpunkte der Kreise werden mit M_A, M_B, M_C usw. bezeichnet. Wenn ein Kreis eine Quadratseite berührt, so ist sein Mittelpunkt genau 1 cm von dieser Seite entfernt. Wenn zwei Kreise einander berühren, so sind ihre Mittelpunkt genau 2 cm voneinander entfernt.

- Da $M_A = (1, 1)$ auf der Diagonalen liegt, ist der Kreis A sein eigenes Spiegelbild.

  Da $M_O = (s-1, s-1)$ und $M_J = (s-3, s-3)$ auch auf der Diagonalen liegen, sind die Kreise O und J ebenfalls ihre eigenen Spiegelbilder.

- Wegen $M_D = (s-1, 1)$ und $M_L = (1, s-1)$ liegen die beiden Kreise D und L spiegelbildlich zueinander.

  Wegen $M_C = (s-3, 1)$ und $M_H = (1, s-3)$ liegen die beiden Kreise C und H spiegelbildlich zueinander.

  Wegen $M_K = (s-1, s-3)$ und $M_N = (s-3, s-1)$ liegen ferner die Kreise K und N spiegelbildlich zueinander.

- Die Kreise B und E berühren sich. Zudem berührt der Kreis B die beiden Kreise A und C, und der Kreis E berührt die beiden Kreise A (Spiegelbild von sich selbst) und H (Spiegelbild von C).

  Daher sind die Kreise B und E Spiegelbilder voneinander.

- Der Kreis F berührt die beiden Kreise B und C (die sich ihrerseits berühren), und der Kreis I berührt die beiden Kreise E und H (die sich ebenfalls berühren).

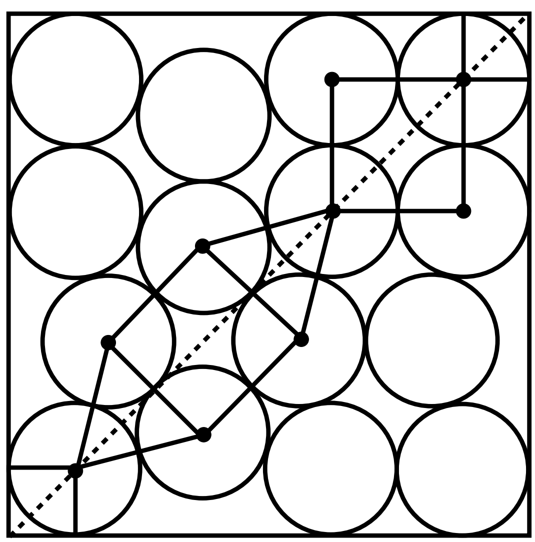
  Da B / C das Spiegelbild von E / H ist, liegen F und I spiegelbildlich zueinander.

- Der Kreis G berührt die Kreise D, F, K, und der Kreis M berührt die Kreise L, I, N.

  Da D / F / K die Spiegelbilder von L / I / N sind, liegen G und M spiegelbildlich zueinander.

Damit ist die behauptete Symmetrie der Anordnung bezüglich der Diagonalen nachgewiesen. Daraus erhalten wir die folgende wichtige Beobachtung:
Die vier Mittelpunkte M_B, M_F, M_I, M_E bilden eine Raute, da alle vier Seiten die Länge 2 haben. Weiterhin ist die Strecke M_BM_F symmetrisch zur Strecke M_EM_I und somit ist diese Raute sogar ein Quadrat.

Als nächstes wollen wir die Länge der Diagonalen bestimmen, die sich (von links unten nach rechts oben) aus den folgenden sechs Strecken zusammensetzt:



1. Diagonale eines kleinen Quadrats mit Seitenlänge 1, d. h. der Länge $\sqrt{2}$.
2. Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 2, d. h. der Länge $\sqrt{3}$.
3. Mittelhalbierende eines großen Quadrats mit Seitenlänge 2, d. h. der Länge 2.
4. Höhe eines zweiten gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 2, d. h. der Länge $\sqrt{3}$.
5. Diagonale eines zweiten großen Quadrats mit Seitenlänge 2, d. h. der Länge $2\sqrt{2}$.
6. Diagonale eines zweiten kleinen Quadrats mit Seitenlänge 1, d. h. der Länge $\sqrt{2}$.

Die Länge der Diagonale der quadratischen Grundfläche beträgt daher

$$d = \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$$

Da d die Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge s ist, gilt $d = s\sqrt{2}$ und somit

$$s = \sqrt{2} + 4 + \sqrt{6}.$$

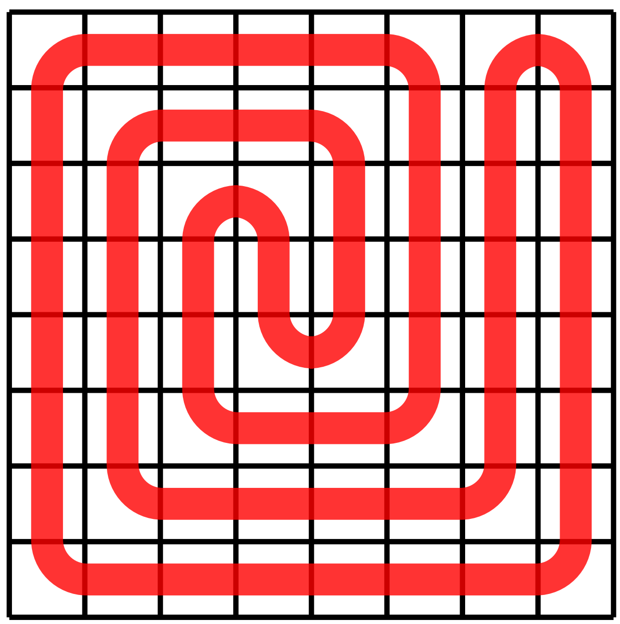
Daher gilt $\{a, b, c\} = \{2, 4, 6\}$ und $a + b + c = \mathbf{12}$.

5 Mondrian

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

5.1 Aufgabe

Der Malwichtel Mondrian hat eine quadratische Weihnachtskarte entworfen und sie in 64 kleine quadratische Zellen unterteilt. Mondrian taucht den Pinsel tief in den roten Farbtopf und malt die kleinen Quadrate mit einem einzigen langen durchgehenden Pinselstrich aus, der jedes der 64 Quadrate genau einmal durchquert und am Ende ins Startquadrat zurückkehrt.



Der in der Abbildung gezeigte Pinselstrich durchquert 48 Quadrate in Geradenstücken und 16 Quadrate in Viertelkreisen. Da ein Viertelkreis weniger Farbe verbraucht als ein Geradenstück, möchte Mondrian einen möglichst sparsamen Pinselstrich finden, der möglichst wenige Geradenstücke und möglichst viele Viertelkreise enthält.

Was ist die Maximalzahl M von Quadraten mit Viertelkreisen in einem derartigen Pinselstrich?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

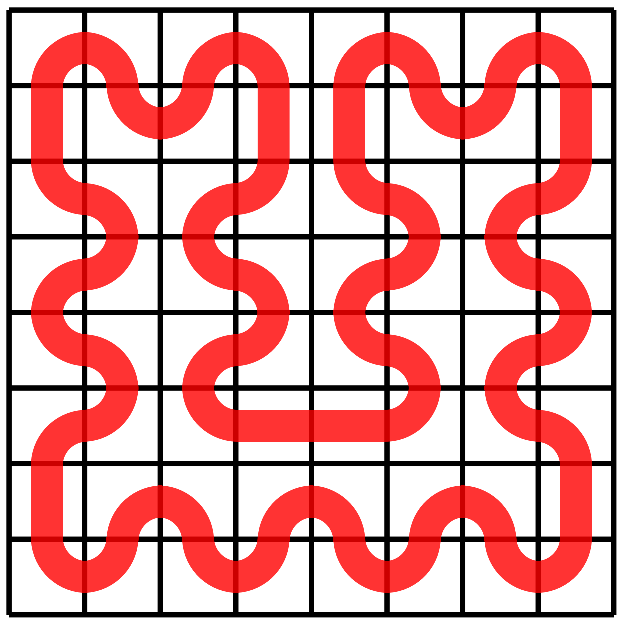
Antwortmöglichkeiten:

1. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 42$.
2. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 44$.
3. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 46$.
4. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 48$.
5. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 50$.
6. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 52$.
7. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 54$.
8. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 56$.
9. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 58$.
10. Die Maximalzahl von Viertelkreisen ist $M = 60$.

5.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Das folgende Bild zeigt einen möglichen Pinselstrich mit 56 Viertelkreisen.



Wir wollen nun noch zeigen, dass diese 56 Viertelkreise nicht übertroffen werden können. Dazu nehmen wir zwecks Widerspruchs an, dass ein Pinselstrich P mit mindestens 57 Viertelkreisen existiert und machen die folgenden Definitionen:

- Ein Quadrat q heißt **gut**, falls q einen Viertelkreis von P enthält.

  Dagegen heißt q **schlecht**, falls es ein Geradenstück von P enthält.
- Wenn eine Zeile oder Spalte kein einziges schlechtes Quadrat enthält, so nennen wir sie **sauber**.

Laut Annahme enthält der Pinselstrich P also mindestens 57 gute und höchstens 7 schlechte Quadrate.

Wir betrachten dazu ein Stück des Pinselstrichs P in der i-ten Zeile und bemerken, dass P die i-te Zeile in einem Quadrat q betritt, einige weitere Quadrate in dieser Zeile durchläuft und die Zeile dann im Quadrat q' wieder verlässt:

- Falls $q = q'$ gilt, so durchquert P das Quadrat q in vertikaler Richtung und q ist daher schlecht.
- Falls $q \neq q'$ gilt, so sind die beiden Quadrate q und q' gut, während alle dazwischen besuchten Quadrate schlecht sind.

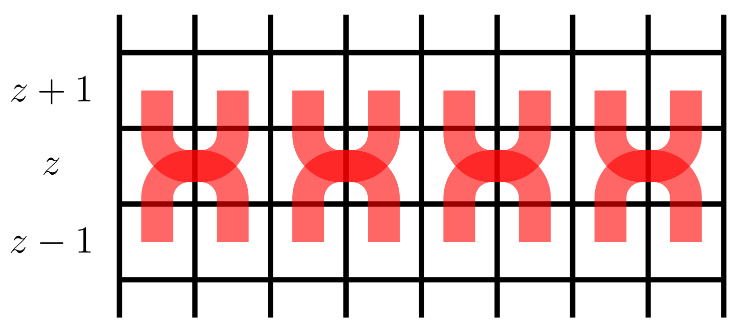
Da jedes derartige Stück des Pinselstrichs eine gerade Anzahl an guten Quadraten beisteuert (jeweils keine bzw. zwei gute Quadrate), ist die Gesamtzahl der guten Quadrate in jeder Zeile gerade.
Da jede Zeile eine gerade Anzahl von guten Quadraten enthält, enthält jede Zeile auch eine gerade Anzahl an schlechten Quadraten. Und da es höchstens sieben schlechte Quadrate gibt, sind also mindestens fünf Zeilen sauber.
Daraus folgern wir weiter, dass es mindestens zwei aufeinanderfolgende saubere Zeilen $2a-1$ und $2a$, $a \in \{1,2,3,4\}$, gibt.

Analog können wir zeigen, dass es zwei saubere Spalten $2b-1$ und $2b$, $b \in \{1,2,3,4\}$, gibt.

Nun wollen wir eine *saubere* Zeile z genauer betrachten: Der Pinselstrich P betritt das Quadrat mit den Koordinaten $(z,1)$ entweder von $(z-1,1)$ oder von $(z+1,1)$ aus, geht dann weiter nach $(z,2)$, und danach nach $(z-1,2)$ oder $(z+1,2)$. Wir sehen, dass der Pinselstrich P die vier Strecken

$$(z,1)-(z,2), \qquad (z,3)-(z,4), \qquad (z,5)-(z,6), \qquad (z,7)-(z,8)$$

nacheinander durchlaufen muss:



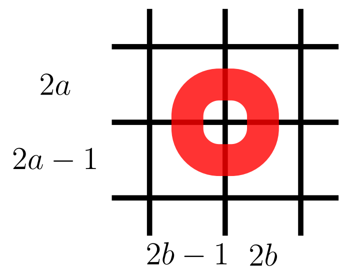
Analog sehen wir, dass der Pinselstrich P in jeder *sauberen* Spalte s die vier Strecken

$$(1,s)-(2,s), \qquad (3,s)-(4,s), \qquad (5,s)-(6,s), \qquad (7,s)-(8,s)$$

durchlaufen muss.

Für die beiden sauberen Zeilen $z = 2a - 1$ und $z = 2a$ und für die beiden sauberen Spalten $s = 2b - 1$ und $s = 2b$ folgt aus dieser Diskussion, dass der Pinselstrich P den folgenden Streckenzug durchlaufen muss:

$$(2a-1, 2b-1) - (2a-1, 2b) - (2a, 2b) - (2a, 2b-1) - (2a-1, 2b-1).$$



Dieser Streckenzug bildet allerdings einen geschlossenen Kreis, der vom Rest des Pinselstrichs P abgetrennt ist – ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass P ohne abzusetzen gezeichnet werden kann.

Wir fassen zusammen, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen unmöglich ist, einen Pinselstrich mit mehr als **56** Viertelkreisen zu zeichnen.

6 Würfelspiel

Autoren: Frits Spieksma (TU Eindhoven),
Jesper Nederlof (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

6.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht und Wichtel Kubo spielen ein Spiel mit $N \geq 4$ Holzwürfeln. Zu Beginn des Spiels sind die sechs Seitenflächen auf jedem dieser N Würfel leer und unbeschriftet.

In der **ersten Phase** des Spiels beschriften sie abwechselnd die $6N$ Seitenflächen der Würfel mit den natürlichen Zahlen aus dem Bereich $1, 2, \ldots, N$. In jedem Zug wird genau eine Seitenfläche beschriftet. Die beiden sind abwechselnd am Zug, wobei Ruprecht beginnt.

In der **zweiten Phase** des Spiels bauen sie aus diesen N Würfeln einen Turm. Der erste (und damit unterste) Würfel im Turm muss die Zahl 1 auf einer seiner Seitenflächen tragen, der zweite die Zahl 2, der dritte die Zahl 3, und so weiter. Ruprecht und Kubo wählen abwechselnd einen Würfel aus, wobei Ruprecht beginnt und somit den ersten (und somit untersten) Würfel auswählt. Erst wenn im k-ten Zug kein Würfel mehr mit der Zahl k auf einer Seitenfläche vorhanden ist, bricht das Spiel ab.

Ruprecht gewinnt das Spiel, wenn der Turm am Ende des Spieles aus allen N Würfeln besteht. Andernfalls gewinnt Kubo. Kubo und Knecht Ruprecht treffen in jedem Zug in beiden Phasen die für sie bestmöglichen Entscheidungen.

Für welche Werte von N im Bereich $4 \leq N \leq 7$ kann Ruprecht den Sieg erzwingen?

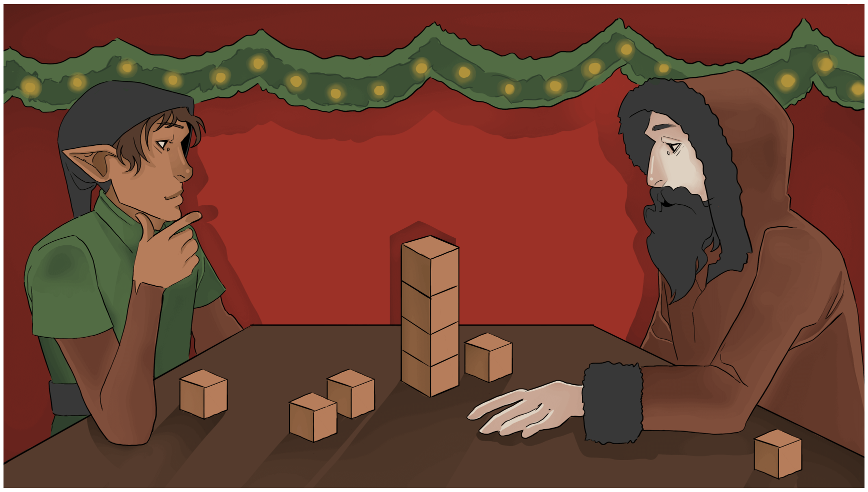


Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Ruprecht kann den Sieg nur für $N = 4$ erzwingen.
2. Ruprecht kann den Sieg nur für $N = 4, 5$ erzwingen.
3. Ruprecht kann den Sieg nur für $N = 4, 6$ erzwingen.
4. Ruprecht kann den Sieg nur für $N = 4, 7$ erzwingen.
5. Ruprecht kann den Sieg nur für $N = 5, 6$ erzwingen.
6. Ruprecht kann den Sieg nur für $N = 4, 5, 6$ erzwingen.
7. Ruprecht kann den Sieg nur für $N = 4, 5, 7$ erzwingen.
8. Ruprecht kann den Sieg nur für $N = 4, 6, 7$ erzwingen.
9. Ruprecht kann den Sieg nur für $N = 5, 6, 7$ erzwingen.
10. Ruprecht kann den Sieg für $N = 4, 5, 6, 7$ erzwingen.

6.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Ruprecht kann für alle N im Bereich $4 \leq N \leq 7$ den Sieg erzwingen.

Eine wichtige Beobachtung für Ruprechts Gewinnstrategie ist, dass Ruprecht in der ersten Phase auf jedem der N Würfel drei Seitenflächen mit Zahlen seiner Wahl beschriften kann. Dies kann er z. B. folgendermaßen erreichen: Ruprecht beschriftet zunächst einen beliebigen Würfel mit einer Zahl. In den folgenden Zügen schreibt er immer eine Zahl auf den Würfel, den Kubo gerade vor ihm beschriftet hat.

Das Spiel mit N = 4 Würfeln: In der ersten Phase beschriftet Ruprecht eine Seite eines Würfels mit 1 und schreibt auf jeden der anderen drei Würfel die drei Zahlen 2, 3, 4.
In der zweiten Phase verwendet Ruprecht den zuerst beschrifteten Würfel als Basiswürfel für den Turm. In den anderen drei Zügen ist jeweils ein Würfel mit den drei Zahlen 2, 3, 4 vorhanden. Ruprecht gewinnt.

Das Spiel mit N = 5 Würfeln: In der ersten Phase beschriftet Ruprecht

- einen Würfel W_1 mit 1,
- einen zweiten Würfel W_2 mit den Zahlen 2, 3, 4
- und die verbleibenden drei Würfel W_3, W_4, W_5 *jeweils* mit den Zahlen 3, 4, 5.

In der zweiten Phase verwendet Ruprecht zuerst W_1 als Basiswürfel. Dann wählt Kubo einen Würfel W_x. Falls $W_x \neq W_2$, so wählt Ruprecht im darauffolgenden Zug W_2 und gewinnt. Falls hingegen $W_x = W_2$, so wählt Ruprecht im darauffolgenden Zug W_3 und gewinnt ebenfalls.

Das Spiel mit N = 6 Würfeln: In der ersten Phase beschriftet Ruprecht

- einen Würfel W_1 mit 1,
- einen zweiten Würfel W_2 mit 2, 3, 4,
- einen dritten Würfel W_3 mit 3, 4, 5
- und die drei verbleibenden Würfel W_4, W_5, W_6 *jeweils* mit 4, 5, 6.

In der zweiten Phase des Spiels verwendet Ruprecht zuerst W_1. Danach ist Kubo am Zug und es ist mindestens

- ein Würfel mit der Zahl 2 (W_2) im Spiel, sowie
- zwei Würfel mit der Zahl 3 (W_2, W_3),
- drei Würfel mit der Zahl 4 (W_2, W_3, W_4) und
- vier Würfel mit der Zahl 5 (W_3, W_4, W_5, W_6).

Unabhängig von Kubos Entscheidungen wird der Turm also mindestens aus fünf Würfeln bestehen.
Ruprecht kann zudem dafür sorgen, das W_2 als zweiter Würfel (durch Kubo) oder als dritter Würfel (durch Ruprecht selbst) in den Turm eingebaut wird. Weiterhin kann er sicherstellen, dass W_3 als zweiter, dritter, vierter oder fünfter Würfel in den Turm eingebaut wird. Nach dem Einbauen des fünften Würfels sind also W_1, W_2, W_3 bereits in den Turm eingebaut. Alle verbleibenden Würfel tragen die Zahl 6 auf einer ihrer Seiten. Das Spiel geht also weiter und der Turm besteht am Ende aus $N = 6$ Würfeln. Ruprecht gewinnt.

Das Spiel mit N = 7 Würfeln: In der ersten Phase beschriftet Ruprecht

- einen Würfel W_1 mit 1,
- einen zweiten Würfel W_2 mit 2, 3, 4,
- einen dritten Würfel W_3 mit 3, 4, 5,
- einen vierten Würfel W_4 mit 4, 6, 7
- und die verbleibenden drei Würfel W_5, W_6, W_7 *jeweils* mit 5, 6, 7.

Nun kann wie im Fall $N = 6$ argumentiert werden: In der zweiten Phase verwendet Ruprecht zuerst W_1 als Basiswürfel. Danach ist Kubo am Zug und es ist mindestens

- ein Würfel mit der Zahl 2 (W_2) im Spiel, sowie
- zwei Würfel mit der Zahl 3 (W_2, W_3),
- drei Würfel mit der Zahl 4 (W_2, W_3, W_4) und
- vier Würfel mit der Zahl 5 (W_3, W_5, W_6, W_7).

Unabhängig von Kubos Entscheidungen wird der Turm also zumindest aus fünf Würfeln bestehen. Außerdem kann Ruprecht dafür sorgen, dass in den ersten fünf Spielzügen die Würfel W_1, W_2, W_3 benutzt werden. Alle verbleibenden Würfel tragen jeweils sowohl die Zahl 6 als auch die Zahl 7 auf einer ihrer Seiten. Das Spiel geht also weiter, bis der Turm am Ende aus $N = 7$ Würfeln besteht. Ruprecht gewinnt.

