Aufgaben & Lösungen

2018

MATHEON KALENDER

Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

4TU.AMI

Inhaltsverzeichnis

1 Weihnachtskuchen

Autorinnen: Catriona Shearer, Ariane Beier (Matheon)

1.1 Aufgabe

Der berühmte britische Kochwichtel Oliver James hat für die Weihnachtsfeier der Mathematikerelfen drei vorzügliche Weihnachtskuchen gebacken.

Der pedantische Elf Symmetrix kriegt vom Anblick der Kuchen schlechte Laune und ärgert sich: „Hätte dieser Stümper nicht wenigstens drei exakt gleich große Kuchen backen können?“

Elfe Geometria aber freut sich: „Schau doch, wie schön die drei exakt halbkugelförmigen Weihnachtskuchen angeordnet sind: Alle drei Kuchen liegen mit ihren Wölbungen nach oben. Die beiden unteren Kuchen liegen nebeneinander auf einer flachen Ebene und berühren sich in genau einem Punkt. Sie sind zwar unterschiedlich groß, aber der obere Kuchen, der auf den beiden unteren Kuchen liegt, hat genau die richtige Größe, sodass sein Durchmesser dem Abstand der beiden Berührpunkte der unteren beiden Kuchen an deren gemeinsame Tangentialebene entspricht.“ Siehe Abbildung 1.

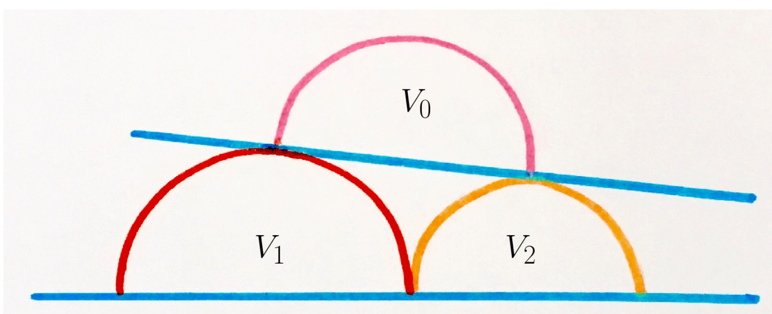


Abbildung 1: Die Skizze zeigt die drei Kuchen im Querschnitt.

Wir wollen von euch wissen: Wenn der größere der unteren Kuchen das Volumen $V_1 = 15\,l$ hat und der kleinere von beiden das Volumen $V_2 = 10\,l$, wie lautet dann die erste Nachkommastelle des Volumens V_0 in l des oberen Kuchens?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

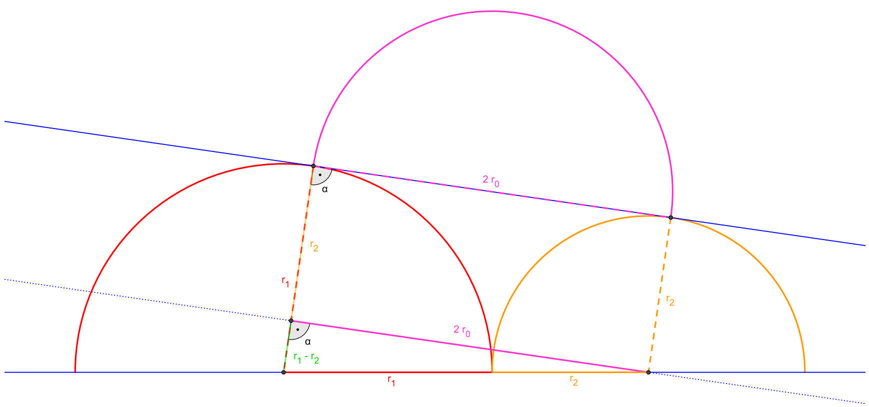
1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Über die Autorin:

Catriona Shearer ist Mathematiklehrerin an einer Oberschule in Cambridge, Großbritannien. Seit August veröffentlicht sie fast täglich ein neues geometrisches Rätsel auf Twitter unter `@Cshearer41`. Warnung: Kann süchtig machen!

1.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.



Sei r_1 der Radius der größeren der beiden unteren Halbkugeln K_1 mit Volumen $V_1 = 15\,l$ und r_2 der Radius der kleineren Halbkugel K_2 mit Volumen $V_2 = 10\,l$. Gesucht ist das Volumen V_0 der oberen Halbkugel K_0.

Da der Durchmesser von K_0 genau so groß ist, wie der Abstand der beiden Berührpunkte von K_1 und K_2 an die gemeinsame Tangentialebene, gilt $\alpha = 90°$. Mit dem *Satz des Pythagoras* können wir nun r_0 bestimmen:

$$\begin{aligned}
(r_1 - r_2)^2 + (2r_0)^2 &= (r_1 + r_2)^2, \\
r_1^2 - 2r_1r_2 + r^2 + 4r_0^2 &= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2, \\
4r_0^2 &= 4r_1r_2, \\
r_0 &= \sqrt{r_1r_2},
\end{aligned}$$

d. h., der Radius der oberen Halbkugel entspricht dem *geometrischen Mittel* der Radien der unteren beiden Halbkugeln.

Wir stellen weiterhin fest, dass $V_1 = \frac{2}{3}\pi r_1^3$, $V_2 = \frac{2}{3}\pi r_2^3$ und

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{2}{3}\pi r_0^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi \sqrt{r_1 r_2}^3 \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}\pi r_1^3 \cdot \frac{2}{3}\pi r_2^3} \\ &= \sqrt{V_1 V_2}. \end{aligned}$$

Das Volumen der oberen Halbkugel ist also ebenso das geometrische Mittel der Volumen der unteren Halbkugeln. Somit gilt

$$V_0 = \sqrt{V_1 V_2} = \sqrt{15 \cdot 10}\, l = 5\sqrt{6}\, l \approx 12,\mathbf{2}47\, l$$

2 Apfelwein

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven), Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Aufgabe

In Knecht Ruprechts Keller stehen sechs versiegelte Flaschen, die alle völlig gleich ausssehen. Drei der Flaschen enthalten guten Apfelwein und die anderen drei Flaschen enthalten hochgiftigen Stechapfelsaft. Ruprechts MAGISCHE APFELWEIN-TEST-MASCHINE (MATM) hat drei Fächer, einen großen Knopf und eine Glühbirne. Wenn man in jedes der drei Fächer eine Flasche stellt und danach auf den Knopf drückt, beginnt die MATM zu arbeiten. Eine Stunde später leuchtet dann die Glühbirne rot oder grün auf: Leuchtet sie grün, so enthalten alle drei Flaschen guten Apfelwein. Leuchtet sie rot, dann ist in höchstens zwei der drei Flaschen Apfelwein.

Knecht Ruprecht möchte dem Weihnachtsmann eine Flasche Apfelwein schenken. Wie oft muss er die MATM im schlimmsten Fall benutzen, um garantiert eine Flasche Apfelwein zu identifizieren?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Achtmal.
2. Neunmal.
3. Zehnmal.
4. Elfmal.
5. Zwölfmal.
6. Dreizehnmal.
7. Sechzehnmal.
8. Achtzehnmal.
9. Neunzehnmal.
10. Zwanzigmal.

2.1 Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Knecht Ruprecht legt eine Flasche zur Seite und testet jede Dreiergruppe unter den anderen fünf Flaschen. Falls bei einer dieser zehn Dreiergruppen die Glühbirne grün leuchtet, so hat Ruprecht drei Flaschen mit Apfelwein gefunden. Falls bei allen zehn Tests die Glühbirne rot leuchtet, so muss die zur Seite gelegte Flasche Apfelwein enthalten. Daher kann Ruprecht mit **zehn** Tests auf jeden Fall eine Flasche Apfelwein identifizieren.

Nun betrachten wir eine beliebige Teststrategie. Angenommen, die ersten **neun** Tests der MATM verlaufen allesamt negativ. Dann kann sich Ruprecht niemals sicher sein, dass eine fixe Flasche F Apfelwein enthält: Neben F gibt es ja noch fünf andere Flaschen. Von den zehn möglichen Dreiergruppen unter diesen fünf anderen Flaschen wurden höchstens neun getestet. Daher ist es durchaus möglich, dass eine derartige ungetestete Dreiergruppe die Glühbirne grün leuchten lässt. In diesem Fall wäre dann in dieser Dreiergruppe der gute Apfelwein und in Flasche F wäre giftiger Stechapfelsaft. Daher reichen neun Tests (im schlimmsten Fall) nicht aus.

Zusammengefasst: Im schlimmsten Fall muss Ruprecht **zehn** Tests durchführen, um eine Flasche Apfelwein zu identifizieren.

3 Not-so-secret Santa

Autor: Jacques Resing (TU Eindhoven)

3.1 Aufgabe

Die Wichtel Armin, Bruno, Carlo, David und Erich wollen einander beschenken. Jeder der fünf soll genau ein Geschenk erhalten, und jeder der fünf soll genau ein Geschenk geben. Um zu bestimmen, wer von wem beschenkt wird, stellen sich die fünf im Kreis auf. Dann zeigt jeder gleichzeitig und völlig zufällig auf einen der anderen vier. Falls keine zwei Wichtel auf denselben Wichtel zeigen, so beschenkt jeder jenen Wichtel, auf den er gezeigt hat. Andernfalls wird die Prozedur wiederholt.

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dass die Prozedur nur ein einziges Mal durchgeführt wird, mit p. Welche der folgenden Aussagen trifft auf p zu?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. $p \leq 0.002$
2. $0.002 < p \leq 0.004$
3. $0.004 < p \leq 0.008$
4. $0.008 < p \leq 0.016$
5. $0.016 < p \leq 0.032$
6. $0.032 < p \leq 0.064$
7. $0.064 < p \leq 0.128$
8. $0.128 < p \leq 0.256$
9. $0.256 < p \leq 0.512$
10. $0.512 < p$

3.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Falls keine zwei Wichtel auf denselben Wichtel zeigen, so bilden die zeigenden Wichtel entweder einen Fünferkreis

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \to X_5 \to X_1$$

oder eine Kombination aus einem Zweierkreis

$$Y_1 \to Y_2 \to Y_1$$

und einem Dreierkreis

$$Y_3 \to Y_4 \to Y_5 \to Y_3.$$

Wir berechnen nun für diese beiden Fälle die Anzahl der Möglichkeiten:

1) Die Wichtel bilden einen Fünferkreis $X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \to X_5 \to X_1$:

Aus Symmetriegründen kann man Armin als X_1 wählen. Dann gibt es noch 24 Möglichkeiten, um Bruno, Carlo, David, Erich auf die Plätze X_2, X_3, X_4, X_5 zu verteilen.

2) Die Wichtel bilden einen Zweierkreis $Y_1 \to Y_2 \to Y_1$ und einen Dreierkreis $Y_3 \to Y_4 \to Y_5 \to Y_3$:

Für den Zweierkreis kann man zwei beliebige Wichtel nehmen – dafür gibt es 10 Möglichkeiten. Dann bleiben drei Wichtel übrig, die man im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn im Dreierkreis anordnen kann. Insgesamt sind das $2 \cdot 10 = 20$ Möglichkeiten.

Alles in allem ergibt das $24 + 20 = 44$ Möglichkeiten dafür, dass keine zwei Wichtel auf den selben Wichtel zeigen. Da jeder der fünf Wichtel auf einen der anderen vier zeigt, ist die Gesamtzahl aller verschiedenen Möglichkeiten gleich $4^5 = 1024$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit

$$p = 44/1024 \approx 0.043.$$

4 Schlittentest

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)

4.1 Aufgabe

Durchquert man die Südpolarpiste von Ost nach West, so passiert man der Reihe nach die sechs Kilometersteine A, B, C, D, E, F, die in unregelmäßigen Abständen aufgestellt sind. Der Abstand zwischen A und C beträgt dabei 116 Kilometer, der Abstand zwischen D und E beträgt 126 Kilometer, und der Abstand zwischen E und F beträgt 53 Kilometer.

Die beiden Hilfsweihnachtsmänner Yoda und Zeno haben heute ihre neuen Schlitten auf der Piste getestet. Beide Schlitten fuhren den ganzen Weg mit konstanter Geschwindigkeit, wobei Yoda langsamer als Zeno fuhr.

- Yoda fuhr die Piste einmal von A bis F ab.
- Zeno fuhr zuerst von F nach A, und dann (ohne die geringste Zeit beim Wenden zu verlieren) von A zurück nach F.
- Yoda startete in A zur exakt gleichen Zeit, zu der Zeno in F startete.
- Als Yoda B erreichte, war Zeno gerade auf seinem Hinweg in E angekommen.
- Yoda und Zeno begegneten einander bei C.
- Auf seinem Rückweg von A nach F überholte Zeno den Yoda bei Kilometerstein D.

Wie weit sind die beiden Kilometersteine B und E von einander entfernt?

Illustration: Rike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Ungefähr 351 Kilometer.
2. Ungefähr 352 Kilometer.
3. Ungefähr 353 Kilometer.
4. Ungefähr 354 Kilometer.
5. Ungefähr 355 Kilometer.
6. Ungefähr 356 Kilometer.
7. Ungefähr 357 Kilometer.
8. Ungefähr 358 Kilometer.
9. Ungefähr 359 Kilometer.
10. Ungefähr 360 Kilometer.

4.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Wir nehmen an, dass Zeno genau q-mal so schnell fährt wie Yoda. Da Yoda für AB gleich lange braucht wie Zeno für EF, gilt

$$|AB| \;=\; 53/q. \tag{1}$$

Da Yoda für AC gleich lange braucht wie Zeno für CF, gilt $|CF| = 116q$. Wir folgern

$$|CD| \;=\; |CF| - |DE| - |EF| \;=\; 116q - 179. \tag{2}$$

Da Yoda für CD gleich lange braucht wie Zeno für die beiden Strecken AC und AD, gilt $q|CD| = |AC| + |AD| = 2|AC| + |CD|$. Zusammen mit (2) ergibt das

$$\begin{aligned} 232 &= 2|AC| \\ &= (q-1)|CD| \\ &= (q-1)(116q-179) \\ &= 116q^2 - 295q + 179. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Gleichung (3) kann man in $116q^2 - 295q - 53 = 0$ und in

$$116q - \frac{53}{q} \;=\; 295$$

umschreiben. Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} |BE| &= |AC| + |CF| - |AB| - |EF| \\ &= 116 + 116q - \frac{53}{q} - 53 \\ &= 116 + 295 - 53 \\ &= 358. \end{aligned}$$

Falls jemand wirklich alles über die Südpolarpiste und den Schlittentest herausfinden will: Man rechnet leicht nach, dass

$$q = (295 + \sqrt{111617})/232 \approx 2.71$$

gilt. Die noch fehlenden Abstände zwischen den aufeinander folgenden Kilometersteinen sind

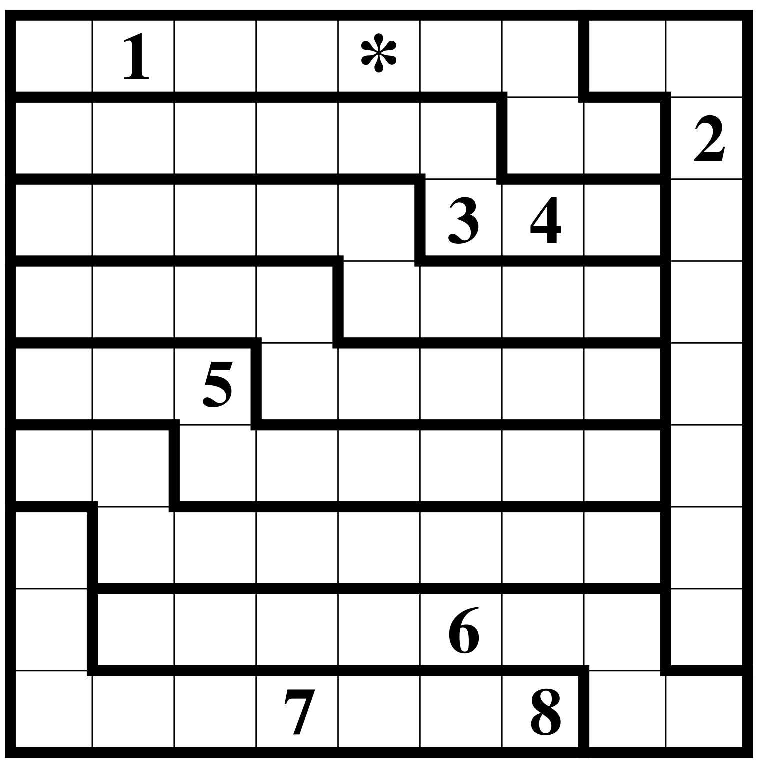
$$
\begin{aligned}
|AB| &= 12296/(295+\sqrt{111617}) \approx 19.55,\\
|BC| &= (527-\sqrt{111617})/2 \approx 96.45,\\
|CD| &= (-63+\sqrt{111617})/2 \approx 135.55.
\end{aligned}
$$

5 Kudosu

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

5.1 Aufgabe

Kudosu ist eine Variante des bekannten Sudoku-Rätsels. Die 81 Zellen im folgenden 9×9 Schema sollen mit den Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ gefüllt werden, sodass jede Zeile und jede Spalte jede der neun Ziffern genau einmal enthält. Weiters soll auch jedes der neun eingezeichneten Gebiete jede der neun Ziffern genau einmal enthalten.



Wir wollen von Euch wissen: Welche Ziffer kommt in die Zelle mit dem Stern?

Illustration: Friederike Hofmann

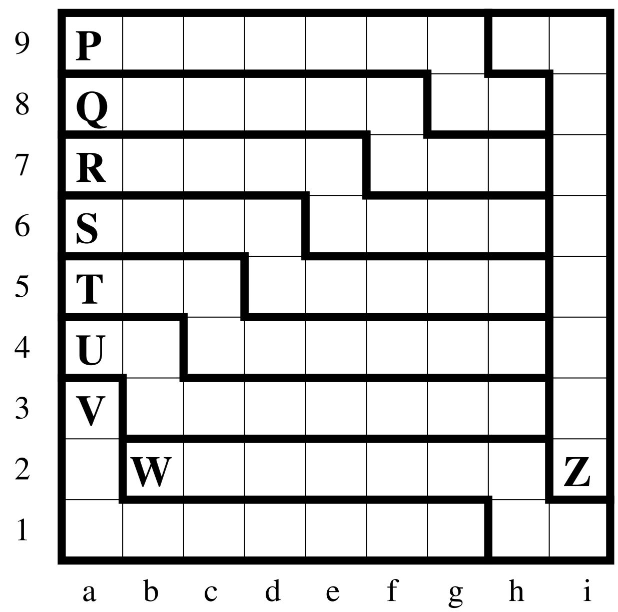
Antwortmöglichkeiten:

1. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 1.
2. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 2.
3. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 3.
4. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 4.
5. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 5.
6. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 6.
7. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 7.
8. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 8.
9. In die Zelle mit dem Stern kommt die Ziffer 9.
10. Der Inhalt der Zelle mit dem Stern ist nicht eindeutig festgelegt.

5.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Wir nummerieren die Zeilen mit 1 bis 9 und die Spalten mit a bis i durch und benennen die neun Gebiete mit $P, Q, R, S, T, U, V, W, Z$ wie in der folgenden Abbildung:



Nun betrachten wir den Eintrag x in der Zelle $i1$ (die zum Gebiet W gehört). Dieser Eintrag muss auch im Gebiet Z vorkommen; da x in der Spalte i aber nur einmal auftritt, muss die Zelle $h9$ diesen Eintrag x enthalten. Der Eintrag x muss auch im Gebiet P vorkommen; man sieht leicht, dass dafür nur die Zelle $g8$ in Frage kommt. Anschließend kann man diagonal analog fortfahren:

- Im Gebiet Q ist Eintrag x in der Zelle $f7$,
- im Gebiet R in der Zelle $e6$,
- im Gebiet S in der Zelle $d5$,
- im Gebiet T in der Zelle $c4$,
- im Gebiet U in der Zelle $b3$, und

- im Gebiet V in der Zelle $a2$:

9								x	
8							x		
7						x			
6					x				
5				x					
4			x						
3		x							
2	x								
1									x
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Als nächstes betrachten wir den Eintrag y in der Zelle $i9$. Dieser Eintrag muss auch im Gebiet P vorkommen, und dafür kommt nur die Zelle $h8$ in Frage. Durch ähnliche Argumentation sieht man, dass die sieben Zellen $g7$, $f6$, $e5$, $d4$, $c3$, $b2$, $a1$ ebenfalls den Eintrag y enthalten:

9								x	y
8							x	y	
7						x	y		
6					x	y			
5				x	y				
4			x	y					
3		x	y						
2	x	y							
1	y								x
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Analoge Argumente entlang anderer Diagonalen zeigen, dass jeder Eintrag mit dem Eintrag unmittelbar rechts darüber übereinstimmen muss. Damit erhält man die folgende eindeutige Lösung des Kudosu-Rätsels:

9	**2**	**1**	**7**	**6**	**9**	**8**	**5**	**3**	**4**
8	**1**	**7**	**6**	**9**	**8**	**5**	**3**	**4**	**2**
7	**7**	**6**	**9**	**8**	**5**	**3**	**4**	**2**	**1**
6	**6**	**9**	**8**	**5**	**3**	**4**	**2**	**1**	**7**
5	**9**	**8**	**5**	**3**	**4**	**2**	**1**	**7**	**6**
4	**8**	**5**	**3**	**4**	**2**	**1**	**7**	**6**	**9**
3	**5**	**3**	**4**	**2**	**1**	**7**	**6**	**9**	**8**
2	**3**	**4**	**2**	**1**	**7**	**6**	**9**	**8**	**5**
1	**4**	**2**	**1**	**7**	**6**	**9**	**8**	**5**	**3**
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

6 Das Haus vom Nikolaus

Autor*innen: Anna Maria Hartkopf (FU Berlin), Robert Wöstenfeld (Mathe im Leben)
Projekte: www.polytopia.eu, SFB/Transregio 109 – Discretization in Geometry and Dynamics, Mathe im Advent

6.1 Aufgabe

Heute Morgen hat der Nikolaus wieder die geputzten Schuhe aller lieben Kinder mit Süßigkeiten, Obst und kleinen Spielsachen befüllt. An den anderen Tagen des Jahres hat er aber nicht sehr viel zu tun. Dann sitzt er oft in seinem Haus und schaut in der Wichtelbook-App, was im Wichteldorf Spannendes passiert. Da er sich dabei nicht viel bewegt, hat er in den letzten Jahren stark zugenommen und sein Bauchumfang hat sich fast verdoppelt. Das ist ein großes Problem: Das *Haus vom Nikolaus* ist zu flach, er passt kaum noch hinein.

Er ruft Wichtel Friedensreich Tausendsassa, den Stararchitekten des Wichteldorfes, herbei, erklärt ihm die Lage und bittet ihn um eine schnelle Lösung des Problems. Und tatsächlich hat dieser gleich eine Idee: „Warum muss dein Haus denn flach sein? Möchtest du nicht mal ein dreidimensionales Haus bauen? Dann hast du doch viel mehr Platz!“

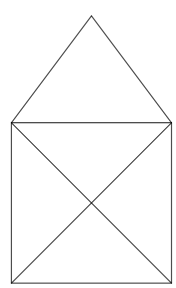


Abbildung 2: Das Haus vom Nikolaus

„Ein dreidimensionales Haus? Komisch...“, murmelt der Nikolaus in seinen dichten weißen Bart. Er ist skeptisch: „Mein jetziges Haus kann man ja mit einem stetigen Linienzug – ohne abzusetzen und ohne eine Kante zweimal zu zeichnen – auf ein Blatt Papier malen (s. Abbildung 2). Das neue dreidimensionale (!) Haus soll diese Bedingung aber auch erfüllen.“ Friedensreich ist sich sicher: „Klar, das geht bestimmt! Ich werde mal ein paar Entwürfe zeichnen und du schaust, ob dir einer gefällt.“

Doch Friedensreich hat geblufft. Er weiß gar nicht, ob er den Wunsch vom Nikolaus überhaupt erfüllen kann. In seinem Atelier probiert er es deshalb zuerst mit ein paar Entwürfen aus. Die vier Netze (s. Entwürfe A, B, C, D in Abbildung 3) baut er zu dreidimensionalen Modellen zusammen. Anschließend versucht er alle Kanten der Modelle mit einem Linienzug nachzumalen, ohne dabei abzusetzen und ohne eine Kante mehr als einmal zu zeichnen.

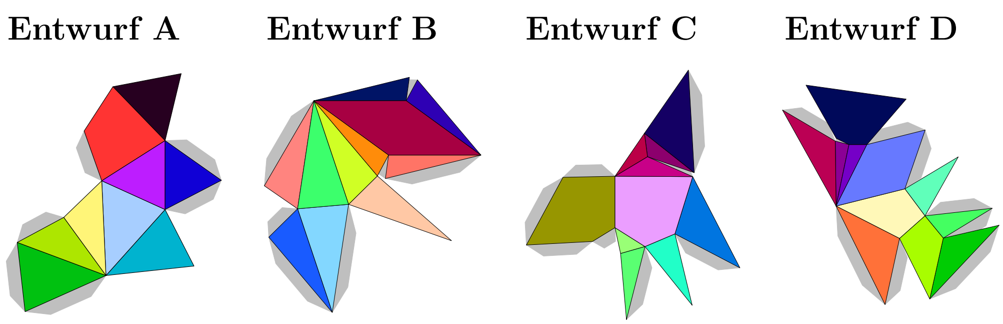


Abbildung 3: Die Entwürfe A bis D. Die jeweiligen Bastelbögen sind auf den kommenden Seiten zu finden.

Bei welchem der Modelle, die durch die Netze A bis D in Abbildung 3 gegeben sind, kann ihm das gelingen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Das ist bei keinem der vier Modelle möglich.
2. Nur bei den Entwürfen A und B kann er das schaffen.
3. Nur bei den Entwürfen A und D kann er das schaffen.
4. Nur bei den Entwürfen B und C kann er das schaffen.
5. Nur bei den Entwürfen B und D kann er das schaffen.
6. Nur bei den Entwürfen C und D kann er das schaffen.
7. Nur bei den Entwürfen A, B und C kann er das schaffen.
8. Nur bei den Entwürfen A, C und D kann er das schaffen.
9. Nur bei den Entwürfen B, C und D kann er das schaffen.
10. Das ist bei allen vier Modellen möglich.