7 Tückisches Testdilemma

Autor: Paul Erchinger (MATH+ Schulaktivitäten)

7.1 Aufgabe

Es ist wieder so weit: Das Weihnachtsfieber greift um sich. Normalerweise ist das für den Weihnachtsablauf kein Problem, denn die Weihnachtswichtel sind immun gegen dieses Virus, aber in diesem Jahr scheint es eine ganz besonders hinterhältige Ostermutation zu geben. Nur noch vier Wochen bleiben bis Weihnachten und etlichen von Santas Helfer:innen sind bereits lange Ohren und Schnurrhaare gewachsen. Der Krisenstab zur Bewältigung von Weihnachtskrisen hat sich zusammengesetzt und beschlossen, dass weitreichende Tests bei allen Wichteln durchgeführt werden sollen. Man hofft dadurch die Betroffenen schnell zu finden, sodass keine weiteren Wichtel angesteckt werden.

Auch in der Weihnachtszentrale am Nordpol muss der obligatorische Test durchgeführt werden. Doch Tests in der Arktis sind knapp. Der Schlitten, der Nachschub bringen sollte, kommt aufgrund massiver Risse in der Eisschollenlandschaft nicht zur Zentrale durch. Für die 14 Wichtel und Santa sind insgesamt nur zehn *WO-Tests*[1] übrig, welche glücklicherweise bereits vorher per Post zugestellt wurden.

Santa ist ratlos: Wie sollen die Tests bei der gesamten Belegschaft von 15 Personen durchgeführt werden ohne ausreichende Kapazitäten? Und bei der großen Halloween-Wichtel-Party hätten sich alle untereinander anstecken können. Doch Wichtelin Annelie hat einen Einfall: „Erinnert ihr euch noch an unsere Sitzordnung zu Halloween? Wir hatten uns damals doch zum Essen an fünf Tischen hingesetzt. Aber damit uns nicht zu langweilig wird, wechselten wir nach dem Hauptgang die Plätze so, dass keiner von uns zweimal mit denselben Wichteln am Tisch saß. Irgendwo müsste ich die Liste noch haben...“ Nach kurzem Stöbern zieht sie diese Liste aus der Kiste mit flauschigen pinken Osterhasen-Overalls:

[1] Es ist bekannt, dass sich Wichtelzellen normalerweise stark zu weihnachtlichen Symbolen hingezogen fühlen. Beim WO-Test werden daher sowohl eine Weihnachtsbaumkugel, als auch ein Osterei in die Probe gehalten. Wenn die Zellen stärker auf das Osterei reagieren, ist davon auszugehen, dass es sich um eine ostermutierte Infektion handelt. Leider benötigt man für jede Probe ein neues Osterei, weshalb die Tests sehr aufwendig und daher rationiert sind.

Hauptgang

Tisch 1	Tisch 2	Tisch 3	Tisch 4	Tisch 5
Annelie	Boris	Carmen	Dirk	Esmeralda
Frank	Gabi	Hannes	Irene	Jakob
Klara	Lorenz	Mara	Nathan	Santa

Nachtisch

Tisch 1	Tisch 2	Tisch 3	Tisch 4	Tisch 5
Frank	Klara	Dirk	Esmeralda	Annelie
Boris	Nathan	Mara	Hannes	Irene
Carmen	Jakob	Gabi	Lorenz	Santa

„Wenn wir jetzt von uns allen je zwei Proben nehmen und die Proben derjenigen, die zusammen an einem Tisch gesessen haben, zusammenmischen, müssen wir nur fünf Tests für den Hauptgang und fünf für den Nachtisch durchführen – insgesamt also nur zehn Test! Anschließend können wir einfach schauen, wer in den Gruppen war, die in *beiden* Testläufen positiv getestet wurden und können jene als krank identifizieren und isolieren!“

Eine rege Diskussion bricht hervor:

Boris meint: „Aber so finden wir doch gar nicht alle infizierten Wichtel...“

Annelie antwortet: „Doch! Wir finden auf diese Weise immer alle Infizierten.“

Carmen erwidert: „Das stimmt! Aber wir erhalten auch *falsch-positive* Testergebnisse. Das heißt: Wichtel, die gar nicht infiziert sind, könnten trotzdem positiv getestet werden. Eigentlich können wir es uns in dieser Jahreszeit nicht leisten, dass diese dann ausfallen...“

Jakob meint darauf: „Da wir aber nie mit denselben Wichteln an beiden Tischen saßen, kann es keine falsch-positiven Testergebnisse geben.“

Mara ist anderer Meinung: „Leider ist das nicht korrekt. Nur, wenn wir wüssten, dass maximal zwei Personen infiziert sind, hättest du recht.“

Lorenz glaubt: „Nein, selbst dann könnten einige Wichtel falsch-positiv getestet werden.“

Esmeralda hat noch eine andere Idee: „Wir müssen nur die Gruppen anders einteilen:

Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 4
Annelie	Boris	Carmen	Dirk
Esmeralda	Frank	Gabi	Hannes
Irene	Jakob	Klara	Lorenz
Mara	Nathan	Santa	

Gruppe 5	Gruppe 6	Gruppe 7	Gruppe 8
Annelie	Esmeralda	Irene	Mara
Boris	Frank	Jakob	Nathan
Carmen	Gabi	Klara	Santa
Dirk	Hannes	Lorenz	

> Wenn wir außerdem wüssten, dass maximal zwei von uns infiziert sind, können wir immer eindeutig herausfinden, wer das ist.“

Santa ist durch diese Diskussion kein Stück schlauer geworden: Wer hat denn nun Recht? Schließlich muss er die Tests ja organisieren...

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Nur Boris.
2. Nur Annelie und Carmen.
3. Nur Annelie und Jakob.

4. Nur Annelie, Carmen und Mara.
5. Nur Annelie, Carmen und Lorenz.
6. Nur Boris und Esmeralda.
7. Nur Annelie, Carmen und Esmeralda.
8. Nur Annelie, Jakob und Esmeralda.
9. Nur Annelie, Carmen, Mara und Esmeralda.
10. Nur Annelie, Carmen, Lorenz und Esmeralda.

7.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir gehen die Aussagen der Reihe nach durch:

Boris Aussage ist nicht korrekt: Jede Person, die infiziert ist, sorgt für einen positiven Test sowohl in ihrer Hauptgang- als auch in ihrer Nachtischgruppe. Somit befindet sie sich auch im Schnitt der Personen, die im ersten und zweiten Durchgang Teil einer positiv getesteten Gruppe waren.

Mit dieser Begründung sehen wir ebenfalls sofort, dass **Annelies Aussage korrekt ist.**

Auch **Carmens Aussage ist korrekt:** Sind beispielsweise nur Annelie und Boris infiziert, so sehen wir, dass auch Frank in beiden Runden in einer Gruppe war, die positiv getestet wurde. Wir müssten also davon ausgehen, dass Frank ebenfalls krank ist, obwohl dies nicht korrekt ist.

Damit ist insbesondere auch **Jakobs Aussage widerlegt.**

Maras Aussage ist im Allgemeinen falsch: Nehmen wir an, dass Annelie und Jakob infiziert wären. Dann erhielten in der ersten Runde die Tische 1 und 5 ein positives Testergebnis und im zweiten Durchgang die Tische 2 und 5. Hier hilft uns das zusätzliche Wissen, dass maximal zwei Personen infiziert sind, nicht weiter: Wären Klara und Santa infiziert, würde das nämlich dasselbe Testergebnis liefern. Also ist die Zuordnung in diesem Fall nicht eindeutig.

Insbesondere **ist Lorenz' Aussage korrekt.**

Esmeralda hat tatsächlich recht: Wir untersuchen Esmeraldas Teststrategie und stellen fest, dass wir die vorgeschlagene Gruppeneinteilung in 2-dimensionales Feld übertragen können, in dem die ersten vier Gruppen die Spalten und die letzten vier Gruppen die Zeilen darstellen:

Gruppe 1	**Gruppe 2**	**Gruppe 3**	**Gruppe 4**	
Annelie	Boris	Carmen	Dirk	**Gruppe 5**
Esmeralda	Frank	Gabi	Hannes	**Gruppe 6**
Irene	Jakob	Klara	Lorenz	**Gruppe 7**
Mara	Nathan	Santa		**Gruppe 8**

Wir benötigen acht Tests, um die Reihen und Zeilen der Infizierten zu finden. Haben wir nur eine infizierte Person, sehen wir sofort, dass uns dieses Schema (wie übrigens auch Annelies Teststrategie) ein eindeutiges Ergebnis gibt.

Bei zwei Infizierten liefert die Strategie allerdings bis zu vier Kanditat:innen (Nehmen wir z. B. an, dass Esmeralda und Jakob infiziert sind, so fällt der Test in den Gruppen 1, 2, 6 und 7 positiv aus. Daher bleiben als infizierte Personen vier Kandidat:innen übrig: Esmeralda, Frank, Irene und Jakob). Nun testen wir eine:n dieser vier Kandidat:innen und nennen diese:n K.

- Fällt der Test negativ aus, sind genau die beiden Personen infiziert, die zusammen mit K in den Gruppen waren, die positiv getestet wurden. (Im obigen Beispiel bedeutet dies: Wird Frank negativ getestet, wissen wir sofort, dass Esmeralda und Jakob infiziert sind.)
- Fällt der Test positiv aus, muss die zweite infizierte Person in den beiden positiv getesteten Gruppen sein, in denen K nicht ist (Im obigen Beispiel: Wird Jakob positiv getestet, dann wissen wir, das Esmeralda ebenfalls infiziert sein muss).

Bei Esmeraldas Teststrategie hätten wir sogar noch einen Test übrig, mit dem wir das Rentier Rudolf testen könnten, das sonst evtl. beleidigt seinen Dienst verweigern würde ;)

Forschungsbezug der Aufgabe

Die grundlegende Idee hinter der Aufteilung in die ersten beiden Testgruppen geht auf eine alte kombinatorische Aufgabe (dem „Kirkman Schoolgirl Problem“ bzw. „Problem der 15 Schulmädchen“) aus dem Jahre 1850 zurück. Seither finden ähnliche Problemstellungen und Lösungen beispielsweise Anwendung in der Organisation von Sportevents („Social Golfer Problem“). Insbesondere die Fragestellung unserer Aufgabe: „Wie können viele Personen mit verhältnismäßig wenigen Tests auf eine (virale) Krankheit getestet werden?“ wurde durch die aktuelle Covid-19-Pandemie ein wichtiges Forschungsthema. Ein Beispiel hierfür ist die Entwicklung des P-BEST-Algorithmus, welcher für eine seltener vorkommende Krankheit (ca. 1 % der Getesteten sind positiv) eine achtfache Verbesserung der Testeffizienz verspricht. Dieser Algorithmus basiert auf einer mehrdimensionalen Umsetzung der Aufteilung von Esmeralda, d. h. anstatt zwei Testinstanzen auf einem 2-dimensionalen Feld anzuordnen nehmen wir n Gruppierungen in Testinstanzen vor, sodass wir diese in einem n-dimensionalen Hyperwürfel anordnen können.

Shental et al., 2020. *Efficient high-throughput SARS-CoV-2 testing to detect asymptomatic carriers*. Sciences Advances, Vol. 6, no. 37, eabc5961, `https://advances.sciencemag.org/content/6/37/eabc5961`.

8 Explosion

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

8.1 Aufgabe

Im Chemielabor des Weihnachtsmannes gab es mal wieder eine Explosion, bei der viele Wichtelbärte verbrannt und viele Wichtelaugenbrauen versengt wurden. Beim Abendessen berichten die Chemie-Wichtel Lackmus, Nucleus und Reductus dem Mathematik-Wichtel Calculus Folgendes:

Lackmus sagt: „Nur ein einziger Wichtel ist völlig unversehrt davon gekommen. Genau ein Wichtel hat nur die linke Augenbraue verbrannt, genau einer nur die rechte Augenbraue und genau einer hat sich nur den Bart versengt.“

Nucleus ist immer noch ganz aufgeregt: „Bei mehr als 95 % der Laborwichtel sind sowohl der Bart als auch die linke Augenbraue versengt.“

Reductus klagt: „Und bei mehr als 95 % der Laborwichtel sind sowohl der Bart als auch die rechte Augenbraue versengt!“

Calculus denkt ein wenig über all diese Informationen nach und sagt dann: „Unter den Laborwichteln mit *zwei* versengten Augenbrauen haben mehr als x % einen versengten Bart.“

Wie lautet die größte ganze Zahl x, für welche die Aussage von Calculus auf jeden Fall wahr ist?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Die größte derartige Zahl ist $x = 90$.
2. Die größte derartige Zahl ist $x = 91$.
3. Die größte derartige Zahl ist $x = 92$.
4. Die größte derartige Zahl ist $x = 93$.
5. Die größte derartige Zahl ist $x = 94$.
6. Die größte derartige Zahl ist $x = 95$.
7. Die größte derartige Zahl ist $x = 96$.
8. Die größte derartige Zahl ist $x = 97$.
9. Die größte derartige Zahl ist $x = 98$.
10. Die größte derartige Zahl ist $x = 99$.

8.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Mit n_L, n_R bzw. n_B bezeichnen wir die Anzahl der Wichtel, bei denen nur die linke Augenbraue, nur die rechte Augenbraue bzw. nur der Bart versengt worden ist.
Analog bezeichnen wir mit n_{LR}, n_{BL}, n_{BR}, n_{BLR} bzw. $n_\emptyset$ die Anzahl der Wichtel bei denen nur die beiden Brauen, nur linke Braue und Bart, nur rechte Braue und Bart, beide Brauen und der Bart bzw. gar nichts versengt ist.
Die Aussagen von Nucleus und Reductus ergeben dann

$$\begin{aligned} n_{BL} + n_{BLR} &> \tfrac{95}{100}(n_\emptyset + n_B + n_L + n_R + n_{LR} + n_{BL} + n_{BR} + n_{BLR}) \\ &= \tfrac{19}{20}(n_\emptyset + n_B + n_L + n_R + n_{LR} + n_{BL} + n_{BR} + n_{BLR}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{BR} + n_{BLR} &> \tfrac{95}{100}(n_\emptyset + n_B + n_L + n_R + n_{LR} + n_{BL} + n_{BR} + n_{BLR}) \\ &= \tfrac{19}{20}(n_\emptyset + n_B + n_L + n_R + n_{LR} + n_{BL} + n_{BR} + n_{BLR}). \end{aligned}$$

Wir addieren diese beiden Ungleichungen und erhalten

$$\begin{aligned} 2\,n_{BLR} + n_{BL} + n_{BR} &> \tfrac{38}{20}\,(n_\emptyset + n_B + n_L + n_R + n_{LR} + n_{BL} + n_{BR} + n_{BLR}) \\ &= \tfrac{19}{10}\,(n_\emptyset + n_B + n_L + n_R + n_{LR} + n_{BL} + n_{BR} + n_{BLR})\,. \end{aligned}$$

Eine Äquivalenzumformung liefert die Ungleichung

$$2\,n_{BLR} - \tfrac{19}{10}n_{BLR} > \tfrac{9}{10}(n_{BL} + n_{BR}) + \tfrac{19}{10}(n_\emptyset + n_B + n_L + n_R),$$

welche zu

$$n_{BLR} > 9\,(n_{BL} + n_{BR}) + 19\,(n_\emptyset + n_B + n_L + n_R)$$

vereinfacht werden kann. Da die sechs Zahlen $n_\emptyset, n_B, n_L, n_R, n_{BL}, n_{BR}$ auf der rechten Seite nicht-negativ sind, impliziert diese Ungleichung die untere Schranke

$$n_{BLR} > 19\,n_{LR}. \tag{S}$$

Diese Ungleichung ist wiederum äquivalent zu

$$\tfrac{5}{100}n_{BLR} > \tfrac{95}{100}\,n_{LR},$$

wobei natürlich $\frac{5}{100}n_{BLR} = n_{BLR} - \frac{95}{100}n_{BLR}$ gilt. Die Ungleichung (S) ist somit äquivalent zu

$$n_{BLR} > \tfrac{95}{100}(n_{LR} + n_{BLR}).$$

Unter den Laborwichteln mit sowohl linker als auch rechter versengter Augenbraue haben daher mehr als 95 % einen versengten Bart. Für $x = 95$ ist die Aussage von Calculus also auf jeden Fall wahr.

Nun zeigen wir noch, dass die Aussage von Calculus für $x \geq 96$ nicht notwendigerweise wahr sein muss. Dazu betrachten die folgende Situation:

$$n_{\emptyset} = n_B = n_L = n_R = n_{BL} = n_{BR} = 1, \qquad n_{LR} = 20, \qquad n_{BLR} = 479.$$

- Diese Zahlen sind offensichtlich mit der Aussage von Lackmus kompatibel.

- Von den insgesamt 505 Laborwichteln haben $n_{BL} + n_{BLR} = 480$ sowohl ihren Bart als auch ihre linke Augenbraue versengt. Das sind rund 95,05 Prozent, sodass die Situation auch mit der Aussage von Nucleus kompatibel ist.

- Analog sieht man, dass die Situation mit der Aussage von Reductus kompatibel ist, da die $n_{BR}+n_{BLR} = 480$ Wichtel sowohl mit versengtem Bart als auch versengter rechten Augenbraue ebenfalls rund 95,05 Prozent aller Laborwichtel ausmachen.

- Die Aussage von Calculus hingegen ist in dieser Situation falsch: Es gibt $n_{LR}+n_{BLR} = 499$ Laborwichtel mit zwei versengten Augenbrauen, von denen genau $n_{BLR} = 479$ auch einen versengten Bart haben – das sind aber nur 95,99 Prozent.

Die korrekte Antwort ist daher $x = \mathbf{95}$.

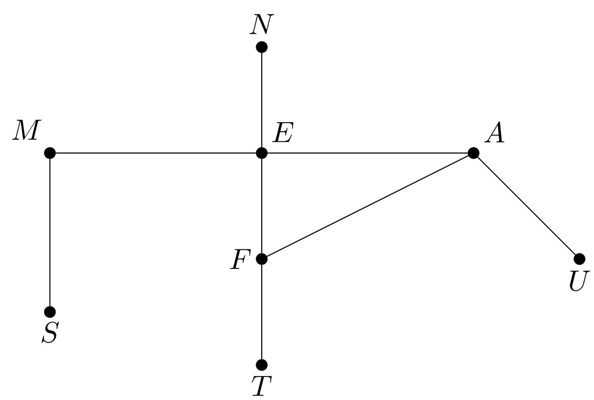
9 Überflüssige Geschenke

Autor: Max Klimm (TU Berlin)

Projekt: Mathematische Modellierung, Simulation und Optimierung am Beispiel von Gasnetzwerken (SFB Transregio 154):
Kombinatorische Netzwerkflussmethoden für instationäre Gasflüsse und Gasmarktprobleme (A07)

9.1 Aufgabe

Um den Transport der Geschenke vom Nordpol zu erleichtern, wurde bereits im Jahr 1547 damit begonnen, ein Pipelinenetz vom Nordpol (N) zu den Kontinenten Afrika (F), Antarktis (T), Asien (A), Australien (U), Europa (E), Nordamerika (M) und Südamerika (S) zu errichten. Um die Geschenke zu transportieren, werden sie zunächst am Nordpol durch einen geheimen Vorgang in den gasförmigen Aggregatzustand versetzt. Dann werden sie über das abgebildete Pipelinenetzwerk zu den jeweiligen Kontinenten geleitet, wo sie wieder in ihren ursprünglichen Aggregatzustand kondensiert werden.



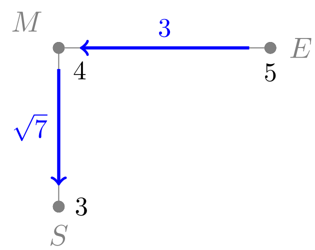
Für das Weihnachtsfest sollen auf jedem der Kontinente (außer am Nordpol N) jeweils ein Geschenkvolumen von 1 Einheit aus dem Netz ausgespeist werden. Dementsprechend wird am Nordpol ein Geschenkvolumen von 7 Einheiten eingespeist.

Gase bewegen sich in Pipelinenetzwerken näherungsweise nach den sogenannten *Weymouth-Gleichungen*. Diese besagen, dass für jedes Rohr in dem Netzwerk zwischen zwei Knoten das Quadrat des Gasflusses f gleich der Differenz der Quadrate der Drücke an den jeweiligen Endknoten ist, d. h.

$$f^2 = p_+^2 - p_-^2,$$

wobei der Gasfluss vom Knoten mit dem höheren Druck p_+ zu dem Knoten mit dem geringeren Druck p_- erfolgt.

Herrscht am Knoten E *beispielsweise* ein Druck von 5, am Knoten M ein Druck von 4 und am Knoten S ein Druck von 3, so bewegen sich $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ Einheiten von E nach M und $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \approx 2{,}65$ Einheiten von M nach S, was bedeutet, dass $3 - \sqrt{7}$ Einheiten an M ausgespeist werden:



Helft dem Weihnachtsmann Drücke für alle Knoten A, E, F, M, N, S, T, U zu finden, sodass an jedem Knoten außer N genau 1 Einheit ausgespeist wird, an N genau 7 Einheiten eingespeist werden und für alle Kanten im Netzwerk die Weymouth-Gleichungen erfüllt sind. Am Knoten U soll dabei ein Druck von 0 herrschen.

Welche der folgenden Antworten ist richtig?

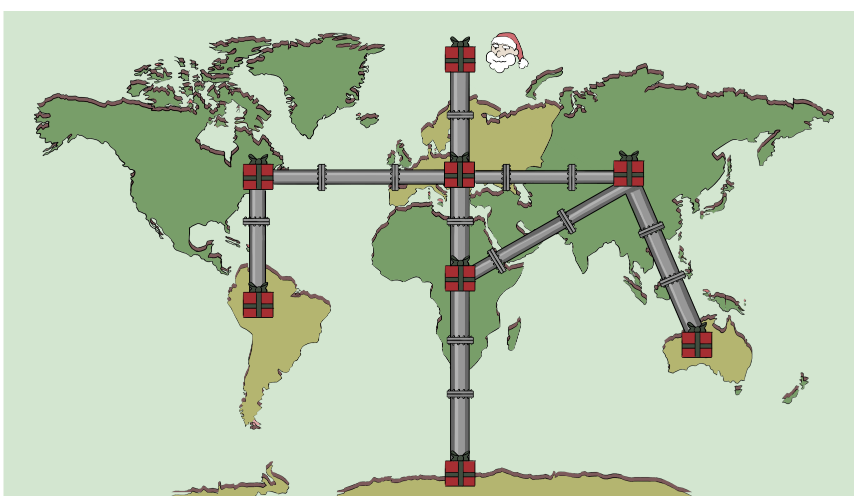


Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Druck am Knoten E ist $\sqrt{1}$.
2. Der Druck am Knoten E ist $\sqrt{2}$.
3. Der Druck am Knoten E ist $\sqrt{3}$.
4. Der Druck am Knoten E ist $\sqrt{4}$.
5. Der Druck am Knoten E ist $\sqrt{5}$.
6. Der Druck am Knoten E ist $\sqrt{6}$.
7. Der Druck am Knoten E ist $\sqrt{7}$.
8. Es gibt keine Lösung für die Drücke an den Knoten, die alle Bedingungen erfüllt.
9. Es gibt noch einen anderen Knoten im Netzwerk mit dem gleichen Druck wie Knoten E.
10. Entfernt man die Kante zwischen A und F und berechnet erneut eine Lösung, so erhöht sich der Druck am Knoten E.