Projektbezug:

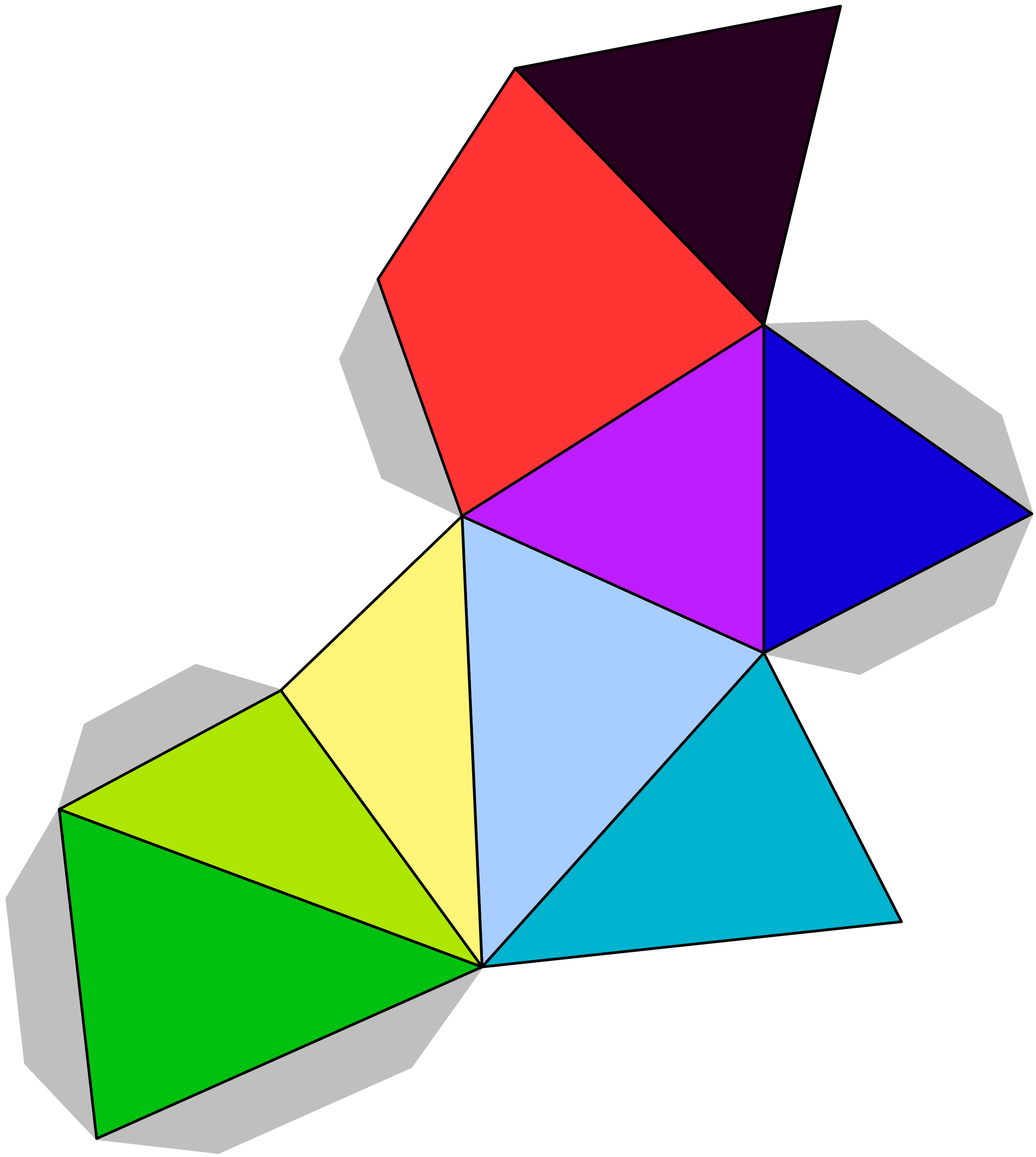
Das Geometrie-Projekt *Adoptiere ein Polyeder* von Berliner Mathematikerinnen und Mathematikern gibt einen spannenden Einblick in die Welt der Polyeder. Alle Welt ist eingeladen, Polyeder zu benennen, zu adoptieren und zu basteln. Die Aktion ist kostenfrei für alle Teilnehmenden.

Pharaonengräber, Origami-Figuren und 3D-Objekte in Filmanimationen und Computerspielen unterscheiden sich aus geometrischer Sicht nur wenig. Sie treten – mathematisch gesprochen – in Gestalt sogenannter Polyeder auf. Mathematikerinnen und Mathematiker beschreiben sie einfach als ein Stück Raum, begrenzt von ebenen Flächen. Die bekanntesten von Ihnen sind die Platonischen Körper, darunter z. B. der Würfel. Seit Jahrtausenden und bis heute sind sie und ihre Verwandten Gegenstand der mathematischen Forschung, so auch in dem Sonderforschungsbereich (SFB) *Discretization in Geometry and Dynamics*, der als sogenannter „Transregio“ von Berliner und Münchener Mathematikerinnen und Mathematikern gemeinsam getragen wird.

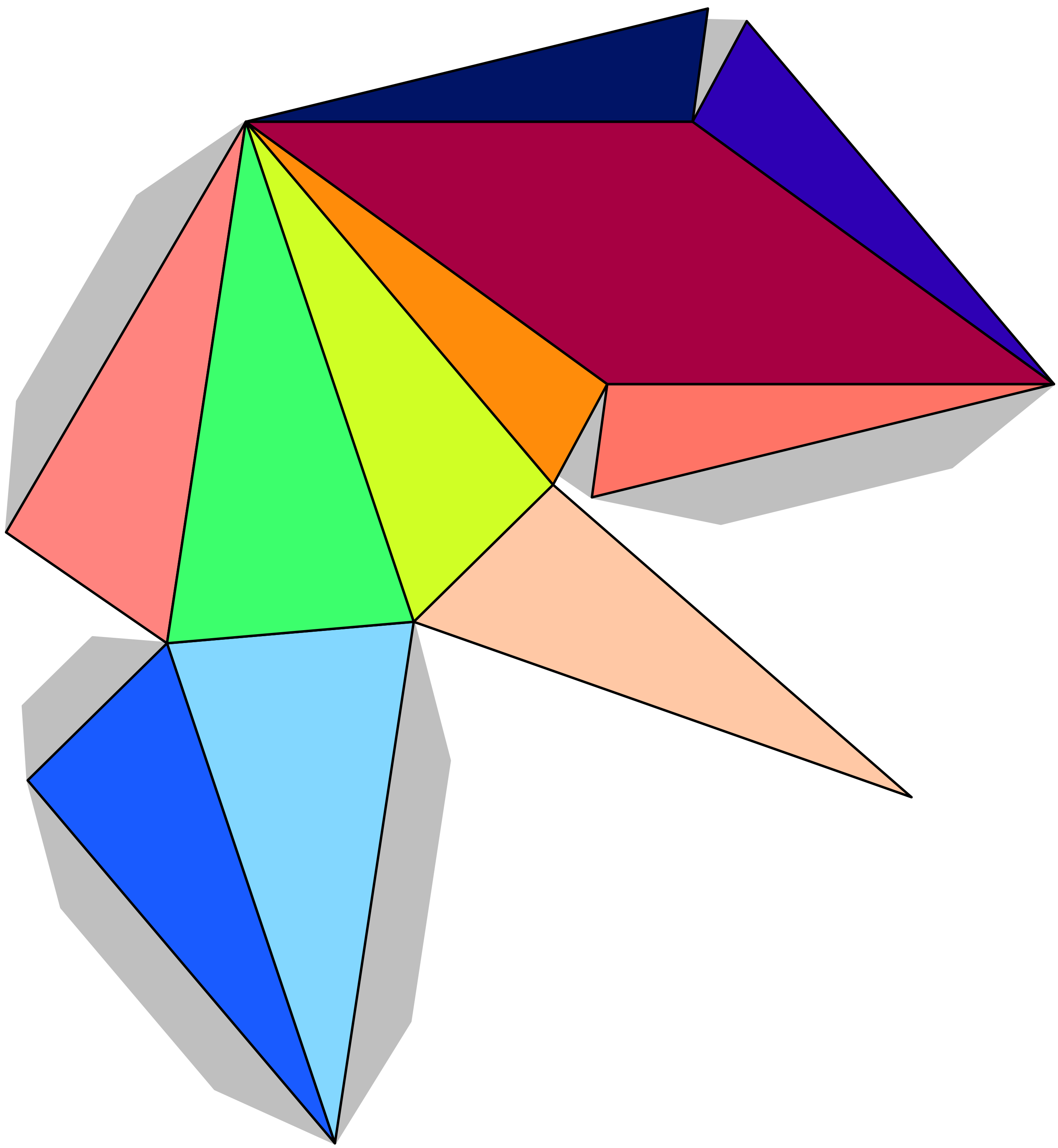
An der Schnittstelle von Forschung und Öffentlichkeit rangiert das Teilprojekt *Adoptiere ein Polyeder*, das den unerschöpflichen Formenreichtum der „Vielflächner“ für alle Welt erfahrbar macht: Mit `www.polytopia.eu` haben Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus dem SFB ein Adoptionsnetzwerk geschaffen, das es Interessierten erlaubt, eine symbolische Patenschaft für ein Polyeder seiner oder ihrer Wahl zu übernehmen. Der Adoptionsprozess erfolgt mit wenigen Mausklicks in Eigenregie online und ist für die User kostenfrei. Wer auf `www.polytopia.eu` ein Polyeder adoptiert, darf ihm einen Namen geben und es so zum Leben erwecken. Auf unseren Internetseiten gibt es jede Menge Infos dazu. Wer will, kann sich auf `www.polytopia.eu` einen individuellen Bastelbogen ausdrucken und sein eigenes Polyeder so auch physisch Gestalt annehmen lassen. Alle Mathe-Begeisterten sind eingeladen, bei dem Projekt mitzumachen und ein Polyeder zu adoptieren!

Der SFB/Transregio 109 *Discretization in Geometry and Dynamics* wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziert und an der Technischen Universität Berlin und der Technischen Universität München realisiert. Die Freie Universität Berlin ist angeschlossen. `www.polytopia.eu` wird zusätzlich von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gefördert.

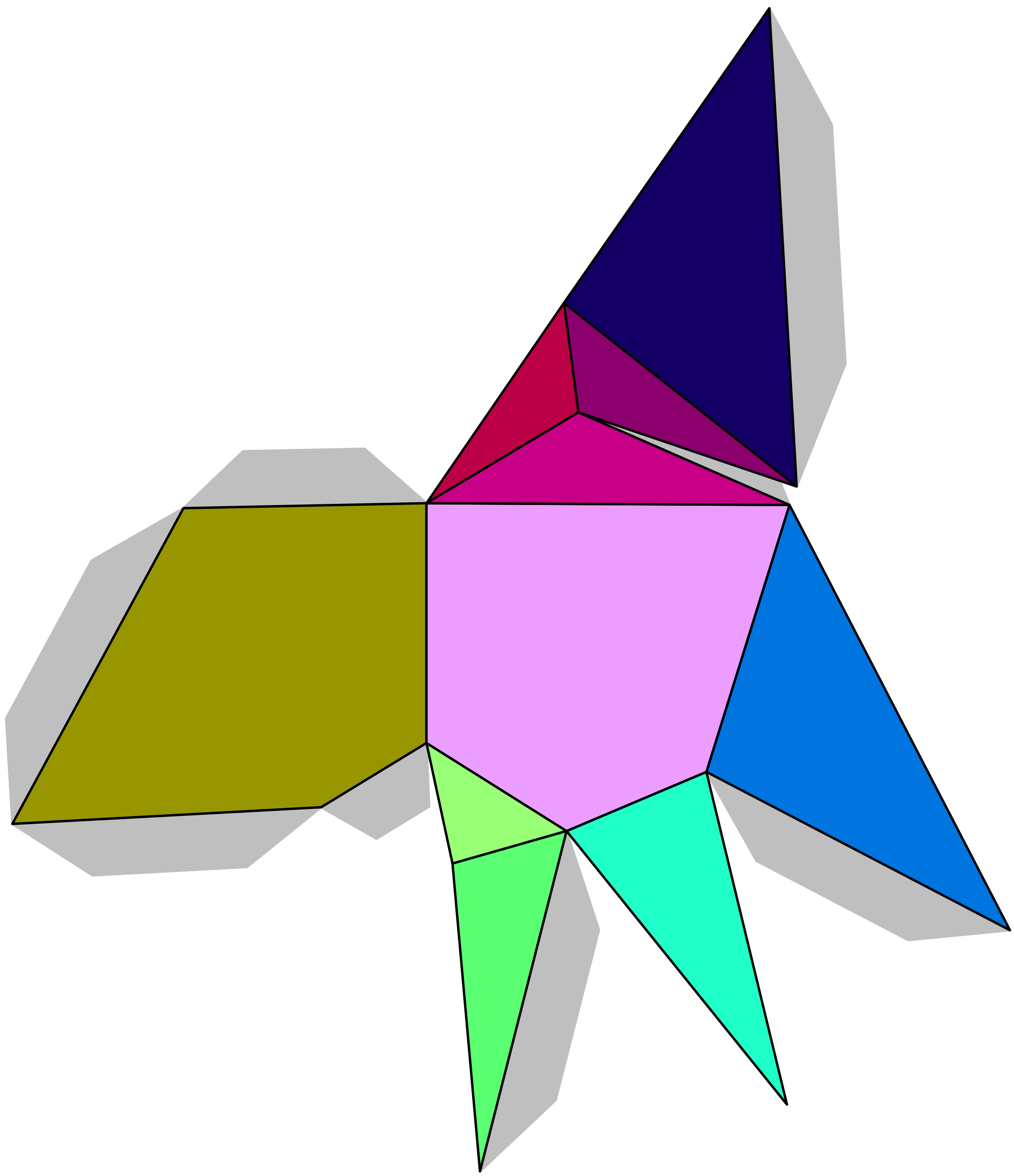
Bastelmaterial für Entwurf A



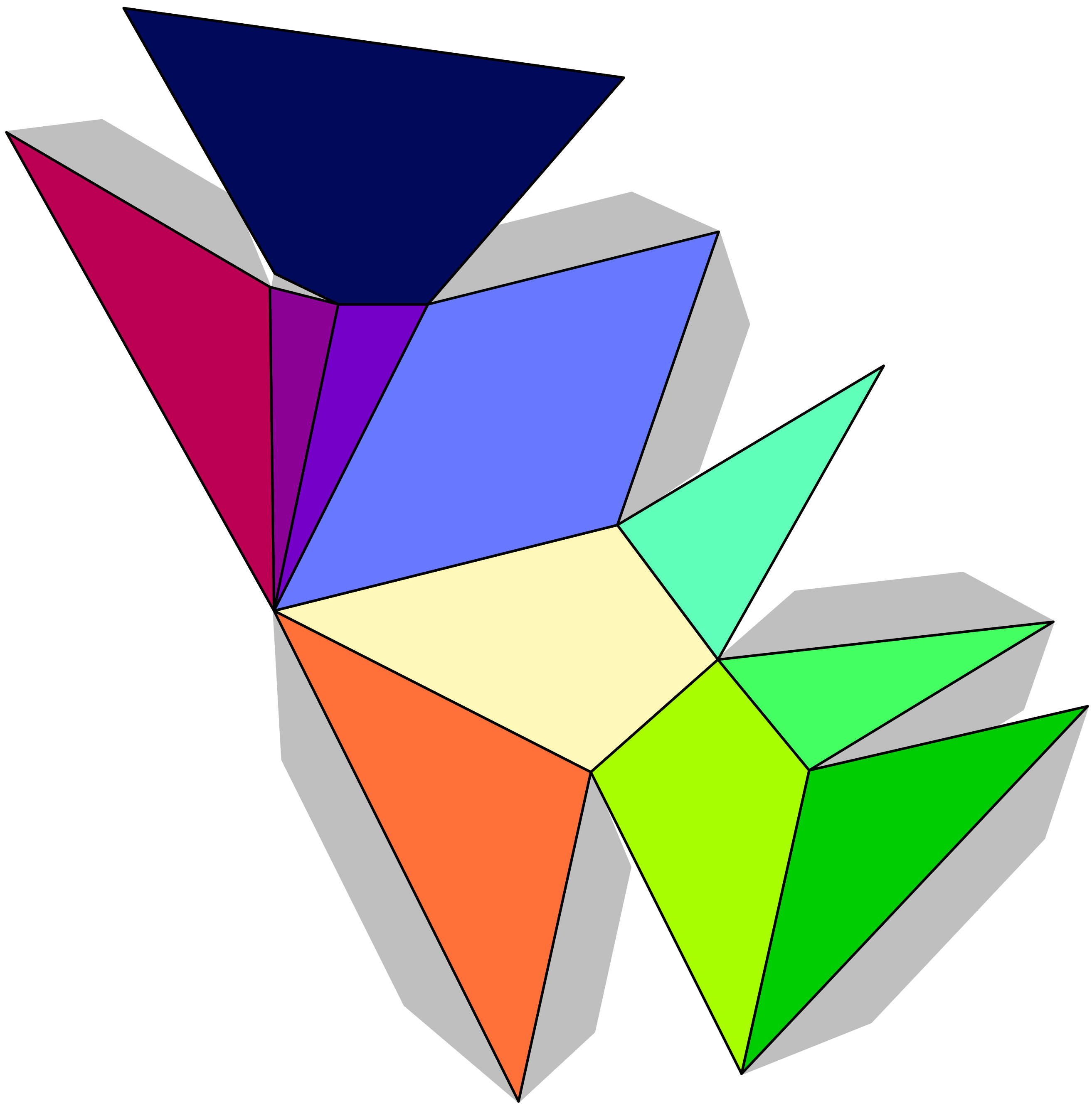
Bastelmaterial für Entwurf B



Bastelmaterial für Entwurf C



Bastelmaterial für Entwurf D



6.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Mathematisch handelt es sich bei diesem Rätsel um ein Problem der *Graphentheorie*. Ein *Graph* ist eine „Anordnung“ von *Knoten* (auch *Ecken* genannt) und *Kanten*, die zwei Knoten miteinander verbinden. Ein Beispiel für einen Graphen seht ihr in Abbildung 4, links. Dieser Graph ist *endlich*, da er nur aus endlich vielen Knoten (A bis F) besteht, und *zusammenhängend*, da man von jedem Knoten zu einem anderen durch eine Verbindung von benachbarten Kanten, einem sog. *Kantenzug*, gelangen kann. So kann man die Knoten A und F z. B. durch den Kantenzug e, h verbinden.

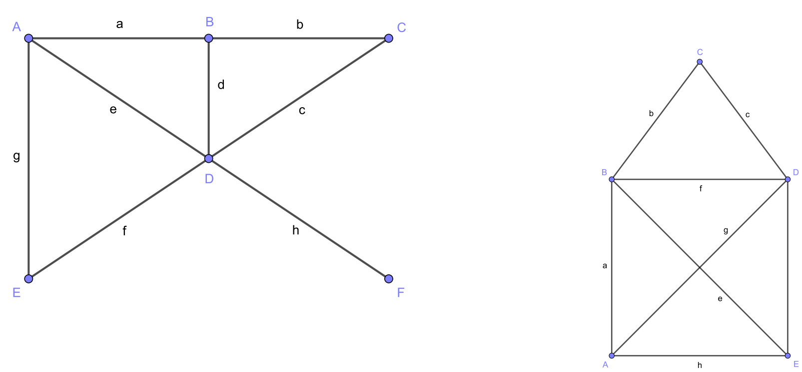


Abbildung 4: Links: Ein Graph mit sechs Knoten (A bis F) und acht Kanten (a bis h). Rechts: Das Haus vom Nikolaus ist ein Graph mit fünf Knoten (A bis E) und acht Kanten (a bis h).

Auch das flache *Haus vom Nikolaus* ist ein Graph (s. Abbildung 4, rechts). Dort gibt es einen Kantenzug, der alle Kanten des Graphen genau einmal enthält, z. B. die Abfolge der Kanten a, b, c, d, e, f, g, h.

Einen solchen Kantenzug, der alle Kanten eines Graphen genau einmal enthält, nennt man auch *Euler-Weg*. Wir suchen also in unseren dreidimensionalen Modellen A bis D nach Euler-Wegen.

Bei der Lösung unseres Problems soll uns der folgende Satz helfen.

Satz: Auf einem endlichen zusammenhängenden Graphen existiert genau dann ein Euler-Weg, wenn keiner oder zwei seiner Knoten einen ungeraden Grad haben. Dabei ist der *Grad* eines Knotens durch die Anzahl, der an ihm anliegenden Kanten, gegeben.

Der Knoten B im Haus vom Nikolaus hat z. B. den Grad 4, da an ihm genau vier Kanten (a, b, e und f) anliegen. Der Grad vom Knoten B ist also gerade. Im Haus vom Nikolaus haben nur die Knoten A und E einen ungeraden Grad (nämlich 3). Die Voraussetzung des Satzes sind also erfüllt und wir haben ja tatsächlich schon gesehen, dass ein Euler-Weg im Haus vom Nikolaus existiert.

Wir wenden die Erkenntnisse des obigen Satzes nun auf die Modelle A bis D an:

Modell A: Wenn man das Modell aus dem gegebenen Netz zusammenbaut, sieht es ungefähr so aus wie in Abbildung 5. Wir zählen nach, dass an den Knoten A und B jeweils drei Kanten anliegen und an allen anderen Knoten genau vier. Die Knoten A und B haben also einen ungeraden Grad, alle anderen einen geraden. Wir folgern also aus dem obigen Satz, dass ein Euler-Weg auf unserem Modellentwurf A existiert. Wer ganz sicher gehen möchte und das Modell A aus allen Blickwinkeln betrachten möchte, findet es auf der Polytopia-Webseite unter:

$$\texttt{https}://\texttt{www.polytopia.eu/detailansicht?id} = 700032$$

Modell B: Wenn man das Modell aus dem gegebenen Netz zusammenbaut, sieht es ungefähr so aus wie in Abbildung 6. Wir zählen nach, dass an den Knoten A und B jeweils drei Kanten anliegen und allen anderen Knoten jeweils vier bzw. sechs. Die Knoten A und B haben also einen ungeraden Grad, alle anderen einen geraden. Wir folgern also aus dem obigen Satz, dass ein Euler-Weg auf unserem Modellentwurf B existiert. Wer ganz sicher gehen möchte und das Modell B aus allen Blickwinkeln betrachten möchte, findet es auf der Polytopia-Webseite unter:

$$\texttt{https}://\texttt{www.polytopia.eu/detailansicht?id} = 800190$$

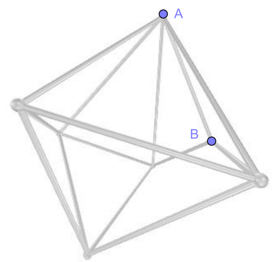


Abbildung 5: Modellentwurf A

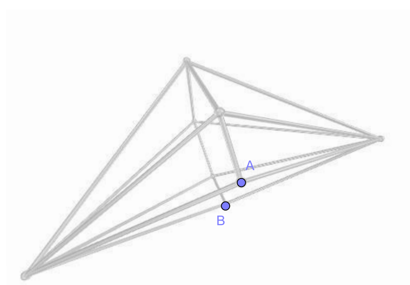


Abbildung 6: Modellentwurf B

Modell C: Wenn man das Modell aus dem gegebenen Netz zusammenbaut, sieht es ungefähr so aus wie in Abbildung 7. Wir zählen nach, dass an den Knoten A bis D jeweils drei Kanten anliegen und an den Knoten E und F jeweils fünf. Es haben also sechs Knoten des Graphen einen ungeraden Grad. Wir folgern aus dem obigen Satz, dass ein Euler-Weg auf unserem Modellentwurf C nicht existieren kann. Wer ganz sicher gehen möchte und das Modell C aus allen Blickwinkeln betrachten möchte, findet es auf der Polytopia-Webseite unter:

$$\texttt{https}:\texttt{//www.polytopia.eu/detailansicht?id}=\texttt{901265}$$

Modell D: Wenn man das Modell aus dem gegebenen Netz zusammenbaut,

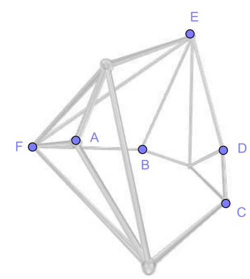


Abbildung 7: Modellentwurf C

sieht es ungefähr so aus wie in Abbildung 8. Wir zählen nach, dass an den Knoten A bis F jeweils drei Kanten anliegen und an den Knoten G und H jeweils fünf. Es haben also acht Knoten des Graphen einen ungeraden Grad. Wir folgern aus dem obigen Satz, dass ein Euler-Weg auf unserem Modellentwurf D nicht existieren kann. Wer ganz sicher gehen möchte und das Modell D aus allen Blickwinkeln betrachten möchte, findet es auf der Polytopia-Webseite unter:

$$\texttt{https}://\texttt{www.polytopia.eu/detailansicht?id} = 1000119$$

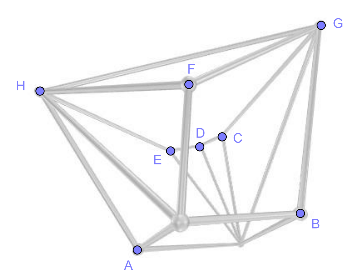


Abbildung 8: Modellentwurf D

7 Kaninchen

Autoren: Cor Hurkens (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

7.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht hat sein großes quadratisches Kaninchengehege (mit 28 m Seitenlänge) mit zwei waagerechten und drei senkrechten Gitterzäunen in zwölf kleinere, rechteckige Gehege unterteilt. Das folgende Bild gibt die Flächen von einigen dieser kleineren Gehege in Quadratmetern an:

	28		**F**
70		**35**	
14			**21**

Achtung: Das Bild gibt wirklich **nur** die Flächengröße an.
Es ist offensichtlich **nicht maßstabsgetreu!**

Ruprecht hat auch das Gehege in der rechten oberen Ecke ausgemessen und herausgefunden, dass seine Fläche F weniger als 100 Quadratmeter beträgt.

Wir wollen wissen: Wie groß ist denn diese Fläche F?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gilt $F \approx 7\,\mathrm{m}^2$.
2. Es gilt $F \approx 13\,\mathrm{m}^2$.
3. Es gilt $F \approx 28\,\mathrm{m}^2$.
4. Es gilt $F \approx 34\,\mathrm{m}^2$.
5. Es gilt $F \approx 49\,\mathrm{m}^2$.
6. Es gilt $F \approx 51\,\mathrm{m}^2$.
7. Es gilt $F \approx 63\,\mathrm{m}^2$.
8. Es gilt $F \approx 76\,\mathrm{m}^2$.
9. Es gilt $F \approx 84\,\mathrm{m}^2$.
10. Es gilt $F \approx 98\,\mathrm{m}^2$.