Projektbezug:

Das Teilprojekt A07 des TRR 154 *Mathematische Modellierung, Simulation und Optimierung am Beispiel von Gasnetzwerken* beschäftigt sich mit der Steuerung von Gasflüssen in Pipelinenetzwerken ähnlich dem in diesem Aufgabe. In der Praxis sind die Probleme komplexer als hier dargestellt, da zusätzlich Druckschranken, Kompressoren, sowie kompliziertere Gasflussmodelle betrachtet werden.

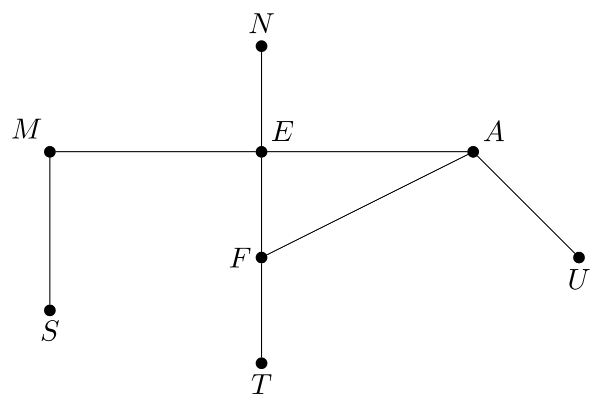
9.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Wir wollen die Lösung sukzessive aufbauen. Für einen Knoten

$$v \in \{A, E, F, M, N, S, T, U\}$$

bezeichnen wir dafür mit p_v den Druck am Knoten v.



- Da laut Aufgabenstellung $p_U = 0$ gelten soll und am Knoten U 1 Einheit ausgespeist werden soll, muss genau 1 Einheit von A nach U fließen, sodass $p_A^2 - p_U^2 = 1$ gelten muss. Damit erhalten wir $p_A = 1$.
- Analog muss auch 1 Einheit von F nach T fließen, was $p_F^2 - p_T^2 = 1$ ergibt, und
- 1 Einheit von M nach S fließen, was $p_M^2 - p_S^2 = 1$ ergibt.
- Über die Kante von E nach M müssen die 2 Einheiten für M und für S fließen, also muss $p_E^2 - p_M^2 = 4$ gelten.
- Über die Kante von N nach E müssen 7 Einheiten fließen, d. h. es gilt $p_N^2 - p_E^2 = 49$.

Wir sehen, dass sich aus der Lösung für p_E, p_F und p_A alle weiteren Werte bestimmen lassen.

Um die Werte für E, F und A zu bestimmen, versuchen wir (durch systematisches Ausprobieren oder weil dies auch intuitiv erscheint) den Ansatz, dass die Richtung des Gasflusses im Dreieck AEF so erfolgt, dass Gas von E nach F, von E nach A und von F nach A erfolgt. Bezeichnen wir dabei mit x den Gasfluss von F nach A, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_F^2 - p_A^2 &= x^2, \\ p_E^2 - p_A^2 &= (2-x)^2, \\ p_E^2 - p_F^2 &= (2+x)^2, \\ p_A &= 1. \end{aligned}$$

Diese vereinfachen wir zu

$$\begin{aligned} p_F^2 &= x^2 + 1, \\ p_E^2 &= (2-x)^2 + 1, \\ p_E^2 - p_F^2 &= (2+x)^2. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Gleichung

$$(2-x)^2 + 1 - (x^2+1) = (2+x)^2.$$

Durch Vereinfachung ergibt dies

$$0 = x^2 + 4x = x(4+x).$$

Die einzige nicht-negative Lösung dieser Gleichung ist also $x = 0$. Durch Einsetzen dieser Lösung erhalten wir

$$p_E = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{\mathbf{5}}$$

für den Druck am Knoten E. Offensichtlich sind damit die Antwortmöglichkeiten 1-4 und 6-7 nicht korrekt.

Für die restlichen Drücke berechnen wir:

$$\begin{aligned}
p_A &= 1, \\
p_E &= \sqrt{5}, \\
p_F &= \sqrt{p_E^2 - \sqrt{2^2}} = \sqrt{5-4} = 1, \\
p_M &= \sqrt{p_E^2 - 4} = \sqrt{5-4} = 1, \\
p_N &= \sqrt{49 - p_E^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}, \\
p_S &= \sqrt{p_M^2 - 1} = \sqrt{1-1} = 0, \\
p_T &= \sqrt{p_F^2 - 1} = \sqrt{1-1} = 0, \\
p_U &= 0.
\end{aligned}$$

Damit sind auch die Antwortmöglichkeiten 8 und 9 nicht korrekt.

Um zu sehen, dass Antwortmöglichkeit 10 nicht korrekt ist, bemerken wir, dass in der berechneten Lösung kein Gas auf der Kante zwischen A und F fließt (da $p_F^2 - p_A^2 = 0$). Würde diese Kante aus dem Netzwerk entfernt, so wären die gleichen Drücke wie berechnet eine Lösung. Der Druck am Knoten E würde sich also durch das Entfernen der Kante nicht ändern.

10 Ein prächtiges Präsent

Autorin: Ariane Beier (MATH+ Schulaktivitäten)

10.1 Aufgabe

Elf Horton ist zum ersten Mal für die Weihnachtsdekoration der Festhalle am Nordpol verantwortlich. Da er sehr lange auf diese Gelegenheit gewartet hat, ist Horton ganz aufgeregt und möchte etwas Außergewöhnliches tun. Also durchstöbert er den Bestand an Dekorationsgegenständen mehrerer vergangener Jahrhunderte. Nach einer Weile ist Horton ziemlich sicher, dass er den perfekten Gegenstand für die Spitze des Weihnachtsbaums gefunden hat: ein Möbius-Band aus Blech, welches mit Amethyst, Malachit und Turmalin verziert ist. Horton fragt sich, wie alt diese exquisite Dekoration sein muss. Glücklicherweise liegt der folgende Brief bei:

> Meine liebste Conny,
>
> an diesem Montag, unserem achten Hochzeitstag, überreiche ich Dir dieses Möbiusband als Symbol unserer ewigen Liebe. Es ist für Dich und diesen besonderen Anlass eigens angefertigt worden. Mit unendlicher Freude erinnere ich mich an den Wochenendtag unserer Hochzeit am 13. J*** 19**, dem Beginn unserer wunderbaren gemeinsamen Reise.
>
> In Liebe, John.

Wie ihr vielleicht bemerkt habt, sind Teile des Hochzeitsdatums durch den Zahn der Zeit verwischt worden. (Natürlich steht die Anzahl der * nicht für die Anzahl der verwischten Zeichen...)

Könnt Ihr Horton trotzdem helfen und herausfinden, wie alt das Möbius-Band ist? Genauer gesagt, was ist der Rest der Ziffernsumme von Connys und Johns Hochzeitsdatum (angegeben als TTMMJJJJ), wenn man diese durch 10 teilt?

> **Beispiel:** Wäre das Datum beispielsweise der 26. Dezember 1937, so wäre die Antwort 1, denn
>
> $$2+6 \;+\; 1+2 \;+\; 1+9+3+7 \;=\; 31 \;=\; 3\cdot 10+\mathbf{1}.$$

Hinweise:

- Ein Schaltjahr hat 366 Tage, alle sonstigen Jahre 365 Tage.
- Lässt sich eine Jahreszahl durch 4 teilen, so ist dieses Jahr ein Schaltjahr, außer es ist ebenfalls durch 100 teilbar. Ist die Jahreszahl jedoch auch durch 400 teilbar, dann ist dieses Jahr doch wieder ein Schaltjahr.

  Beispiele:
  - Das Jahr 2004 war ein Schaltjahr, weil 2004 durch 4, jedoch nicht durch 100, teilbar ist.
  - Das Jahr 2100 wird *kein* Schaltjahr sein, da sich 2100 durch 100, jedoch nicht durch 400, teilen lässt.
  - Das Jahr 2400 wird dagegen ein Schaltjahr sein, weil 2400 durch 400 teilbar ist.

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6

7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

10.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Wahrscheinlich ist euch aufgefallen, dass sich alle Daten nach jedem Nicht-Schaltjahr um einen Wochentag nach vorne verschieben: Wenn euer Geburtstag im Jahr 2018 auf einen Mittwoch fiel, dann war er an einem Donnerstag im Jahr 2019. Der Grund dafür ist, dass 365 bei Teilung durch 7 einen Rest von 1 übrig lässt:

$$365 = 7 \cdot 52 + 1.$$

Analog verschiebt sich jedes Datum um zwei Wochentage, wenn es ein Schaltjahr überschreitet, da

$$366 = 7 \cdot 52 + 2.$$

Aus Johns Brief erhalten wir die folgenden Informationen:

- Der Hochzeitstag war im Januar, Juni oder Juli.
- Sie haben entweder an einem Samstag oder einem Sonntag geheiratet.
- Ihr achter Hochzeitstag war an einem Montag.

Über einen Zeitraum von acht Jahren werden entweder ein oder zwei Schaltjahre durchlaufen. Nehmen wir zunächst einmal an, dass in der gegebenen Situation zwei Schaltjahre vergangen sind. Dann wäre jedes Datum um einen Wochentag für jedes Nicht-Schaltjahr und um zwei Wochentage für jedes Schaltjahr vorgerückt. Insgesamt:

$$6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 10$$

Tage der Woche, was natürlich dem Vorrücken von drei Wochentagen entspricht. Aber John und Conny heirateten entweder an einem Samstag oder an einem Sonntag. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass acht Jahre später ein Dienstag oder Mittwoch gewesen wäre – mit Sicherheit jedoch *kein* Montag.

Der Achtjahreszeitraum umfasst also nur ein Schaltjahr, was bedeutet, dass der Zeitraum im Jahr 1900 begonnen haben muss, denn jeder andere Zeitraum von acht Jahren zwischen 1901 und 2000 (ein Schaltjahr!!!) umfasst zwei Schaltjahre. Darüber hinaus müssen Conny und John vor dem 28. Februar geheiratet haben, da jeder weitere der möglichen Monate im Jahr 1900 noch zwei Schalttage über einen Zeitraum von acht Jahren umfassen würde.

Dementsprechend können wir also mit Sicherheit sagen, dass Conny und John am 13. Januar 1900 geheiratet haben.

Letztlich berechnen wir also nun die Summe der Ziffern, nehmen den Rest nach Division mit 10 und erhalten

$$1+3 \ + \ 0+1 \ + \ 1+9+0+0 \ = \ 15 \ = \ 1 \cdot 10 + \mathbf{5}.$$

Bemerkung:

Dieses Rätsel haben wir zu Ehren des britischen Mathematikers John Horton Conway veröffentlicht, der am 11.04.2020 an den Folgen einer SARS-CoV-2-Infektion starb. Conway entwickelte die sogenannte *Doomsday-Methode*, einen einfachen Algorithmus zur Bestimmung des Wochentages eines gegebenen Datums, das mit Kopfrechenoperationen durchgeführt werden kann. Mehr Informationen findet ihr z. B. hier:

`https://de.wikipedia.org/wiki/Doomsday-Methode`.

11 Wurmloch

Autor: Martin Skutella (TU Berlin)
Projekt: MATH+ Application Area AA3: Networks

11.1 Aufgabe

Leicht genervt legt Santa Claus das Telefon zur Seite. Gerade noch sprach er mit seinem nichtsnutzigen Schwager, der mal wieder ganz dringend Santas Hilfe am Südpol benötigt. Aber egal wie man es auch dreht und wendet, Santa weiß nicht, wie er so kurz vor Weihnachten die beschwerliche Reise dorthin antreten und trotzdem pünktlich zurück am Nordpol sein soll. Ratlos starrt er auf die Weltkarte an der Wand (s. Abb. 1), als Wichtel Einstein neugierig zur Tür hereinschaut, wie immer seinen Assistenten, Wichtel Rosen, im Schlepptau.

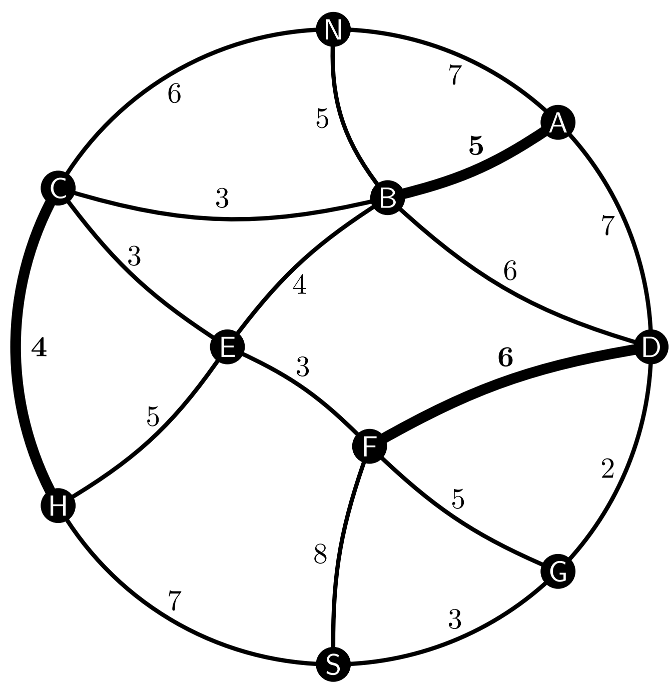


Abbildung 1: Die Weltkarte zeigt die Orte A bis H, den Nordpol N und Südpol S sowie die Reisezeiten zwischen diesen Orten.

Die beiden sprechen schon seit Wochen von nichts anderem als ihrer jüngsten Entdeckung, sehr zum Leidwesen aller anderen Wichtel. Man munkelt, es habe irgendetwas mit Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu tun. Aber in Ermangelung tieferen Verständnisses reden alle nur von *Wurmlöchern*.

„Was machen eure Wurmlöcher, Einstein?“, fragt Santa. Der Wichtel streckt zunächst beleidigt die Zunge raus, überwindet dann aber seinen Stolz und doziert: „Unsere neuesten Einsichten zu Gravitationsanomalien deuten auf unerwartete Verbindungen zwischen bestimmten Orten hin; eben so wie ein Wurmloch zwei Punkte auf der Oberfläche eines Apfels verbindet. Diese Verbindungen können sogar Zeitreisen ermöglichen!“ Santa, in Gedanken eigentlich schon wieder bei der anstehenden Südpolreise, wird hellhörig.

Kurze Zeit später bricht Santa in Begleitung von Einstein und Rosen zum Südpol auf. Aus Sicherheitsgründen soll die Reise vom Nordpol zum Südpol noch entlang der klassischen Verbindungen erfolgen, die auf der Weltkarte als Linien eingezeichnet sind. Die Zahlen neben den Verbindungen geben die benötigte Stundenzahl an. So beträgt beispielsweise die Reisezeit vom Nordpol N entlang der möglichen Reiserouten über C und H zum Südpol S insgesamt 6+4+7=17 Stunden.

Einstein und Rosen möchten die Hinreise nutzen, um letzte Details mit Blick auf die Gravitationsanomalien dreier Wurmlöcher zu klären, die sie auf der Weltkarte fett markiert haben. Auf der Rückreise vom Südpol zum Nordpol wird es dann möglich sein, die Uhr auf den drei fett markierten Verbindungen gewissermaßen rückwärts laufen zu lassen und so in die Vergangenheit zu reisen. Beispielsweise wird die Reisezeit entlang der Route vom Südpol S über H und C zum Nordpol N nur noch 7+(-4)+6=9 Stunden betragen.

Santa ist hellauf begeistert, doch Einstein warnt vor der exzessiven Nutzung der Wurmlöcher: „Wir können jedes Wurmloch höchstens einmal nutzen und selbst das ist mit Risiken verbunden.“ Nach längerem Überlegen gibt Santa die folgenden Ziele aus:

Z1: Um eine pünktliche Rückkehr zu ermöglichen, darf die Gesamtreisezeit für Hin- und Rückreise 24 Stunden nicht überschreiten.

Z2: Um möglicherweise auftretende Diskontinuitäten in der Raum-Zeit weitestgehend zu vermeiden, sollen auf der Rückreise höchstens zwei der drei Wurmlöcher genutzt werden.

Z3: Um die Reise möglichst abwechslungsreich zu gestalten, soll keine der Verbindungen sowohl auf der Hin- als auch auf der Rückreise genutzt werden, auch nicht in entgegengesetzten Richtungen.

Z4: Um unterwegs möglichst viele Freunde zu treffen, soll jeder der Orte A bis H während der Reise mindestens einmal besucht werden.

Z5: Um möglichst wenigen Freunden zu sehr auf die Nerven zu gehen, soll höchstens einer der Orte A bis H sowohl auf der Hin- als auch auf der Rückreise besucht werden.

Z6: Um andererseits wenigstens ein paar Freunde mit zwei Besuchen zu beglücken, soll mindestens einer der Orte A bis H sowohl auf der Hin- als auch auf der Rückreise besucht werden.

Ernüchtert stellen die drei Reisegefährten fest, dass alle sechs Ziele nicht unter einen Hut zu bringen sind. Selbst für gewisse Kombinationen von drei Zielen scheint es keine zulässige Route für die gesamte Rundreise (zum Südpol und zurück zum Nordpol) zu geben.

Für welche der folgenden Kombinationen lässt sich *keine* zulässige Rundreiseroute finden?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Z1, Z2 und Z3.
2. Z1, Z2 und Z5.

3. Z1, Z2 und Z6.
4. Z1, Z3 und Z5.
5. Z1, Z3 und Z6.
6. Z1, Z4 und Z5.
7. Z1, Z5 und Z6.
8. Z1, Z4 und Z6.
9. Z2, Z3 und Z4.
10. Z4, Z5 und Z6.

Projektbezug:

Kürzeste-Wege-Probleme spielen an vielen Stellen der Kombinatorischen Optimierung und insbesondere der Netzwerkoptimierung eine fundamentale Rolle. Sie stellen wesentliche Bausteine bei der effizienten Lösung zahlreicher Praxisprobleme, beispielsweise aus dem Bereich Verkehr dar. Im Forschungszentrum MATH+ werden Kürzeste-Wege-Probleme unter anderem in der Application Area *Networks* in den folgenden Forschungsprojekten studiert:

AA3-2: Nash flows over time in transport and evacuation simulation

AA3-3: Discrete-Continuous Shortest Path Problems in Flight Planning

AA3-4: Flow-Preserving Graph Contractions with Applications to Logistics Networks

AA3-5: Tropical Mechanism Design

Die im Aufgabentext thematisierte Verbindung zur Theorie der Einstein-Rosen-Brücke (Wurmlöcher) ist offensichtlich frei erfunden.

11.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Zunächst einmal kann man sich davon überzeugen, dass es genau eine kürzeste Reiseroute P für den Hinweg gibt (s. Abb. 2); diese hat die Länge 16. Für den Rückweg gibt es genau drei kürzeste Reiserouten Q_1, Q_2 und Q_3 (s. Abb. 3) der Länge 8.

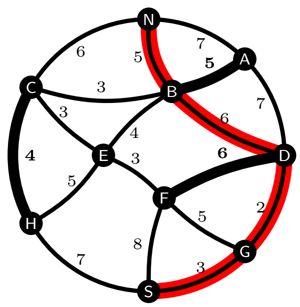


Abbildung 2: Eindeutige kürzeste Hinreiseroute P der Länge 16.

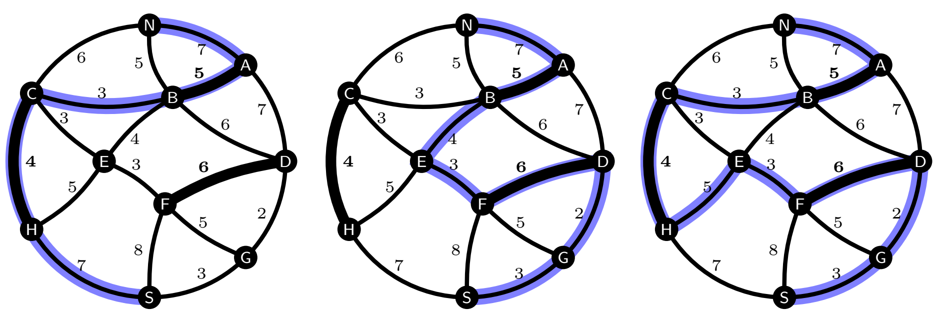


Abbildung 3: Die drei kürzesten Rückreiserouten Q_1, Q_2 und Q_3 der Länge 8.

Folglich gibt es genau drei mögliche Reiserouten, die Z1 erfüllen, nämlich die Kombinationen des Hinwegs P mit einem der Rückwege Q_1, Q_2 oder Q_3. Allerdings erfüllt keine dieser Reiserouten gleichzeitig Z4 und Z5:

- (P, Q_1): Die Orte E und F werden nicht besucht, d. h. Z4 ist nicht erfüllt.
- (P, Q_2): Die Orte C und H werden nicht besucht, d. h. Z4 ist nicht erfüllt.

- (P, Q_3): Die Orte B, D und G werden sowohl auf dem Hin- als auch auf dem Rückweg besucht, d. h. Z5 ist nicht erfüllt.