7.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 1.

Wir bezeichnen die Längen und Breiten der zwölf kleinen Gehege wie in der folgenden Abbildung angegeben mit x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3.

y_3		**28**		**F**
y_2	**70**		**35**	
y_1	**14**			**21**
	x_1	x_2	x_3	x_4

Da das gesamte Gehege ein Quadrat mit Seitenlänge $28\,m$ ist, erhalten wir die beiden Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28 \qquad \text{und} \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 28. \tag{4}$$

Die fünf vorgegebenen Flächeninhalte führen uns zu

$$x_1\,y_1 = 14, \quad x_1\,y_2 = 70, \quad x_2\,y_3 = 28, \quad x_3\,y_2 = 35, \quad x_4\,y_1 = 21. \tag{5}$$

Aus $x_1\,y_1 = 14$ und $x_1\,y_2 = 70$ folgt sofort $y_2 = 5y_1$.

Wir drücken nun mit Hilfe der Gleichungen in (5) und $y_2 = 5y_1$ die vier Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 durch y_1 und y_3 aus:

$$x_1 = \frac{14}{y_1}, \qquad x_2 = \frac{28}{y_3}, \qquad x_3 = \frac{35}{y_2} = \frac{7}{y_1}, \qquad x_4 = \frac{21}{y_1}. \tag{6}$$

Aus den beiden Gleichungen in (4) erhalten wir mit (6)

$$\frac{14}{y_1} + \frac{28}{y_3} + \frac{7}{y_1} + \frac{21}{y_1} = 28 \qquad \text{und} \qquad y_1 + 5y_1 + y_3 = 28.$$

Diese vereinfachen sich zu

$$\frac{3}{y_1} + \frac{2}{y_3} = 2 \qquad \text{und} \qquad 6y_1 + y_3 = 28.$$

Daraus erhalten wir $y_3 = 28 - 6y_1$ und dann weiterhin $\frac{3}{y_1} + \frac{2}{28-6y_1} = 2$, was zu

$$y_1^2 - 6y_1 + 7 = 0 \tag{7}$$

äquivalent ist. Aus der quadratischen Gleichung (7) erhalten wir

$$y_1 = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Durch Rückeinsetzen bestimmt man leicht die entsprechenden Werte der anderen Variablen:

y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4
$3-\sqrt{2}$	$15-5\sqrt{2}$	$10+6\sqrt{2}$	$6+2\sqrt{2}$	$10-6\sqrt{2}$	$3+\sqrt{2}$	$9+3\sqrt{2}$
$3+\sqrt{2}$	$15+5\sqrt{2}$	$10-6\sqrt{2}$	$6-2\sqrt{2}$	$10+6\sqrt{2}$	$3-\sqrt{2}$	$9-3\sqrt{2}$

Die Lösung in der ersten Zeile der Tabelle führt zu

$$F = x_4y_3 = (10 + 6\sqrt{2})(9 + 3\sqrt{2}) = 126 + 84\sqrt{2} > 100$$

und widerspricht somit Ruprechts Angabe. Die Lösung in der zweiten Zeile der Tabelle führt zu

$$F = x_4y_3 = (10 - 6\sqrt{2})(9 - 3\sqrt{2}) = 126 - 84\sqrt{2} \approx 7,20606.$$

8 Harmonie pur

Autorin: Luise Fehliner (HU Berlin)
Projekt: ZE-AP1 – Teachers at University

8.1 Aufgabe

Das Bleiglasfenster in der Werkstatt des Weihnachtsmanns ist kaputt gegangen. Im trapezförmigen Fenster war – getrennt durch die Mittelparallele – der untere Teil grün und der obere rot (s. Abbildung 9). Die Wichtel wollen es natürlich sofort reparieren.

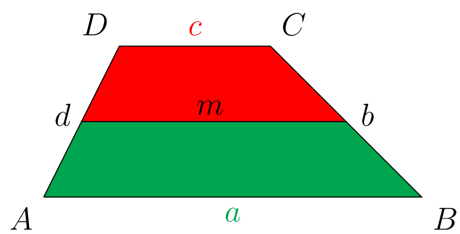


Abbildung 9: Trapezförmiges Fenster mit den Grundseiten a und c sowie den Schenkeln b und d. Das Trapez $ABCD$ wird durch die Parallele m in zwei kleinere Trapeze geteilt.

Aber der Weihnachtsmann ist damit nicht einverstanden. Er ist doch sehr gestresst und hätte gerne eine harmonische Unterteilung. Wenn das Fenster sowieso neu gebaut werden muss, kann man es ja auch gleich neu gestalten:

Die Wichtel sollen den Trennungsbalken zwischen rotem und grünem Glas nun so einbauen, dass die Länge des parallel zu den Grundseiten verlaufenden Balkens m gerade das harmonische Mittel aus den Längen von Grundseiten a und c ist. Dabei ist das **harmonische Mittel** der Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte. Das harmonische Mittel von a und c ist demnach durch

$$\frac{2}{a^{-1} + c^{-1}}$$

gegeben. Nun diskutieren die Wichtel, wie sie das anstellen sollen.

Welche der Konstruktionen erfüllt den Wunsch des Weihnachtsmannes?

Illustration: Sonja Rörig

Antwortmöglichkeiten:

1. Marek sagt: Der Weihnachtsmann soll sich nicht so haben. Die Mittelparallele erfüllt das doch.

2. Nadia schlägt folgende Konstruktion vor: Wir zeichnen einen Kreis um A mit Radius c. Den Schnittpunkt dieses Kreises mit $\overline{AB}$ nennen wir E. Wir konstruieren die Mittelsenkrechte von $\overline{AE}$ und bezeichnen einen Schnittpunkt von dieser mit dem Kreis um B durch A mit F. Die Länge von $\overline{AF}$ ist die gesuchte Länge für den Trennungsbalken.

3. Ida ist davon überzeugt, dass der parallele Trennungsbalken so eingebaut werden muss, dass die rote und grüne Glasscheibe denselben Flächeninhalt haben.

4. Jonas möchte die Höhe des Trapezes im Verhältnis c (unten) zu a (oben) teilen und dort den parallelen Trennbalken einbauen.

5. Hannah schlägt vor, die Parallele zu den Grundseiten durch den Schwerpunkt des Trapezes zu bauen.

6. Rasmus konstruiert über zwei Scherungen aus einem Quadrat mit Kantenlänge 1 ein Rechteck mit den Kantenlängen a und $\frac{1}{a}$ und eines mit den Kantenlängen c und $\frac{1}{c}$. Anschließend trägt er die Längen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}$ hintereinander auf einem Strahl ab und halbiert die entstandene Strecke. Das ist die gesuchte Länge.

7. Lina ist das alles zu kompliziert. Sie möchte die Parallele zu den Grundseiten durch den Diagonalenschnittpunkt des Trapezes als Trennungsbalken benutzen.

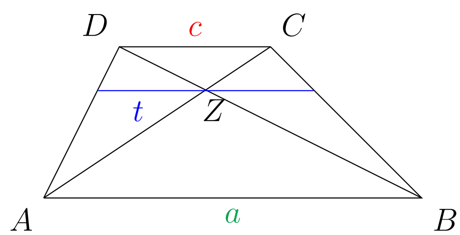
8. Jolanda zeichnet das Lot von D auf die Grundseite a, dann die Diagonale $\overline{AC}$. Durch den Schnittpunkt der beiden konstruiert sie dann die Parallele zu den Grundseiten.

9. Cornelius konstruiert die Mittelsenkrechten der Schenkel b und d. Dann zeichnet er die Parallele zu den Grundseiten durch deren Schnittpunkt.

10. Milena ist fest davon überzeugt: Das geht gar nicht. Der Weihnachtsmann will uns mit dieser Aufgabe nur hereinlegen.

8.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.



Den Diagonalenschnittpunkt bezeichnen wir mit Z und die Parallele durch Z zur Grundseite mit t. Wir benutzen die Strahlensätze zunächst für die Strahlen von A durch C bzw. D und die Parallelen c und t. Es gilt

$$\frac{c}{\frac{t}{2}} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AZ}|}.$$

Für die Strahlenfigur mit dem Zentrum Z und den Parallelen c und a gilt:

$$\begin{aligned}\frac{c}{a} &= \frac{|\overline{ZC}|}{|\overline{ZA}|}\\ &= \frac{|\overline{AC}| - |\overline{ZA}|}{|\overline{ZA}|}\\ &= \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{ZA}|} - 1.\end{aligned}$$

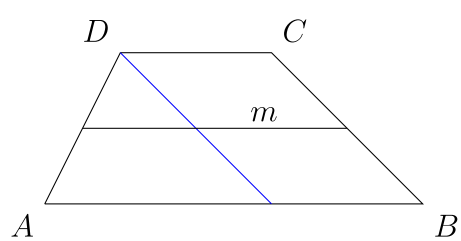
Wir stellen diese Gleichung nach $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{ZA}|}$ um, setzen sie mit der ersten Gleichung gleich und formen weiter um.

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{a}+1=\frac{c}{\frac{t}{2}}=\frac{2c}{t} \\
\Leftrightarrow \quad & t=\frac{2c}{\frac{c}{a}+1} \\
\Leftrightarrow \quad & t=\frac{2c}{\frac{c+a}{a}} \\
\Leftrightarrow \quad & t=\frac{2}{\frac{c+a}{a\cdot c}} \\
\Leftrightarrow \quad & t=\frac{2}{a^{-1}+c^{-1}}
\end{aligned}$$

Damit ist Linas Behauptung richtig.

Wir zeigen noch, dass die anderen Wichtel sich irren:

1. Die Länge der Mittelparallelen ist gerade das arithmetische Mittel aus a und c. Dies lässt sich zum Beispiel einsehen, wenn wir eine Parallele zur Seite $\overline{BC}$ durch D zeichnen und die Strahlenfigur mit Zentrum D betrachten. Das arithmetische Mittel der Längen der beiden Grundseiten ist aber im allgemeinen Trapez größer als das harmonische Mittel. (Der Beweis dieser Tatsache bleibt eine Übungsaufgabe!) Marek hat also nicht recht.



2. Wir bezeichnen noch den Mittelpunkt von $\overline{AE}$ mit M und es ist

$$|\overline{BM}|=a-\frac{c}{2}.$$

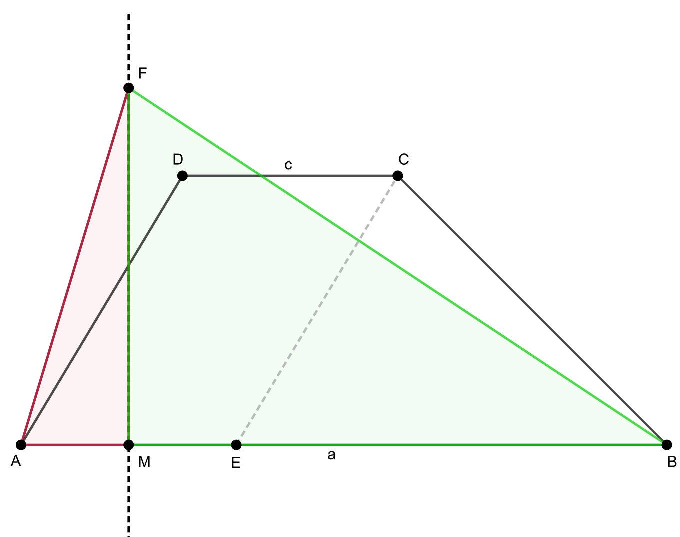
Das Dreieck ΔBFM ist in M rechtwinklig und $|\overline{BF}| = a$. Mit dem Satz des Pythagoras folgt:

$$|\overline{MF}|^2 = a^2 - (a - \frac{c}{2})^2 = ac - \frac{c^2}{4}.$$

Das Dreieck ΔAMF ist in M rechtwinklig und $|\overline{AM}| = \frac{c}{2}$. Wir können erneut den Satz des Pythagoras anwenden:

$$|\overline{AF}|^2 = \frac{c^2}{4} + \left(ac - \frac{c^2}{4}\right) = ac.$$

Damit ist $|\overline{AF}| = \sqrt{ac}$ aber das geometrische Mittel aus a und c. Auch das geometrische Mittel der Längen der Grundseiten ist größer als das harmonische Mittel. (Der Beweis dieser Tatsache verbleibt als Übungsaufgabe!) Nadia hat sich also geirrt.



3. Damit die Flächeninhalte der beiden Teilflächen gleich groß sind, muss der Trennungsbalken dichter an der längeren Parallelseite liegen als die Mittelparallele. Damit muss der Trennungsbalken also länger als das arithmetische Mittel sein. Das harmonische Mittel ist aber kleiner oder gleich dem arithmetischen. Ida muss sich also irren.

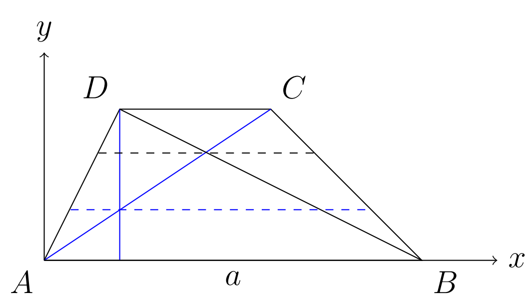
4. Da Jonas kurze und lange Teilstrecke genau umgekehrt zu kurzer und langer Parallelseite ausrichten möchte, wäre auch hier der Trennungsbalken länger als das arithmetische Mittel und kann somit nicht richtig sein.

5. Der Schwerpunkt liegt im allgemeinen Trapez näher bei der längeren als bei der kürzeren Grundseite, d. h., auch der Schwerpunkt liegt hier zu tief.

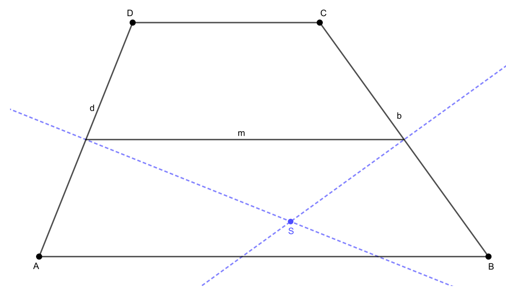
6. Die Konstruktion von Rasmus ist ein guter Anfang. Er konstruiert die Reziproken und ihr arithmetisches Mittel. Leider vergisst er aber am Ende erneut durch eine Scherung das Reziproke zu bilden. Somit ist sein Ergebnis leider falsch. Und nebenbei ist seine Konstruktion auch ausgesprochen aufwändig.

7. Linas Lösung ist richtig, wie wir oben bewiesen haben.

8. Wenn wir ein Koordinatensystem auf das Trapez legen, sodass die x-Achse auf der Seite a liegt und der Koordinatenursprung in A, dann können wir die Diagonale $\overline{AC}$ als Teil des Graphen einer proportionalen Funktion mit positiver Steigung sehen. Und da die x-Koordinate der Ecke D offensichtlich kleiner als die x-Koordinate des Diagonalenschnittpunktes (der ja, wie wir gesehen haben, die richtige Höhe hat) ist, liegt bei Jolandas Vorschlag der Trennungsbalken zu niedrig.



9. Im allgemeinen Trapez liegt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten unterhalb der Mittelparallelen. Daher würde der Trennungsbalken auch hier zu tief liegen.



10. Lina hat ja gezeigt, dass das tatsächlich geht.

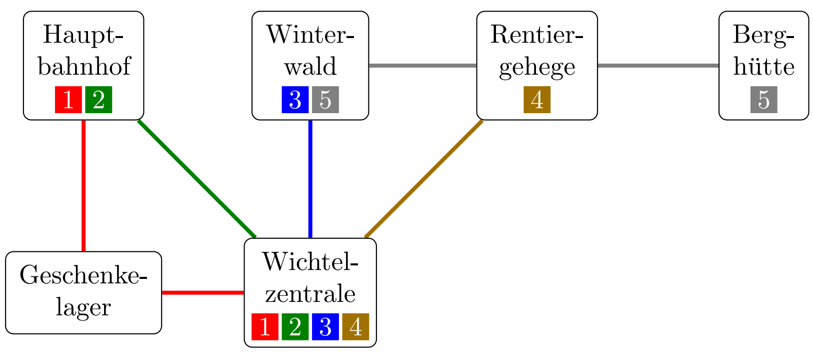
9 Fahrplan-Ärger am Nordpol

Autor: Niels Lindner
Projekt: ECMath MI7 – Routing Structures & Periodic Timetabling

9.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist sauer. Kurz vor dem Fest gab es bei den Nordpol-Verkehrsbetrieben (NVB) einen Fahrplanwechsel. Von seiner Berghütte aus braucht er jetzt viel länger um zum Hauptbahnhof zu kommen, wo der Polarexpress abfährt.

Das Liniennetz der NVB sieht wie folgt aus:



In der folgenden Tabelle sind die Abfahrzeiten der Schlitten und deren Fahrtrichtungen vermerkt. Der Fahrplan wiederholt sich alle 60 Minuten.

Station	1		2		3		4		5	
Hauptbahnhof	23 ↓	37 ↑	53 ↓	07 ↑						
Geschenkelager	39 ↓	21 ↑								
Wichtelzentrale	50 ↓	10 ↑	13 ↓	47 ↑	48 ↓	12 ↑	17 ↓	43 ↑		
Winterwald					12 ↓	48 ↑			35 ↓	25 ↑
Rentiergehege							49 ↓	11 ↑	40 ↓	20 ↑
Berghütte									58 ↓	02 ↑

Bei Zwischenstationen sind Ankunfts- und Abfahrtsminuten identisch. Keine Fahrt zwischen zwei benachbarten Stationen dauert 60 Minuten oder länger.

Es kann von einer Linie zu einer anderen umgestiegen werden, falls die Umsteigezeit, d. h., die Differenz zwischen Abfahrts- und Ankunftszeit, mindestens eine Minute beträgt. Umstiege finden immer zwischen verschiedenen Linien statt. Das Durchfahren einer Zwischenstation zählt nicht als Umsteigen.

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

Illustration: Sonja Rörig

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt vier verschiedene Routen von der Berghütte zum Hauptbahnhof mit der Eigenschaft, dass keine Station mehr als einmal durchfahren wird.
2. Der Weihnachtsmann benötigt mindestens 2 Stunden und 5 Minuten von der Berghütte zum Hauptbahnhof.
3. Auf der Rückfahrt vom Hauptbahnhof zur Berghütte muss der Weihnachtsmann in jedem Fall insgesamt mindestens 55 Minuten an Stationen warten.

4. Rudolf, das Rentier, kann seinen Schlitten jetzt auch mal stehen lassen: Mit den NVB schafft er die Strecke vom Rentiergehege zum Hauptbahnhof im günstigsten Fall in unter einer Stunde.

5. Für jedes Paar (A, B) von verschiedenen Stationen gilt: Die kürzeste Route von A nach B dauert genau so lange wie die kürzeste Route von B nach A.

6. Auf Bitten des Weihnachtsmanns fährt die Linie 5 in Richtung Winterwald testweise 15 Minuten früher, sodass er am Rentiergehege bequem in die Linie 4 Richtung Wichtelzentrale umsteigen kann. Wenn er um 09.47 Uhr von der Berghütte abfährt, dann erreicht er gerade noch den Polarexpress um 11.11 Uhr ab Hauptbahnhof.

7. Die NVB beenden den Test aber schnell wieder, denn durch die 15 Minuten frühere Abfahrt Richtung Winterwald, nicht aber in die Gegenrichtung, musste auf der Linie 5 ein Fahrzeug mehr eingesetzt werden.

8. Das verärgert abermals den Weihnachtsmann. Er zieht sich in seine Berghütte zurück und knobelt einen neuen Fahrplan aus. Die Linienverläufe und die Fahrzeiten zwischen den Stationen bleiben dabei unverändert. Am Ende strahlt er: Es gibt einen Fahrplan, bei dem kein einziger Umstieg an den Stationen Hauptbahnhof, Wichtelzentrale und Winterwald länger als 10 Minuten dauert.

9. Rudolf ist von der Idee des Weihnachtsmanns begeistert. Er konstruiert einen Fahrplan, bei dem an den Stationen Rentiergehege, Wichtelzentrale und Winterwald keine Umsteigezeit größer als 10 Minuten ist.

10. Schließlich einigen sich die NVB auf einen radikalen Schritt: Die Linie 4 wird ersatzlos eingestellt. Dann kann ein Fahrplan eingeführt werden, bei dem an keiner Station eine Umsteigerelation länger als 7 Minuten dauert.

Projektbezug:

Das Projekt *Routing Structures & Periodic Timetabling* widmet sich der Berechnung von optimalen Taktfahrplänen in Nahverkehrsnetzen. Dabei wird berücksichtigt, dass der Fahrplan einen Einfluss auf die Routenwahl der

Fahrgäste ausübt. Umgekehrt werden die Wege der Fahrgäste in die Fahrplanerstellung miteinbezogen. Das oberste Ziel ist hierbei, die Umsteigezeiten für alle Fahrgäste möglichst kurz zu gestalten.

9.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

1. Alle Routen von der Berghütte zum Hauptbahnhof führen über die Wichtelzentrale. Von der Berghütte zur Wichtelzentrale gibt es zwei verschiedene Routen (Linie 5 und dann entweder Linie 3 oder 4), ebenso von der Wichtelzentrale zum Hauptbahnhof (Linie 1 oder 2). Insgesamt ergeben sich also vier Routen.

2. Die Fahrzeiten entlang der vier möglichen Routen sind wie folgt:

		5 3 1		5 3 2	
Station		Minute	Fahrzeit	Minute	Fahrzeit
Berghütte	ab	02	0:00	02	0:00
Winterwald	an	25	0:23	25	0:23
	ab	48	0:46	48	0:46
Wichtelzentrale	an	12	1:10	12	1:10
	ab	10	2:08	47	1:45
Hauptbahnhof	an	37	2:35	07	2:05

		5 4 1		5 4 2	
Station		Minute	Fahrzeit	Minute	Fahrzeit
Berghütte	ab	02	0:00	02	0:00
Rentiergehege	an	20	0:18	20	0:18
	ab	11	1:09	11	1:09
Wichtelzentrale	an	43	1:41	43	1:41
	ab	10	2:08	47	1:45
Hauptbahnhof	an	37	2:35	07	2:05

Minute: Abfahrts-/Ankunftsminute
Fahrzeit: Gesamtfahrzeit in Stunden:Minuten

   Der Weihnachtsmann ist demnach mindestens 2 Stunden und 5 Minuten unterwegs.

3. Bei den vier möglichen Routen entstehen die folgenden Umsteigezeiten:

Station	1 3 5	2 3 5	1 4 5	2 4 5
Wichtelzentrale	58	35	27	4
Winterwald	23	23	–	–
Rentiergehege	–	–	51	51
Gesamt	81	58	78	55

4. Mit den Linien 4 und 2 kann Rudolf die Strecke in 56 Minuten schaffen (siehe 2.)

5. Hier helfen folgende Beobachtungen: An jeder Station erfüllen die Abfahrtsminute a einer Linie in eine Richtung und die Ankunftsminute b der gleichen Linie in die andere Richtung die Gleichung $a + b = 60$. Außerdem sind zwischen zwei benachbarten Stationen einer Linie die Fahrzeiten in beiden Richtungen stets gleich. Eventuelle Unterschiede zwischen den kürzesten Fahrzeiten von A nach B bzw. B nach A können also nur durch Umstiege entstehen.

   Betrachte an einer beliebigen Station einen Umstieg von Linie ℓ_1 zu Linie ℓ_2 mit Umstiegszeit $u_{1,2}$ und den Umstieg in der Gegenrichtung von Linie ℓ_2 zu Linie ℓ_1 mit Umstiegszeit $u_{2,1}$. Da Umstiege erst ab einer Minute Umsteigezeit möglich sind, gilt $u_{1,2}, u_{2,1} \geq 1$. Weil auf einer kürzesten Route Umstiege, die länger als 60 Minuten dauern, nicht sinnvoll sind (andernfalls könnte man mindestens eine Stunde früher abfahren), kann auch $u_{1,2}, u_{2,1} \leq 60$ angenommen werden.

   Ist a_1 die Ankunftsminute von ℓ_1, so errechnet sich die zum Umstieg passende Abfahrtsminute von ℓ_2 als $a_1 + u_{1,2}$ oder $a_1 + u_{1,2} - 60$, da Abfahrtsminuten immer zwischen 0 und 59 liegen. Kommt in der Gegenrichtung Linie ℓ_2 zur Mintue a_2 an, so fährt ℓ_1 zur Minute $a_2 + u_{2,1}$ oder $a_2 + u_{2,1} - 60$ ab. Aus der obigen Beobachtung ergibt sich aber nun $a_1 + a_2 + u_{1,2} \in \{60, 120\}$ und $a_1 + a_2 + u_{2,1} \in \{60, 120\}$. In jedem Fall ist dann $u_{1,2} - u_{2,1}$ ein ganzzahliges Vielfaches von 60. Da aber $u_{1,2} - u_{2,1}$ höchstens $60 - 1 = 59$ und mindestens $1 - 60 = -59$ ist, muss $u_{1,2} = u_{2,1}$ gelten.

   Damit sind sowohl Fahrzeiten als auch Umstiege für beide Richtungen gleich lang. Also dauert die kürzeste Fahrt von A nach B stets genauso lange wie die kürzeste Fahrt von B nach A.

6. Wenn die Linie 5 Richtung Winterwald 15 Minuten früher fährt, führt eine Abfahrt um 09.47 Uhr von der Berghütte zu einer Ankunft um

10.05 Uhr am Rentiergehege. Dann steigt der Weihnachtsmann in die Linie 4 um, die 10.11 Uhr abfährt und 10.43 Uhr an der Wichtelzentrale ankommt. Von dort aus geht es um 10.47 Uhr mit der Linie 2 weiter, die den Hauptbahnhof um 11.07 Uhr erreicht. Damit kann der Weihnachtsmann noch den Polarexpress ab 11.11 Uhr nehmen.

7. Wenn ein Fahrzeug zur Minute 02 an der Berghütte losfährt, kommt es 25 am Winterwald an, fährt 35 zurück und ist 58 wieder an der Berghütte, wo es nach exakt einer Stunde zur Minute 02 erneut losfahren kann. Also reicht ein Fahrzeug aus, um Linie 5 im originalen Fahrplan zu bedienen. Ist die Abfahrt von der Berghütte Richtung Winterwald 15 Minuten früher, dann ist ein Fahrzeug mit Abfahrt 47 an der Berghütte trotzdem erst nach einer Stunde und 11 Minuten zur Minute 58 wieder da und kann erst nach weiteren 49 Minuten wieder abfahren. Es werden in diesem Fall also zwei Fahrzeuge benötigt.

8. Der Fahrplan des Weihnachtsmannes könnte z. B. so aussehen:

Station	1	2	3	4	5
Hauptbahnhof	31 ↓ 29 ↑	35 ↓ 25 ↑			
Geschenkelager	47 ↓ 13 ↑				
Wichtelzentrale	58 ↓ 02 ↑	55 ↓ 05 ↑	02 ↓ 58 ↑	01 ↓ 59 ↑	
Winterwald			26 ↓ 34 ↑		33 ↓ 27 ↑
Rentiergehege				33 ↓ 27 ↑	38 ↓ 22 ↑
Berghütte					56 ↓ 04 ↑

Zwischen zwei verschiedenen Linien beträgt die maximale Umstiegszeit am Hauptbahnhof 6, an der Wichtelzentrale und am Winterwald 7 Minuten.

9. **Falsch:** So einen Fahrplan kann es nicht geben. Dazu betrachten wir eine Fahrt mit den Linien 3, 4 und 5 im Kreis Winterwald – Wichtelzentrale – Rentiergehege – Winterwald. Die Fahrzeit ohne Umstiege beträgt in diesem Kreis $24 + 32 + 5 = 61$ Minuten. Hinzu kommen die beiden Umstiegszeiten an der Wichtelzentrale und am Rentiergehege. Wird noch der Umstieg von der Linie 5 zur Linie 3 am Winterwald hinzugefügt, wird wieder eine Abfahrt der Linie 3 am Winterwald erreicht. Diese erfolgt mindestens 61 Minuten später als die ursprüngliche Abfahrt, und da der Fahrplan sich nur alle 60 Minuten wiederholt, sogar

mindestens 120 Minuten später. Insbesondere benötigen die drei Umstiege an der Wichtelzentrale, dem Rentiergehege und dem Winterwald zusammen mindestens 59 Minuten. Also dauert mindestens einer dieser Umstiege $59/3 > 10$ Minuten oder länger.

10. Hierfür kann der Fahrplan aus 8. ohne die Linie 4 übernommen werden.

10 Xmasium

Autoren: Frits Spieksma (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

10.1 Aufgabe

Im Forschungslabor des Weihnachtsmanns wurde vor einigen Jahren ein neues chemisches Element entdeckt und (in Anlehnung an die berühmten Elemente Rubidium, Cäsium und Francium) auf den Namen Xmasium getauft. Auf dem Labortisch steht nun ein Kochtopf, der unendlich viele Xmasium-Atome enthält: Im Topf sind genau N Xmasium-Atome mit Atomgewicht 0, genau N Xmasium-Atome mit Atomgewicht 1, genau N Xmasium-Atome mit Atomgewicht 2, genau N Xmasium-Atome mit Atomgewicht 3, und so weiter. Für jede ganze Zahl $g \geq 0$ enthält der Topf also genau N Xmasium-Atome mit Atomgewicht g.

Knecht Ruprecht beginnt, langsam Atome aus dem Kochtopf herauszunehmen: Im ersten Schritt nimmt er vier Atome mit Gesamtatomgewicht 1 aus dem Topf. Im zweiten Schritt nimmt er vier Atome mit Gesamtatomgewicht 2 aus dem Topf. Im dritten Schritt nimmt er vier Atome mit Gesamtatomgewicht 3 aus dem Topf. Im vierten Schritt nimmt er vier Atome mit Gesamtatomgewicht 4 aus dem Topf. Und so weiter, und so fort: Im k-ten Schritt (mit $k \geq 1$) nimmt Ruprecht vier Atome mit Gesamtatomgewicht k aus dem Topf.

Wir wollen von Euch wissen: Wie lautet denn die kleinste Zahl N, sodass Ruprecht (mit einer kluggewählten Strategie) unendlich viele derartige Schritte durchführen kann?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Die kleinste Zahl ist $N = 11$.
2. Die kleinste Zahl ist $N = 12$.
3. Die kleinste Zahl ist $N = 13$.
4. Die kleinste Zahl ist $N = 14$.
5. Die kleinste Zahl ist $N = 15$.
6. Die kleinste Zahl ist $N = 16$.
7. Die kleinste Zahl ist $N = 17$.
8. Die kleinste Zahl ist $N = 18$.
9. Die kleinste Zahl ist $N = 19$.
10. Für jede Wahl von N kann Ruprecht nur endlich viele Schritte durchführen.

10.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Zuerst wollen wir eine **untere Schranke** herleiten: Dazu betrachten wir eine beliebige Zahl N, mit der Ruprecht unendlich viele Schritte machen kann. Nach den ersten $6N$ Schritten hat Ruprecht dann genau $24N$ Atome mit einem Gesamtgewicht von exakt

$$1 + 2 + \cdots + 6N = 3N(6N + 1)$$

aus dem Kochtopf genommen.

Die $24N$ Atome mit den kleinsten Atomgewichten haben

- N-mal Gewicht 0,
- N-mal Gewicht 1,
- N-mal Gewicht 2, und so weiter, und so weiter, und so weiter, und schließlich
- N-mal Gewicht 23.

Das kleinstmögliche Gesamtgewicht von $24N$ Atomen im Kochtopf beträgt daher

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + 23)N = 23$$

Daraus folgern wir

$$3N(6N + 1) \geq 23 \cdot 12N.$$

Diese Ungleichung vereinfacht sich zu $6N \geq 91$ und impliziert die untere Schranke $N \geq 16$.

Nun wenden wir uns der **oberen Schranke** zu: Wir beschreiben eine mögliche Strategie, bei der Knecht Ruprecht für jede Zahl $g \geq 1$ die folgenden vier Schritte macht.

- Der Schritt $4g-3$ entnimmt die Atome mit Gewicht $g-1, g-1, g-1, g$.
- Der Schritt $4g-2$ entnimmt die Atome mit Gewicht $g-1, g-1, g, g$.

- Der Schritt $4g - 1$ entnimmt die Atome mit Gewicht $g - 1, g, g, g$.
- Der Schritt $4g$ entnimmt die Atome mit Gewicht g, g, g, g.

Diese Strategie verwendet insgesamt nur sechs Atome mit Atomgewicht 0. Die anderen Atome mit Gewicht $g \geq 1$ werden wie folgt behandelt:

- Ein Atom wird im Schritt $4g - 3$ aus dem Kochtopf genommen,
- zwei weitere im Schritt $4g - 2$,
- drei im Schritt $4g - 1$,
- vier im Schritt $4g$,
- drei im Schritt $4g + 1$,
- zwei im Schritt $4g + 2$, und schließlich noch
- eines im Schritt $4g + 3$.

Insgesamt werden also genau

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$$

Atome mit Gewicht $g \geq 1$ entnommen. Die folgende Tabelle zeigt die ersten zwanzig Schritte dieser Strategie, wobei die k-te Spalte die Gewichte der im k-ten Schritt entnommenen Atome angibt:

0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	$\cdots$
0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	$\cdots$
0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	$\cdots$
1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	$\cdots$

Zusammenfassend kann Knecht Ruprecht für $N = 16$ unendlich viele Schritte durchführen.

11 Aufregung am Zuckerhut

Autor*innen: David Rueda, Ariane Beier (Matheon)

11.1 Aufgabe

Es herrscht eine angespannte Stimmung am Zuckerhut, einem verschneiten Berg bei Rüodeschanerow im Erzgebirge: Die Seilbahn, mit der üblicherweise die Weihnachtsgeschenke der kleinen und großen Einwohner von Weingummihöhe vom Ort Bonbontal am Fuße des Zuckerhuts transportiert werden, ist defekt. Nun muss sich der Weihnachtsmann also mit dem Schlitten auf die Socken machen.

Die Rentiere maulen: Der kürzeste Weg von Bonbontal nach Weingummihöhe entlang der Seilbahnstrecke ist viel zu steil, sie müssen also wohl oder übel einmal um den Berg herum galoppieren. Straßenbauingenieurin Wilma Wichtel kann die missmutigen Tiere beruhigen: „Der kürzeste Weg von Bonbontal nach Weingummihöhe, der einmal um den Berg herumführt, ist gar nicht soo lang. Außerdem könnt ihr einen nicht unerheblichen Teil davon auf dem Schlitten bergab düsen.“

Wir wollen von euch wissen: Wie lang ist der kürzeste Weg x von Bonbontal nach Weingummihöhe, der einmal um den Berg herumführt? Und welcher Teilweg y dieses Weges führt bergab?

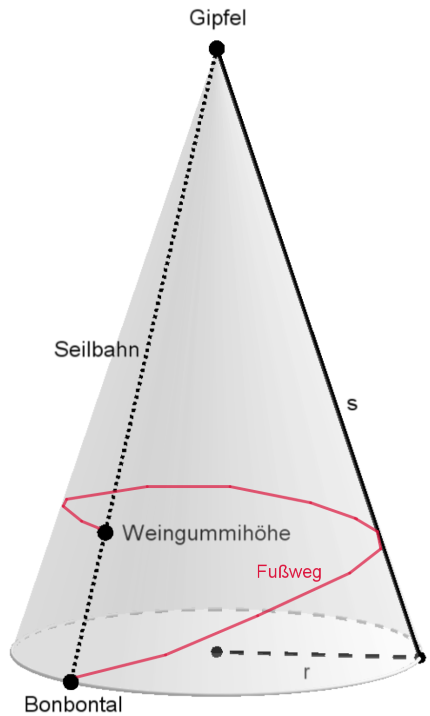


Abbildung 10: Der Zuckerhut hat exakt die Form eines geraden Kegels mit kreisförmiger Grundfläche vom Radius $r = 20\,\text{km}$ und Mantellinie $s = 60\,\text{km}$. Der Ort Bonbontal liegt am Fuße des Berges. Weingummihöhe liegt auf der Strecke von Bonbontal zum Gipfel des Berges in einer Entfernung von $10\,\text{km}$ von Bonbontal.

Illustration: Sonja Rörig

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gilt $x \approx 92\,\text{km}$ und $y \approx 39\,\text{km}$.
2. Es gilt $x \approx 92\,\text{km}$ und $y \approx 40\,\text{km}$.
3. Es gilt $x \approx 93\,\text{km}$ und $y \approx 40\,\text{km}$.
4. Es gilt $x \approx 93\,\text{km}$ und $y \approx 41\,\text{km}$.
5. Es gilt $x \approx 94\,\text{km}$ und $y \approx 41\,\text{km}$.
6. Es gilt $x \approx 94\,\text{km}$ und $y \approx 42\,\text{km}$.
7. Es gilt $x \approx 95\,\text{km}$ und $y \approx 42\,\text{km}$.
8. Es gilt $x \approx 95\,\text{km}$ und $y \approx 43\,\text{km}$.
9. Es gilt $x \approx 96\,\text{km}$ und $y \approx 43\,\text{km}$.
10. Es gilt $x \approx 96\,\text{km}$ und $y \approx 44\,\text{km}$.

11.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Den Mantel des Kegels können wir als Kreissektor eines Kreises vom Radius $s = 60\,\text{km}$ betrachten (s. Abbildung 11). Die kürzeste Verbindung x der Orte Bonbontal (B) und Weingummihöhe (W) wollen wir mithilfe des Kosinussatzes berechnen:

$$x^2 = (50\,\text{km})^2 + (60\,\text{km})^2 - 2 \cdot 50\,\text{km} \cdot 60\,\text{km} \cdot \cos\gamma$$

$$x = \sqrt{50^2 + 60^2 - 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \cos\gamma}\ \text{km}.$$

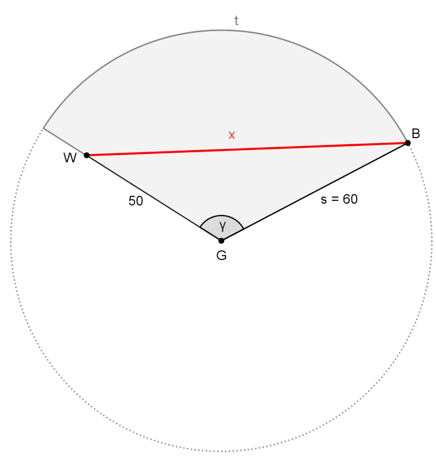


Abbildung 11: Der Mantel des Kegels als Kreissektor

Um den Winkel γ zu bestimmen, überlegen wir uns welchen Anteil der Mantel als Kreissektor am ganzen Kreis hat: Der Kreisbogen t des Kreissektors hat die Länge $t = 2\pi r$. Der Umfang des Kreises ist

$$u = 2\pi \cdot s = 2\pi \cdot 3r = 3t,$$

d. h. $\gamma = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$ und $\cos\gamma = \cos(120°) = -\frac{1}{2}$. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{50^2 + 60^2 + 50 \cdot 60}\ \text{ km} = \sqrt{2500 + 3600 + 3000}\ \text{ km} \\ &= \sqrt{9100}\ \text{ km} = 10\sqrt{91}\ \text{ km} \\ &\approx 95{,}39\,\text{km} \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch die Länge des Teilweges y bestimmen, welcher bergab führt: Der höchste Punkt H des Weges x ist genau der Punkt auf x, in dem x tangential zu einer Höhenlinie des Kegels ist. Die Höhenlinien des Kegels stehen senkrecht auf den Radien s des großen Kreises. D. h. H ist genau der Punkt auf x, an dem sich x und ein Radius s senkrecht schneiden (s. Abbildung 12).

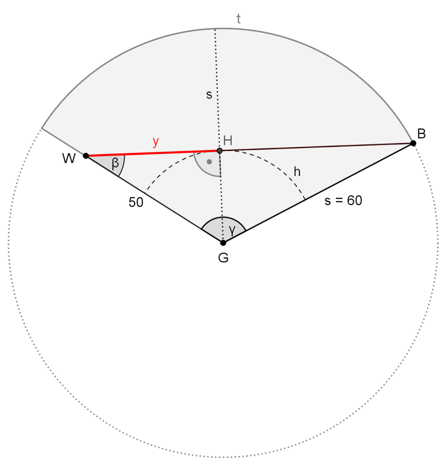


Abbildung 12: Der höchste Punkt H des Weges x und der Teilweg y, der bergab führt

Im rechtwinkligen Dreieck ΔGHW ist y die gesuchte Länge des Weges, der bergab führt. Es gilt

$$y = \cos\beta \cdot 50\,\text{km}.$$

$\sin\beta$ ermitteln wir mit dem Sinussatz:

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \frac{\sin\gamma\cdot s}{x} = \frac{\sin(120^\circ)\cdot 60}{10\sqrt{91}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 60}{10\sqrt{91}}\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{3\cdot 9}{91}} = \sqrt{\frac{91-27}{91}} = \sqrt{\frac{64}{91}}\\ &= \frac{8}{\sqrt{91}}.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}y &= \frac{8}{\sqrt{91}}\cdot 50\,\mathrm{km}\\ &= \frac{400}{\sqrt{91}}\,\mathrm{km}\\ &\approx 41{,}93\,\mathrm{km}.\end{aligned}$$

12 Wichtelturnier

Autor: Onno Boxma (TU Eindhoven)

12.1 Aufgabe

Beim großen Wichtelturnier kämpft die blaue Mannschaft mit 24 Wichteln gegen die gelbe Mannschaft mit 24 Wichteln. Jeder Wichtel beginnt das Turnier mit genau einem Los. In jeder Runde des Turniers nominieren beide Mannschaften einen ihrer Kämpfer. Alle Lose dieser beiden Kämpfer werden in einen Hut gelegt. Der Gewinner der Runde wird durch Ziehen eines Loses bestimmt, erhält alle Lose des Verlierers dazu und bleibt weiter im Rennen. Der Verlierer scheidet aus dem Turnier aus. Scheidet der letzte Wichtel der einen Mannschaft aus, so hat die andere Mannschaft das Turnier gewonnen. Nach 41 Runden sind nur noch sieben Wichtel übrig:

- Blaue Mannschaft: Atto (16 Lose), Bilbo (6 Lose), Chico (5 Lose), Dondo (1 Los).
- Gelbe Mannschaft: Espo (10 Lose), Frodo (6 Lose), Gumbo (4 Lose).

Die gelbe Mannschaft nominiert Frodo als Kämpfer für die nächste Runde. Wen sollte die blaue Mannschaft nominieren, um die Wahrscheinlichkeit für den Turniersieg zu maximieren?

Illustration: Sonja Rörig

Antwortmöglichkeiten:

1. Nur Atto maximiert die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen.
2. Nur Bilbo maximiert die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen.
3. Nur Chico maximiert die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen.
4. Nur Dondo maximiert die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen.
5. Nur Atto und Bilbo maximieren die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen.
6. Nur Atto und Chico maximieren die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen.
7. Nur Atto und Dondo maximieren die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen.
8. Nur Bilbo und Chico maximieren die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen.
9. Nur Bilbo und Dondo maximieren die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen.
10. Es ist völlig egal, wen die Blauen als Kämpfer nominieren.

12.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Die Blauen gewinnen das Turnier mit Wahrscheinlichkeit 7/12 – völlig unabhängig davon, wen sie als ihren Kämpfer nominieren.

Wir wollen sogar die folgende Behauptung beweisen: Wenn die blaue Mannschaft noch b Teilnehmer mit insgesamt B Losen und die gelbe Mannschaft noch g Teilnehmer mit insgesamt G Losen hat, so beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit der Blauen $B/(B+G)$ und die der Gelben $G/(B+G)$ – völlig unabhängig von der Wahl der Kämpfer.

Zunächst stellen wir fest, dass die behauptete Gewinnwahrscheinlichkeit symmetrisch in b (bzw. B) und g (bzw. G) ist. Wir wollen die Behauptung nun durch Induktion über $b+g$ beweisen:

Induktionsanfang: Gilt $b = 0$ oder $g = 0$, dann stimmt die Behauptung offensichtlich.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass die Behauptung für $(b-1)+g$ bzw. $b+(g-1)$ gilt.

Induktionsbehauptung: Wir wollen zeigen, dass die Behauptung dann auch für $b+g$ gilt.

Induktionsschritt: Die Blauen nominieren einen Kämpfer mit x Losen und die Gelben einen Kämpfer mit y Losen. Der blaue Kämpfer gewinnt diese Runde mit der Wahrscheinlichkeit $x/(x+y)$. Falls der blaue Kämpfer gewinnt, ist die Gewinnwahrscheinlichkeit des blauen Teams laut Induktionsvoraussetzung $(B+y)/(B+G)$. Der blaue Kämpfer verliert diese Runde mit einer Wahrscheinlichkeit von $y/(x+y)$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit des blauen Teams ist dann nach Induktionsvoraussetzung $(B-x)/(x+y)$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit des blauen Teams ist also insgesamt:

$$\frac{x}{x+y} \cdot \frac{B+y}{B+G} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{B-x}{B+G} = \frac{B}{B+G}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen und wir haben gezeigt, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit des blauen (und des gelben) Teams nur von den B und G

und nicht von b, g oder der Wahl der Kämpfer abhängt.

Anmerkung: Die Aufgabe kann auch leicht mit einem Computerprogramm gelöst werden, das alle möglichen Turniersituationen enummeriert und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten berechnet. Zum Beispiel gibt es für den ersten Kampf nur acht mögliche Resultate:

(1) Atto gewinnt gegen Frodo.

(2) Atto verliert gegen Frodo.

(3) Bilbo gewinnt gegen Frodo.

(4) Bilbo verliert gegen Frodo.

(5) Chico gewinnt gegen Frodo.

(6) Chico verliert gegen Frodo.

(7) Dondo gewinnt gegen Frodo.

(8) Dondo verliert gegen Frodo.

Da es nur um sechs Kämpfe geht, halten sich die Verzweigungen und die Gesamtzahl aller möglichen Situationen in Grenzen.

Noch ein anderer Lösungsansatz besteht darin, das Turnier ein paar Millionen mal mit dem Computer zu simulieren. Dadurch wird man entdecken, dass die Wahrscheinlichkeiten und die zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen gar nicht von den Entscheidungen der beiden Mannschaften abhängen.

13 Die Schatzinsel

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)

13.1 Aufgabe

Die Wichtel gehen heute auf der kreisrunden Adventsinsel auf Schatzsuche. Am Rand der Insel stehen neun alte Palmen: Vier dieser Palmen stehen am nördlichsten, am östlichsten, am südlichsten und am westlichsten Punkt der Insel. Eine weitere Palme steht genau in Nordnordost, eine genau in Nordost, eine in Südsüdwest, eine in Westsüdwest und die letzte in Westnordwest.

Die Schatzkarte sagt:

> Die drei Palmen, bei denen die drei rotbärtigen Piraten ihre Hängematten haben, bilden ein Dreieck; im Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks befindet sich der Ameisenhügel A. Die drei Palmen, bei denen die drei schwarzbärtigen Piraten ihre Hängematten haben, bilden ein zweites Dreieck, in dessen Höhenschnittpunkt B eine blaue Blume wächst. Die verbleibenden drei Palmen bilden ein drittes Dreieck, in dessen Höhenschnittpunkt C unser Kompass liegt. Im Schwerpunkt des Dreiecks ABC liegt der Piratenschatz vergraben.

„Oh weh!“, klagt der Jammerwichtel Jambo. „Die neun Palmen gibt es zwar noch. Aber die rotbärtigen und schwarzbärtigen Piraten sind schon vor langer Zeit fortgesegelt, der Ameisenhügel A ist verschwunden, die Blume in B ist verblüht und den Kompass in C haben die Piraten wohl mitgenommen. Es gibt hunderte und aberhunderte von Möglichkeiten, die neun Palmen in drei Dreiecke aufzuteilen. Daher müssen wir an hunderten und aberhunderten Punkten graben und werden uns dicke Schwielen an den Händen holen.“

„Alles halb so schlimm!“, beruhigt ihn der Geometriewichtel Geobald. „Der Schatz kann nicht an allzu vielen Punkten vergraben sein. Nehmen wir zum Beispiel einmal an, dass die drei rotbärtigen Piraten ihre Hängematten bei den drei Palmen im Norden, in Nordnordost und in Nordost hatten. Dann wäre der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks gar nicht auf der Insel, und der Ameisenhügel A müsste irgendwo mitten im Meer liegen. Diesen Fall können wir also schon einmal ausschließen. Und wenn wir ein wenig mehr nachdenken, können wir sicherlich noch weitere Fälle eliminieren."

Wie viele Punkte auf der Insel kommen überhaupt für den Lageplatz des Schatzes in Frage?

Illustration: Sonja Rörig

Antwortmöglichkeiten:

1. Genau ein Punkt.
2. Genau drei Punkte.
3. Genau neun Punkte.
4. Genau zwölf Punkte.
5. Genau 24 Punkte.
6. Genau 27 Punkte.
7. Genau 35 Punkte.

8. Genau 105 Punkte.
9. Genau 420 Punkte.
10. Genau 1680 Punkte.

13.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 1.

Wir führen ein Koordinatensystem ein, das dem Mittelpunkt M der kreisrunden Adventsinsel die Koordinaten $(0, 0)$ zuweist. Die neun Palmen sind neun Punkte (x_k, y_k) mit $1 \leq k \leq 9$ auf dem Einheitskreis und erfüllen die Kreisgleichung

$$x_k^2 + y_k^2 = 1.$$

Wir betrachten zunächst drei beliebige Palmen in drei Punkten $U = (x_u, y_u)$, $V = (x_v, y_v)$ und $W = (x_w, y_w)$. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ΔUVW liegt auf der Geraden, die durch den Punkt U geht und zur Seite VW normal ist; die Punkte (x, y) auf dieser Geraden erfüllen die Gleichung

$$(x_v - x_w)(x - x_u) + (y_v - y_w)(y - y_u) = 0. \tag{8}$$

Dies kann man sich einerseits herleiten, indem man zunächst die Geradengleichung für VW angibt und dann ihre Orthogonale durch U herleitet oder indem man das Skalarprodukt dieser beiden orthogonalen Geraden betrachtet.
Außerdem liegt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ΔUVW ebenfalls auf der Geraden, die durch V geht und zur Seite UW normal ist:

$$(x_u - x_w)(x - x_v) + (y_u - y_w)(y - y_v) = 0. \tag{9}$$

Mit einem Computeralgebrasystem rechnet man nun leicht aus (per Hand ist die Rechnung etwas mühsamer), dass sich die beiden Geraden (8) und (9) im Punkt

$$(x_u + x_v + x_w,\ y_u + y_v + y_w)$$

schneiden und dort den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ΔUVW festlegen.

Der Ameisenhügel, die blaue Blume und der Kompass liegen folglich in drei Punkten

$$\begin{aligned} A &= (x_i + x_j + x_k,\ y_i + y_j + y_k), \\ B &= (x_l + x_m + x_n,\ y_l + y_m + y_n), \\ C &= (x_o + x_p + x_q,\ y_o + y_p + y_q) \end{aligned}$$

mit

$\{i,j,k\}\cup\{l,m,n\}\cup\{o,p,q\}=\{i,j,k,l,m,n,o,p,q\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$

Die x-Koordinate des Schwerpunktes des Dreiecks ΔABC ist gleich dem Mittelwert der x-Koordinaten der drei Punkte A, B, C. Die y-Koordinate des Schwerpunktes ist der Mittelwert der y-Koordinaten der drei Punkte A, B, C. Der Schatz liegt daher im Punkt mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\,(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9), \\ y &= \frac{1}{3}\,(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9) \end{aligned}$$

vergraben. Die Lage des Schatzes ist somit völlig unabhängig von der Aufteilung der neun Palmen in die drei Dreiecke. Es gibt also **genau einen Punkt** auf der Adventsinsel, der als Lageplatz für den Schatz infrage kommt.

Anmerkung: Die Aufgabe kann auch leicht mit einem Computerprogramm gelöst werden, das alle möglichen Aufteilungen der neun Palmen in drei Dreiecke enummeriert. Auch mit einem Konstruktionsprogramm wie GeoGebra kommt man schnell auf die richtige Idee.