Man kann sich weiterhin davon überzeugen, dass es für die restlichen neun angegebenen Kombinationen dreier Ziele jeweils eine zulässige Reiseroute gibt. Dazu betrachten wir die Reiserouten (P, Q_1), (P, Q_3) und R (s. Abb. 4) uns stellen fest:

1. Z1, Z2 und Z3 werden von (P, Q_1) erfüllt.
2. Z1, Z2 und Z5 werden von (P, Q_1) erfüllt.
3. Z1, Z2 und Z6 werden von (P, Q_1) erfüllt.
4. Z1, Z3 und Z5 werden von (P, Q_1) erfüllt.
5. Z1, Z3 und Z6 werden von (P, Q_1) erfüllt.
6. Z1, Z4 und Z5 können **nicht** gleichzeitig erfüllt werden (s. o.).
7. Z1, Z5 und Z6 werden von (P, Q_1) erfüllt.
8. Z1, Z4 und Z6 werden von(P, Q_3) erfüllt.
9. Z2, Z3 und Z4 werden von der Rundreise R erfüllt.
10. Z4, Z5 und Z6 werden von der Rundreise R erfüllt.

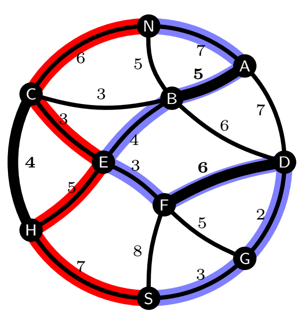


Abbildung 4: Rundreise R mit roten Hinweg und blauem Rückweg.

Anmerkung zur Berechnung kürzester Wege

Die wesentliche Herausforderung der Aufgabe besteht in der Berechnung kürzester Wege in einem Graphen mit gegebenen Kantenlängen. Sind alle Kantenlängen nicht-negativ (wie auf der Hinreise), so können kürzeste Wege mit Hilfe des klassischen Algorithmus von Dijkstra recht einfach und schnell berechnet werden. Insbesondere kann so der kürzeste Weg in Abb. 2 gefunden werden.

Falls es jedoch Kanten negativer Länge geben kann (wie auf der Rückreise), so ist das Kürzeste-Wege-Problem im Allgemeinen NP-schwer (d. h. es gibt vermutlich keinen effizienten Algorithmus, der das Problem löst). In dem Spezialfall, dass der Graph keine Kreise mit negativer Gesamtlänge enthält (wie in dem hier gegebenen Graphen), kann das Kürzeste-Wege-Problem jedoch effizient gelöst werden, indem man es auf das Problem zurückführt, einen sogenannten T*-Join* minimaler Gesamtlänge zu bestimmen. Letzteres Problem kann wiederum darauf zurückgeführt werden, ein sogenanntes *perfektes Matching* minimaler Gesamtlänge in einem abgeleiteten Graphen zu berechnen. Damit kann auch systematisch bewiesen werden, dass die drei Wege in Abb. 3 genau die kürzesten Wege in diesem Setting sind.

12 Frosch und Kröte

Autor: Jesper Nederlof
Projekt: 4TU.AMI

12.1 Aufgabe

Der Wahrscheinlichkeitsfrosch Fridolin springt auf den ganzen Zahlen herum. Um 8 Uhr morgens startet er auf der Zahl $+100$ und macht jede Sekunde einen Sprung. Fridolin springt lieber nach links (zu den kleineren Zahlen) als nach rechts (zu den größeren Zahlen): Mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ springt er jeweils von seiner momentanen Position f nach $f+1$, mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ springt er nach $f-1$. Im Laufe des Tages erreicht Fridolin die Zahl 0 und beendet seine Reise.

Die Wahrscheinlichkeitskröte Kriemhilde springt ebenfalls auf den ganzen Zahlen herum. Um 8 Uhr morgens startet sie auf der Zahl -100 und macht jede Sekunde einen Sprung. Genau wie Fridolin springt Kriemhilde lieber nach links als nach rechts: Mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ springt sie jeweils von ihrer momentanen Position k nach $k+1$, mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ springt sie nach $k-1$. Im Laufe des Tages (aber *nicht* in derselben Sekunde wie Fridolin) erreicht Kriemhilde die Zahl 0 und beendet ihre Reise.

Mit p bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass Fridolin die Zahl 0 erst *nach* Kriemhilde erreicht hat.

Welche der folgenden Aussagen über p ist wahr?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gilt $p \leq 0{,}002$.
2. Es gilt $0{,}002 < p \leq 0{,}004$.
3. Es gilt $0{,}004 < p \leq 0{,}008$.
4. Es gilt $0{,}008 < p \leq 0{,}016$.
5. Es gilt $0{,}016 < p \leq 0{,}032$.
6. Es gilt $0{,}032 < p \leq 0{,}064$.
7. Es gilt $0{,}064 < p \leq 0{,}128$.
8. Es gilt $0{,}128 < p \leq 0{,}256$.
9. Es gilt $0{,}256 < p \leq 0{,}512$.
10. Es gilt $0{,}512 < p$.

12.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Wir betrachten eine beliebige Folge F von Sprüngen, die Fridolin von $+100$ nach 0 bringt, und eine beliebige Folge K von Sprüngen, die Kriemhilde von -100 nach 0 bringt.

Wenn Fridolin die Zahl 0 erreicht, ist er genau 100-mal öfter nach links als nach rechts gesprungen. Die Sprungfolge F besteht daher aus einer gewissen Anzahl x von Sprüngen nach rechts und $x + 100$ Sprüngen nach links. Die Auftrittswahrscheinlichkeit der Folge F beträgt demnach

$$P_F = \left(\tfrac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{x+100}.$$

Wenn Kriemhilde die Zahl 0 erreicht, ist sie genau 100-mal öfter nach rechts als nach links gesprungen. Die Sprungfolge K besteht daher aus einer gewissen Anzahl y von Sprüngen nach links und $y + 100$ Sprüngen nach rechts. Die Auftrittswahrscheinlichkeit der Folge K beträgt demnach

$$P_K = \left(\tfrac{2}{3}\right)^y \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{y+100}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Fridolin und Kriemhilde im Laufe des Tages das Sprungfolgenpaar (F, K) ausgeführt haben, beträgt folglich

$$P_{(F,K)} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{x+100} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^y \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{y+100} = \left(\tfrac{2}{9}\right)^{x+y+100}.$$

Wir definieren nun die Sprungfolgen F' und K', wie folgt:

- F': Jeder Rechtssprung in F wird durch einen Linkssprung ersetzt und jeder Linkssprung durch einen Rechtssprung.
- K': Ebenso wird jeder Rechtssprung in K durch einen Linkssprung ersetzt und jeder Linkssprung durch einen Rechtssprung.

Was passiert, wenn wir Fridolin und Kriemhilde statt dem Paar (F, K) das Paar (K', F') ausführen lassen?

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Fridolin die Folge K' springt, beträgt

$$P_{K'} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^y \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{y+100}.$$

Analog beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kriemhilde F' springt,

$$P_{F'} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{x} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{x+100}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Fridolin und Kriemhilde im Laufe des Tages das Sprungfolgenpaar (K', F') ausgeführt haben, beträgt somit

$$P_{(F,K)} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{x} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{x+100} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{y} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{y+100} = \left(\tfrac{2}{9}\right)^{x+y+100}.$$

Da Fridolin und Kriemhilde die Zahl 0 nicht in der selben Sekunde erreicht haben, gilt $x \neq y$. Aus Symmetriegründen dürfen wir $x < y$ annehmen. Dann hat Fridolin mit dem Paar (F, K) nach $2x + 100$ Sprüngen als Erster die Zahl 0 erreicht, und Kriemhilde hat mit dem genau gleich wahrscheinlichen Paar (K', F') nach $2x + 100$ Sprüngen als Erste die Zahl 0 erreicht.

Das bedeutet aber, dass es für jeden Fall, in dem Fridolin Erster wird, einen genau gleich wahrscheinlichen symmetrischen Fall gibt, in dem Kriemhilde Erste wird. Daher haben beide mit der genau gleichen Wahrscheinlichkeit die Zahl 0 zuerst erreicht. Wir folgern, dass $\mathbf{p} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ gilt.

13 T-Shirts

Autor: Hajo Broersma (Universiteit Twente)
Projekt: 4TU.AMI

13.1 Aufgabe

Sechzehn Wichtel stehen im Kreis. Alle Wichtel haben eine ganze Zahl auf ihren T-Shirt aufgedruckt. Dabei ist die Zahl auf dem T-Shirt eines jeden Wichtels immer (echt) größer als die Summe der Zahlen auf den T-Shirts der beiden Wichtel, die links von ihm stehen.

Was ist die größtmögliche Anzahl von Wichteln, die eine positive Zahl auf dem T-Shirt gedruckt haben?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 3.
2. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 4.
3. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 5.
4. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 6.
5. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 7.
6. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 8.

7. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 9.
8. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 10.
9. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 11.
10. Die größtmögliche Anzahl positiver Zahlen beträgt 12.

13.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Wir geben zunächst eine mögliche Zahlenanordnung für die 16 T-Shirts an:

$$1,\ -19,\ 1,\ -21,\ 1,\ -23,\ 1,\ -25,\ 1,\ -27,\ 1,\ -29,\ 1,\ -31,\ -15,\ -17.$$

Man prüft leicht nach, dass jede Zahl echt größer als die Summe der beiden folgenden Zahlen ist. Insbesondere gilt

$$-15 > (-17) + 1 \quad \text{und} \quad -17 > 1 + (-19).$$

Wir haben also eine Anordnung gefunden, sodass genau sieben Wichtel positive Zahlen auf ihren T-Shirts haben.

Nun wollen wir noch zeigen, dass der Fall mit acht oder mehr positiven Zahlen unmöglich ist. Dazu bezeichnen wir die Zahlen im Uhrzeigersinn mit $z_1, z_2, \ldots, z_{16}$. Damit wir leicht mit den Indizes rechnen können, definieren wir ferner $z_n = z_{n+16}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten nun eine möglichst große Gruppe von p im Uhrzeigersinn unmittelbar aufeinanderfolgenden Wichteln, die alle positive Zahlen auf dem T-Shirt haben.

- Falls $p = 16$ gilt, so erhalten wir sofort einen Widerspruch: Der Wichtel mit der kleinsten Zahl im Kreis hat dann eine Zahl $z_n > 0$, und seine zwei Nachfolger haben Zahlen $z_{n+1} \geq z_n$ und $z_{n+2} \geq z_n$. Dann gilt aber sicher
$$z_n < 2z_n \leq z_{n+1} + z_{n+2},$$
was nach Voraussetzung unmöglich ist.

- Falls $2 \leq p < 16$ gilt, so betrachten wir den Wichtel, der unmittelbar vor diesen p positiven Wichteln im Kreis steht. Dieser Wichtel hat eine nicht-positive Zahl $z_n \leq 0$ auf dem T-Shirt. Da aber laut Voraussetzung
$$z_n > z_{n+1} + z_{n+2}$$
gilt, müsste (mindestens) einer der Werte z_{n+1} oder z_{n+2} negativ sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Folglich muss $p \leq 1$ gelten und somit können allerdings höchstens acht Wichtel eine positive Zahl auf ihrem T-Shirt haben.

Falls nun genau acht Wichtel eine positive Zahl auf ihren T-Shirts hätten, so müssten sich im Kreis positive Zahlen und nicht-positive Zahlen immer abwechseln. Wir können aus Symmetriegründen annehmen, dass die Zahlen $z_1, z_3, \ldots, z_{15}$ positiv sind. Wenn wir ausnutzen, dass jede der Zahlen z_n größer als die Summe ihrer beiden Nachfolger z_{n+1} und z_{n+2} ist, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
z_{16} &> z_1 + z_2 \\
&> z_1 + (z_3 + z_4) \\
&> z_1 + z_3 + (z_5 + z_6) \\
&> z_1 + z_3 + z_5 + (z_7 + z_8) \\
&> z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + (z_9 + z_{10}) \\
&> z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + z_9 + (z_{11} + z_{12}) \\
&> z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + z_9 + z_{11} + (z_{13} + z_{14}) \\
&> z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + z_9 + z_{11} + z_{13} + (z_{15} + z_{16}).
\end{aligned}$$

Oder äquivalent:

$$z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + z_9 + z_{11} + z_{13} + z_{15} < 0.$$

Dies ist jedoch unmöglich, da alle acht Summanden positiv waren.

Damit haben wir gezeigt, dass höchstens **sieben** Wichtel eine positive Zahl auf ihren T-Shirts haben können.

14 Der verwirrte Weihnachtsmann

Autor:innen: Luise Fehlinger (HU Berlin)
Thilo Steinkrauß (Herder-Gymnasium Berlin)

14.1 Aufgabe

Die Wichtel sind nervös. Traditionell werden sie heute Abend in einer feierlichen Zeremonie den besonders neugierigen Kindern die Weihnachtsgeschenke persönlich überreichen. Jeder Wichtel hat die Liste der Kinder lange studiert, und jeder hat sich genau gemerkt, welchem Kind er das Geschenk geben soll. Dem neugierigsten Kind der Welt soll der Weihnachtsmann als erstes das Geschenk geben. Danach wird Oberwichtel Rebekka dem zweitneugierigsten Kind das Geschenk geben. Weiter geht es mit Wichtel Jonathan und dem Geschenk für das drittneugierigste Kind, usw.

Nur leider hat Wichtel Eleonora beobachtet, dass der Weihnachtsmann seinen Kakao über der Liste verschüttet hat. Das ist dem Weihnachtsmann peinlich und er hat Angst, die Wichtel könnten denken, dass er nicht mehr fit genug ist. Daher will er sich nicht helfen lassen und tut so, als wäre alles bestens. Da es nicht das erste Mal ist, dass so etwas vorkommt, weiß Wichtel Eleonora ganz genau, was passieren wird:
Der Weihnachtsmann wird sein Geschenk einfach irgendeinem Kind geben. Jeder Wichtel, der danach ein Geschenk verteilen soll, wird das richtige Kind wählen, sofern dieses Kind noch kein Geschenk hat. Ansonsten wird auch er einfach zufällig ein Kind ohne Geschenk auswählen. Am Ende soll Wichtel Eleonora dann das letzte Geschenk überreichen.

Nun rätseln Wichtel Eleonora und ihre besten Freunde, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass Wichtel Eleonora dem richtigen Kind das Geschenk geben kann. Aber nur ein Wichtel hat recht. Welcher?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Wichtel Roland ist sich sicher: „Solange der Weihnachtsmann nicht aus Versehen dem letzten Kind auf der Liste sein Geschenk gibt, hat Eleonora nichts zu befürchten.“

2. Wichtel Johannes sagt: „Falls nur drei Kinder auf der Liste stehen, ist die Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$.“

3. Wichtel Saskia meint jedoch: „Selbst wenn wir genau wüssten, wie viele Kinder in diesem Jahr auf der Liste stehen, können wir das gar nicht ausrechnen.“

4. Wichtel Antje vermutet: „Je mehr Kinder auf der Liste stehen, umso kleiner ist die Wahrscheinlichkeit, dass Eleonora das Geschenk dem richtigen Kind geben kann.“

5. Wichtel Lina erwidert: „Quatsch! Je mehr Kinder auf der Liste stehen, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass Eleonora das Geschenk dem richtigen Kind geben kann.“

6. Wichtel Mareks Tipp: „Wir müssen genau zwei verschiedene Wahrscheinlichkeiten ausrechnen. Eine für den Fall, dass die Anzahl der Kinder auf der Liste gerade ist. Und eine für den Fall, dass die Anzahl ungerade ist.“

7. Wichtel Nadja resigniert: „Eleonora sollte sich keine Hoffnungen machen... Die Wahrscheinlichkeit ist zwar (unabhängig von der Anzahl der Kinder auf der Liste) konstant, sie beträgt allerdings weniger als 10 %.“

8. Wichtel Kristina lacht: „Ich weiß gar nicht, was ihr habt. Die Wahrscheinlichkeit ist doch einfach $\frac{1}{2}$.“

9. Der Leiter der Wichtelschule Robert versteht die Aufregung nicht: „Es wird garantiert klappen.“

10. Wichtel Falk ist sich dennoch unsicher: „Also die Antworten von euch allen scheinen mir viel zu einfach. Die Lösung muss anders sein.“

Projektbezug:

Das *Berliner Netzwerk mathematisch-naturwissenschaftlich profilierter Schulen* existiert seit September 2001 und hat folgende Ziele gesetzt:

- Schaffung einen stadtweiten Netzwerks von Berliner Gymnasien mit bestehendem oder aufzubauendem mathematisch-naturwissenschaftlichem Profil und den mathematisch-naturwissenschaftlichen Instituten der Humboldt-Universität am Wissenschaftsstandort Adlershof.

- Festlegen von Standards für Leistungskurse in Mathematik und den anderen beteiligten naturwissenschaftlichen Fächern, die die Anerkennung von Abiturleistungen als Studienleistungen ermöglichen.

Die Senatorin für Bildung, Jugend und Familie sowie die Universitätsleitung der Humboldt-Universität begrüßen und unterstützen dieses Vorhaben. Als Vision für die Zukunft stellen wir uns außerdem ein mathematisch-naturwissenschaftlich profiliertes Gymnasium am Wissenschafts- und Wirtschaftsstandort Adlershof vor, das direkt mit den Instituten der Humboldt-Universität vernetzt ist.

Weitere Infomationen unter:
`http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/de/schule/schulkooperationen`

14.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Sei $n \geq 2$ die Anzahl der Kinder. Wir behaupten, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Eleonora dem richtigen Kind sein Geschenk geben kann, immer $p(n) = \frac{1}{2}$ ist.

Sei zunächst $n = 2$: Hier gibt der Weihnachtsmann entweder dem richtigen Kind sein Geschenk oder dem falschen. Beide Fälle treten mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf. Im ersten Fall kann Eleonora ebenfalls dem richtigen Kind sein Geschenk geben. Im zweiten Fall jedoch nicht. Es gilt demnach $p(2) = \frac{1}{2}$, wie behauptet.

Sei nun $n \geq 3$. Wir unterscheiden verschiedene Fälle:

Fall 1: Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ gibt Weihnachtsmann dem richtigen (d. h. ersten) Kind sein Geschenk. In diesem Fall kann auch Eleonora dem richtigen (d. h. letzten) Kind sein Geschenk.

Fall 2: Ebenfalls mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ gibt Weihnachtsmann dem letzten Kind sein Geschenk. In diesem Fall muss Eleonora definitiv einem anderen Kind sein Geschenk geben.

Fall 3: Mit jeweils einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ gibt der Weihnachtsmann dem Kind k mit $1 < k < n$ sein Geschenk. Was passiert in diesen Fällen?

- Für $k = n - 1$ gilt: Kind 1 bekommt das falsche Geschenk (nämlich das von Kind $n - 1$). Die Kinder 2 bis $n - 2$ bekommen das richtige Geschenk. Kind $n - 1$ bekommt nun entweder das Geschenk von Kind 1 (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) oder das von Kind n (ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$). Im ersten Fall kann Eleonora dem richtigen Kind sein Geschenk geben. Im zweiten jedoch nicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Eleonora dem richtigen Kind sein Geschenk geben kann, ist also $\frac{1}{2}$.
- Für $k = n - 2$ gilt: Kind 1 bekommt das falsche Geschenk. Die Kinder 2 bis $n - 3$ bekommen das richtige Geschenk. Kind $n - 2$ bekommt nun jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$
  - das Geschenk von Kind 1 und Eleonora kann dem richtigen Kind sein Geschenk geben;

  - das Geschenk von Kind n und Eleonora wird definitiv dem falschen Kind sein Geschenk geben;
  - das Geschenk von Kind $n-1$. Dann wissen wir jedoch, dass Eleonora noch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dem richtigen Kind sein Geschenk geben kann.

  Insgesamt kann Eleonora im Fall $k = n-2$ mit der Wahrscheinlichkeit

  $$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

  dem richtigen Kind sein Geschenk geben.

- Für $k = n-3$ gilt: Kind 1 bekommt das falsche Geschenk. Die Kinder 2 bis $n-4$ bekommen das richtige Geschenk. Kind $n-3$ bekommt nun jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$

  - das Geschenk von Kind 1 und Eleonora kann dem richtigen Kind sein Geschenk geben;
  - das Geschenk von Kind n und Eleonora wird definitiv dem falschen Kind sein Geschenk geben;
  - das Geschenk von Kind $n-1$ – dann wissen wir jedoch, dass Eleonora noch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dem richtigen Kind sein Geschenk geben kann;
  - das Geschenk von Kind $n-2$ – dann wissen wir jedoch, dass Eleonora noch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dem richtigen Kind sein Geschenk geben kann.

  Insgesamt kann Eleonora im Fall $k = n-3$ mit der Wahrscheinlichkeit

  $$\tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

  dem richtigen Kind sein Geschenk geben.