14 Ein etwas anderer Weihnachtsstern

Autoren: Khai Van Tran, Daniel Schmidt genannt Waldschmidt, Sven Jäger, Rico Raber
Projekt: Kombinatorische Optimierung und Graphenalgorithmen (COGA), TU Berlin

14.1 Aufgabe

„Das ist ungerecht!“, ruft Rentier Miri, Wortführerin der *Vereinten Rentiergewerkschaft (VeRti)*. „Den ganzen Winter haben wir Rentiere in der Plätzchenfabrik geschuftet! In Rekordzeit haben wir Zimt und Zucker über den zugefrorenen Fluss transportiert! Aber an Heiligabend, wenn es interessant wird, dürfen nur einige wenige von uns den Schlitten des Weihnachtsmanns ziehen.“

Nach Verhandlungen mit VeRti hat man sich schließlich darauf geeinigt, dass die Erde in 15 Zonen aufgeteilt wird und jede dieser Zonen von einem unterschiedlichen Rentiergespann beliefert wird, sodass jedes Rentier die Gelegenheit bekommt, den Schlitten zu ziehen. Der Weihnachtsmann wird also am Weihnachtstag seine Route am Nordpol starten, eine der Zonen beliefern und dann zum Nordpol zurückkehren, um die Rentiere zu wechseln. Danach wird die nächste Zone beliefert usw. Nachdem das letzte Präsent ausgeliefert ist, kehrt der leere Schlitten zum Nordpol zurück, was die sternförmige Rundtour abschließt.

„Wenn der Schlitten sowieso immer zum Nordpol zurückkehrt, dann könnte man ja immer nur die Geschenke auf den Schlitten laden, die auch in der jeweils nächsten Zone ausgeliefert werden“, wirft Wichtel Rico ein. „Dann haben die Rentiere weniger zu ziehen und wir sind schneller fertig.“ Mit Grauen muss der Weihnachtsmann an das letzte Jahr zurückdenken, als die Wichtel einen Tag vor Weihnachten anfingen, auf dem zugefrorenen See *Geschenke versenken* zu spielen, und Rudolph in letzter Sekunde noch neue Geschenke organisieren musste. Einen Teil der Geschenke zusammen mit den Wichteln aus den Augen zu lassen, kommt also nicht in Frage – und nicht nur weil allein der Berufsstolz des Weihnachtsmann es ihm verbieten würde, mit einem nicht voll bepackten Schlitten loszufahren.

Um die beste Route zu planen, beugt sich Rudolph nun über eine Weltkarte (s. Abbildung 13). Verzeichnet sind die 15 Zonen mit dem Gewicht der in ihnen abzuliefernden Geschenke und ihren Distanzen vom Nordpol (s. auch Tabelle 1). Rudolf weiß, dass die Transportzeit nicht nur proportional zur gefahrenen Strecke, sondern auch proportional zum Gewicht des Schlittens und aller eingeladenen Geschenke ist: Der leere Schlitten wiegt 30 Tonnen (t). Den leeren Schlitten 10 Luftmeilen (lm) zu ziehen, nimmt 300 Mondsekunden (mon) in Anspruch. Wären $70\,t$ an Geschenken auf den Schlitten geladen (zusammen mit dem Schlitten also ein Gesamtgewicht von $100\,t$), so würden die Rentiere $2000\,mon$ brauchen, um den Schlitten $20\,lm$ zu ziehen. Da die am Nordpol bereitstehenden Rentiere ganz aufgeregt auf ihren Einsatz warten, nimmt das Wechseln des Rentiergespanns keine Zeit in Anspruch. Ebenso benötigt der Weihnachtsmann, der alte Routinier, zum Verteilen der Geschenke keine Zeit sobald der Schlitten in einer Zone angekommen ist.

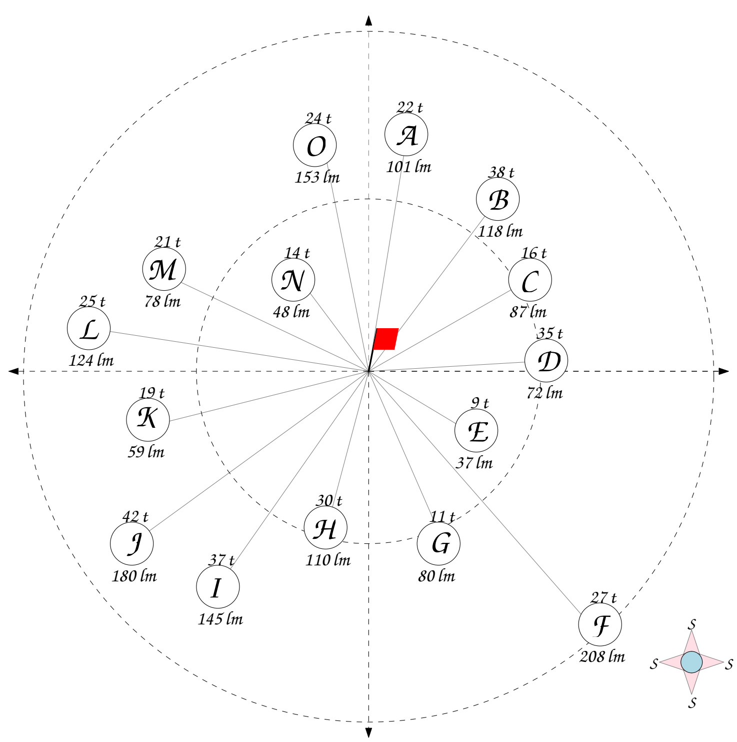


Abbildung 13: Weltkarte mit den zu beliefernen 15 Zonen. Die Fahne markiert den Nordpol.

Zone	Gewicht in t	Distanz in lm
A	22	101
B	38	118
C	16	87
D	35	72
E	9	37
F	27	208
G	11	80
H	30	110
I	37	145
J	42	180
K	19	59
L	25	124
M	21	78
N	14	48
O	24	153

Tabelle 1: Gewicht der abzuliefernden Geschenke und Entfernung der Zonen vom Nordpol.

Festzulegen ist also lediglich noch die Reihenfolge, in der die Zonen befahren werden...

Die Fahrtzeit, die wir optimieren wollen, ist die Zeit vom Start des Weihnachtsmanns am Nordpol mit dem vollen Schlitten bis zur Rückkehr mit dem leeren Schlitten. Wir sagen, dass eine Route **optimal** ist, wenn sie die kürzestmögliche Fahrtzeit garantiert. Eine optimale Route heißt **eindeutig**, wenn es nur eine Reihenfolge gibt, die diese kürzestmögliche Fahrtzeit generiert.

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

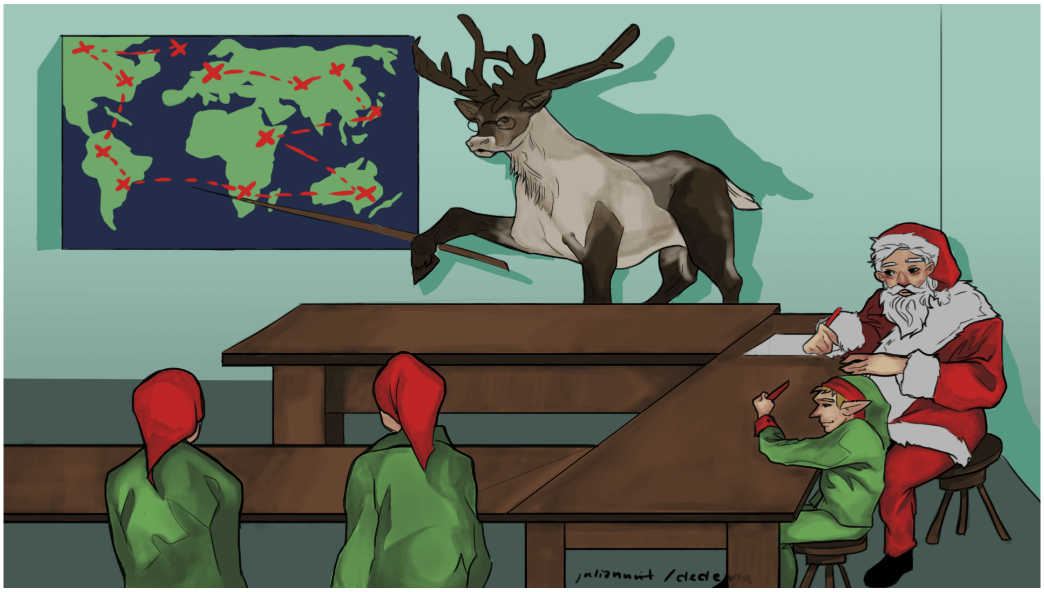


Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. In einer optimalen Route muss J vor E vor O besucht werden und die optimale Route ist eindeutig.
2. In einer optimalen Route muss F vor M vor E besucht werden und die optimale Route ist eindeutig.
3. In einer optimalen Route muss N vor H vor L besucht werden und die optimale Route ist eindeutig.
4. In einer optimalen Route muss K vor G vor I besucht werden und die optimale Route ist eindeutig.
5. In einer optimalen Route muss L vor J vor M besucht werden und die optimale Route ist eindeutig.
6. In einer optimalen Route muss J vor E vor O besucht werden und die optimale Route ist nicht eindeutig.
7. In einer optimalen Route muss F vor M vor E besucht werden und die optimale Route ist nicht eindeutig.

8. In einer optimalen Route muss N vor H vor L besucht werden und die optimale Route ist nicht eindeutig.
9. In einer optimalen Route muss K vor G vor I besucht werden und die optimale Route ist nicht eindeutig.
10. In einer optimalen Route muss L vor J vor M besucht werden und die optimale Route ist nicht eindeutig.

14.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Für den Weihnachtsmann ist es natürlich attraktiv, schwere Geschenke früh loszuwerden, damit sie den Schlitten nicht so lange belasten. Andererseits möchte er am Anfang nicht so lange Strecken fahren, während der Schlitten noch voll beladen ist.

Wir argumentieren, dass wir für jede Zone das Verhältnis aus der Distanz zum Nordpol und dem Gewicht der dort abzuliefernden Geschenke berechnen sollten (im Folgenden **Verhältnis** genannt). Der Weihnachtsmann sollte diese Zonen geordnet nach aufsteigendem Verhältnis abfahren. Um sich klarzumachen, dass dies eine sinnvolle Strategie ist, zunächst ein „Beweis“ durch Bild:

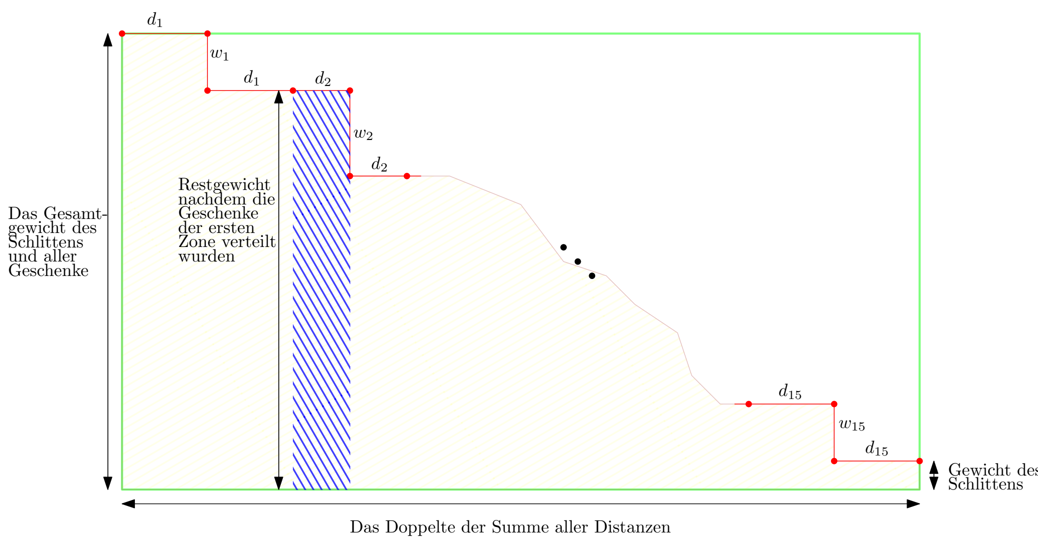


Abbildung 14: d_1, d_2 sind jeweils die Distanzen zu den ersten zwei befahrenen Zonen; w_1, w_2 die zugehörigen Gewichte.

Wenn wir uns auf eine Reihenfolge der Zonen festgelegt haben, können wir ein Diagramm wie oben dargestellt zeichnen. Eine Strecke zu fahren, kostet uns immer das Produkt vom auf dem Schlitten verbleibenden Restgewicht multipliziert mit der zu fahrenden Strecke. Im Bild entspricht die Zeit, die wir brauchen, um zur zweiten Zone zu fahren, also genau dem Flächeninhalt des blau schraffierten Rechteck. Die Gesamtzeit entspricht demnach genau dem Flächeninhalt der gelb schraffierten Fläche unter der roten Kurve.

Ferner stellen wir fest, dass die Länge der Seiten des grünen Rechtecks, das Anfang und Ende der roten Kurve vorgibt, genau dem Gesamtgewicht des Schlittens am Anfang bzw. dem Doppelten (hin und zurück) der Summe aller Distanzen entsprechen, also unabhängig von der Reihenfolge der Zonen sind. Um nun die gelb schraffierte Fläche zu minimieren, sollte man versuchen, die rote Kurve möglichst nach unten und links zu „biegen". Dies erreicht man genau dadurch, dass die rote Kurve am Anfang möglichst steil nach unten fällt, also das Verhältnis klein ist, und erst möglichst am Ende flach ist.

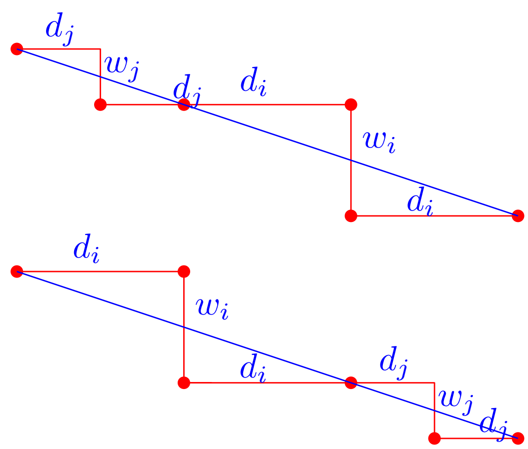


Abbildung 15: Die Zonen i and j haben das gleiche Verhältnis.

Wenn es Zonen mit gleichem Verhältnis gibt, dann müssen sie also direkt hinterainander abgefahren werden. Gucken wir uns die Treppenstufen in der Abbildung 15 an, so stellen wir fest, dass die Flächeninhalte der Flächen unter den roten Treppenstufen und der blauen Linie jeweils gleich sind. (Die Steigung der blauen Linie wird dabei durch das Verhältnis der Zonen eindeutig festgelegt.) Die Abbildung demonstriert, dass es keinen Unterschied macht, in welcher Reihenfolge Zonen mit gleichem Verhältnis abgefahren werden und wenn es welche gibt, dann ist die optimale Route nicht eindeutig.

Wer lieber genau nachrechnen möchte, kann folgendes Argument bemühen: Angenommen wir haben uns auf eine Reihenfolge festgelegt und betrachten zwei Zonen i und j, die direkt hintereinander (i vor j) besucht werden. Seien w_i und w_j jeweils die Gewichte der in i und j abzuliefernden Geschenke sowie d_i und d_j die Distanzen zum Nordpol. Würde man die Reihenfolge, in der i und j abgefahren werden, vertauschen, so stellen wir fest, dass dies natürlich keinen Einfluss hat auf die Zeit, die für die Zonen vor i und j benötigt wird. Das Restgewicht nachdem man i und j befahren hat, ist unabhängig von der Reihenfolge, in der i und j befahren wurden, demnach bleiben auch alle Fahrtzeiten der Zonen nach i und j identisch.

Möchte man also ermitteln, wie sich durch die Vertauschung die Gesamtfahrtzeit verändert, muss man lediglich die Fahrtzeiten für die Zonen i und j betrachten. Sei R das verbleibende Restgewicht direkt nachdem i und j befahren wurden. Nun vergleichen wir die Fahrtzeiten vor (linke Seite der Ungleichung) und nach der Vertauschung (rechte Seite):

$$
\begin{aligned}
& ((R+w_i+w_j)+(R+w_j))\cdot d_i + ((R+w_j)+R)\cdot d_j \leq \\
& \qquad ((R+w_i+w_j)+(R+w_i))\cdot d_j + ((R+w_i)+R)\cdot d_i \\
\Leftrightarrow \quad & 2R(d_i+d_j)+w_id_i+w_jd_j+2w_jd_i \leq 2R(d_i+d_j)+w_id_i+w_jd_j+2w_id_j \\
\Leftrightarrow \quad & 2w_jd_i \leq 2w_id_j \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d_i}{w_i} \leq \frac{d_j}{w_j}
\end{aligned}
$$

Demnach lohnt sich diese Vertauschung genau dann, wenn das Verhältnis von i größer als das von j ist. Haben wir eine Route, in der die Zonen nicht aufsteigend geordnet nach ihrem Verhältnis durchfahren werden, dann können wir also immer ein Paar finden durch dessen Vertauschung sich unsere Fahrtzeit verkürzt. Wir können diese Vertauschungen so lange fortsetzen, bis die Zonen nach ihrem Verhältnis geordnet sind. Also müssen in einer schnellsten Route doch alle Zonen aufsteigend geordnet nach ihrem Verhältnis durchfahren werden.

Durch die im Prinzip selbe Rechnung (nur mit einem Gleichheitszeichen in der Mitte) kann man auch feststellen, dass sich die Gesamtfahrtzeit nicht ändert, wenn man zwei direkt hintereinander besuchte Zonen mit gleichem Verhältnis tauscht. Daher ist die optimale Reihenfolge genau dann eindeutig, wenn es zwei Zonen mit gleichen Verhältnis gibt.

Wir haben in der folgenden Tabelle die Zonen nach Verhältnis geordnet (die Verhältnis-Werte wurden dabei gerundet):

Zone	Gewicht in t	Distanz in lm	Verhältnis in lm/t
D	35	72	2,057
B	38	118	3,105
K	19	59	3,105
N	14	48	3,429
H	30	110	3,667
M	21	78	3,714
I	37	145	3,919
E	9	37	4,111
J	42	180	4,286
A	22	101	4,591
L	25	124	4,960
C	16	87	5,438
O	24	153	6,375
G	11	80	7,273
F	27	208	7,704

Zunächst stellen wir fest, dass die Zonen B und K dasselbe Verhältnis haben (die Distanzen/Gewichte unterscheiden sich jeweils nur um den Faktor 2). Die optimale Route ist also nicht eindeutig. Von den genannten Reihenfolgen trifft lediglich zu, dass N vor H vor L besucht werden muss.

15 Summe und Produkt

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

15.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann sagt zu den beiden Klugwichteln Prodo und Summo: „Ich habe mir zwei ganze Zahlen x und y mit $2 \leq x \leq y$ und $x + y \leq 47$ ausgedacht. Dann habe ich die Summe $S = x + y$ auf eine Karte und das Produkt $P = xy$ auf eine andere Karte geschrieben. Prodo hat die Karte mit dem Produkt erhalten und Summo hat die Karte mit der Summe erhalten. Ihr dürft euch nun eure Karten ansehen!“

Prodo und Summo starren eine Zeit lang auf ihre Karten und denken tief nach. Dann sagt Summo zu Prodo: „Du kannst die Summe S nicht bestimmen.“

Prodo erwidert: „Aha! Ich habe etwas gelernt. Aber x und y kenne ich noch immer nicht.“

Summo erwidert: „Aha! Danke für diese Information. Jetzt kenne ich x und y!“

Prodo erwidert: „Aha! Jetzt kenne ich x und y!“

Welche der folgenden zehn Aussagen trifft nun zu?

Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Einerziffer von S ist 1.
2. Die Einerziffer von S ist 2.
3. Die Einerziffer von S ist 3.
4. Die Einerziffer von S ist 4.
5. Die Einerziffer von S ist 5.
6. Die Einerziffer von S ist 6.
7. Die Einerziffer von S ist 7.
8. Die Einerziffer von S ist 8.
9. Die Einerziffer von S ist 9.
10. Die Einerziffer von S ist 0.

15.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 1.

(1) Falls das Produkt P einen Primfaktor $a \geq 23$ hat, so kann Prodo sofort $x = P/a$, $y = a$ und $S = (P/a) + a$ schlussfolgern, denn: Eine der Zahlen x und y muss nämlich ein Vielfaches dieses Primfaktors a sein. Da das Vielfache $y = 2a$ (und alle größeren Vielfachen $3a$, $4a$, $5a$, etc) zusammen mit einer zweiten Zahl $x \geq 2$ die Schranke $x + y \leq 47$ verletzen würde, müsste dann $y = a$ gelten.

Die erste Aussage von Summo (*„Du kannst die Summe S nicht bestimmen.“*) impliziert nun, dass S nicht als Summe einer Primzahl ≥ 23 und einer Zahl ≥ 2 geschrieben werden kann. Dies eliminiert alle Zahlen ≥ 25 als mögliche Kandidaten für S:

- Jede Zahl $S \geq 25$ kann als Summe der Primzahl 23 und der Zahl $S - 23 \geq 2$ geschrieben werden.

An diesem Punkt unserer Analyse bleiben also nur die Zahlen ≤ 24 als Kandidaten für S übrig.

(2) Falls das Produkt P das Produkt von zwei Primzahlen c und d mit $c \leq d$ ist, so kann Prodo sofort $x = c$, $y = d$ und $S = c + d$ schlussfolgern. Die erste Aussage von Summo (*„Du kannst die Summe S nicht bestimmen.“*) impliziert daher, dass S nicht als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden kann. Dies eliminiert viele weitere Kandidaten für S:

- Alle geraden Zahlen zwischen 4 und 24 können als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden:

$$\begin{array}{cccc} 4 = 2+2; & 6 = 3+3; & 8 = 3+5; & 10 = 5+5; \\ 12 = 5+7; & 14 = 3+11; & 16 = 3+13; & 18 = 5+13; \\ 20 = 3+17; & 22 = 5+17; & 24 = 5+19. & \end{array}$$

- Weiters können die folgenden ungeraden Zahlen als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden:

$$\begin{array}{cccc} 5 = 2+3; & 7 = 2+5; & 9 = 2+7; & 13 = 2+11; \\ 15 = 2+13; & 19 = 2+17; & 21 = 2+19. & \end{array}$$

Damit bleiben nur noch die drei Zahlen 11, 17, 23 als Kandidaten für S übrig.

(3) Wir zählen nun für jeden verbleibenden Kandidaten für S die entsprechenden Produkte von der Form xy auf, die $2 \leq x \leq y$ und $x + y = S$ erfüllen:

- $S = 11$: 18, 24, 28, 30.
- $S = 17$: 30, 42, 52, 60, 66, 70, 72.
- $S = 23$: 42, 60, 76, 90, 102, 112, 120, 126, 130, 132.

Man prüft leicht nach, dass jedes der aufgelisteten Produkte noch eine zweite Faktorisierung besitzt, deren zwei Faktoren sich zu einer Summe ≤ 47 aufaddieren. Nach der ersten Aussage von Summo können wir (und Prodo) daher $S \in \{11, 17, 23\}$ herleiten.

(4) Nach der ersten Aussage von Summo kann Prodo die Zahlen x und y immer noch nicht bestimmen. (*„Aber x und y kenne ich noch immer nicht.“*). Das bedeutet, dass das Produkt P mit mindestens zweien der drei verbleibenden Kandidaten für S kompatibel ist. Wir streichen aus der Aufzählung alle Produkte weg, die nur bei einem einzigen Kandidaten auftreten, und erhalten:

- $S = 11$: 30.
- $S = 17$: 30, 42, 60.
- $S = 23$: 42, 60.

(5) Nach der letzten Aussage von Prodo kann Summo die beiden Zahlen endlich bestimmen. Wäre $S = 17$ oder $S = 23$, so blieben noch mindestens zwei mögliche kompatible Produkte übrig; Summo wüsste also nicht, welches dieser kompatiblen Produkt den Wert P angibt. Daher muss $S = 11$ gelten. Außerdem erhalten wir $P = 30$ und $x = 5$ und $y = 6$. Summo und Prodo kommen natürlich zur selben Schlussfolgerung.

16 Temperatur

Autorin: Judith Keijsper (TU Eindhoven)

16.1 Aufgabe

„Na, das ist ja höchst kurios“, sagt der Wetterwichtel Wendelin. „Da studiere ich gemütlich die Temperaturen, die unsere Wetterstation *Omikron-702* an den letzten N Tagen zu Mittag gemessen hat, denke mir nichts Böses, und dann so etwas: Die Durchschnittstemperatur von je sieben unmittelbar aufeinander folgenden Tagen war immer positiv. Aber jetzt kommt der Knüller: Gleichzeitig war die Durchschnittstemperatur von je zehn unmittelbar aufeinander folgenden Tagen immer negativ! Nun bin ich gespannt, ob das auch morgen noch so weiter geht.“

Der allwissende Mathematikwichtel Matto hat sich Wendelins Geschichte angehört und sagt: „Nein, nein, nein. Morgen wird das nicht mehr so weiter gehen. Nach $N + 1$ Tagen muss es auf jeden Fall sieben aufeinander folgende Tage mit nicht-positiver Durchschnittstemperatur oder zehn aufeinander folgende Tage mit nicht-negativer Durchschnittstemperatur geben.“

Wir wollen nun natürlich von Euch wissen: Wie lautet diese Zahl N?

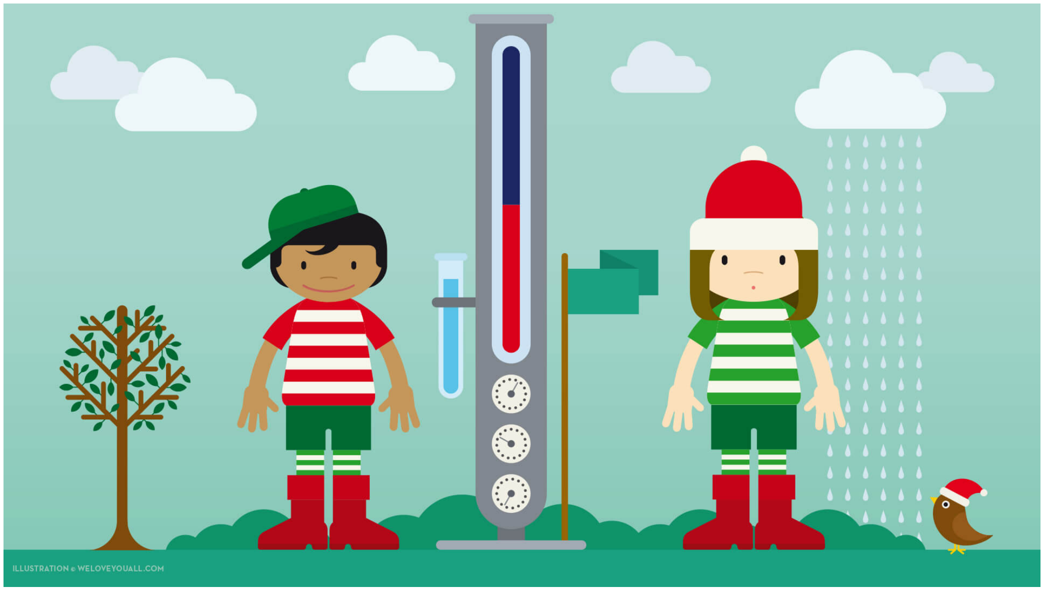


Illustration: Friederike Hofmann

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Zahl ist $N = 9$.
2. Die Zahl ist $N = 10$.
3. Die Zahl ist $N = 11$.
4. Die Zahl ist $N = 12$.
5. Die Zahl ist $N = 13$.
6. Die Zahl ist $N = 14$.
7. Die Zahl ist $N = 15$.
8. Die Zahl ist $N = 16$.
9. Die Zahl ist $N = 17$.
10. Die Zahl ist $N = 18$.