- Ebenso gilt für alle $1 < k < n-1$, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Eleonora dem richtigen Kind sein Geschenk geben kann, gerade $\frac{1}{2}$ ist, da wir den Fall k immer auf die $(n-k-1)$ Fälle $k+1$ bis $n-1$ zurückführen können:

  $$\frac{1}{n-k+1} + (n-k-1) \cdot \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+(n-k-1)}{2(n-k+1)} = \frac{n-k+1}{2(n-k+1)} = \frac{1}{2}$$

Insgesamt gilt dann also, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Eleonora dem richtigen (d. h. n-tem) Kind sein Geschenk geben kann:

$$p(n) = \frac{1}{n} + (n-2) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+(n-2)}{2n} = \frac{n}{2n} = \mathbf{\frac{1}{2}}.$$

15 Mützenrätsel 2020

Autor: Tilman Burghoff (MATH+ Schulaktivitäten)

15.1 Aufgabe

Wie die Tradition es fordert, hat der Weihnachtsmann auch dieses Jahr wieder einige seiner schlauesten Wichtel auf Kaffee und Kuchen eingeladen. Die zehn Intelligenzwichtel sind schon ganz aufgeregt, als der Weihnachtsmann endlich aufkreuzt. „Bitte entschuldigt die Verspätung“, ruft er keuchend. „Ich musste noch ein paar Mützen besorgen. Na gut, dann lasst uns anfangen: Meine lieben Intelligenzwichtel! Wie jedes Jahr möchte ich euch auch heute wieder die Chance auf Kaffee und Kuchen geben. Ihr müsst dafür nur die Farbe der Mütze auf eurem Kopf erraten!“

„Rot!“, ruft Egobert. Der Weihnachtsmann muss lachen: „Natürlich erst sobald ich euch die Mützen aufgesetzt habe. Es ist ganz einfach: Sobald es losgeht, stellt ihr euch in einer Reihe hintereinander auf. Achtet dabei bitte darauf, dass jeder von euch nur die Personen sieht, die vor ihm stehen. Das bedeutet, wenn Albert ganz hinten steht sieht er alle anderen: Bertha, Claudio und so weiter bis Julia. Aber Bertha, die an zweitletzter Stelle steht, sieht nur noch Claudio bis Julia, aber nicht mehr Albert, verstanden? Und wehe ihr schummelt! Sobald ihr euch alle in einer Reihe aufgestellt habt, bekommt jeder von euch entweder eine rote oder eine grüne Mütze aufgesetzt – natürlich so, dass ihr sie nicht selber sehen könnt. Danach dürft ihr nacheinander eure Mützenfarbe raten. Albert (der ja ganz hinten steht) fängt an und sagt laut entweder ‚Rot!‘ oder ‚Grün!‘. Danach ist Bertha dran, danach Claudio und so weiter. Ich löse dann ganz am Ende auf, wie viele Wichtel ihre Mützenfarbe richtig geraten haben. Je mehr ihr richtig erratet, desto mehr Kuchen gibt es später.“

„Dürfen wir uns absprechen?“, fragt Franka.
„Jetzt gerne. Sobald ich anfange euch die Mützen aufzusetzen will ich keinen Mucks mehr hören. Ihr dürft nur noch einmal ‚Rot!‘ oder ‚Grün!‘ sagen, wenn ihr dran seid. Und bitte versucht nicht, noch weitere Informationen zu kommunizieren. Sei es darüber wie ihr eure Vermutung äußert oder wie lange ihr wartet oder so in der Art. Dann müsste ich nämlich den ganzen Kuchen alleine aufessen...“ Er guckt traurig seinen runden Weihnachtsmannbauch an. „Habt ihr noch Fragen?“

„Sind die Mützen zufällig ausgewählt?“, fragt Immanuel.
„Ja, ich wähle die Mützenfarbe völlig zufällig aus.“

Die Wichtel finden nach einigem Nachdenken eine Strategie, die ihnen so viel Kuchen wie möglich garantiert. Was ist die maximale Anzahl an Wichteln die ihre Mützenfarbe *garantiert* richtig erraten werden?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Kein Wichtel.
2. Ein Wichtel.
3. Zwei Wichtel.
4. Drei Wichtel.
5. Vier Wichtel.
6. Fünf Wichtel.
7. Sechs Wichtel.
8. Sieben Wichtel.
9. Acht Wichtel.
10. Neun Wichtel.

15.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Leider können die Wichtel nicht garantiert alle zehn Mützen richtig erraten, da Albert keine Informationen über seine Mützenfarbe besitzt und er seine Mützenfarbe daher nur mit Wahrscheinlichkeit 1/2 richtig rät. Mit folgender Strategie gelingt es ihnen aber alle neun weiteren Mützenfarben korrekt zu erraten:
Albert fängt an und sagt entweder:

- „**Grün!**“, wenn er eine *gerade Anzahl an grünen Mützen* auf den Köpfen der neun Wichtel, die vor ihm stehen, sieht, oder
- „**Rot!**“, wenn er eine *ungerade Anzahl an grünen Mützen* auf den Köpfen der neun Wichtel, die vor ihm stehen, sieht.

Nehmen wir einmal an er sagt „Grün!“. Als nächstes ist Bertha dran. Sie weiß, dass Albert eine gerade Anzahl an grünen Mützen gesehen hat. Wenn sie auch eine gerade Anzahl an grünen Mützen auf den Köpfen der verbleibenden acht Wichtel sieht, muss sie selbst eine rote Mütze tragen. Ansonsten ist ihre Mütze grün. Der nächste Wichtel, Claudio, weiß nun welche Mütze Bertha trägt und sieht wie viele der sieben Wichtel, die vor ihm stehen, noch eine grüne Mütze tragen. Dadurch kann Claudio sich errechnen, ob Albert eine gerade Anzahl an Mützen gesehen hätte, wenn er (Claudio) eine grüne Mütze tragen würde, und kann daraus folgern ob er eine grüne oder eine rote Mütze trägt. Auf diese Weise können dann auch die restlichen Wichtel ihre Mützenfarbe bestimmen.

Wenn Albert stattdessen „Rot!“ sagt, wissen die Wichtel, dass er eine ungerade Anzahl an grünen Mützen gesehen hat und können sich daraus wiederum ihre eigene Mützenfarbe erschließen. Daher wissen wir, dass außer Albert alle **neun Wichtel** ihre Mützenfarbe sicher bestimmen können.

Tatsächlich können für einen beliebigen Wichtel (außer Albert) sogar eine explizite Formel angeben, aus der wir die Mützenfarbe ableiten können. Dazu sei x die Anzahl wie oft bisher „Grün!“ gesagt wurde, und y beschreibe wie viele grüne Mützen der Wichtel vor sich sieht. Dann gilt:

$$\text{Wichtel trägt eine grüne Mütze} \quad \Leftrightarrow \quad x + y \equiv 0 \mod 2.$$

16 Mützen, die schützen

Autor: Paul Erchinger (MATH+ Schulaktivitäten)

16.1 Aufgabe

Die Adventszeit hat begonnen. In Wichtelstadt ist die Vorfreude auf die kommenden Festtage kaum zu bremsen. Es gibt nur eine Sorge: Seit November zeichnet sich eine dramatische Steigerung von Halloween-Grusel-Floh-Fällen ab. Dabei handelt es sich um eine ganz besonders tückische Art von Floh, die sich auf den Köpfen der Wirte ansiedelt und diese mit dem *Spuk* infiziert. Vom Spuk betroffene Wichtel erschrecken (ohne Vorwarnung und zu zufälligen Zeitpunkten) andere Wichtel sprichwörtlich zu Tode. Um das Wohlbefinden der Bevölkerung zu sichern, muss die Wichtelbürgermeisterin Alva zusammen mit ihrem Expertinnen-Team eine Strategie entwickeln, um diese Gefährdung der Weihnachtsstimmung einzudämmen.

Eine Flohinfektion geschieht folgendermaßen: Falls sich eine von Flöhen befallene Person und eine „gesunde“ Person begegnen, hüpfen die gewieften Flöhe definitiv auf die andere Person über, sodass danach beide Personen infiziert sind. Wie es sich gehört, trägt jede Bewohnerin von Wichtelstadt (sobald sie das Haus verlässt) eine Wichtelmütze. Diese *normale* Wichtelmütze sieht zwar gut aus, hilft jedoch nicht gegen eine Flohinfektion: Unter der Wichtelmütze einer infizierten Wichtelin krabbeln die Flöhe einfach durch die Mütze nach außen, springen auf die Mütze einer anderen Wichtelin über und gelangen durch diese auf deren Kopf.

Forscherinnen in Wichtelstadt haben daher die neuartige Mütze *IBeanie* entwickelt, welche das Risiko einer Infektion drastisch reduziert:

- Die *IBeanie* hindert die Flöhe in 50 % der Fälle daran, aus der Mütze herauszukrabbeln.
- In 95 % der Fälle gelangen die Flöhe von außen nicht durch die Mütze hindurch auf den Kopf.

Das heißt, wenn sich zwei Personen mit *IBeanie* begegnen, von denen eine mit Flöhen infiziert ist, liegt das Risiko einer Ansteckung für die andere Person bei nur 2,5 %.

Erfahrungsgemäß werden sich jedoch einige der Bewohnerinnen von Wichtelstadt weigern ihre stylische *normale* Mütze gegen die etwas plumpere neue *IBeanie* einzutauschen. Wenn sich aber zwei Personen begegnen, von denen nur eine die *IBeanie* trägt, ist das Risiko einer Infektion entsprechend größer.

Sei p (in %) der Anteil der Bewohnerinnen von Wichtelstadt, die *keine IBeanie* tragen. Alva möchte, dass das Risiko einer Ansteckung, wenn eine beliebige gesunde Person einer beliebigen infizierten Personen begegnet, maximal 13 % beträgt.

Sei p (in Prozent) der Anteil der Bewohnerinnen von Wichtelstadt, die *eine IBeanie* tragen. Welches ist das kleinste ganzzahlige p, sodass Alvas Bedingung erfüllt ist? Genauer suchen wir die Quersumme von p.

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Quersumme von p ist 1.
2. Die Quersumme von p ist 3.
3. Die Quersumme von p ist 5.
4. Die Quersumme von p ist 7.
5. Die Quersumme von p ist 9.
6. Die Quersumme von p ist 11.

7. Die Quersumme von p ist 13.
8. Die Quersumme von p ist 15.
9. Die Quersumme von p ist 17.
10. Es existiert kein solches p.

16.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Um dieses Problem zu lösen untersuchen wir zunächst die Wahrscheinlichkeiten einer Infektion bei den unterschiedlichen Arten von Begegnungen.

1. **Sowohl die infizierte, als auch die gesunde Person tragen eine *IBeanie*.**

   Dieser Fall wurde bereits in der Aufgabenstellung erwähnt, wir wollen uns aber an dieser Stelle noch einmal von der Richtigkeit der Aussage überzeugen: Da die *IBeanie* die Flöhe zu 50 % daran hindert aus der Mütze zu krabbeln und zu 95 % daran hindert hinein zu kommen, ist die Wahrscheinlichkeit einer Ansteckung

   $$p_1 = (1 - 0{,}5) \cdot (1 - 0{,}95) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}025,$$

   also 2,5 % wie behauptet.

2. **Die infizierte Person trägt eine *IBeanie*, die gesunde Person jedoch nicht.**

   In diesem Fall wissen wir, dass nur die *IBeanie* der infizierten Person die Flöhe daran hindert aus der Mütze zu kriechen. Die zweite Person besitzt jedoch keinerlei Schutz. Dementsprechend liegt die Wahrscheinlichkeit eines Flohübersprungs bei

   $$p_2 = (1 - 0{,}5) \cdot (1 - 0) = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5.$$

3. **Die infizierte Person trägt keine *IBeanie*, die gesunde Person jedoch schon.**

   Hier schützt also die *IBeanie* der gesunden Person vor dem Eindringen der Flöhe in die Kopfgegend, jedoch können die Flöhe ungehindert vom Kopf der infizierten Person entfliehen. Für die Wahrscheinlichkeit einer Neuinfektion erhalten wir demnach

   $$p_3 = (1 - 0) \cdot (1 - 0{,}95) = 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}05.$$

4. **Weder die infizierte noch die gesunde Person trägt eine *IBeanie*.**

   In diesem Fall ist keine Schutzmaßnahme vorhanden und die Wahrscheinlichkeit einer Infektion liegt bei $p_4 = 1$.

Um nun die Bedingung von Alva betrachten zu können, stellen wir fest, dass bei unterschiedlichen Werten von p die oben betrachteten Fälle nicht immer gleich wahrscheinlich sind. Tragen nämlich beispielsweise nur 25 % der Bewohnerinnen von Wichtelstadt eine *IBeanie* kommt Fall 1 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625 = 6{,}25\,\%$ vor, wohingegen Fall 4 mit $0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625 = 56{,}25\,\%$ deutlich öfter vorkommt. Ist nun p der Anteil der Wichtelstadtbewohnerinnen, die eine *IBeanie*, dann gilt für die Auftrittshäufigkeiten der vier Fälle, dass

1. $h_1 = p \cdot p = p^2$,
2. $h_2 = p \cdot (1-p)$,
3. $h_3 = (1-p) \cdot p$, bzw.
4. $h_4 = (1-p) \cdot (1-p) = (1-p)^2$.

Verrechnen wir diese Auftrittshäufigkeiten der Fälle nun mit den vorher berechneten Infektionswahrscheinlichkeiten, erhalten wir mit

$$\begin{aligned} f(p) &= h_1 \cdot p_1 + h_2 \cdot p_2 + h_3 \cdot p_3 + h_4 \cdot p_4 \\ &= p^2 \cdot 0{,}025 + p(1-p) \cdot 0{,}5 + (1-p)p \cdot 0{,}05 + (1-p)^2 \cdot 1 \\ &= 0{,}025p^2 - 0{,}5p^2 + 0{,}5p - 0{,}05p^2 + 0{,}05p + p^2 - 2p + 1 \\ &= 0{,}475p^2 - 1{,}45p + 1 \end{aligned}$$

eine Funktion, die uns zu gegebenen p die durchschnittliche Ansteckungsrate bei einer Begegnung berechnet. Alva möchte, dass $f(p) \leq 0{,}13$ gilt, oder äquivalent:

$$f(p) - 0{,}13 \leq 0.$$

Wir erhalten somit die folgende quadratische Ungleichung:

$$\begin{aligned} 0 &\geq 0{,}475p^2 - 1{,}45p + 1 - 0{,}13 \\ &= 0{,}475p^2 - 1{,}45p + 0{,}87 \\ &= \tfrac{19}{40}p^2 - \tfrac{29}{20}p + \tfrac{87}{100}. \end{aligned}$$

Die Nullstellen der rechten Seite sind

$$p_- = \frac{1}{95}\left(145 - \sqrt{4495}\right) \approx 0{,}8206,$$
$$p_+ = \frac{1}{95}\left(145 + \sqrt{4495}\right) \approx 2{,}2321.$$

Da p eine Wahrscheinlichkeit ist, muss $p \leq 1$ gelten. Zusätzlich sieht man, dass $f(p)$ für $0{,}8206 \leq p \leq 1$ kleiner wird. Somit ist also $f(p) \leq 0{,}13$ für alle $p \geq 0{,}8206$. Nun ist für die Aufgabenstellung die kleinste ganzzahlige Prozentzahl erfragt, die diese Ungleichung erfüllt. Da $p = 0{,}83 = 83\,\%$ die kleinste solche Zahl ist, erhalten wir die Quersumme als $8 + 3 = \mathbf{11}$.

17 Wichtelrouten

Autor:innen: Enrico Bortoletto (ZIB),
Karlotta Kruschke (ZIB),
Niels Lindner (ZIB)

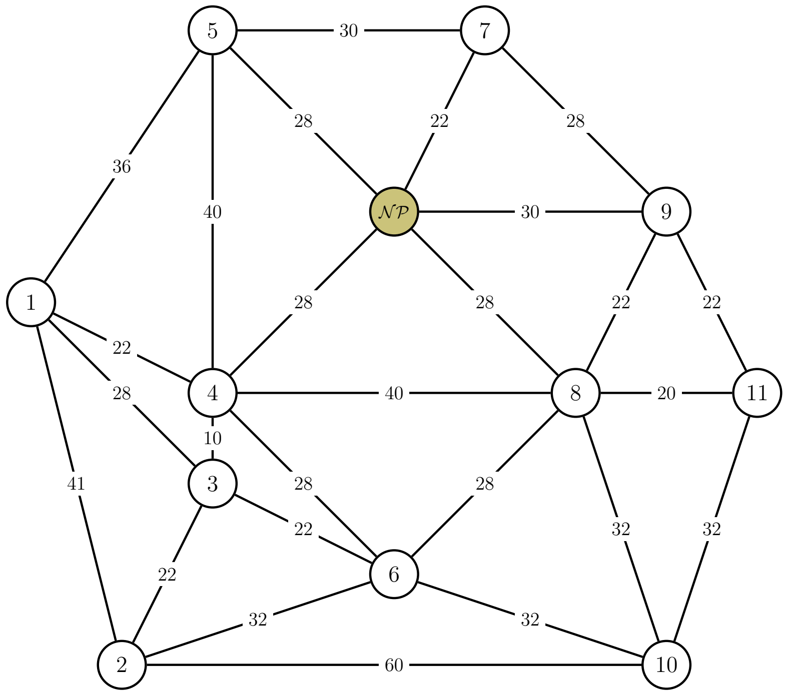
Projekt: Algebraic and Tropical Methods for Periodic Timetabling (MATH+ Incubator Project IN-A1)

17.1 Aufgabe

Wie viele Kinder doch auf dieser Erde leben! Und an Weihnachten wollen sie alle Briefe an den Weihnachtsmann schreiben. In den letzten Jahren mussten die Elfen daher immer mehr Postämter bauen, um all die Briefe zu sortieren. Mittlerweile gibt es zwölf von ihnen, die über den ganzen Nordpol verstreut sind: das Hauptgebäude, genannt $\mathcal{NP}$, und elf weitere Ämter, nummeriert von 1 bis 11.

Elf Ralph seufzt. Er und sein kleiner Bruder Steffan wurden angewiesen, den nächsten Stapel Briefe von den Postämtern in das $\mathcal{NP}$-Gebäude zu bringen, wo sie bearbeitet werden sollten. Obwohl sie Rentiere nutzen dürfen, ist es nicht wirklich angenehm stundenlang durch den Schnee zu reiten. Ralph schaut auf die Karte, auf der nicht nur die Postämter und Reitwege eingezeichnet sind, sondern auch wie viele Minuten man auf den entsprechenden Wegen von Amt zu Amt unterwegs ist. Zusammen mit der Karte erhielt er auch eine Liste mit Postämtern, auf der angegeben ist, wie viele Briefe in jedem Postamt abgeholt werden müssen (s. Abb. 5). „Jeder unserer Rucksäcke kann genau 143 Briefe aufnehmen. Ich bin ziemlich sicher, dass wir das schaffen können“, behauptet Ralph. „Aber welchen Weg sollten wir wählen, um so schnell wie möglich fertig zu werden?“

Ralph und Steffan möchten ihren Auftrag so schnell wie möglich erledigen. Der Auftrag beginnt, sobald die beiden Wichtel das $\mathcal{NP}$-Gebäude verlassen, und ist erledigt, wenn sie mit allen Briefen in das $\mathcal{NP}$-Gebäude zurückkehren. Sie verlassen das Gebäude zur gleichen Zeit. Jedes Mal, wenn einer von ihnen ein Postamt erreicht, holt er entweder *alle* Briefe dort ab oder lässt sie *alle* im Postamt zurück. Um die Briefe abholen zu können, müssen sie natürlich genügend Platz in ihrem Rucksack haben. Da Ralph und Steffan begeisterte Sightseeing-Fans sind, möchte keiner von beiden zweimal dasselbe Postamt besuchen (mit Ausnahme des $\mathcal{NP}$-Gebäudes, zu dem sie aber erst ganz am Ende zurückkehren). Ralph, der stärker ist, wird den längeren Weg nehmen.



Postamt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Briefe	38	76	4	61	37	19	2	3	5	18	23

Abbildung 5: Die Karte der Postämtern. Die Kreise markieren die Postämter. Die Linien sind die Reitwege zwischen den Ämtern, wobei die Zahlen die Reitzeit in Minuten für die entsprechenden Reitwege angeben.

Liste der Postämter mit der Anzahl der abzuholenden Briefe.

Die beiden Wichtel denken eine Weile über ihre kommende Tour nach, sind aber nicht in der Lage, den besten Weg zu finden. Zum Glück kommt ihre Freundin Petra, die wirklich gut in Mathe ist, vorbei und kann ihnen helfen. Sie findet schnell die besten Touren für die beiden, sodass sie ihren Job in möglichst kurzer Zeit abschließen können. „Auf diese Weise wird Ralph nach 3 Stunden und 24 Minuten zurück sein“, meint Petra.

Ralph und Steffan diskutieren Petras Vorschlag:

(a) Steffan: „Obwohl Ralph die Briefe in Postamt 3 abholt, hätte ich genug Zeit um dort auch vorbeizufahren und unsere Cousine Luise zu besuchen. Ich würde sogar trotzdem noch vor Ralph zurück im $\mathcal{NP}$-Gebäude sein!“

(b) **Ralph:** „Cool! Wir können zusammen zum ersten Postamt reiten.“

(c) **Ralph:** „Ich komme nicht am Postamt 4 vorbei.“

(d) **Steffan:** „Derjenige von uns, der die Briefe beim Postamt 3 abholt, wird auch die Briefe aus Postamt 9 mitnehmen.“

(e) **Steffan:** „Ich kann es schaffen, genau eine halbe Stunde vor Ralph zurück zu sein, um ihm einen leckeren Kakao zu kochen. Das wird ihm gefallen!“

Welche dieser Aussagen sind richtig?

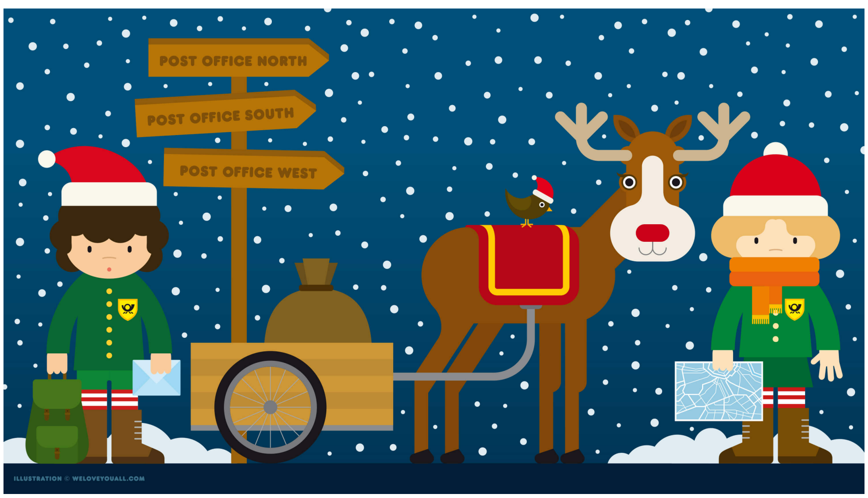


Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. (a), (b) und (c).
2. (a), (b) und (d).
3. (a), (b) und (e).
4. (a), (c) und (d).
5. (a), (c) und (e).
6. (a), (d) und (e).

7. (b), (c) und (d).
8. (b), (c) und (e).
9. (b), (d) und (e).
10. (c), (d) und (e).

Projektbezug:

Das MATH+ Incubator Project *Algebraic and Tropical Methods for Periodic Timetabling* untersucht Verbindungen zwischen der mathematischen Optimierung von Fahrplänen im öffentlichen Verkehr und rein mathematischen Disziplinen. Das Planen von Fahrgast- und Fahrzeugtouren ist ein wichtiges Problem im öffentlichen Nahverkehr. Bei dem hier vorgestellten Problem handelt es sich um ein sogenanntes *Capacitated Vehicle Routing Problem*, das zur Klasse der NP-schweren Optimierungsprobleme gehört. Bisher wurde noch kein effizienter Algorithmus gefunden, der diese Art von Problemen optimal löst. Der Beweis über die Existenz eines solchen Algorithmus ist ein offenes *Millennium-Problem*.

17.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Zunächst werfen wir einen genaueren Blick auf die Liste der Postämter und die Anzahl der Briefe, die dort abgeholt werden müssen:

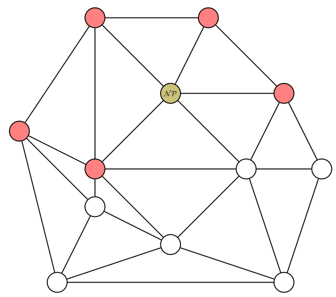
Postamt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Briefe	38	76	4	61	37	19	2	3	5	18	23

Insgesamt gibt es 286 Briefe, was genau $143 + 143$ entspricht. Da in die beiden Rucksäcke jeweils maximal 143 Briefe passen, müssen beide komplett gefüllt werden. Es gibt nur 10 Möglichkeiten, die Postämter so in zwei Teilmengen aufzuteilen, dass die Summe der Briefe genau 143 beträgt. Diese Teilmengenpaare sind:

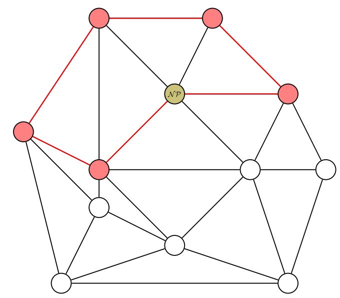
$$\begin{array}{rcl}
76, 61, 4, 2 & \text{und} & 38, 37, 23, 19, 18, 5, 3 \\
76, 38, 23, 4, 2 & \text{und} & 61, 37, 19, 18, 5, 3 \\
76, 38, 19, 5, 3, 2 & \text{und} & 61, 37, 23, 18, 4 \\
76, 38, 18, 5, 4, 2 & \text{und} & 61, 37, 23, 19, 3 \\
76, 37, 23, 5, 2 & \text{und} & 61, 38, 19, 18, 4, 3 \\
76, 37, 23, 4, 3 & \text{und} & 61, 38, 19, 18, 5, 2 \\
76, 37, 19, 5, 4, 2 & \text{und} & 61, 38, 23, 18, 3 \\
76, 37, 18, 5, 4, 3 & \text{und} & 61, 38, 23, 19, 2 \\
76, 23, 19, 18, 5, 2 & \text{und} & 61, 38, 37, 4, 3 \\
76, 23, 19, 18, 4, 3 & \text{und} & 61, 38, 37, 5, 2
\end{array}$$

Diese korrespondieren zu den folgenden Teilmengenpaare der Postämter:

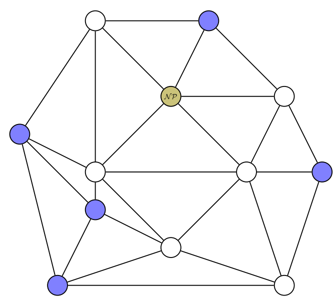
$$2, 3, 4, 7 \quad \text{und} \quad 1, 5, 6, 8, 9, 10, 11 \tag{1}$$
$$1, 2, 3, 7, 11 \quad \text{und} \quad 4, 5, 6, 8, 9, 10 \tag{2}$$
$$1, 2, 6, 7, 8, 9 \quad \text{und} \quad 3, 4, 5, 10, 11 \tag{3}$$
$$1, 2, 3, 7, 9, 10 \quad \text{und} \quad 4, 5, 6, 8, 11 \tag{4}$$
$$2, 5, 7, 9, 11 \quad \text{und} \quad 1, 3, 4, 6, 8, 10 \tag{5}$$
$$2, 3, 5, 8, 11 \quad \text{und} \quad 1, 4, 6, 7, 9, 10 \tag{6}$$
$$2, 3, 5, 6, 7, 9 \quad \text{und} \quad 1, 4, 8, 10, 11 \tag{7}$$
$$2, 3, 7, 8, 9, 10 \quad \text{und} \quad 1, 4, 5, 6, 11 \tag{8}$$
$$2, 6, 7, 9, 10, 11 \quad \text{und} \quad 1, 3, 4, 5, 8 \tag{9}$$
$$2, 3, 6, 8, 10, 11 \quad \text{und} \quad 1, 4, 5, 7, 9 \tag{10}$$



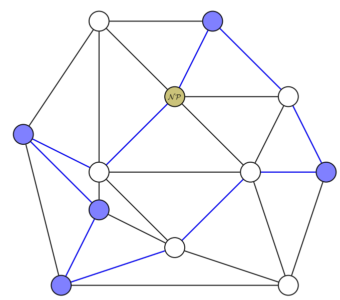
(a) Postamtknoten mit 143 Briefen, dicht beieinander liegend



(b) Kürzeste Tour (174 min)



(c) Postamtknoten mit 143 Briefen, über die Karte verstreut



(d) Kürzeste Tour (252 min)

Abbildung 6: Teilmengen von Knoten und die zugehörigen kürzesten Touren

Eine einfacher Lösungsweg bestände nun daraus, die Liste von oben nach unten durchzugehen und für jedes Paar die beiden kürzesten Touren zu berechnen. In einem kleinen Graphen, wie das in dieser Aufgabenstellung der Fall ist, kann man kürzeste Touren schnell durch Intuition finden. Bei größeren Graphen ist dies allerdings sehr schwierig. Wie man Lösungen für solche Graphen schnell finden kann, wird immer noch erforscht. Dank Petras Aussage wissen wir jedoch, dass wir eine optimale Lösung gefunden haben, wenn wir ein Teilmengenpaar finden, bei dem die längere Tour 3 Stunden und 24 Minuten braucht.

Das vorliegende Problem lässt sich aber möglicherweise noch effizienter lösen: Da es sich bei dem Graphen um eine Karte handelt, bietet es sich an, die Standorte der Postämter der obigen Teilmengenpaare zu untersuchen. Wenn die Standorte in einer Teilmenge über die gesamte Karte verteilt sind, wird es wahrscheinlich sehr lange dauern alle zu besuchen (s. Abb. 6(c), (d)). Wenn sie allerdings nah beieinander liegen, wird die resultierende Rundtour wahrscheinlich kurz (s. Abb. 6(a), (b)). Anstatt stumpf die Postämter von oben nach unten durchzugehen, bietet es sich also an zunächst zu schauen, wo die Ämter einer Teilmenge auf der Karte liegen. Dann ließe sich dass vielversprechendste Teilmengenpaar zuerst untersuchen.

In der obigen Liste der Paare sieht Nummer 10 am vielversprechendsten aus. Für die beiden kürzesten Touren ist es einfach, ihre Dauer zu berechnen. Die Reitzeiten der in der roten Tour enthaltenen Wege summieren sich auf 174 Minuten, die der blauen Tour auf 204 Minuten. Ralph, der die längere Tour nimmt, würde also nach 3 Stunden und 24 Minuten zurückkehren. Da wir wissen, dass dies die optimale Dauer ist, haben wir eine optimale Lösung gefunden (s. Abb. 7).

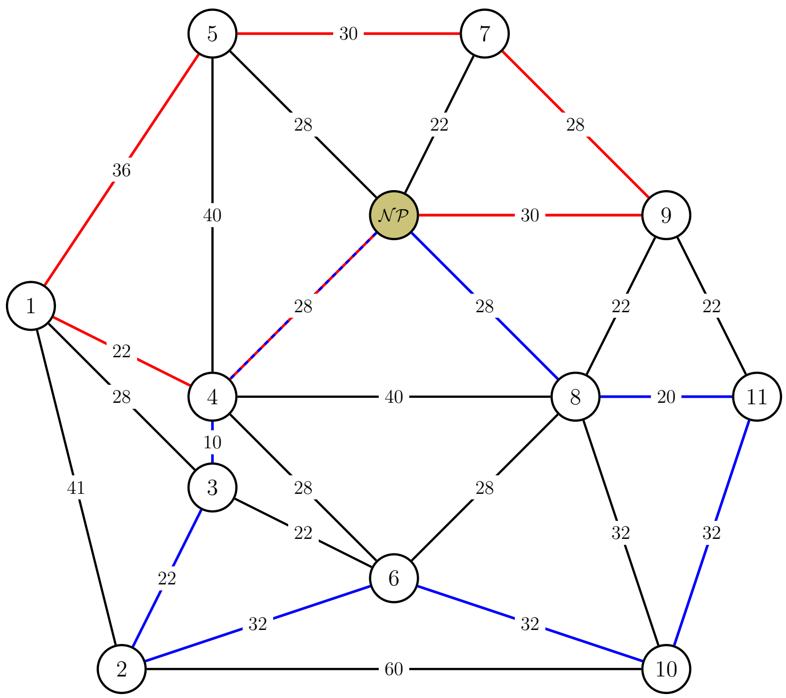


Abbildung 7: Eine optimale Lösung

Mit diesem Wissen ist es ein Leichtes die Aussagen zu überprüfen oder sie zu widerlegen:

(a) **Wahr.** Da Steffan die kürzere Tour nimmt, hat er etwas Zeit übrig. Solange er nicht später als Ralph zurückkehrt, kann er diese zusätzliche

Zeit nutzen, um Luise zu besuchen, ohne dass sich die Gesamtzeit für die Erfüllung der Aufgabe verschlechtert. Wenn er, anstatt direkt von Postamt 4 zu Postamt 1 zu reiten (oder umgekehrt), zwischendurch beim Postamt 3 hält, dauert sein Rundritt 16 Minuten länger. Das bedeutet, dass er 14 Minuten mit Luise verbringen kann.

(b) **Wahr.** In der in Abbildung 7 dargestellten optimalen Lösung nutzen sowohl Ralph als auch Steffan den Weg vom $\mathcal{NP}$-Gebäude zum Postamt 4. Da es keine Einschränkung hinsichtlich der Richtung der Touren gibt, können sie beschließen, diesen gemeinsam zu fahren.

(c) **Falsch.** Obwohl Steffan die Briefe im Büro 4 abholen wird, muss auch Ralph dort vorbeikommen, da sein Rundritt sonst länger als 3 Stunden und 24 Minuten dauern würde.

(d) **Falsch.** Es gibt 4 Briefe im Postamt 3 und 5 im Postamt 9. Die einzigen Mengenpaare, in denen derselbe Wichtel in beiden Ämtern Briefe mitnimmt, sind die Paare (4), (7) und (8). Jede dieser Routen dauert allerdings länger als die von Petra versprochenen 204 Minuten.

Nr.	Tour	Dauer
(4)	$\mathcal{NP} \to 7 \to 9 \to 10 \to 2 \to 3 \to 1 \to \mathcal{NP}$	264 min
(7)	$\mathcal{NP} \to 8 \to 11 \to 10 \to 1 \to 4 \to \mathcal{NP}$	212 min
(8)	$\mathcal{NP} \to 5 \to 1 \to 4 \to 6 \to 11 \to \mathcal{NP}$	214 min

(e) **Wahr.** Die kürzeste Tour für Steffan ist in Abb. 7 in rot eingezeichnet. Sie dauert 2 Stunden und 54 Minuten. Wenn Steffan diesen Rundgang macht, wird er eine halbe Stunde vor Ralph wieder im $\mathcal{NP}$-Gebäude eintreffen.

18 Zauberleim

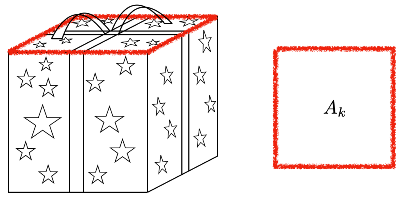
Autor:innen: Anieza Maltsi (WIAS), Alexander Mielke (WIAS), Stefanie Schindler (WIAS), Artur Stephan (WIAS)

Projekt: Model-based geometry reconstruction from TEM images (MATH+ Emerging Field Project EF3-1)

18.1 Aufgabe

Letztes Weihnachten ist etwas wahrhaft Furchtbares passiert. Wie jedes Jahr brachte der Weihnachtsmann den Kindern auf der ganzen Welt Geschenke, von denen aber einige vom Grinch gestohlen wurden. Der gemeine Grinch packte die Geschenke aus, stahl die Geschenke und ließ die leere Verpackung zurück. Folglich bekamen diese Kinder nicht die Geschenke, die sie eigentlich verdient hatten. Natürlich waren darüber nicht nur die Kinder, sondern auch der Weihnachtsmann tieftraurig. Er war so schockiert über die Geschehnisse, dass er sich schwor, dass so etwas nie wieder passieren würde. Der Weihnachtsmann bat daher seine Elfen darum, eine Lösung zu finden.

Nach langem Grübeln hatten die Elfen folgende Idee: Sie wollen Geschenkschachteln basteln, die nur von genau dem Kind geöffnet werden können, an das der Geschenkkarton adressiert ist. Selbstverständlich erfordert ein solches Vorhaben Magie, weshalb sie ihre Feenfreundin um Rat fragen. Tatsächlich besitzt die Fee einen Zauberleim, den die Elfen benutzen können. Die Elfen füllen Geschenkkartons mit Spielzeug und versiegeln diese mit dem Zauberleim der Fee. Nach einer Weile merken die Elfen plötzlich, dass der Zauberleim aufgebraucht ist, bevor alle Pakete fertig gepackt und versiegelt sind. Deshalb bitten sie ihre Feenfreundin erneut um Hilfe. Die Fee will ihnen natürlich gerne helfen, hat aber nur noch genau 2020 g des Zauberleims übrig. Anstatt in Panik zu geraten, beschließen die Elfen, ihre mathematischen Superkräfte zu nutzen und auszurechnen, wie viele Schachteln sie mit dieser Menge Zauberleim versiegeln können.



Die Geschenkpakete sind Würfel von unterschiedlicher Größe. Die Elfen müssen den Leim nur an der Kante der oberen Fläche (ein Quadrat) auftragen. Wir bezeichnen diese Quadrate mit $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Die Elfen wissen, dass die Fläche des Quadrats A_k des k-ten Pakets durch

$$\operatorname{area}(A_k) = 625 \left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) \mathrm{cm}^2$$

gegeben ist. Aus Effizienzgründen sind die Kartons ineinander gestapelt und die Elfen müssen die Kartons in absteigender Größe bearbeiten. Aus früheren Verpackungserfahrungen wissen die Elfen, dass sie für eine Linie von 1 cm genau 0,15 g Klebstoff benötigen.

Wie viele Kartons können die Elfen mit den 2020 g Zauberleim verschließen?

Artwork: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. 127 Kartons.
2. 128 Kartons.
3. 129 Kartons.
4. 130 Kartons.
5. 131 Kartons.
6. 132 Kartons.
7. 133 Kartons.
8. 134 Kartons.
9. 135 Kartons.
10. 136 Kartons.

Projektbezug:

Das MATH+ Projekt EF3-1 *Model-based geometry reconstruction from TEM images* analysiert Bilder von Transmissionselektronenmikroskopen (TEM), die von Experimentalphysikern der TU Berlin gewonnen wurden. Die mathematische Aufgabe besteht darin, die elektronische Schrödinger-Gleichung durch eine endlich-dimensionale Approximation zu reduzieren. Zur Auswertung des Approximationsfehlers verwendet man ähnliche Abschätzungen wie in diesem Rätsel.

18.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Die Elfen haben genug Zauberleim für genau 133 Kartons. Wir werden die Aufgabe in zwei Schritten lösen:

1. Für eine gegebene Anzahl an Kartons n berechnen wir die Gesamtlänge $l(n)$ der Strecke für die Zauberleim benötigt wird und die dazugehörige benötigte Menge an Zauberleim $z(n) = 0{,}15\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}} \cdot l(n)$.

2. Anschließend setzen wir die verfügbare Menge an Zauberleim (2020 g) mit $z(n)$ gleich und lösen die Gleichung nach n auf.

Beginnen wir also mit der Berechnung von $l(n)$ für eine gegebene Anzahl n an Kartons: Wir wissen, dass die Fläche des k-ten Quadrats

$$\mathrm{area}(A_k) = 625\left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\right)\mathrm{cm}^2$$

ist. Daher hat jede Seite von A_k eine Länge von

$$a_k := 25\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}\ \mathrm{cm}.$$

Da die obere Seite der Kartons vier Seiten hat, wird der Zauberleim für eine Strecke der Länge

$$l(n) = 4\sum_{k=1}^{n} a_k$$

benötigt.

Wir wollen nun diese Summe vereinfachen. Dazu bemerken wir zunächst, dass der Term unter der Wurzel wie folgt umgeformt werden kann:

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} &= \frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2+2k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2+2k(k+1)+1}{k^2(k+1)^2} \\
&= \frac{(k(k+1)+1)^2}{k^2(k+1)^2} \\
&= \frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, dass

$$
\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{k^2+k+1}{k(k+1)}.
$$

Wir benutzen nun die Partialbruchzerlegung,

$$
\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},
$$

und erhalten

$$
\frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = \frac{k(k+1)+1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.
$$

Somit ist die Gesamtlänge $l(n)$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
l(n) &= 4\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= 4\sum_{k=1}^{n} 25\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}\,\mathrm{cm} \\
&= 100\,\mathrm{cm}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\
&= 100\,\mathrm{cm}\cdot\left(n+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\}\right) \\
&= 100\,\mathrm{cm}\cdot\left(n+\left\{1-\tfrac{1}{2}\right\}+\left\{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right\}+\cdots+\left\{\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n}\right\}+\left\{\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}\right\}\right) \\
&= 100\,\mathrm{cm}\cdot\left(n+1+\left\{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right\}+\left\{-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\right\}+\cdots+\left\{-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n}\right\}-\tfrac{1}{n+1}\right) \\
&= 100\,\mathrm{cm}\cdot\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Wie schon bemerkt, ergibt sich die Gesamtmenge an benötigtem Zauberleim durch multiplizieren von $l(n)$ mit der Zauberleimdichte $0{,}15\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}}$:

$$z(n) = 0{,}15\,\tfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}}\cdot l(n).$$

Wir suchen also die größte Zahl n, die die folgende Ungleichung erfüllt:

$$
\begin{aligned}
& z(n) \le 2020\,\mathrm{g} \\
\Leftrightarrow\quad & 0{,}15\,\tfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}}\cdot l(n) \le 2020\,\mathrm{g} \\
\Leftrightarrow\quad & 0{,}15\,\tfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}}\cdot 100\,\mathrm{cm}\cdot\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right) \le 2020\,\mathrm{g} \\
\Leftrightarrow\quad & \left(n+1-\frac{1}{n+1}\right) \le \frac{2020}{15} = \frac{404}{3} = 134.\bar{6}.
\end{aligned}
$$

Da $0 < 1-\frac{1}{n+1} < 1$ gilt, ist die größtmögliche Zahl$n$ entweder $n = 133$ oder $n = 134$. Man berechnet leicht, dass

$$133+1-\frac{1}{133+1} = \frac{17955}{134} \approx 133.99 \le 134.\bar{6},$$

aber

$$134 + 1 - \frac{1}{134+1} = \frac{18225}{135} \approx 134.99 > 134.\bar{6}.$$

gilt. Daher ist die gesuchte Anzahl an Kartons $\mathbf{n = 133}$.

19 Kirschwein

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven),
Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)
Projekt: 4TU.AMI

19.1 Aufgabe

In Knecht Ruprechts Keller stehen 377 versiegelte Flaschen, die alle völlig gleich aussehen. Eine dieser Flaschen enthält köstlichen Kirschwein und die anderen 376 Flaschen enthalten hochgiftigen Tollkirschensaft. Ruprechts Magische Kirschwein-Test-Maschine (MKTM) hat ein riesengroßes Fach, das Platz für bis zu 377 Flaschen bietet, außerdem einen roten Knopf und eine Glühbirne.

Wenn Ruprecht einige Flaschen in das Fach stellt und danach auf den roten Knopf drückt, beginnt die MKTM laut lärmend und unter starkem Energieverbrauch zu arbeiten. Nach ein paar Minuten leuchtet dann die Glühbirne rot oder grün auf.

- Wenn mindestens eine der Flaschen Kirschwein enthält, so verbraucht die MKTM dabei 2 MWh Strom und die Glühbirne leuchtet grün.
- Wenn keine der Flaschen Kirschwein enthält, so verbraucht die MKTM dabei 1 MWh Strom und die Glühbirne leuchtet rot.

Knecht Ruprecht möchte dem Weihnachtsmann eine Flasche Kirschwein schenken.

Wie viel Energie wird die MKTM mit einer bestmöglichen Strategie im schlimmsten Fall verbrauchen, wenn Ruprecht garantiert die Flasche mit dem Kirschwein identifizieren will?

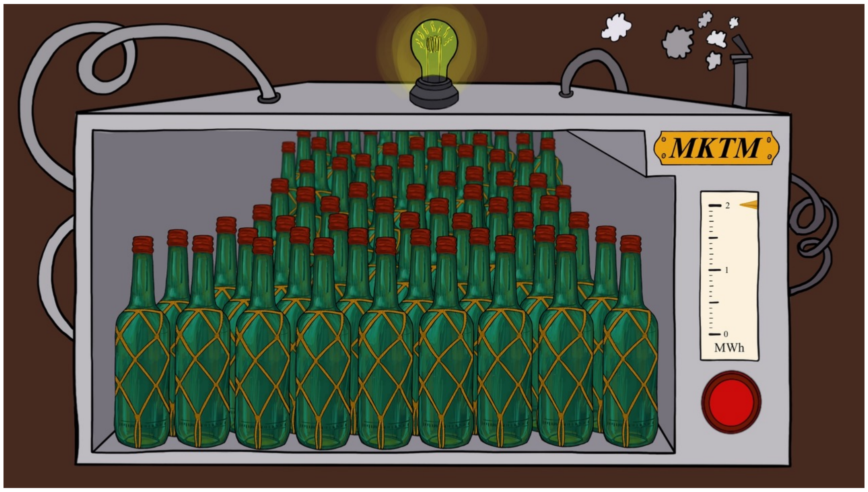


Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 11 MWh Energie verbrauchen.
2. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 12 MWh Energie verbrauchen.
3. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 13 MWh Energie verbrauchen.
4. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 14 MWh Energie verbrauchen.
5. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 15 MWh Energie verbrauchen.
6. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 16 MWh Energie verbrauchen.
7. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 17 MWh Energie verbrauchen.
8. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 18 MWh Energie verbrauchen.
9. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 19 MWh Energie verbrauchen.
10. Im schlimmsten Fall wird Ruprecht 20 MWh Energie verbrauchen.