16.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Zuerst nehmen wir zwecks Widerspruchs an, dass es eine Folge von $N = 16$ Temperaturen $T_1, \ldots, T_{16}$ gibt, sodass der Durchschnittswert von je sieben unmittelbar aufeinander folgenden Temperaturen immer positiv und sodass der Durchschnittswert von je zehn unmittelbar aufeinander folgenden Temperaturen immer negativ ist. Dazu betrachten wir die folgende Tabelle mit sieben Zeilen und zehn Spalten:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}
T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}
T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}
T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}

Da jede Zeile die Messwerte von 10 unmittelbar aufeinander folgenden Tagen enthält, ist jede Zeilensumme negativ. Daher muss die Summe aller $7 \cdot 10$ Werte in dieser Tabelle negativ sein. Da jede Spalte die Messwerte von 7 unmittelbar aufeinander folgenden Tagen enthält, ist jede Spaltensumme positiv. Daher muss die Summe aller $10 \cdot 7$ Werte in der Tabelle positiv sein. Widerspruch! Wir schließen daraus, dass $N \leq 15$ gelten muss.

Als Nächstes zeigen wir, dass $N = 15$ Tage in der Tat möglich sind. Dazu betrachten wir die folgende Folge mit $N = 15$ Messwerten:

$$5,\ 5,\ -12,\ 5,\ 5,\ -12,\ 5,\ 5,\ 5,\ -12,\ 5,\ 5,\ -12,\ 5,\ 5$$

Je sieben unmittelbar aufeinander folgende Werte in dieser Folge enthalten 5-mal den Wert 5 und 2-mal den Wert -12; der Durchschnittswert ist daher $1/7$ und somit positiv. Je zehn unmittelbar aufeinander folgende Werte in der Folge enthalten 7-mal den Wert 5 und 3-mal den Wert -12; der Durchschnittswert ist daher $-1/10$ und somit negativ.

Unsere Diskussion impliziert, dass $N = 15$ gilt.

17 Funkelnde Sterne

Autor: Falk Ebert (Herder-Gymnasium, HU Berlin)

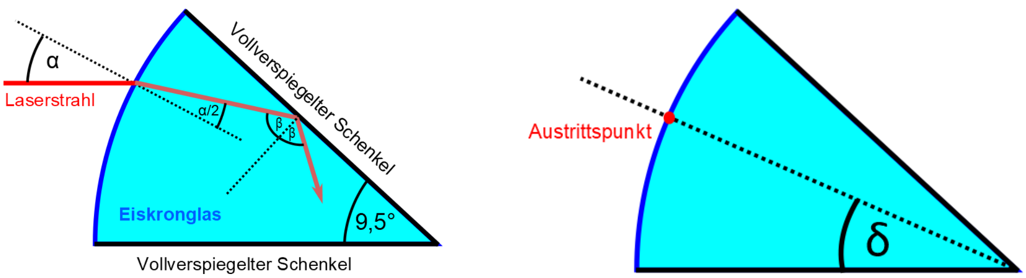
17.1 Aufgabe

Weihnachten ist eine Zeit, in der man Haus und Garten festlich schmückt. Das gilt auch am Nordpol. Der Weihnachtsmann hat auf seiner Tanne auch einen ganz besonderen Stern. Dieser sogenannte *Funkelstern* besteht aus Glas und hat 24 Zacken. Zumindest *hatte* er 24 Zacken, bis im letzten Jahr ein kleiner rothaariger Junge mit einem unerhört schnellen tieffliegenden Schlitten einen der Zacken abgebrochen hat (wer die Anspielung versteht, darf sich an dieser Stelle diebisch freuen).

Glasbläserwichtel Gernoth hat sofort einen neuen Zacken gefertigt. Aber irgendwie funkelt dieser nicht so schön wie die anderen Zacken. Normwichtel Norman wies ihn darauf hin, wie ein normgerechter Funkelsternzacken identifiziert wird:

> Ein normgerechter Funkelsternzacken ist ein Ausschnitt aus einer unfassbar dünnen Glasplatte und hat die Form eines ebenen Kreissektors. Der Kreissektor hat einen Radius von 10 cm und einen Öffnungswinkel von $9,5°$. Die Schenkel des Kreissektors sind vollverspiegelt, d. h. einfallendes Laserlicht wird nach dem Reflexionsgesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ reflektiert (s. Abbildung 16a). Das Material ist *Eiskronglas* mit einem Brechungsindex von exakt 2, d. h. der Winkel zwischen Laserstrahl und Lot wird beim Übergang zwischen Luft und Glas halbiert (s. Abbildung 16a). Im Material treten keinerlei weitere Reflexionen, Brechungen, Beugungen und keine Absorption des Lichts auf.
>
> Um einen Zacken als normgerechten Funkelsternzacken zu identifizieren wird er parallel zu einem seiner Schenkel (im Folgenden *unterer Schenkel* genannt) und im Abstand von höchstens 1,5 cm zu diesem Schenkel, mit einem Laserstrahl beschienen. Der Laserstrahl wird beim Eintritt in das Eiskronglas gebrochen, dann an den verspiegelten Schenkeln des Kreissektors mehrfach reflektiert und tritt am Kreisbogen, also an der gewölbten Seite des Zacken,

wieder aus. Gemessen wird dann der Winkel δ des Austrittspunktes des reflektierten Laserstrahls bezüglich des unteren Schenkels (s. Abbildung 16b). Ist der gemessene Winkel **nicht** identisch mit dem Referenzwinkel, dann ist der Zacken **kein** normgerechter Funkelsternzacken.



(a) Skizze (**nicht maßstabsgetreu!**) (b) Position des Austrittspunktes

Abbildung 16: Ein Funkelsternzacken aus Eiskronglas.

Normans Gedächtnis ist leider nicht mehr das beste und so müsste er nun erstmal nachschlagen, wie groß dieser Referenzwinkel eigentlich ist.

Hilf Norman: Wie groß ist der Referenzwinkel δ zwischen dem unteren Schenkel und dem Austrittspunkt bei einem normgerechten Funkelsternzacken?

Illustration: Frauke Jansen

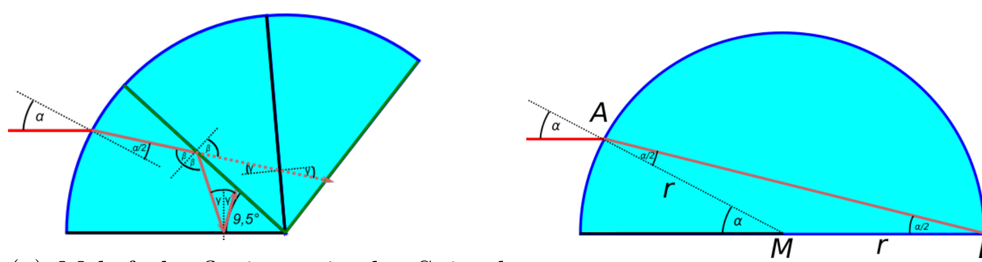
Antwortmöglichkeiten:

1. 1°
2. 2°
3. 3°
4. 4°
5. 5°
6. 6°
7. 7°
8. 8°
9. 9°
10. Das kann man ohne den genauen Abstand des Laserstrahls nicht ermitteln.

17.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Wir wollen als erstes die lästigen Mehrfachreflexionen loswerden. Dazu bemerken wir, dass ein reflektierter Strahl hinter der Spiegelwand theoretisch geradlinig weitergehen würde: Wir können, nachdem der Strahl in den Kreissektor aus Eiskronglas eingetreten ist und die erste Wand trifft, den kompletten Kreissektor an der Reflexionsseite (Abbildung 17a, grün) spiegeln, dort den Strahlengang geradlinig fortsetzen und dann den fortgesetzten Gang einfach zurückspiegeln. Da wir mehrere Spiegelungen vor uns haben, können wir das einfach mehrfach durchführen. Das Prinzip ist in Abbildung 17a dargestellt.



(a) Mehrfachreflexionen in der Spiegelwelt (nicht maßstabgerecht)

(b) Austrittspunkt in der Spiegelwelt

Abbildung 17: Beweisskizze

Um herauszufinden, wo der reflektierte Strahl den Kreissektor verlässt, untersuchen wir einfach den Kreis, aus dem unser Kreissektor aus Eiskronglas ausgeschnitten ist. Dort wo der geradlinige Strahl in der „Spiegelwelt" die Kreislinie das zweite Mal schneidet (s. Punkt B in Abbildung 17a), liegt der entsprechend oft gespiegelte Austrittspunkt. Eine schöne Feststellung ist jetzt, dass der Austrittspunkt immer genau auf der Verlängerung des unteren Schenkels des Kreissektors liegt. Das lässt sich schnell mithilfe von Abbildung 17b sehen. Der eintretende Strahl verläuft parallel zum unteren Schenkel; der Radius MA bildet mit dem *unteren Schenkel* also einen Stufenwinkel von ebenfalls α. Das Dreieck ΔAMB ist gleichschenklig, da es zwei Kreisradien als Schenkel hat. Die beiden Basiswinkel sind gleich groß und nach dem Außenwinkelsatz jeweils $\frac{\alpha}{2}$. Der Winkel $\measuredangle MAB$ ist aber nach dem vorgegebenen Brechungsgesetz ebenfalls $\frac{\alpha}{2}$. Der fortgesetzte Strahl verläuft also entlang AB.

Jetzt muss nur noch zurückgerechnet/$\sim$gespiegelt werden, wo sich der Austrittspunkt im ursprünglichen Zacken befindet. In Abbildung 17a ist die Spiegelung der unteren Seite in schwarz dargestellt, die Spiegelung der oberen Seite in grün. Es ist leicht ersichtlich, dass die schwarze Kopie des unteren Schenkels zum Original um $2 \cdot 9,5° = 19°$ gedreht ist. Die neunte Kopie des unteren Schenkels ist folglich ums $9 \cdot 19° = 171°$ weitergedreht. Weitere 9° fehlen bis zum gestreckten Winkel. Ebendiese **9°** legen den Austrittspunkt aus dem Kreissektor fest.

18 Der Weihnachtsmann hat Bauchweh - Logische Analyse von Plätzchen

Autor*innen: Katinka Becker (FU Berlin), Alexander Bockmayr (FU Berlin)
Projekt: CH5 – Model classification under uncertainties for cellular signaling networks

18.1 Aufgabe

Der Schnee liegt wie ein dichter, weißer Teppich über dem Weihnachtszauberland. Das Weihnachtshaus scheint still und friedlich, fast verschlafen. Doch dieser Eindruck täuscht. Öffnet man eine der versteckten Eingangsluken befindet man sich sofort mitten im größten Vorweihnachtstrubel, den man sich vorstellen kann. Es sind nur noch ein paar Tage bis zum Heiligen Abend und die Vorbereitungen laufen auf Hochtouren. Zwischen all dem fröhlich-fleißigen Sägen, Lackieren, Nähen und Geschenke Verpacken, stehen zwei Weihnachtshelfer in der Heiligabend-Planungszentrale mit tief besorgten Blicken.

„So etwas wie letztes Jahr darf nicht noch einmal passieren“, sagt Willi Wichtel seufzend. „Wir müssen uns etwas überlegen, Ella! Der Heilige Abend mit einem kranken Weihnachtsmann – das geht nicht!“
Ella Elfe nickt zustimmend: „Du hast Recht. Wir brauchen einen Plan.“

Wie in jedem Jahr hatte der Weihnachtsmann auch im vergangenen Jahr bei den Kindern, die er beschenkt hat, immer einen Teller mit Plätzchen vorgefunden. Und wie in jedem vorangegangenen Jahr hatte er ohne Ende davon genascht. Vanillekipferl, Spekulatius, Zimtsterne, Spritzgebäck, Pfeffernüsse – er liebte sie alle. Bis zum letzten Jahr war dies auch nie ein Problem gewesen. Aber im letzten Jahr hatte er nach dem Abliefern der Geschenke und dem Essen von einem Teller Plätzchen oftmals furchtbare Bauchschmerzen. Die Bauchschmerzen waren dann so stark, dass er jedes Mal eine Pause machen musste um sich wieder zu entspannen. Nach einer halben Weihnachtsstunde ging es ihm dann auch wieder so gut als ob nie etwas gewesen wäre. Erst dann konnte er zum nächsten Haus fliegen um die Geschenke abzuliefern und dort wieder einen Teller voller Plätzchen zu vertilgen. Ganz abgesehen davon, dass es dem armen Weihnachtsmann in dieser Nacht immer wieder schlecht ging, ist für Pausen einfach keine Zeit am Heiligen Abend. Die beiden mussten sich dringend etwas überlegen, damit es in diesem Jahr anders läuft.

„Wir können ihm nicht verbieten von den Plätzchen zu essen. Es ist seine Leibspeise und irgendwie gehört es doch zum Heiligen Abend dazu, das Schenken und Beschenktwerden“, sagt Willi Wichtel.
„Nein, das können wir nicht. Aber es gab ja auch Plätzchenteller von denen er keine Bauchschmerzen bekommen hat. Es scheint, als ob bestimmte Plätzchen oder vielleicht Kombinationen von Plätzchen die Bauchschmerzen bei ihm auslösen“, erwidert Ella Elfe. „Ich habe im letzten Jahr den Inhalt von ein paar Plätzchentellern notiert und jeweils mit aufgeschrieben, ob der Weihnachtsmann Bauchweh hatte oder nicht. Sieh mal!“

	Vanille-kipferl x_1	Speku-latius x_2	Zimt-sterne x_3	Spritz-gebäck x_4	Pfeffer-nüsse x_5	Kokos-makronen x_6	Anis-plätzchen x_7	
Teller 1	1	0	0	0	0	0	0	Bauchweh
Teller 2	0	1	0	0	0	1	1	
Teller 3	1	0	1	0	1	1	0	
Teller 4	0	1	1	0	1	1	0	
Teller 5	1	0	0	1	1	0	1	
Teller 6	0	0	1	0	1	0	0	Kein Bauchweh
Teller 7	0	0	0	1	0	0	1	
Teller 8	0	1	0	1	1	1	1	

Abbildung 18: Acht Beobachtungen vom letzten Jahr. Jede Zeile ist ein Plätzchenteller, der vom Weihnachtsmann gegessen wurde. Jede Spalte steht für eine Sorte Plätzchen. In den oberen fünf Fällen bekam der Weihnachtsmann Bauchschmerzen, in den unteren drei Fällen nicht.

Ella Elfes Aufzeichnungen (s. Abbildung 18) vom letzten Jahr enthalten acht Beobachtungen von acht verschiedenen Plätzchentellern, deren Inhalt der Weihnachtsmann am Heiligen Abend gegessen hat. Notiert hat Ella Elfe für sieben verschiedene Plätzchensorten (andere Plätzchen kommen auf den Plätzchentellern niemals vor), ob der Weihnachtsmann sie gegessen hat (notiert mit 1) oder nicht (notiert mit 0). Die Reihenfolge, in der er sie gegessen hat, spielt dabei keine Rolle. Sie hat dann jeweils vermerkt, ob der Weihnachtsmann Bauchschmerzen hatte oder nicht.

Willi Wichtel ist skeptisch: „Das wird er sich doch nie alles merken können! Du weißt doch, dass unser Weihnachtsmann kein gutes Gedächtnis hat.“

„Das muss er auch nicht“, entgegnet Ella Elfe. „Wir sehen uns die Aufzeichnungen genauer an und suchen nach kürzeren Mustern, die seine Bauchschmerzen erklären.“

Ella Elfe ist den Rest des Jahres Mathematikerin. Sie nimmt sich Stift und Papier und legt los:

Wir sind auf der Suche nach logischen Mustern in unserer Aufzeichnung. Wir haben sieben Plätzchensorten $x_1, \dots, x_7$. Jedes Muster besteht aus einer Menge von Plätzchenempfehlungen.

Eine **Plätzchenempfehlung** L ist eine Variable x mit Werten in der Menge $\{0, 1\}$ oder ihre Negation $\overline{x} = 1 - x$. Für jede Plätzchensorte kann die Empfehlung also sein *„Iss das Plätzchen!“* oder *„Iss das Plätzchen nicht!“*.

Eine **Plätzchenregel** t ist eine Menge von Plätzchenempfehlungen, die durch Multiplikation miteinander verknüpft sind, was logisch der Operation *und* entspricht. Wir schreiben dafür

$$t = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_k = L_1 L_2 \ldots L_k,$$

wobei $\{L_1, \dots, L_k\}$ die Menge der Plätzchenempfehlungen in t ist. Eine Plätzchenregel ist demnach eine Kombination von Plätzchenempfehlungen.
Wie bei Mengen üblich, kommt es dabei nicht auf die Reihenfolge der Plätzchenempfehlungen an, d. h. wir unterscheiden nicht zwischen der Plätzchenregel $L_1 L_2$ und $L_2 L_1$, die beide der Menge $\{L_1, L_2\}$ entsprechen. Auch darf jede Plätzchensorte in einer Plätzchenregel höchstens einmal vorkommen, d. h. entweder positiv in der Form x_i oder negativ in der Form $\overline{x_i}$ oder gar nicht.

Der **Grad** einer Plätzchenregel t ist die Anzahl der verschiedenen Plätzchensorten bzw. Plätzchenempfehlungen in t.

„Mensch, Ella! Wie soll man das denn als normaler Wichtel verstehen?“, beschwert sich Willi Wichtel.
„Warte! Ich werde es dir an einem Beispiel erklären“, beschwichtigt ihn Ella. „Für $n = 2$ sind $x_1,\ \overline{x_1},\ x_2,\ \overline{x_2}$ die Plätzchenregeln vom Grad 1 und

$$x_1 x_2,\ x_1 \overline{x_2},\ \overline{x_1} x_2,\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}$$

die Plätzchenregeln vom Grad 2, wobei es nicht auf die Reihenfolge der Plätzchenempfehlungen ankommt. Plätzchenregeln vom Grad 3 oder höher gibt es für $n = 2$ nicht, da ja jede Plätzchenempfehlung höchstens einmal pro Plätzchenregel vorkommen darf. Die Plätzchenregel $x_1\overline{x_2}$ bedeutet zum Beispiel: *‚Iss Plätzchen der Sorte 1, aber keine der Sorte 2‘* “
„Ok, jetzt hab’ ich’s verstanden.“, meint Willi erleichtert.

Zufrieden fährt Ella fort zu kritzeln: Durch Auswertung der Negation und Multiplikation erhält man zu jeder Plätzchenregel t eine Funktion

$$f_t : \{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

Wir notieren mit $t(v) = f_t(v)$ den Wert der Funktion f_t angewendet auf einen Plätzchenteller $v \in \{0,1\}^n$. Wir sagen dann, dass eine Plätzchenregel t den Plätzchenteller $v \in \{0,1\}^n$ **überdeckt**, wenn $t(v) = 1$.

„Laaaangsam!“, fährt Willi wieder dazwischen. „Kannst du mir nicht wieder ein Beispiel zeigen?“
„Na, klar!“, entgegnet Ella. „Für $n = 4$ definiert die Plätzchenregel $t = x_1\overline{x_2}x_4$ zum Beispiel die Funktion

$$f_t : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}, (v_1, v_2, v_3, v_4) \mapsto f_t(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_1 \cdot (1 - v_2) \cdot v_4.$$

Wenden wir f_t auf den Plätzchenteller $v = (1, 0, 0, 1)$ an, erhalten wir

$$t(v) = f_t(v) = f_t(1, 0, 0, 1) = 1 \cdot (1 - 0) \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Ella überlegt weiter: Eine Plätzchenregel t heißt **Muster** von unserer Aufzeichnung, wenn t mindestens einen der beobachteten Plätzchenteller überdeckt, die zu Bauchweh geführt haben, und keinen der Teller überdeckt, die nicht zu Bauchweh geführt haben.

„In der Aufzeichnung in Abbildung 18 ist ein Muster in orange markiert. Das Muster $t = x_2\overline{x_4}$ überdeckt zwei der beobachteten Teller, die zu Bauchweh geführt haben, und keinen der Teller, die nicht zu Bauchweh geführt haben“, erläutert Ella.
„Wow!“, Willi Wichtel ist sprachlos. „Das ist toll! Aber denk daran, dass der Weihnachtsmann kein gutes Gedächtnis hat! Ich glaube nicht, dass er sich Muster merken kann, die mehr als 3 Plätzchenempfehlungen enthalten.“

„Ja, das mache ich“, sagt Ella Elfe eifrig. „Wir werden nach kurzen Mustern mit einer bestimmten Eigenschaft suchen. Nach Primmustern! Dabei heißt ein Muster t **Primmuster**, wenn keine echte Teilmenge der Menge der Plätzchenempfehlungen in t ein Muster bildet. Außerdem heißen zwei Primmuster t und t' genau dann **verschieden**, wenn die Mengen der Plätzchenempfehlungen in t und t' verschieden sind, d. h. es kommt nicht auf die Reihenfolge der Plätzchenempfehlungen an und Plätzchenempfehlungen (oder Plätzchensorten) tauchen nicht mehrfach auf.“

Ella und Willi wollen nun von euch wissen: Wie viele verschiedene Primmuster vom Grad 3 gibt es zu den Aufzeichnungen in Abbildung 18?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 1.
2. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 2.
3. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 3.
4. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 4.

5. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 5.
6. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 6.
7. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 7.
8. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 8.
9. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 9.
10. Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist 0 (d. h. es gibt kein Primmuster vom Grad 3).

Hinweis: Wir empfehlen, zuerst die Plätzchenregeln vom Grad 2 zusammen mit den von ihnen überdeckten Tellern, die zu Bauchweh führen, und den von ihnen überdeckten Tellern, die nicht zu Bauchweh führen, zu betrachten.

Projektbezug:

In der mathematischen Modellierung von biologischen und medizinischen Anwendungen besteht fast immer das Problem, dass Daten unvollständig und fehlerbehaftet sind. Anstatt unsichere Annahmen zu treffen um ein eindeutiges Modell zu erhalten, besteht ein anderer Ansatz darin einen Modell-Pool zu generieren, der alle bekannten Beobachtungen erfüllt. Die Analyse und Klassifizierung solcher Modell-Pools führt zu direkten Verbindungen zwischen den Bedingungen, die aus dem Datensatz entstehen, und den Eigenschaften der Modelle. Auf diese Weise können Modell-Pools verschiedene Ansätze aufzeigen, die den gleichen biologischen Mechanismus erklären.

Die *Logische Analyse* ist eine Methode zur Klassifizierung von Daten. Wir nutzen die Logische Analyse zur Mustersuche in Daten bestehend aus Proteinmessungen in Zellsignalwegen. Muster aus aktivierten und inaktivierten Proteinen können unter anderem dabei helfen gesunde von mutierten Zellen zu unterscheiden.

18.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Im Folgenden schreiben wir *Literal* für Plätzchenempfehlung und *Term* für Plätzchenregel.

Primmuster sind Muster, die kein Muster kleineren Grades enthalten. Das einzige Muster vom Grad 1 ist x_1, das zugleich Primmuster ist. Primmuster vom Grad 2 sind alle Muster, die nicht das Muster x_1 enthalten. In Tabelle 2 sind alle Terme vom Grad 2 in den Variablen $x_2, \ldots, x_7$ aufgelistet, zusammen mit den von ihnen überdeckten positiven und negativen Beobachtungen. Dabei bedeutet ein Eintrag

$$A \;\; L_1L_2 \;\; B$$

mit $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B \subseteq \{6, 7, 8\}$, dass der Term L_1L_2 die positiven Beobachtungen in A und die negativen Beobachtungen in B überdeckt. Die Primmuster entsprechen dann genau den Termen L_1L_2, für die $A \neq \emptyset$ und $B = \emptyset$ gilt.

Definition 1 (Musterkandidat) *Ein Term L_1L_2 heißt Musterkandidat vom Grad 2, wenn L_1L_2 mindestens eine positive und mindestens eine negative Beobachtung überdeckt.*

Satz 1 *$L_1L_2L_3$ kann nur dann Primmuster vom Grad 3 sein, wenn L_1L_2, L_2L_3 und L_1L_3 Musterkandidaten vom Grad 2 sind.*

Beweis: Als Muster überdeckt $L_1L_2L_3$ mindestens eine positive Beobachtung, die dann auch von L_1L_2, L_2L_3 und L_1L_3 überdeckt wird.
Falls mindestens ein Term L_iL_j mit $1 \leq i < j \leq 3$ keine negative Beobachtung überdeckt, wäre L_iL_j selbst ein Muster und damit $L_1L_2L_3$ kein Primmuster. □

Satz 2 *Für zwei Musterkandidaten L_1L_2, L_2L_3 mit einem gemeinsamen Literal L_2 gilt: Der Term $L_1L_2L_3$ ist Primmuster vom Grad 3 genau dann, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Es gibt mindestens eine positive Beobachtung, die sowohl von L_1L_2 als auch L_2L_3 überdeckt wird.*

2. *Es gibt keine negative Beobachtung, die sowohl von L_1L_2 als auch L_2L_3 überdeckt wird.*

3. *Es gibt eine negative Beobachtung, die von L_1L_3 überdeckt wird.*

Beweis: Eine (positive oder negative) Beobachtung wird genau dann von $L_1L_2L_3$ überdeckt, wenn sie sowohl von L_1L_2 als auch von L_2L_3 überdeckt wird. Damit ist $L_1L_2L_3$ genau dann Muster, wenn (1) und (2) erfüllt sind. Falls $L_1L_2L_3$ Primmuster ist, muss L_1L_3 nach Satz 1 Musterkandidat sein, also mindestens eine negative Beobachtung überdecken, d.h. es gilt auch (3). Nehmen wir umgekehrt an, es gelte (1), (2) und (3), so folgt zunächst, dass $L_1L_2L_3$ Muster ist. Da L_1L_2, L_2L_3 als Musterkandidaten und L_1L_3 wegen (3) jeweils mindestens eine negative Beobachtung überdecken, sind L_1L_2, L_2L_3 und L_1L_3 selbst keine Muster. Daraus folgt aber, dass $L_1L_2L_3$ Primmuster ist. □

Um die Primmuster vom Grad 3 zu bestimmen, genügt es daher, in Tabelle 2 nach allen Einträgen $A\ \ L_1L_2\ \ B$ und $C\ \ L_2L_3\ \ D$ mit einem gemeinsamen Literal L_2 zu suchen, für die gilt:

1. $A, B \neq \emptyset$ und $C, D \neq \emptyset$, d. h. L_1L_2 und L_2L_3 sind Musterkandidaten.