19.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Wir werden mit der Folge der Fibonacci-Zahlen arbeiten, die mit

$$F_0 = F_1 = 1$$

beginnt und die für $n \geq 2$ durch die Rekursionsgleichung

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

definiert ist. Die folgende Tabelle listet die ersten Zahlen in der Fibonacci-Folge auf:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Wir werden im Folgenden Situationen mit n Flaschen betrachten, von denen $n-1$ Flaschen Tollkirschensaft enthalten, während die letzte Flasche Kirschwein enthält. Mit $M(n)$ bezeichnen wir die Anzahl Megawattstunden, die Ruprecht im schlimmsten Fall in einer derartigen Situation verbrauchen wird, um garantiert eine Flasche Kirschwein zu identifizieren.

In der Situation mit $n = 1$ Flaschen gilt natürlich $M(1) = 0$, da Ruprecht gar keine Tests durchführen muss. Wir zeigen nun mit vollständiger Induktion, dass für $k \geq 2$ immer $M(F_k) = k$ gilt.

Zuerst betrachten wir den Fall $k = 2$ mit $n = F_2 = 2$ Flaschen:
Ruprecht muss eine der beiden Flaschen testen. Da dieser Test positiv ausgehen kann, gilt $M(2) = 2$ genau wie behauptet.

Als nächstes betrachten wir den Fall $k = 3$ mit $n = F_3 = 3$ Flaschen:

1. Ruprecht könnte zunächst eine Flasche testen. Da dieser Test negativ ausgehen kann, verbraucht er in diesem Fall 1 MWh für den ersten Test und im schlimmsten Fall $M(2) = 2$ weitere Megawattstunden, um die verbleibenden zwei Flaschen zu testen.

2. Ruprecht könnte aber auch zwei Flaschen testen. Da dieser Test positiv ausgehen kann, verbraucht er in diesem Fall 2 MWh für den ersten Test und im schlimmsten Fall $M(2) = 2$ weitere Megawattstunden, um die zwei Flaschen eindeutig zu testen. Insgesamt also 4 MWh.

Für $n = F(3) = 3$ Flaschen, sollte sich Ruprecht also für die erste Strategie entscheiden, in der er – wie behauptet – höchstens $M(3) = M(F_3) = 3$ Megawattstunden verbraucht.

Im Induktionsschritt betrachten wir $k \geq 4$ mit $n = F_k$ Flaschen.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$M(F_{k-2}) = k - 2 \quad \text{und} \quad M(F_{k-1}) = k - 1.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung $M(F_k) = k$ zu beweisen. Dazu zeigen wir zunächst, dass *eine* Strategie existiert, die höchstens k Megawattstunden verbraucht. Anschließend zeigen wir, dass alle anderen Strategien im schlimmsten Fall mindestens genau so viele Megawattstunden verbrauchen.

Wenn Ruprecht von den F_k Flaschen zunächst F_{k-2} in die MWTM stellt, tritt einer der beiden folgenden Fälle auf:

+ Der Test der F_{k-2} Flaschen fällt positiv aus, sodass die Maschine 2 MWh verbraucht.

  Dann muss Ruprecht noch die F_{k-2} Flaschen testen, wofür er nach Induktionsannahme maximal $M(F_{k-2}) = k - 2$ Megawattstunden benötigt.

  Insgesamt also höchstens $2 + k - 2 = k$ Megawattstunden.

– Der Test der F_{k-2} Flaschen fällt negativ aus, sodass die Maschine 1 MWh verbraucht.

  Dann muss Ruprecht noch die $F_k - F_{k-2} = F_{k-1}$ Flaschen testen, wofür er nach Induktionsannahme höchstens $M(F_{k-1}) = k - 1$ Megawattstunden benötigt.

  Insgesamt also ebenfalls maximal $1 + k - 1 = k$ Megawattstunden.

Nun zeigen wir, wie angekündigt, dass es keine Strategie gibt, die (im schlimmsten Fall) weniger Energie verbraucht. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Ruprecht stellt $m \geq F_{k-2}$ Flaschen ins Fach der MWTM.

   Dieser Test kann positiv ausgehen, sodass 2 MWh verbraucht werden. Danach im schlimmsten Fall $M(m)$ weitere Megawattstunden, um die m Flaschen zu testen.

Da $m \geq F_{k-2}$, gilt auch $M(m) \geq M(F_{k-2}) = k - 2$.

Insgesamt benötigt Ruprecht im schlimmsten Fall also mindestens $2 + k - 2 = k$ Megawattstunden.

2. Ruprecht stellt $m \leq F_{k-2}$ Flaschen ins Fach.

   Dieser Test kann negativ ausgehen, sodass zunächst nur 1 MWh verbraucht wird. Danach im schlimmsten Fall $M(l)$ weitere Megawattstunden, um die verbleibenden $l = F_k - m$ Flaschen zu testen.

   Da $l = F_k - m \geq F_k - F_{k-2} = F_{k-1}$, gilt auch $M(l) \geq M(F_{k-1}) = k - 1$.

   Insgesamt benötigt Ruprecht im schlimmsten Fall also mindestens $1 + k - 1 = k$ Megawattstunden.

Die vorgeschlagene Strategie ist also tatsächlich optimal und zum Test von F_k Flaschen werden höchstens $M(F_k) = k$ Megawattstunden benötigt.

Da $F_{13} = 377$ gilt, liefert uns diese Formel auch sofort $M(377) = 13$. Im schlimmsten Fall verbraucht Ruprecht demnach **13 MWh**.

20 Und noch eine knackige Mützenaufgabe

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven),
Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

20.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann sagt zu den siebzehn Intelligenzwichteln Alba, Bilbo, Carla, Dondo, Edda, Frodo, Greta, Harpo, Izzy, Jacco, Kira, Loco, Mila, Nemmo, Olga, Puzzo und Quibo: „Meine lieben Intelligenzwichtel! Wie ihr sicherlich wisst, enthält der mathematische Adventskalender jedes Jahr schwierige Denkaufgaben mit bunten Mützen auf Wichtelköpfen. Aus diesem Grund lade ich euch morgen zu einem Nachmittag mit Kaffee und Kuchen ein.“
„Fein, wir kommen gerne!“, rufen die siebzehn Wichtel im Chor.

Der Weihnachtsmann spricht weiter: “Gut, dann werde ich heute Abend 16 rote und 16 blaue Wichtelmützen vorbereiten. Das morgige Mützenspiel besteht dann aus zwei Phasen. Während der **ersten Phase** muss Quibo draußen vor der Türe warten. Die anderen sechzehn Wichtel kommen in mein Vorzimmer, wo die 32 Mützen auf der Kommode liegen. Ich werde dann zufällig auf einen der Wichtel zeigen und dieser muss dann eine rote oder blaue Mütze wählen und aufsetzen. Dann zeige ich auf einen zweiten Wichtel, und auch der muss eine Mütze wählen und aufsetzen. Dann zeige ich auf einen dritten, vierten, fünften Wichtel und so weiter, bis der fünfzehnte Wichtel eine Mütze gewählt und aufgesetzt hat. Zum Schluss wähle ich mir dann noch eine Mütze für den verbleibenden sechzehnten Wichtel aus. Dieser sechzehnte Wichtel hat eine Sonderrolle und wir werden diesen *Wichtel X* nennen. Habt ihr Fragen zu dieser ersten Spielphase?“

Alba fragt: „In welcher Reihenfolge zeigst du denn auf die Wichtel?“
„Die Reihenfolge ist völlig beliebig, so wie sie mir gerade in den Kopf kommt“, sagt der Weihnachtsmann.

Dann fragt Bilbo: „Wenn sich der zweite Wichtel zwischen einer roten und einer blauen Mütze entscheiden muss, kann er oder sie dann die Mütze des ersten Wichtels sehen?“
„Ja!“, antwortet der Weihnachtsmann. „Alles läuft völlig offen ab. Und mit der Ausnahme von Quibo draußen vor der Tür können alle Wichtel zu jeder

Zeit alle Mützen auf allen Köpfen sehen.“

Carla möchte wissen: „Welche Mützenfarbe wählst du denn für Wichtel X?“
„Die Farbe wähle ich so, wie ich will“, sagt der Weihnachtsmann.

Der Weihnachtsmann fährt fort: „In der **zweiten Spielphase** holen wir auch Quibo ins Zimmer. Quibo muss die sechzehn anderen Wichtel in einer langen Reihe von links nach rechts anordnen. Alle Wichtel, die dann links von Wichtel X stehen, werden nach Hause geschickt und bleiben hungrig. Aber alle Wichtel, die rechts von Wichtel X stehen, erhalten ein Stück Apfeltorte und eine Tasse Kaffee. Wichtel X und Quibo erhalten ebenfalls Torte und Kaffee. Gibt es Fragen zur zweiten Spielphase?“

Dondo fragt: „Dürfen wir Quibo beim Anordnen der Wichtelreihe beraten?“
„Nein!“, antwortet der Weihnachtsmann. „Ihr dürft überhaupt keine Informationen an Quibo übermitteln. Und schummeln dürft ihr auch nicht! Aber das wisst ihr ja alles schon aus den Mützenaufgaben der letzten Jahre.“

Die siebzehn Wichtel beginnen zu überlegen. Sie diskutieren und sie denken nach. Sie denken nach und sie diskutieren. Dann diskutieren sie noch mehr und denken noch länger nach. Schließlich denken sie sich eine wirklich geniale Strategie, die die Anzahl M der Wichtel maximiert, die Kaffee und Kuchen erhalten – völlig unabhängig von den Entscheidungen des Weihnachtsmanns in der ersten Spielphase.

Welche der folgenden Aussagen trifft auf diese Zahl M zu?

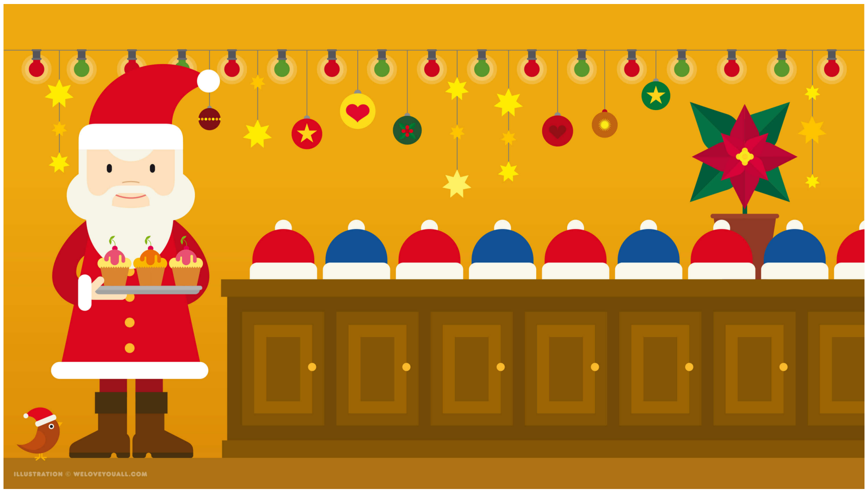


Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. $M \leq 5$.
2. $M = 6$.
3. $M = 7$.
4. $M = 8$.
5. $M = 9$.
6. $M = 10$.
7. $M = 11$.
8. $M = 12$.
9. $M = 13$.
10. $M \geq 14$.

20.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir beschreiben eine mögliche Strategie, die die sechzehn Wichtel in vier Vierergruppen aufteilt:

Gruppe 1:	Alba, Bilbo, Chico, Dondo
Gruppe 2:	Edda, Frodo, Greta, Harpo
Gruppe 3:	Izzy, Jacco, Kira, Loco
Gruppe 4:	Mila, Nemmo, Olga, Puzzo

In jeder Vierergruppe verhalten sich die vier Wichtel während der ersten Spielphase wie folgt: Die jeweils ersten drei Wichtel (jeder Gruppe), auf die der Weihnachtsmann zeigt, wählen jeweils eine **blaue** Mütze. Der vierte Wichtel in jeder Gruppe ist entweder Wichtel X (und erhält seine Mützenfarbe vom Weihnachtsmann zugewiesen) oder nimmt sich andernfalls eine **rote** Mütze.

In der zweiten Spielphase macht Quibo dann Folgendes:

- Wenn Quibo nur drei Wichtel mit **roten** Mützen sieht, muss Wichtel X in der einzigen Vierergruppe mit lauter **blauen** Mützen sein.

  Quibo stellt die vier **blau**mützigen Wichtel in dieser Vierergruppe ganz nach links.

- Wenn Quibo vier Wichtel mit **roten** Mützen sieht, so muss sich Wichtel X unter diesen vier Wichteln befinden.

  Quibo stellt die vier **rot**mützigen Wichtel ganz nach links.

In beiden Fällen befindet sich Wichtel X unter den ersten vier Wichteln ganz links in der Wichtelreihe. Daher stehen höchstens drei Wichtel links von Wichtel X und werden nach Hause geschickt, während **mindestens 14** Wichtel ein Stück Apfeltorte und eine Tasse Kaffee erhalten.

21 Xmasium

Autoren: Cor Hurkens (TU Eindhoven),
Frits Spieksma (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

21.1 Aufgabe

Im Forschungslabor des Weihnachtsmanns wurde vor einigen Jahren ein neues chemisches Element entdeckt und (in Anlehnung an die berühmten Elemente Rubidium, Cäsium und Francium) auf den Namen *Xmasium* getauft. Jedes Xmasium-Atom besteht aus einigen Fermionen und Bosonen und anderen Elementarteilchen. Allerneueste bahnbrechende Forschungsergebnisse haben gezeigt, dass es zwei grundverschiedene Typen von Xmasium-Atomen gibt: Xmasium-Atome *mit* Higgs-Boson und Xmasium-Atome *ohne* Higgs-Boson. Mit den Instrumenten, die zurzeit im Forschungslabor des Weihnachtsmanns verfügbar sind, kann man die beiden Xmasium-Typen allerdings nicht voneinander unterscheiden.

Xmasium-Atome besitzen einige interessante Eigenschaften:

- Wirft man ein Xmasium-Atom A mit Higgs-Boson gegen ein Xmasium-Atom B ohne Higgs-Boson, so wird das Higgs-Boson vom Atom A abgetrennt und bleibt am Atom B kleben. Mit anderen Worten: Beide Xmasium-Atome wechseln durch den Wurf ihren Typ.
- In den anderen drei Fällen (A und B mit Higgs-Boson; A und B ohne Higgs-Boson; A ohne und B mit Higgs-Boson) passiert durch den Wurf gar nichts, und beide Atome behalten weiterhin ihren alten Typ.

Die Übertragung eines Higgs-Bosons geschieht blitzschnell und kann mit den im Forschungslabor vorhandenen Instrumenten nicht beobachtet werden.

Knecht Ruprecht hat sechs Xmasium-Atome X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 und X_6 unbekannten Typs zusammen in einem Kochtopf. Ruprecht möchte gerne zwei Atome vom gleichen Typ auf Hochglanz polieren, in einen Geschenkkarton packen und dem Weihnachtsmann schenken. (Die anderen vier Atome verbleiben Kochtopf.)

Wie viele Würfe mit Xmasium-Atomen muss Knecht Ruprecht im schlimmsten Fall mindestens ausführen, damit er dem Weihnachtsmann garantiert zwei Xmasium-Atome vom selben Typ schenken kann?

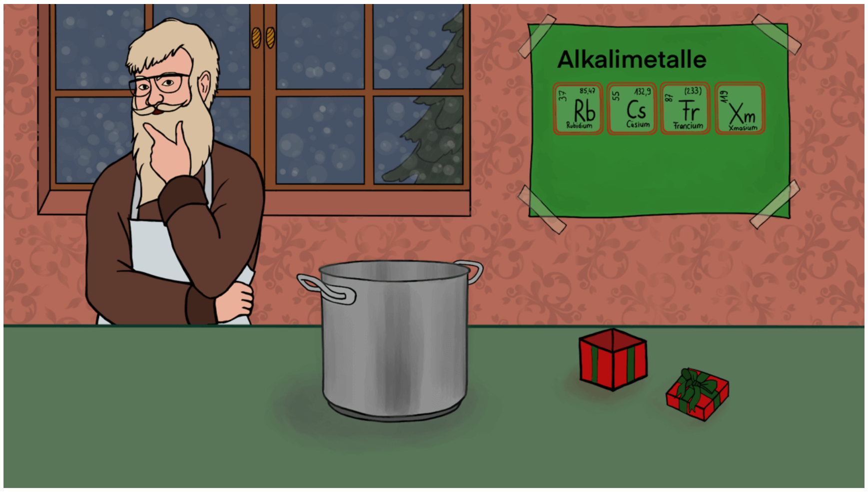


Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Ruprecht braucht im schlimmsten Fall 2 Würfe.
2. Ruprecht braucht im schlimmsten Fall 3 Würfe.
3. Ruprecht braucht im schlimmsten Fall 4 Würfe.
4. Ruprecht braucht im schlimmsten Fall 5 Würfe.
5. Ruprecht braucht im schlimmsten Fall 6 Würfe.
6. Ruprecht braucht im schlimmsten Fall 8 Würfe.
7. Ruprecht braucht im schlimmsten Fall 10 Würfe.
8. Ruprecht braucht im schlimmsten Fall 12 Würfe.
9. Ruprecht braucht im schlimmsten Fall 15 Würfe.
10. Knecht Ruprecht kann diese Aufgabe gar nicht lösen.

21.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Zunächst ordnen wir die sechs Atome $X_1, \ldots, X_6$ (von wir nicht wissen, welchen Typ sie jeweils haben) in einer Reihe von links nach rechts an:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6

Bei jedem Wurf wollen wir die Atome umordnen und unterscheiden dabei die folgenden zwei Fälle:

Fall 1: Wirft Ruprecht ein Atom X_a auf ein Atom X_b, das sich links von X_a befindet, so machen wir gar nichts. Vor und nach dem Wurf haben wir demnach folgende Anordnung:

...	X_b	...	X_a	...

Fall 2: Wirft Ruprecht aber ein Atom X_a auf ein Atom X_b, das sich rechts von X_a befindet, so vertauschen wir die beiden Atome X_a und X_b:

...	X_a	...	X_b	...	$\rightarrow$	...	X_b	...	X_a	...

Wir betrachten nun die fünf Situationen $S(k)$, $k = 1, \ldots, 5$, die folgendermaßen definiert sind:

> In der Situation $S(k)$ haben genau die ersten k der sechs Atome der Reihe ein Higgs-Boson (1), während die übrigen $6 - k$ Atome kein Higgs-Boson (0) haben:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$S(1)$	1	0	0	0	0	0
$S(2)$	1	1	0	0	0	0
$S(3)$	1	1	1	0	0	0
$S(4)$	1	1	1	1	0	0
$S(5)$	1	1	1	1	1	0

Da Knecht Ruprecht den Typ von $X_1, \ldots, X_6$ nicht kennt, kann er diese fünf Situationen überhaupt nicht voneinander unterscheiden.

Wir behaupten nun Folgendes: Befinden sich die Atome $X_1, \ldots, X_6$ am Anfang in der Situation $S(k)$ für ein $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dann befinden sie sich auch nach beliebig vielen Würfen in der Situation $S(k)$, falls wir die Atome bei jedem Wurf entsprechend 1) bzw. 2) umordnen. Zum Beweis unterscheiden wir die folgenden Fälle:

Fall 1: Ruprecht wirft X_a auf X_b, das sich links von X_a befindet. Dann gilt

a) entweder X_a und X_b haben denselben Typ:

...	X_b	...	X_a	...
1	1	1	1	...

bzw.

...	X_b	...	X_a	...
...	0	0	0	0

b) oder X_a hat kein Higgs-Boson und X_b hat ein Higgs-Boson:

...	X_b	...	X_a	...
1	1	...	0	0

Beim Wurf wird laut Voraussetzung in keinem der Fälle a) bzw. b) ein Higgs-Boson übertragen. Außerdem ordnen wir die Atome auch nicht um, da wir uns im Fall 1) befinden. Sind die Atome also vor dem Wurf in Situation $S(k)$ für ein $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dann gilt das auch nach dem Wurf.

Fall 2: Ruprecht wirft X_a auf X_b, das sich rechts von X_a befindet. Dann gilt

a) entweder X_a und X_b haben denselben Typ

b) oder X_a hat ein Higgs-Boson und X_b hat kein Higgs-Boson.

Beim Wurf wird laut Voraussetzung im Fall a) kein Higgs-Boson übertragen. Da sich die Atome aber in Fall 2) befinden, vertauschen wir die Atome X_a und X_b. Da diese aber denselben Typ haben, ändert sich an der Anordnung der Higgs-Bosonen in der Reihe nichts:

...	X_a	...	X_b	...
1	1	1	1	...

$\rightarrow$

...	X_a	...	X_b	...
1	1	1	1	...

...	X_a	...	X_b	...
...	0	0	0	0

$\rightarrow$

...	X_a	...	X_b	...
...	0	0	0	0

Im Fall b) wird das Higgs-Boson von X_a nach X_b übertragen. Da wir die Atome aber dann vertauschen, ändert sich auch hier nicht die Anordnung der Higgs-Bosonen in der Reihe:

...	X_a	...	X_b	...
1	1	...	0	0

$\rightarrow$

...	X_b	...	X_a	...
1	1	...	0	0

Auch im Fall 2) gilt demnach: Sind die Atome also vor dem Wurf in Situation $S(k)$ für ein $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dann gilt das auch nach dem Wurf.

Kommen wir nun zum abschließenden Argument: Angenommen, Ruprecht behauptet nach einigen Würfen, er wüsste, dass zwei konkrete Atome denselben Typ hätten. Eines der beiden Atome steht dabei weiter links, sagen wir an Stelle ℓ mit $\ell \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, und einen weiter rechts, sagen wir an Stelle r mit $r \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Haben sich die sechs Atome $X_1, \ldots, X_6$ aber am Anfang in der Situation $S(\ell)$ befunden, dann sind sie jetzt immer noch in dieser Situation und Ruprechts Aussage ist falsch, da das ℓ-te Atom in diesem Fall ein Higgs-Boson hat und das r-te nicht. Insbesondere können beide eben *nicht* denselben Typ haben.