2. $A \cap C \neq \emptyset$, d. h. $L_1L_2L_3$ überdeckt mindestens eine positive Beobachtung.

3. $B \cap D = \emptyset$, d. h. $L_1L_2L_3$ überdeckt keine negative Beobachtung.

4. Für den verbleibenden Term $E\ \ L_1L_3\ \ F$ gilt $F \neq \emptyset$, d. h. L_1L_3 überdeckt mindestens eine negative Beobachtung (und ist damit auch Musterkandidat).

Beispiel 1 *Wir beginnen mit dem Eintrag* $\{1,5\}\ \ \overline{x_2}\,\overline{x_3}\ \ \{7\}$ *und suchen nach Einträgen* $C\ \ \overline{x_3}L_3\ \ D$ *mit* $C, D \neq \emptyset, \{1,5\} \cap C \neq \emptyset$ *und* $\{7\} \cap D = \emptyset$*. Der einzige Eintrag mit diesen Eigenschaften ist* $\{5\}\ \ \overline{x_3}\,x_5\ \ \{8\}$*. Da außerdem* $\{3,5\}\ \ \overline{x_2}\,x_5\ \ \{6\}$ *gilt, ist* $\overline{x_2}x_5$ *kein Muster und somit* $\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_5$ *ein Primmuster, das die positive Beobachtung* $\{5\}$ *überdeckt.*

Betrachtet man auf diese Weise alle möglichen Kombinationen von Musterkandidaten, wobei die Zahl der Möglichkeiten rasch abnimmt, erhält man als Primmuster vom Grad 3:

$$\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_5,\quad \overline{x_2}\,x_4\,x_5,\quad \overline{x_2}\,x_5\,x_7,\quad \overline{x_3}\,x_5\,\overline{x_6},\quad x_4\,x_5\,\overline{x_6},\quad x_5\,\overline{x_6}\,x_7$$

Die Anzahl der Primmuster vom Grad 3 ist daher 6.

$\{1,5\}$	$\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$\{7\}$	$\{1,2\}$	$\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\overline{x_4}\,\overline{x_5}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\overline{x_5}\,\overline{x_6}$	$\{7\}$	$\{1\}$	$\overline{x_6}\,\overline{x_7}$	$\{6\}$
$\{3\}$	$\overline{x_2}\,x_3$	$\{6\}$	$\{5\}$	$\overline{x_3}\,x_4$	$\{7,8\}$	$\{3,4\}$	$\overline{x_4}\,x_5$	$\{6\}$	$\{2\}$	$\overline{x_5}\,x_6$	$\emptyset$	$\{5\}$	$\overline{x_6}\,x_7$	$\{7\}$
$\{2\}$	$x_2\,\overline{x_3}$	$\{8\}$	$\{3,4\}$	$x_3\,\overline{x_4}$	$\{6\}$	$\emptyset$	$x_4\,\overline{x_5}$	$\{7\}$	$\{5\}$	$x_5\,\overline{x_6}$	$\{6\}$	$\{3,4\}$	$x_6\,\overline{x_7}$	$\emptyset$
$\{4\}$	$x_2\,x_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_3\,x_4$	$\emptyset$	$\{5\}$	$x_4\,x_5$	$\{8\}$	$\{3,4\}$	$x_5\,x_6$	$\{8\}$	$\{2\}$	$x_6\,x_7$	$\{8\}$
$\{1,3\}$	$\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	$\{6\}$	$\{1,2\}$	$\overline{x_3}\,\overline{x_5}$	$\{7\}$	$\{1\}$	$\overline{x_4}\,\overline{x_6}$	$\{6\}$	$\{1\}$	$\overline{x_5}\,\overline{x_7}$	$\emptyset$			
$\{5\}$	$\overline{x_2}\,x_4$	$\{7\}$	$\{5\}$	$\overline{x_3}\,x_5$	$\{8\}$	$\{2,3,4\}$	$\overline{x_4}\,x_6$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\overline{x_5}\,x_7$	$\{7\}$			
$\{2,4\}$	$x_2\,\overline{x_4}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_3\,\overline{x_5}$	$\emptyset$	$\{5\}$	$x_4\,\overline{x_6}$	$\{7\}$	$\{3,4\}$	$x_5\,\overline{x_7}$	$\{6\}$			
$\emptyset$	$x_2\,x_4$	$\{8\}$	$\{3,4\}$	$x_3\,x_5$	$\{6\}$	$\emptyset$	$x_4\,x_6$	$\{8\}$	$\{5\}$	$x_5\,x_7$	$\{8\}$			
$\{1\}$	$\overline{x_2}\,\overline{x_5}$	$\{7\}$	$\{1,5\}$	$\overline{x_3}\,\overline{x_6}$	$\{7\}$	$\{1,3,4\}$	$\overline{x_4}\,\overline{x_7}$	$\{6\}$						
$\{3,5\}$	$\overline{x_2}\,x_5$	$\{6\}$	$\{2\}$	$\overline{x_3}\,x_6$	$\{8\}$	$\{2\}$	$\overline{x_4}\,x_7$	$\emptyset$						
$\{2\}$	$x_2\,\overline{x_5}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_3\,\overline{x_6}$	$\{6\}$	$\emptyset$	$x_4\,\overline{x_7}$	$\emptyset$						
$\{4\}$	$x_2\,x_5$	$\{8\}$	$\{3,4\}$	$x_3\,x_6$	$\emptyset$	$\{5\}$	$x_4\,x_7$	$\{7,8\}$						
$\{1,5\}$	$\overline{x_2}\,\overline{x_6}$	$\{6,7\}$	$\{1\}$	$\overline{x_3}\,\overline{x_7}$	$\emptyset$									
$\{3\}$	$\overline{x_2}\,x_6$	$\emptyset$	$\{2,5\}$	$\overline{x_3}\,x_7$	$\{7,8\}$									
$\emptyset$	$x_2\,\overline{x_6}$	$\emptyset$	$\{3,4\}$	$x_3\,\overline{x_7}$	$\{6\}$									
$\{2,4\}$	$x_2\,x_6$	$\{8\}$	$\emptyset$	$x_3\,x_7$	$\emptyset$									
$\{1,3\}$	$\overline{x_2}\,\overline{x_7}$	$\{6\}$												
$\{5\}$	$\overline{x_2}\,x_7$	$\{7\}$												
$\{4\}$	$x_2\,\overline{x_7}$	$\emptyset$												
$\{2\}$	$x_2\,x_7$	$\{8\}$												

Tabelle 2: Terme vom Grad 2 mit den überdeckten positiven und negativen Beobachtungen

19 Rudi rutscht aus

Autorin: Sarah Roth (ZIB)
Projekt: ECMath MI7 – Routing Structures and Periodic Timetabling

19.1 Aufgabe

Damit an Heiligabend die Geschenke auf der ganzen Welt pünktlich verteilt werden können, werden sie direkt nach der Produktion in den Weihnachtswichtelwerkstätten in das nahegelegene Grönländer Geschenkelager gebracht. Von hier aus findet den ganzen Dezember lang der Transfer in die Geschenkelager der verschiedenen Kontinente statt.

Der Transport wird wie jedes Jahr durch das internationale Unternehmen *Running Rudi* bewerkstelligt. *Running Rudi* beschäftigt zurzeit 168 Rentiere, darunter auch Rudolf – genannt Rudi – und seine Freunde Ren-Qing, Rashid, Raha, Riley und Rolando. Sie hatten dieses Jahr Glück und wurden alle zusammen als Gespann auf der gelben Linie eingeteilt, die vom Grönländer Geschenkelager zur Station Lama Logistik und zurück verkehrt.

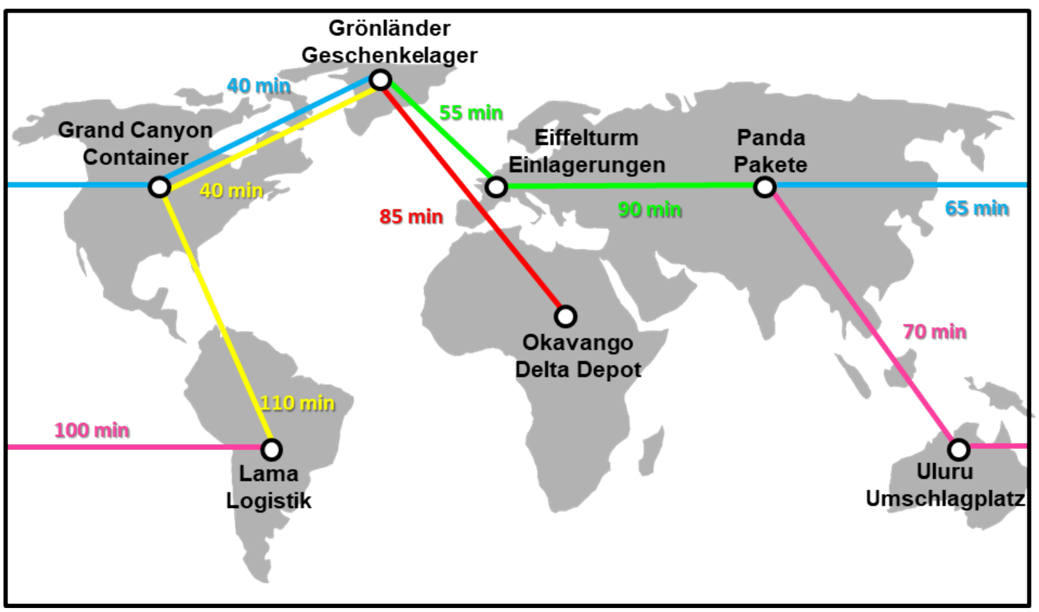


Abbildung 19: Liniennetz mit Zeitangaben in Minuten

Der folgende Fahrplan wird von *Running Rudi* realisiert. Im Fahrplan sind die Abfahrtszeiten (= Ankunftszeiten) und die Fahrtrichtungen der Linien an den jeweiligen Stationen vermerkt. Er wiederholt sich alle 60 min.

Station	1		2		3		4		5	
Grönländer Geschenkelager	30 ↓	40 ↑	35 ↓	50 ↑	55 ↓	15 ↑	05 ↓	20 ↑		
Grand Canyon Container					35 ↓	35 ↑	45 ↓	40 ↑		
Okavango Delta Depot	55 ↓	15 ↑								
Eiffelturm Einlagerungen			30 ↓	55 ↑						
Lama Logistik							35 ↓	50 ↑	20 ↓	45 ↑
Uluru Umschlagplatz									00 ↓	05 ↑
Panda Pakete			00 ↓	25 ↑	40 ↓	30 ↑			10 ↓	55 ↑

Ein Rentiergespann – bestehend aus sechs Rentieren – ist immer fest für eine Linie eingeteilt und zieht den ganzen Tag denselben Schlitten. So sind alle 168 Rentiere gleichzeitig beschäftigt.

Dummerweise ist Rudi heute morgen bei der Landung im Grönländer Geschenkedepot ausgerutscht und hat jetzt nicht nur eine blutrote Nase, sondern auch einen gestauchten Knöchel. Es ist ausgeschlossen, dass er in den nächsten zwei Tagen arbeiten kann. Rudis fünf Freunde schaffen es leider nicht, den Schlitten alleine zu ziehen, sodass der Fahrplan durcheinandergerät.

Rachel, Chefin von *Running Rudi*, versucht nun einen Umlaufplan für die Rentiere zu finden, sodass der gleiche Fahrplan auch mit weniger Rentieren eingehalten werden kann. Hierbei erlaubt sie, dass die Rentiere an den Endstationen zwischen den Linien wechseln können. Das Umspannen vom Schlitten der einen zum Schlitten der anderen Linie benötigt allerdings 15 min.

Auch Rudis Freunde, die natürlich weiterhin zusammen in einem Gespann fahren wollen, haben ein paar Wünsche bezüglich des neuen Dienstplans:

Ren-Qing: *„Ich war noch nie in Europa. Ich will da mal hin.“*

Riley: *„Und ich möchte meinen Kumpels in Australien Geschenke liefern.“*
Rolando: *„Ich will auf keinen Fall länger als 12 h von unserem Startpunkt in Grönland zu unserem Endpunkt ebenda unterwegs sein.“*

Wie viele Rentiergespanne können mit einem neuen Dienstplan, der den obigen Fahrplan realisiert, maximal eingespart werden? Gibt es in diesem Dienstplan eine Route, die alle Wünsche von Rudis Freunden berücksichtigt?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt keinen Umlaufplan mit weniger als 168 Rentieren.
2. Es kann maximal ein Gespann eingespart werden, dabei können aber nur zwei Wünsche erfüllt werden.
3. Es kann maximal ein Gespann eingespart werden, dabei können alle Wünsche erfüllt werden.
4. Es können maximal zwei Gespanne eingespart werden, dabei kann aber nur ein Wunsch erfüllt werden.

5. Es können maximal zwei Gespanne eingespart werden, dabei können alle Wünsche erfüllt werden.
6. Es können maximal drei Gespanne eingespart werden, dabei kann aber nur ein Wunsch erfüllt werden.
7. Es können maximal drei Gespanne eingespart werden, dabei können aber nur zwei Wünsche erfüllt werden.
8. Es können maximal vier Gespanne eingespart werden, dabei kann aber nur ein Wunsch erfüllt werden.
9. Es können maximal vier Gespanne eingespart werden, dabei können aber nur zwei Wünsche erfüllt werden.
10. Es können maximal vier Gespanne eingespart werden, dabei können alle Wünsche erfüllt werden.

Projektbezug:

Das Projekt *Routing Structures and Periodic Timetabling* widmet sich der Erstellung von optimalen Taktfahrplänen im öffentlichen Nahverkehr. Aus der Perspektive von Verkehrsunternehmen werden Fahrpläne bevorzugt, bei denen Fahrzeuge möglichst effizient eingesetzt werden. Dabei sollen natürlich auch die Wünsche des Personals berücksichtigt werden.

19.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Die Anzahl der Gespanne, die für einen Umlauf gebraucht werden, kann bestimmt werden, indem man zählt, wie viele Stunden es dauert, die Strecke zu durchlaufen. Pro benötigter Stunde wird ein Schlitten mit sechs Rentieren eingesetzt.

Beispiel: Rote Linie.
Im Originalfahrplan kreisen die Rentiere immer auf derselben Linie. Für die rote Linie werden jeweils 85 min für die Fahrt in jede Richtung benötigt (siehe Abbildung 1), sowie 20 min Aufenthalt im *Okavango Delta Depot* und 50 min Aufenthalt im *Grönländer Geschenkelager* (siehe Fahrplan). Das ergibt:

$$85 + 85 + 20 + 50 = 240$$

Ein Gespann braucht also 240 min für einen Umlauf auf der roten Linie. Dies entspricht vier Stunden. Da der Fahrplan alle 60 min wiederholt wird, werden folglich vier Schlitten mit $4 \cdot 6 = 24$ Rentieren benötigt.

Um eine minimale Anzahl an benötigten Gespannen zu erhalten, brauchen wir einen Umlaufplan mit einer minimalen Anzahl an benötigten Stunden für die Umläufe. Die Anzahl der Stunden, die für einen Umlauf gebraucht werden, kann durch die Anzahl der Überschreitungen der Minutenzahl 00 während des Umlaufs gezählt werden. Wir wollen also so wenige Überschreitungen der Minutenzahl 00 wie möglich.

Die Dauer für den Durchlauf einer Linie in eine Richtung bleibt immer gleich, da der Fahrplan fest ist. Ein Gespann kann also nur durch Verkürzen der Aufenthaltszeit der Rentiere an den Endstationen eingespart werden.

Es gibt drei Stationen, an denen eine andere Umlaufplanung für die Rentiere möglich ist, da dort mehrere Linien ihre Endstation haben: *Lama Logistik*, *Panda Pakete* und das *Grönländer Geschenkelager*. Im Folgenden werden alle Kombinationen für das Umspannen der Rentiere an diesen Stationen untersucht:

Eine **1** in der Ankunfts-/Abfahrtszeit-Tabelle bedeutet, dass die Minutenzahl 00 zwischen Ankunft und Abfahrt des Gespanns überschritten wird. Eine **0** bedeutet, dass dies nicht geschieht. Hierbei wird auch die minimale Umspannzeit von 15 min beachtet. Es muss für die Umlaufplanung jeder Ankunftszeit genau eine Abfahrtszeit zugeordnet werden. So wissen die Rentiere, auf welcher Linie sie nach ihrer Ankunft im Lager wann weitergaloppieren werden. Dies bedeutet, dass aus jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Wert ausgewählt werden muss. Da wir die Anzahl der Überschreitungen der Minutenzahl 00 minimieren wollen, wählen wir immer die Verbindung mit den meisten Nullen in der Tabelle. Diese ist jeweils orange markiert. Die ursprüngliche Verbindung ist auf der Diagonalen zu finden.

Lama Logistik

Ankunft \ Abfahrt	50	20
35	0	1
45	1	1

Hier ist die optimale Verbindung die ursprüngliche. Nach der Ankunft von der jeweiligen Linie wird von den Rentieren dieselbe Linie wieder zurückgenommen. Es wird nichts verändert uns so auch kein Schlitten gespart. Durch die Umspannzeit von 15 min kann nicht so schnell von pink 45 auf gelb 50 gewechselt werden.

Panda Pakete

Ankunft \ Abfahrt	25	55	30
00	0	0	0
10	0	0	0
40	1	0	1

Ankunft \ Abfahrt	25	55	30
00	0	0	0
10	0	0	0
40	1	0	1

An der Station *Panda Pakete* gibt es zwei Möglichkeiten für eine optimale Verbindung. Bei beiden Möglichkeiten wird ein Schlitten im Vergleich zu ursprünglichen Verbindung (auf der Diagonalen) eingespart. Entweder die grüne Linie behält ihre bisherige Verbindung und es wird von pink nach blau und blau nach pink gewechselt oder es geschieht ein bunter Wechsel von grün nach blau, pink nach grün und blau nach pink.

Grönländer Geschenkelager

Ankunft \ Abfahrt	35	30	05	55
50	1	1	1	1
40	1	1	1	0
20	0	1	1	0
15	0	0	1	0

Hier gibt es wieder eine eindeutige optimale Verbindung. Die grüne und die gelbe Linie werden verbunden und die rote und die blaue Linie ebenfalls. So können zwei Rentiergespanne im Vergleich zu ursprünglichen Verbindung (auf der Diagonalen) eingespart werden.

Insgesamt können also drei Rentiergespanne eingespart werden. Und wie steht es um die Wünsche der Rentiere?

Bei der ersten Lösung an der Station *Panda Pakete* entsteht ein Zusammenschluss der gelben und der grünen Linie und ein Zusammenschluss der roten, blauen und pinken Linie. Es können also nur entweder Europa oder Australien besucht werden. Ein Umlauf des gelb-grünen Zusammenschlusses dauert 11 h. Es könnten also Ren-Qing und Rolandos Wünsche erfüllt werden, aber nicht gleichzeitig Rileys.

Bei der zweiten Lösung an der Station *Panda Pakete* entsteht ein einziger Kreis durch alle Linien, der alle Kontinente besucht. Es könnten also Ren-Qings Wunsch und Rileys Wunsch erfüllt werden – aber ein Umlauf dauert länger aber 25 h und damit länger als 24 h, sodass Rolando leer ausgehen würde.

Egal, wie Rachel sich entscheidet, mit einem optimalen Plan, der drei Rentiergespanne einspart, kann sie nur zwei der drei Wünsche erfüllen.

Berechnung der Umlaufzeiten:

Linie	1	2	3	4	5
Fahrzeit	$2 \cdot 85 = 170$	$2 \cdot 55 + 2 \cdot 90 = 290$	$2 \cdot 65 + 2 \cdot 40 = 210$	$2 \cdot 40 + 2 \cdot 110 = 300$	$2 \cdot 70 + 2 \cdot 100 = 340$

Aufenthaltszeit	Panda Pakete Lösung 1		Panda Pakete Lösung 2
	1 3 5	2 4	1 2 3 4 5
Grönländer Geschenkelager	$15 + 15 = 30$	$15 + 15 = 30$	$2 \cdot 30 = 60$
Grand Canyon Container	0	0	0
Okavango Delta Depot	20	0	20
Eiffelturm Einlagerungen	0	0	0
Lama Logistik	35	15	$15 + 35 = 50$
Uluru Umschlagplatz	0	0	0
Panda Pakete	$20 + 15 = 35$	25	$15 + 30 + 15 = 60$
Summe	120	70	190

Für Lösung 1 erhalten wir für den Zusammenschluss der gelben und grünen Linie eine Umlaufzeit von

$$290\,\mathrm{min} + 300\,\mathrm{min} + 70\,\mathrm{min} = 660\,\mathrm{min},$$

was 11 h entspricht, und für den Zusammenschluss der roten, blauen und pinken Linien gibt es eine Umlaufzeit von

$$170\,\mathrm{min} + 210\,\mathrm{min} + 340v\,\mathrm{min} + 100\,\mathrm{min} = 840\,\mathrm{min},$$

was 14 h entspricht.

Für Lösung 2 erhalten wir für den Zusammenschluss aller Linien eine Umlaufzeit von

$$170\,\mathrm{min} + 290\,\mathrm{min} + 210\,\mathrm{min} + 300\,\mathrm{min} + 340\,\mathrm{min} + 190\,\mathrm{min} = 1500\,\mathrm{min},$$

was 25 h entspricht.

20 Die Mützenaufgabe 2018

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

20.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann sagt zu den drei Intelligenzwichteln Atto, Bilbo und Chico: „Meine lieben Intelligenzwichtel! Schwierige Denkaufgaben mit bunten Mützen auf Wichtelköpfen haben eine jahrelange Tradition im mathematischen Adventskalender. Deshalb lade ich Euch morgen wieder einmal zu einem gemütlichen Nachmittag mit Kaffee und Kuchen ein."
„Fein, wir kommen gerne!", rufen die drei Wichtel begeistert.

Der Weihnachtsmann freut sich: „Gut, dann werde ich heute Abend fünf Wichtelmützen vorbereiten: Eine weiße, eine gelbe, eine rote, eine blaue und eine schwarze Mütze. Morgen stellt Ihr Euch hintereinander in einer Reihe auf, und dann setze ich jedem von Euch hinterrücks und blitzschnell eine der fünf Mützen auf den Kopf: Atto wird ganz hinten stehen und kann nur die Mützen auf den Köpfen seiner beiden Vordermänner sehen. Bilbo steht in der Mitte und kann nur die Mütze von Chico sehen. Chico steht ganz vorne und wird gar keine Mütze sehen."

Der Weihnachtsmann fährt fort: „Als erster muss dann Atto seine Mützenfarbe raten, und zwar laut und deutlich, sodass auch Bilbo und Chico sie hören können. Dann muss Bilbo seine Mützenfarbe raten, während Atto und Chico zuhören. Als letzter wird Chico seine Mützenfarbe raten. Danach dürft Ihr Eure Mützen abnehmen und ansehen. Wenn Ihr alle drei richtig geraten habt, bekommt Ihr ein saftiges Stück Sachertorte und eine Tasse Bohnenkaffee. Wenn aber auch nur einer von Euch falsch geraten hat, dann gibt es für Euch nur bitteren Zichorienkaffee und ein vertrocknetes Stück Kuchen vom letzten Monat."

Atto unterbricht den Weihnachtsmann: „Wie wählst Du denn unsere Mützen aus?"
„Die wähle ich völlig zufällig aus, sodass jede der 60 möglichen Farbkombinationen auf Euren Köpfen genau gleich wahrscheinlich ist", sagt der Weihnachtsmann.

Bilbo fragt: „Können wir denn die beiden unbenutzten Mützen sehen?“
„Nein!“, antwortet der Weihnachtsmann. „Die unbenutzten Mützen verstecke ich im Wandschrank!“

Chico fragt: „Und dürfen wir neben den geratenen Farben noch andere Informationen mit übermitteln?“
„Nein, natürlich nicht“, sagt der Weihnachtsmann, „dadurch würdet Ihr ja gegen den Ehrenkodex der Intelligenzwichtel verstoßen.“

Die Wichtel beginnen zu überlegen. Sie diskutieren und sie denken nach. Sie denken nach und sie diskutieren. Dann diskutieren sie noch mehr und denken noch länger nach. Sie arbeiten schließlich eine wirklich geniale Strategie aus, die die Anzahl N der Farbkombinationen maximiert, mit denen sie Bohnenkaffee und Sachertorte erhalten.

Unsere Frage lautet: Wie groß ist N?

Artwork: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

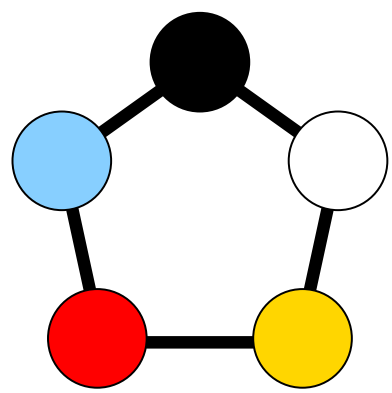
1. $N = 12$.
2. $N = 13$.
3. $N = 14$.
4. $N = 15$.
5. $N = 16$.
6. $N = 17$.
7. $N = 18$.
8. $N = 19$.
9. $N = 20$.
10. $N = 21$.

20.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Man sieht zunächst leicht, dass $N \leq 20$ gilt: Atto sieht nur die beiden Mützen von Bilbo und Chico und hat daher drei gleichwertige Kandidaten für die eigene Mützenfarbe. Daher kann Atto nur in einem Drittel der 60 möglichen Fälle die richtige Farbe sagen.

Wir beschreiben nun eine Strategie, die den Wichteln Erfolg und Kaffee und Kuchen in mindestens 20 der möglichen Fälle garantiert. Die Wichtel ordnen die fünf Farben in einem Fünfeck an:



Im Fünfeck gibt es für je zwei Farben eine eindeutige dritte Farbe, die von beiden genau gleich weit entfernt ist (und die wir als die **Mittelfarbe** dieser beiden Farben bezeichnen werden):

Von WEISS und ROT ist nur GELB gleich weit entfernt (und zwar eine Kantenlänge), daher ist GELB die Mittelfarbe von WEISS und ROT. Von WEISS und SCHWARZ ist nur ROT gleich weit entfernt (und zwar zwei Kantenlängen), daher ist ROT die Mittelfarbe von WEISS und SCHWARZ. Und so weiter.