Fassen wir zusammen: Knecht Ruprecht kann sich zu keinem Zeitpunkt sicher sein, dass zwei Atome denselben Typ haben. **Er kann diese Aufgabe also nicht lösen.**

22 Midoku

Autor: Ariane Beier (MATH+ Schulaktivitäten)

22.1 Aufgabe

Letztes Jahr, direkt nach Weihnachten, bekam Elf Sasha von ihrem Freund Alex ein Sudoku-Puzzle geschenkt. Das Rätsel sollte sie auf der langen Zugfahrt vom Nordpol in ihre Heimatstadt unterhalten. Doch sobald sie sich in den bequemen Zugsitz setzte und der Waggon sich beruhigend zu bewegen begann, schlief sie ein – schließlich hatte sie gerade eine sehr anstrengende Weihnachtszeit hinter sich – und wachte erst kurz vor der Ankunft an ihrem Ziel wieder auf. So kam Sasha nicht einmal dazu, das Rätsel zu lösen.

Zu Hause angekommen, vergaß Sasha ihre Hosentaschen zu leeren, bevor sie diese in die Waschmaschine stopfte. Als sie die Hose anschließend zum Trocknen aufhängte, fiel ihr ein Blatt Papier in die Finger, auf dem nur noch das Folgende stand:

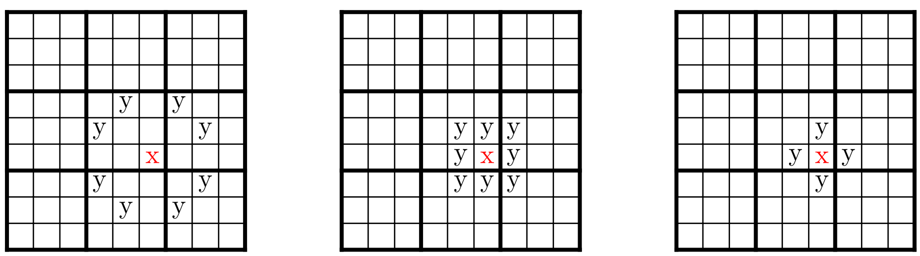
		1						
						2		

Obwohl sich Sasha ziemlich sicher war, dass vor dem unfreiwilligen Bad und der Achterbahnfahrt in der Waschmaschine noch weitere Ziffern auf dem Sudoku angegeben waren, konnte sie sich nicht an diese erinnern. Allerdings hatte sie noch die speziellen Regeln dieses Sudokus im Kopf:

(i) Es gelten die normalen Sudoku-Regeln, d. h. jede Reihe, jede Spalte und jedes 3×3 Unterfeld enthält alle Zahlen von 1 bis 9 genau einmal.

(ii) Zwei Zellen, die durch einen Springer- (s. Abb. 8(a)) oder Königs(schach)-zug (s. Abb. 8(b)) getrennt sind, können *nicht* die gleiche Ziffer enthalten.

(iii) Zwei orthogonal benachbarte Zellen (s. Abb. 8(c)) können *keine* aufeinanderfolgenden Ziffern (z. B. nicht 1 & 2 oder 5 & 6) enthalten.



(a) Jedes y ist von x einen Springerzug entfernt.

(b) Jedes y ist von x einen Königszug entfernt.

(c) Jedes y ist orthogonal benachbart zu x.

Abbildung 8: Spezialregeln des gegebenen Sudokus.

Immer offen für eine kniffelige Herausforderung, zückte Sasha ihren Bleistift und begann zu grübeln. Nach 25 Minuten intensiven Nachdenkens konnte sie das Sudoku lösen.

Welche Ziffer hat Sasha in die rechte obere Ecke geschrieben?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. Sasha hat einen Fehler gemacht. Das gegebene Sudoku kann nicht eindeutig gelöst werden.

22.2 Solution

Die richtige Antwort ist: 9.

Das vorliegende Sudoku ist als *The Miracle Sudoku* bekannt. Es wurde von Mitchell Lee erfunden, und es ist tatsächlich eindeutig lösbar. Die Lösung lautet:

4	8	3	7	2	6	1	5	**9**
7	2	6	1	5	9	4	8	3
1	5	9	4	8	3	7	2	6
8	3	7	2	6	1	5	9	4
2	6	1	5	9	4	8	3	7
5	9	4	8	3	7	2	6	1
3	7	2	6	1	5	9	4	8
6	1	5	9	4	8	3	7	2
9	4	8	3	7	2	6	1	5

Eine vollständige Lösung wird in dem hypnotischen Video auf dem Youtube-Kanal *Cracking the Cryptic* präsentiert:

`https://www.youtube.com/watch?v=yKf9aUIxdb4`.

23 Lichtermeer

Autorin: Ariane Beier (MATH+ Schulaktivitäten)

23.1 Aufgabe

Morgen ist es endlich soweit: Der Weihnachtsabend ist da! Die Elfen haben ihre Weihnachtsvorbereitungen auch schon fast abgeschlossen: Sie haben Plätzchen gebacken, Geschenke gebastelt und den Weihnachtsbaum im Festsaal aufgestellt und dekoriert. Jetzt muss nur die Hauptstraße in Wichtelstadt geschmückt werden. Dazu beauftragt Oberelfe Omega die Elfe Epsilon 2020 Lichter entlang der Straße anzubringen.

Epsilon macht sich auf die Socken und erfüllt ihre Aufgabe ratzfatz. Alle 2020 Lichter leuchten wunderschön. Sie will sich nach getaner Arbeit gerade einen leckeren Spekulatius und einen schönen heißen Kakao gönnen, als Gamma hektisch angerannt kommt: „Epsilon, du hast vergessen auf dem großen Schaltpult im Keller zu markieren, welches Licht zu welchem Schalter gehört. Wenn wir das nicht wissen, können wir unsere Lichter-Choreographie morgen Abend gar nicht vernünftig aufführen. Also los! Schnell, schnell! Geh hinunter in den Keller und beschrifte das Schaltpult!“

Epsilon sieht sich in Gedanken schon die nächsten Stunden zwischen der Straße und dem Schaltpult im Keller hin- und herrennen, um alle 2020 Lichter eindeutig allen 2020 Schaltern zuzuordnen, während ihr Kakao langsam aber sicher kalt wird. Während sie den letzten Motivationsschluck aus ihrem Becher nimmt, hat sie aber eine Idee, wie sie die Anzahl m der Wege in den Keller minimieren kann.

Welche Aussage über diese minimale Anzahl m ist korrekt?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. $m \leq 12$.
2. $12 < m \leq 42$.
3. $42 < m \leq 63$.
4. $63 < m \leq 173$.
5. $173 < m \leq 196$.
6. $196 < m \leq 308$.
7. $308 < m \leq 712$.
8. $712 < m \leq 1608$.
9. $1608 < m \leq 1984$.
10. $1984 < m \leq 2019$.

23.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 1.

Natürlich kann Epsilon 2019-mal in den Keller laufen und jeden Schalter einzeln umlegen und beschriften. Da sie aber lieber ihren Kopf als ihre Beine benutzt, entwickelt sie folgende Strategie:

Bevor sie beginnt, klebt Epsilon einen Zettel auf jede Glühbirne und jeden Schalter auf dem Schaltpult.

Bei ihrem ersten Gang in den Keller schaltet Epsilon 1010 Schalter ein und beschriftet sie mit einer „1“. Dann schaltet sie die anderen 1010 Schalter aus und beschriftet sie mit einer „0“. Anschließend geht sie nach oben und markiert die leuchtenden Glühbirnen mit einer „1“ und die dunklen entsprechend mit einer „0“.

Auf ihrem zweiten Weg in den Keller lässt sie die Hälfte (d. h. 550) der mit einer „0“ markierten 1010 Schalter aus und schaltet die Hälfte (d. h. 550) der mit einer „1“ markierten 1010 Schalter Schalter an. Alle diese Schalter werden mit einer zusätzlichen „0“ markiert. Dann werden alle Schalter, die derzeit nur mit einer Ziffer („0“ oder „1“) gekennzeichnet sind, eingeschaltet und mit einer zusätzlichen „1“ gekennzeichnet. Nun sind alle Schalter mit zwei Ziffern, „00“, „01“, „10“ oder „11“, beschriftet. Jetzt geht Epsilon zurück auf die Straße und beschriftet alle leuchtenden Glühbirnen mit einer zusätzlichen „1“ und alle dunklen mit einer zusätzlichen „0“. Nun sind also auch alle Glühbirnen mit zwei Ziffern beschriftet.

Vielleicht erratet ihr jetzt, wohin diese Strategie führt:

- Mit *einem Gang* in den Keller hat Epsilon die Menge der 2020 Schalter und zugehörigen Glühbirnen in $2^1 = 2$ Teilmengen aufgeteilt: Eine Teilmenge, in der alle Schalter und Glühbirnen mit einer „0“ markiert sind und eine mit Schaltern und Glühbirnen, die mit einer „1“ markiert sind.

- Nach *zwei Gängen* hat sie die 2020 Schalter und zugehörigen Glühbirnen weiter in $2^2 = 4$ Untergruppen eingeteilt: 550 mit „00“, 550 mit „01“, 550 mit „10“ und 550 mit „11“ beschriftet.

- Nach dem *dritten Gang* hat Epsilon $2^3 = 8$ Teilmengen, die jeweils mit einer zweistelligen binären Zahl versehen sind, d. h. entweder mit „000“, „001“, „010“, „100“, „011“, „110“, „101“ oder „111“.

- ...
- Im vorletzten Schritt, nach *zehn Gängen*, hat sie schon $2^{10} = 1024$ Teilmengen, die jeweils mit einer zehnstelligen binären Zahl beschriftet sind.
- Schließlich kann Epsilon auf ihrem *elften Gang* bis zu $2^{11} = 2048$ Schalter und zugehörige Glühbirnen mit jeweils einer eindeutigen elfstelligen binären Zahl markieren.

Insbesondere kann Epsilon mit nur **elf** Wegen in den Keller alle 2020 Schalter eindeutig den 2020 Glühbirnen zuordnen.

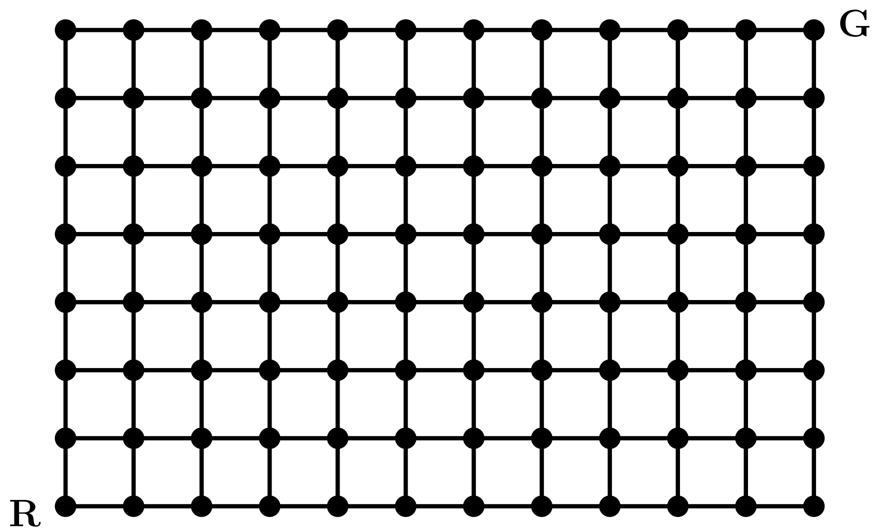
24 Treffpunkt

Autoren: Jacques Resing (TU Eindhoven),
Frits Spieksma (TU Eindhoven)

Projekt: 4TU.AMI

24.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht und der Grinch spielen ein Spiel auf dem abgebildeten Spielfeld. Ruprecht startet im Punkt R und macht in jeder Runde einen Schritt nach Norden oder Osten. Der Grinch startet im Punkt G und macht in jeder Runde einen Schritt nach Süden oder Westen.



Zu Beginn *jeder* Spielrunde wählt Ruprecht mit einer von ihm für diese Runde festgelegten Wahrscheinlichkeit entweder die Nordrichtung (mit p_R) oder die Ostrichtung (mit $1 - p_R$). *Zur selben Zeit* wählt der Grinch mit einer von ihm für *diese* Runde festgelegten Wahrscheinlichkeit entweder die Südrichtung (mit p_G) oder die Westrichtung (mit $1 - p_G$). Dann bewegen sich beide *gleichzeitig* entlang der gewählten Richtung zum nächsten Punkt.

Ruprecht gewinnt das Spiel, falls er den Punkt G erreicht ohne mit dem Grinch zusammengetroffen zu sein. Der Grinch gewinnt das Spiel, wenn er mit Ruprecht in einem Punkt oder auf einer Kante zusammentrifft.

Knecht Ruprecht und der Grinch treffen in jeder Runde die für sie jeweils bestmöglichen Entscheidungen, um ihre jeweilige Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass der Grinch das Spiel gewinnt?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. $p \leq 0{,}001$.
2. $0{,}001 < p \leq 0{,}002$.
3. $0{,}002 < p \leq 0{,}004$.
4. $0{,}004 < p \leq 0{,}008$.
5. $0{,}008 < p \leq 0{,}016$.
6. $0{,}016 < p \leq 0{,}032$.
7. $0{,}032 < p \leq 0{,}064$.
8. $0{,}064 < p \leq 0{,}128$.
9. $0{,}128 < p \leq 0{,}256$.
10. $0{,}256 < p$.

24.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

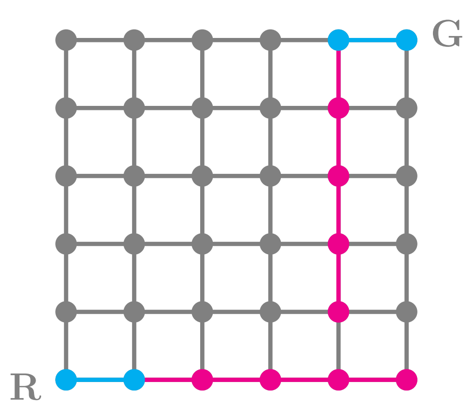
Wir analysieren eine Verallgemeinerung des Spiels, in der das Spielfeld ein $x \times y$ Gitter mit $x \geq y$ und $x \equiv y \bmod 2$ ist. Dabei beginnen wir bei 0 an zu zählen, sodass die obige Abbildung ein Gitter der Größe 11×7 zeigt. Ruprecht startet in der linken unteren Ecke (bei $(0, 0)$) und der Grinch startet in der rechten oberen Ecke (bei (x, y)). Wir beweisen mit vollständiger Induktion über y, dass der Grinch in dieser verallgemeinerten Variante mit Wahrscheinlichkeit $p_y = 2^{-y}$ gewinnt.

Für $y = 0$ ist das Gitter eine Strecke mit x Punkten:

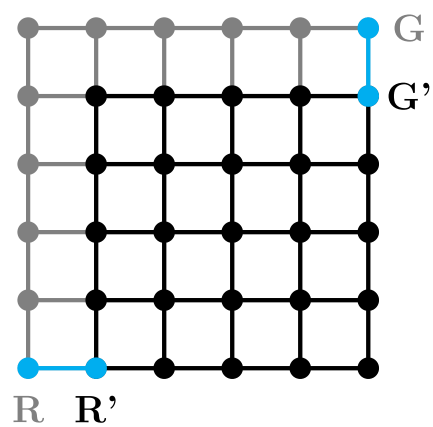
Da die Spieler keine Wahlmöglichkeiten haben, treffen sie einander nach $x/2$ Runden in der Mitte und der Grinch gewinnt mit der behaupteten Wahrscheinlichkeit $p_0 = 2^{-0} = 1$.

Als nächstes betrachten wir den Fall $x = y \geq 1$:

- Falls Ruprecht und Grinch in der ersten Runde (in der folgenden Abb. blau) beide in x-Richtung oder beide in y-Richtung ziehen, gewinnt Ruprecht das Spiel, da Ruprecht sich in den folgenden $y - 1$ Runden einfach immer in der Richtung seines ersten Zuges weiter bewegen (in pink) und so ein Treffen mit dem Grinch vermeiden kann:



- Falls Ruprecht in der ersten Runde (in der folgenden Abb. blau) in x-Richtung und der Grinch in y-Richtung (oder umgekehrt) ziehen, so erreichen sie das Spiel auf einem Gitter der Größe $(y-1) \times (y-1)$ (in schwarz):



Laut Induktionsannahme gewinnt der Grinch dieses kleinere Spiel mit Wahrscheinlichkeit $p_{y-1} = 2^{-(y-1)}$.

Auf dem Gitter der Größe $y \times y$ kann der Grinch nun eine Gewinnwahrscheinlichkeit von *mindestens* 2^{-y} erzwingen, indem er mit Wahrscheinlichkeit 1/2 nach Süden und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 nach Westen geht. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt dann nämlich

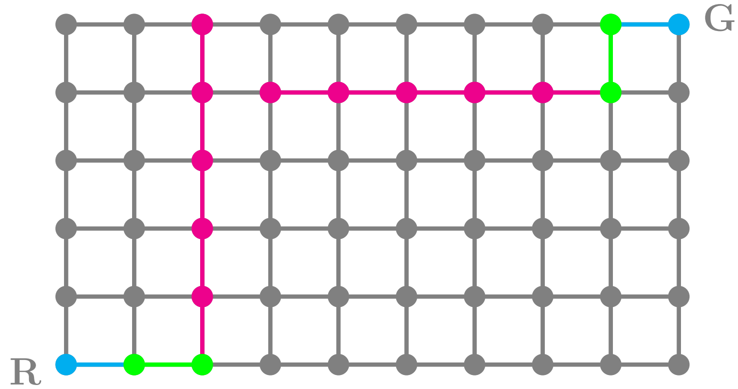
$$p = \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 2^{-(y-1)} = 2^{-y}.$$

Andererseits kann Ruprecht die Gewinnwahrscheinlichkeit des Grinches bei *höchstens* 2^{-y} halten, indem er ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit 1/2 nach Norden und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 nach Osten geht. Dann gilt für die Gewinnwahrscheinlichkeit des Grinchs ebenfalls

$$\begin{aligned} p &= 1 - \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 - 2^{-(y-1)}\right)\right) \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot 2^{-(y-1)}\right) \\ &= 1 - \left(1 - 2^{-y}\right) \\ &= 2^{-y}. \end{aligned}$$

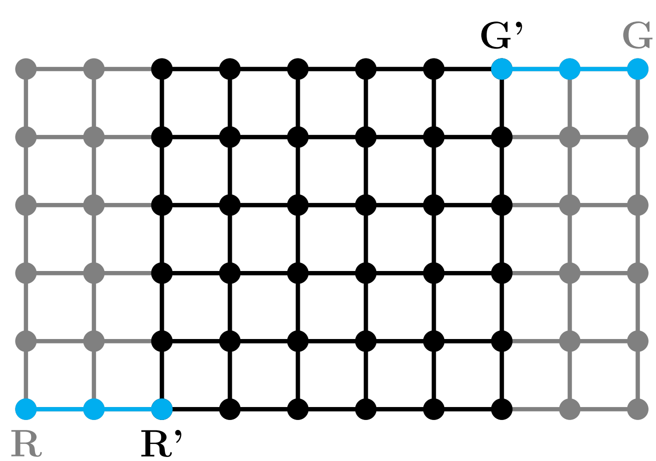
Damit ist der Fall $x = y \geq 1$ erledigt, und es gilt: $p_y = 2^{-y}$ wie behauptet.

Schlussendlich betrachten wir die verbleibenden Fälle mit $x > y \geq 1$: Dazu stellen wir zunächst fest, dass $x \geq y + 2$ gilt, da $x \equiv y \bmod 2$.
Falls der Grinch in seinen ersten $\frac{x-y}{2}$ $(\in \mathbb{N})$ Zügen auch nur einmal nach Süden zieht (in der folgenden Abb. grün), kann Ruprecht dem Grinch auf jeden Fall entkommen, wenn er anschließend y Züge in Richtung Norden macht (in pink):



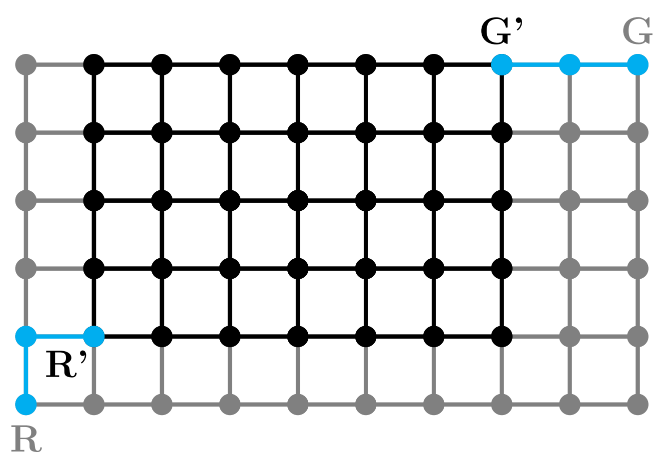
Ruprecht weiß daher, dass der Grinch seine ersten $(x-y)/2$ Züge in Richtung Westen machen wird.

- Falls Ruprecht die ersten $\frac{x-y}{2}$ Züge in Richtung Osten macht (in der folgenden Abb. blau), erreichen beide das Spiel auf einem Gitter der Größe $y \times y$ (in schwarz):



Dort gewinnt der Grinch, wie schon gezeigt, mit einer Wahrscheinlichkeit von 2^{-y}.

- Falls Ruprecht in den ersten $\frac{x-y}{2}$ Zügen auch nur k-mal, $1 \le k \le \frac{x-y}{2}$, nach Norden zieht, erreichen sie das Spiel auf einem Gitter der Größe $(y+k) \times (y-k)$:



Dann würde der Grinch allerdings laut Induktionsannahme mit der Wahrscheinlichkeit $2^{-(y-k)} = 2^k \cdot 2^{-y} > 2^{-y}$ gewinnen.

Ruprecht wird daher seine ersten $\frac{x-y}{2}$ Züge in Richtung Osten laufen, und der Grinch gewinnt das Spiel auf dem Gitter der Größe $x \times y$ mit der Wahrscheinlichkeit 2^{-y}.

Damit ist die Verallgemeinerung des Spieles vollständig analysiert und gezeigt, dass der Grinch immer mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p_y = 2^{-y}$$

gewinnt. Das gegebene Spiel auf einem Gitter der Größe 11×7 wird der Grinch demzufolge mit der Wahrscheinlichkeit

$$p = 2^{-7} = \tfrac{1}{128} = \mathbf{0{,}0078125}$$

gewinnen.