Die Strategie der Wichtel beruht nun auf der Annahme, dass Attos Mützenfarbe A die Mittelfarbe von Bilbos und Chicos Mützenfarben B und C ist:

- Atto sieht B und C und bestimmt sich daraus A als Mittelfarbe von B und C.

- Bilbo hört A und sieht C. Daraus kann Bilbo die Farbe B ausrechnen.
- Chico hört A und hört B und rechnet die Farbe C aus.

Spielen wir die Strategie einmal an dem Beispiel durch, bei dem Atto die Farben B=BLAU und C=GELB auf den Köpfen von Bilbo und Chico sieht:

- Da ROT die Mittelfarbe von BLAU und GELB ist, wird Atto in dieser Situation A=ROT raten.
- Bilbo hört Atto A=ROT raten und sieht C=GELB. Bilbo weiß nun, dass ROT die Mittelfarbe von GELB und seiner eigenen Mützenfarbe B ist. Damit kommt nur B=BLAU als Bilbos Mützenfarbe in Frage, und Bilbo rät entsprechend.
- Chico hört Atto A=ROT raten und hört Bilbo B=BLAU raten. Chico weiß nun, dass ROT die Mittelfarbe von BLAU und seiner eigenen Mützenfarbe C ist. Damit kommt nur C=GELB als Chicos Mützenfarbe in Frage, und Chico rät entsprechend.

Wie erfolgreich ist diese Strategie?

Falls A tatsächlich die Mittelfarbe von B und C ist, so rät Atto richtig, und falls A eine der zwei verbleibenden Farben ist, so rät Atto falsch. Da der Weihnachtsmann die Farbkombinationen völlig zufällig auswählt, wird Atto daher genau in einem Drittel aller möglichen Fälle die richtige Farbe raten.

Und jetzt kommt die zentrale Beobachtung: Bilbo und Chico werden mit dieser Strategie ihre Mützenfarbe <u>immer</u> richtig raten! Die von Atto geratene Farbe A ist ja immer die Mittelfarbe von B und C. Kennt man C und die Mittelfarbe, so ergibt sich daraus B. Kennt man B und die Mittelfarbe, so ergibt sich daraus C.

Zusammengefasst:

- Bilbo rät immer richtig.
- Chico rät immer richtig.
- Atto rät in einem Drittel der 60 möglichen Fälle richtig.

Also gilt $N = 20$.

21 Der Geschenkequader

Autoren: Ulrich Reitebuch (FU Berlin), Martin Skrodzki (FU Berlin)
Projekt: GV-AP16 – Computational and structural aspects of point set surfaces

21.1 Aufgabe

Die Wichtel wollen einen großen Haufen mit 512 Geschenken möglichst platzsparend lagern. Alle diese Geschenke

$$G_i^{(0)} = (x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)}), \quad i = 1, \ldots, 512,$$

sind quaderförmig mit den jeweiligen Breiten x_i, Tiefen y_i und Höhen z_i und haben eine eindeutige Orientierung, da jedes eine Beschriftung mit „oben" und eine weitere mit „vorne" besitzt.

Die Wichtel stellen nun fest, dass sich die Geschenke immer zu Paaren

$$(G_{j_1}^{(0)}, G_{j_2}^{(0)}), \quad j_1, j_2 \in \{1, \ldots, 512\}, \quad j_1 \neq j_2,$$

zusammenschieben lassen, die yz-kompatibel sind. Das heißt, dass sowohl die Tiefen als auch die Höhen übereinstimmen:

$$y_{j_1}^{(0)} = y_{j_2}^{(0)} \quad \text{und} \quad z_{j_1}^{(0)} = z_{j_2}^{(0)}.$$

Somit bilden die zwei Geschenke $G_{j_1}^{(0)}$ und $G_{j_2}^{(0)}$ eines Paares gemeinsam einen neuen Quader $G_j^{(1)}$ mit

- Breite $x_j^{(1)} = x_{j_1}^{(0)} + x_{j_2}^{(0)}$,
- Tiefe $y_j^{(1)} = y_{j_1}^{(0)} = y_{j_2}^{(0)}$ und
- Höhe $z_j^{(1)} = z_{j_1}^{(0)} = z_{j_2}^{(0)}$,

siehe Abbildung 20. Außerdem taucht jedes der 512 Geschenke $G_i^{(0)}$ in genau einem solchen Paar genau einmal auf. Die Wichtel können also jeweils zwei Geschenke zusammenschieben und erhalten dann 256 neue Quader $G_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots, 256$, mit den jeweiligen Breiten $x_j^{(1)}$, Tiefen $y_j^{(1)}$ und Höhen $z_j^{(1)}$.

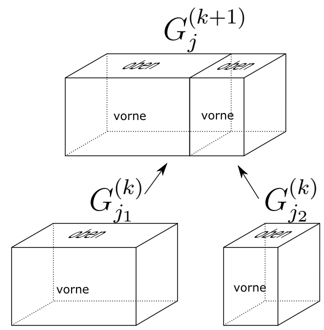


Abbildung 20: Zwei Quader mit gleicher Tiefe und Höhe ergeben einen neuen Quader.

Die Wichtel probieren weiter und stellen fest, dass bei diesen neuen 256 Quadern wieder die Eigenschaft erfüllt ist, dass sie sich paarweise zusammenschieben lassen und 128 neue Quader ergeben, wobei diesmal zwei Quader eines Paares xz-kompatibel sind, also jeweils Breite und Höhe innerhalb eines Paares passen. Im dritten Schritt erzeugen sie 64 Quader durch xy-kompatibles Zusammenschieben, es passen Breite und Tiefe. So schieben sie noch sechs weitere Male, wobei die Boxen-Paare

- im insgesamt 1., 4. und 7. Schiebevorgang yz-kompatibel,
- im 2., 5. und 8. Vorgang xz-kompatibel und
- im 3., 6. und 9. Vorgang xy-kompatibel sind.

Am Ende erhalten sie einen großen Quader $G^{(9)}$, der alle Geschenke $G_i^{(0)}$ beinhaltet. Dieser lässt sich sehr gut lagern und zufrieden machen die Wichtel eine Pause.

Zum einfachen Zuschnitt von Geschenkpapier nutzen die Wichtel einen Laser-gestützten-Schnitt-Werkstoff-Trenner, kurz Laser-Sch.Wer.T. Einer der Wichtel will nun gerade mit dem Laser-Sch.Wer.T. Verpackungsmaterial zerschneiden, als er stolpert und einen ebenen, jedoch nicht achsenparallelen Schnitt durch den zusammengestellten Geschenkequader $G^{(9)}$ macht, welcher diesen Quader in zwei jeweils nicht-leere Teile teilt.

Die Aufregung ist groß: Überall liegen kaputte Geschenke in der Wichtelwerkstatt. Aber die Wichtel können nur ahnen, wie viele der 512 Geschenke genau vom Laser-Sch.Wer.T. zerstört wurden, da der Büro-Wichtel leider etwas

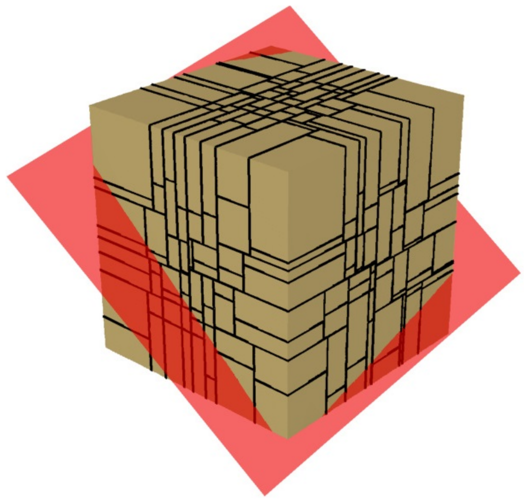


Abbildung 21: Beispiel für einen ebenen, nicht-achsenparallelen Schnitt durch den großen Quader $G^{(9)}$.

übereifrig war und die Unterlagen mit den genauen Maßen $(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)})$, $i = 1, \dots, 512$, geschreddert hat. Die Wichtel erinnern sich nur noch an die oben beschriebene Eigenschaft des Zusammenschiebens der 512 Geschenkpakete.

Wie viele der 512 Geschenke $G_i^{(0)}$ wurden denn maximal von dem Schnitt in jeweils zwei nicht-leere Teile geteilt?

Illustration: Sonja Rörig

Antwortmöglichkeiten:

1. 64
2. 96
3. 120
4. 133
5. 142
6. 170
7. 176
8. 384
9. 448
10. 512

Projektbezug:

Die Partitionierung des Raumes, wie sie hier durch die Geschenke $G_i^{(0)}$ vorgenommen wird, spielt eine wichtige Rolle bei Abfragen von Punkten. Platziert man zunächst Datenpunkte im Raum und partitioniert diesen gemäß der angegebenen Vorschrift des „Zusammenschiebens“, kann man effizient folgende Fragen beantworten: Welche Datenpunkte liegen in einem bestimmten Bereich und welcher der Datenpunkte liegt am nächsten zu einem gegebenen Abfragepunkt? Je größer die Menge an Datenpunkten im Raum wird, desto wichtiger sind solche effizienten Strukturen als Grundlage jeglicher Prozesse auf diesen Punkten. Im Projekt *Computational and structural aspects of point set surfaces* werden vor allem Datenpunkte betrachtet, die durch 3D-Scan-Technologien von realen Geometrien gewonnen werden und die diese Geometrien digital abbilden.

21.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir zeigen, dass schlimmstenfalls alle 512 Geschenke geteilt werden, indem wir entsprechende Geschenke $G_i^{(0)}$ konstruieren: Hierfür nehmen wir zunächst einen beliebigen Quader $G^{(9)}$ und eine beliebige nicht-achsenparallele Schnittebene H an, welche $G^{(9)}$ in zwei nicht-leere Teile teilt.

Im letzten Schritt der Wichtel war das einzige verbliebene Paar xy-kompatibel. Wir müssen somit $G^{(9)}$ in zwei Quader $G_1^{(8)}$ und $G_2^{(8)}$ teilen, die gleiche Breite und Tiefe haben. Hierfür betrachten wir, auf welcher Höhe genau die Schnittebene H den Quader $G^{(9)}$ schneidet:

$$z_{\min} := \min\{z \in \mathbb{R} \mid \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in H \cap G^{(9)}\},$$
$$z_{\max} := \max\{z \in \mathbb{R} \mid \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in H \cap G^{(9)}\}.$$

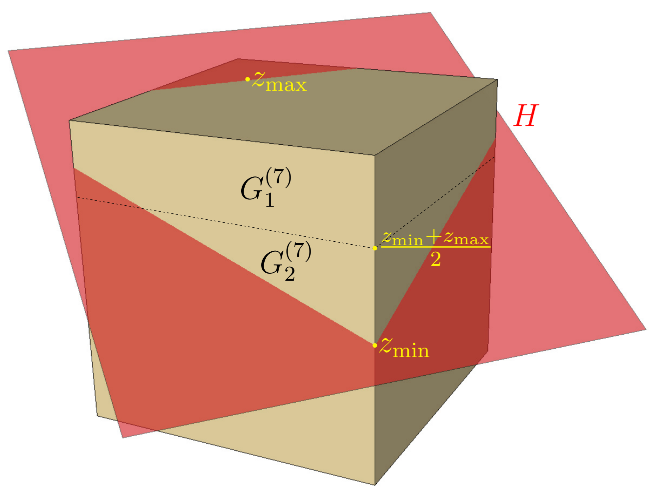


Abbildung 22: Das gezielte Zerschneiden des Quaders $G^{(9)}$ in die zwei Quader $G_1^{(8)}$ und $G_2^{(8)}$.

Somit bezeichnen $z_{\min}$ und $z_{\max}$ die kleinste und größte Höhe, auf welcher $G^{(9)}$ von H geschnitten wird. Da H nicht achsenparallel ist, gilt $z_{\max} > z_{\min}$.

Wir teilen nun $G^{(9)}$ genau zwischen diesen Werten auf Höhe

$$\frac{z_{\max} + z_{\min}}{2}$$

und erhalten somit die zwei Quader $G_1^{(8)}$ und $G_2^{(8)}$. Beide passen in Bezug auf Breite und Tiefe zusammen und werden nach Konstruktion von H in jeweils zwei nicht-leere Teile geteilt, siehe Abbildung 22.

Wir wiederholen diese Konstruktion nun jeweils rekursiv für die beiden Quader $G_1^{(8)}$ und $G_2^{(8)}$, wobei wir jedoch xz-kompatible Paare erzeugen müssen, weshalb der kleinste und größte Schnittwert – $y_{\min k}$ und $y_{\max k}$, $k = 1, 2$ – auf der Dimension „Tiefe“ gesucht wird und entsprechend auch bei der entsprechenden y-Koordinate $\frac{y_{\min k} + y_{\max k}}{2}$, $k = 1, 2$ geschnitten wird. Wir erhalten vier Quader $G_j^{(7)}$, $j = 1, \ldots, 4$, die wiederum mit entsprechender Kompatibilität rekursiv zerlegt werden, bis wir schließlich 512 Quader $G_i^{(0)}$ erzeugt haben, die alle nach Konstruktion von H in jeweils zwei nicht-leere Teile geteilt werden. Damit haben wir ein Beispiel konstruiert, welches die in der Aufgabe genannten Bedingungen erfüllt, bei dem jedoch alle 512 Quader geschnitten werden.

22 Plätzchenexplosion

Autor: Christian Hercher (Europa-Universität Flensburg)

22.1 Aufgabe

Die Rentiergewerkschaft ruft zum Arbeitskampf auf. Überstunden! Und das zu Weihnachten! Dieser Einsatz darf natürlich nicht unhonoriert bleiben. Also wird Rudolph als Vertreter der Rentiere zum Verhandlungsführer der Arbeitgeberseite, dem Weihnachtsmann, entsandt:

Rudolph: Wir Rentiere fordern eine angemessene Entlohnung für die wertvolle Arbeit, die wir Jahr für Jahr leisten. Wir wollen Plätzchen als Ausgleich für die an Weihnachten geleisteten Überstunden.

Weihnachtsmann: Plätzchen? Ja, das ist ok, davon haben wir ein paar... Wie viele wollt ihr denn?

Rudolph (verschmitzt grinsend): Du spielst doch gerne Schach, lieber Weihnachtsmann. Auf das erste Feld eines handelsüblichen Schachbrettes hätten wir gerne ein Plätzchen, auf das zweite dann zwei, auf das dritte dann vier und auf jedes weitere doppelt so viel wie auf dem Feld davor...

Weihnachtsmann: Moment! Mit diesem Trick ist doch schon einmal jemand hereingelegt worden. Nein, mein Lieber! So nicht!

Rudolph (weiterhin verschmitzt grinsend): Na, gut... Wir kommen dir entgegen und spielen das Spiel nach den folgenden Regeln:

1. Wir benutzen nur die Grundlinie des Schachbretts, also nur acht Felder. Und du legst zunächst nur ein Plätzchen auf das erste Feld.
2. Jedes Plätzchen, das auf einem der ersten sieben Felder liegt, dürfen wir gegen zwei neue eintauschen, die auf das nächste Feld gelegt werden.
3. Weiters dürfen wir zwei Plätzchenhaufen, die auf den Feldern 2 bis 8 direkt nebeneinander liegen vertauschen. Dafür müssen wir dir

allerdings ein Plätzchen von dem Feld, das genau vor diesen beiden Feldern liegt, zurückgeben. Beim Tausch der Plätzchen zweier Felder darf eines dieser „Tauschfelder“ zuvor leer gewesen sein. Das „Bezahlfeld“, das vor den beiden Tauschfeldern liegt, muss dagegen vor dem Bezahlen mindestens ein Plätzchen beherbergt haben.

4. Um dich bei dem ganzen Rumgetausche nicht vollends zu verwirren, schlage ich vor, dass zu jeder Zeit höchstens drei der acht Felder belegt sein dürfen. Diese drei Felder müssen außerdem direkt nebeneinander liegen. Die drei belegten Felder sind dabei natürlich nicht fest gewählt, sondern können sich im Laufe des Spiels verändern.

Weihnachtsmann: Ok, das klingt doch fair. Handschlag drauf! Oder, warte mal 'nen Moment...

Wir fragen euch nun: Wie viele Plätzchen kann Rudolph für die Rentiere maximal erhalten? Genauer: Wie lautet die letzte Ziffer (d. h. die Einerstelle) dieser Anzahl?

Illustration: Julia Nurit Schönnagel

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

Zusatzfrage 1:

Und wie lautet die vorletzte Ziffer (Zehnerstelle) dieser Anzahl?

Zusatzfrage 2:

Wie viele Plätzchen werden es, wenn Rudolph die Zusatzbedingung, dass nie mehr als drei benachbarte Felder belegt sind, abschwächt und auch vier, fünf oder sechs zulässt?

22.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Offenbar kann Rudolph nur durch Anwenden der Züge vom

Typ 1: Plätzchen aus Feld k gegen 2 auf Feld $k+1$ eintauschen

seine Plätzchenanzahl erhöhen. Dadurch wie auch durch Anwenden eines Zuges vom

Typ 2: durch „Bezahlen“ eines Plätzchens aus Feld k die beiden Plätzchenanzahlen auf den Feldern $k+1$ und $k+2$ tauschen

sinkt aber die Anzahl der Plätzchen auf Feld k. Insbesondere ist das Spiel also endlich, da kein Zug die Plätzchenanzahl auf den Feldern $< k$ verändert.

Durch die Zusatzbedingung 4 genügt es also, sich das Spiel in Phasen unterteilt vorzustellen, in denen man jeweils nur drei aufeinanderfolgende Felder zu betrachten hat. Das Feld mit der kleinsten Nummer habe dabei zu Anfang der Phase eine positive Plätzchenanzahl, während es am Schluss dieser Phase keines mehr enthält. Ab dann ist dieses Feld für das weitere Spiel irrelevant und die nächste Phase beginnt – nun um ein Feld nach hinten verschoben (oder das Spielende ist fast erreicht, wenn nur noch auf den letzten beiden Feldern Plätzchen liegen).

Zur besseren Lesbarkeit bezeichnen wir mit (a_1, a_2, a_3) eine Situation, in der auf dem k. Feld a_1 Plätzchen liegen, auf dem $(k+1)$. Feld a_2 und auf dem $(k+2)$. Feld a_3. Des Weiteren bedeute

$$(a_1, a_2, a_3) \to (b_1, b_2, b_3),$$

dass es eine gültige Zugfolge von der ersten zur zweiten Konstellation gibt.

Jede Phase startet also mit $(a_1, a_2, 0)$, wobei $a_1 > 0$, und endet mit $(0, b_2, b_3)$, wobei mindestens einer der beiden Werte b_1, b_2 größer als 0 ist. Wir werden im Folgenden („induktiv“ über die Phasen) zeigen, dass Rudolph mit $(a_1, 0, 0)$ beginnt und mit $(0, b_2, 0)$ eine Phase abschließt.

Die erste Phase beginnt offenbar mit $(1, 0, 0)$, also wie gefordert. Und endet eine Phase wie beschrieben, dann beginnt – durch das „Weiterrücken“ der drei betrachteten Felder um eine Position – die nächste auch wie gefordert. Bleibt nur zu zeigen, dass dies bei einem solchen Start auch immer das bestmögliche Ziel ist:

Wie man erwartet, ist es sicherlich günstig (aus Rudolphs Sicht) möglichst viele Plätzchen auf den Feldern mit möglichst kleiner Nummer liegen zu haben (da diese dann eben noch öfter via Zugtyp 1 „verdoppelt“ werden können). Insofern lohnt sich ein Zug vom Typ 2 nur, wenn damit viele Kekse auf ein kleineres Feld wandern, d. h. konsequent zu Ende gedacht, lohnt sich ein solcher Zug am meisten, wenn auf dem Feld $k+1$ keine Kekse mehr liegen, also in Situationen der Form $(a_1, 0, a_3)$.

Zu Beginn einer Phase ist zwar eine solche Situation gegeben, aber das Vertauschen der beiden Null-Felder kostet nur ein Plätzchen ohne etwas zu erbringen. Also muss der erste Zug einer jeden Phase ein Zug vom Typ 1 auf dem Feld k sein. Ist dieses Feld damit leer, sind wir fertig und eine neue Phase beginnt.

Wenn nicht, so befindet sich auf dem Feld k nun noch mindestens ein Plätzchen. Dieses könnte nun via eines Zuges vom Typ 1 auch in zwei auf dem Feld $k+1$ umgewandelt werden. Oder aber es könnte eingesetzt werden um mittels eines Zuges vom Typ 2 die Felder $k+1$ und $k+2$ zu vertauschen. Für letzteres müsste aber erst einmal durch Züge vom Typ 1 das Feld $k+1$ geleert werden:

$$(a_1 - 1, 2, 0) \to (a_1 - 1, 0, 2 \cdot 2) \to (a_1 - 2, 2 \cdot 2, 0)$$

bzw. allgemein

$$(a, b, 0) \to (a - 1, 2 \cdot b, 0),$$

für $a \geq 1$ und $b \geq 2$.

Wenn also auf Feld $k + 1$ mindestens zwei Plätzchen liegen (und das tun sie nach dem ersten Zug einer Phase und dann induktiv nach obigem Schema, was deren Anzahl dort jeweils verdoppelt), dann ist es immer das beste Vorgehen, all diese Plätzchen via Zügen vom Typ 1, angewendet auf Feld $k + 1$, zu „verdoppeln“ und mittels Zugtyp 1 auf das Feld $k + 2$ zu verschieben, bevor man mit einem einzelnen investierten Plätzchen von Feld k diese gerade erzeugte Plätzchen-Anzahl wieder auf das Feld $k+1$ zurückholt.

Sukzessive wird also dadurch für jedes weitere Plätzchen auf dem Feld k die Anzahl der Plätzchen auf Feld $k+1$ verdoppelt, bis eben auf Feld k keines mehr zu finden ist. Insgesamt erhalten wir also, dass bei optimalem Vorgehen eine Phase mit $(a, 0, 0)$ startet und mit $(0, 2^a, 0)$ endet, d. h. die nächste mit $(2^a, 0, 0)$ beginnt.

Hat man in der Abschlussphase nur noch die beiden Felder 7 und 8 zur Verfügung, kann kein Zug des Typs 2 mehr angewandt werden, d. h. es geht einfach $(a, 0)$ über in $(0, 2a)$, was dann die endgültig auszuzahlenden Plätzchen sind.

Was heißt das nun für unser konkretes Problem:

1. Phase (Felder 1 bis 3): $(1, 0, 0) \to (0, 2, 0)$,
2. Phase (Felder 2 bis 4): $(2, 0, 0) \to (0, 2^2, 0)$,
3. Phase (Felder 3 bis 5): $(2^2, 0, 0) \to (0, 2^{2^2}, 0)$,
usw.

Für $1 \leq n \leq 5$ sei P_n definiert durch

$$P_1 = 2 \text{ und } P_{n+1} = 2^{P_n},$$

d. h. P_n ist ein Zweierpotenzturm der Höhe n. Dann schließt die n-te Phase offenbar ab mit der Situation $(0, P_n, 0)$, die 6. Phase (Felder 6 bis 8) also mit $(0, P_6, 0)$. Die Abschlussphase beginnt also mit $(P_6, 0)$ und das gesamte Spiel endet damit mit $2 \cdot P_6$ Plätzchen auf dem 8. Feld.

Zur Veranschaulichung: Es ist

$$P_1 = 2, \quad P_2 = 2^2 = 4, \quad P_3 = 2^4 = 2^{2^2} = 16, \quad P_4 = 2^{16} = 2^{2^{2^2}} = 65536$$

und $P_5 = 2^{65536} = 2^{2^{2^{2^2}}}$ eine Zahl mit 19729 Dezimalstellen. P_6 und damit auch $2 \cdot P_6$ sind so nicht mehr greifbar. Insbesondere wäre auch jedes Computer-Algebra-System mit der Darstellung als Dezimalzahl überfordert.

Jedoch interessieren wir uns ja nur für die letzte Stelle von $2 \cdot P_6$, d. h. es genügt die letzte Stelle von P_6 zu bestimmen und dann mit 2 zu multiplizieren. Da P_6 eine (ziemlich große) Zweierpotenz ist, schauen wir uns die letzten Stellen von Zweierpotenzen an:

2^1 endet auf 2.
2^2 endet auf 4.
2^3 endet auf 8.
2^4 endet auf 6.

2^5 endet auf 2.
2^6 endet auf 4.
2^7 endet auf 8.
2^8 endet auf 6.

usw.

Offenbar wiederholen sich die Endziffern in einer Viererperiode. (Dies kann man auch leicht nachweisen, da die Endziffer eines Produkts gleich dem Produkt der Endziffern (bzw. genauer der Endziffer dieses Produkts) der einzelnen Faktoren ist.)

Wie hilft uns das nun aber bei der Beantwortung unserer Frage? Nun ja, wir haben gerade gezeigt, dass für jedes $n \geq 0$ und $1 \leq k \leq 4$ die beiden Zweierpotenzen 2^k und 2^{4n+k} die gleiche Endziffer besitzen.

Da $P_6 = 2^{P_5}$ ist, und P_5 als Zweierpotenz (mit Exponenten $P_4 > 2$) offenbar durch 4 teilbar ist, besitzt P_6 also die gleiche Endziffer wie 2^4 (da $k = 4$ gewählt werden kann), d. h. P_6 endet auf die Ziffer 6.

Damit endet unsere Plätzchenanzahl $2 \cdot P_6$ auf die Ziffer 2, was dann auch unsere gesuchte Antwort ist.

Zur Zusatzfrage 1:

Hier kann man prinzipiell genauso vorgehen, doch es geht auch etwas strukturierter:

Da wir uns ja für die vorletzte Stelle interessieren, genügt es $2 \cdot P_6$ $(mod\ 100)$ zu betrachten.

> **Bemerkung:** Dabei steht
>
> $$a \equiv r\ (mod\ b)$$
>
> für den Rest r, den a bei der Teilung durch b lässt, also z. B.
>
> $$7 \equiv 1\ (mod\ 3),$$
>
> da 7 bei der Teilung durch 3 den Rest 1 lässt.
>
> Allgemeiner verlangt man nur, dass a und r den gleichen Rest bei der Division durch b lassen, also $a - r$ durch b teilbar ist. Man kann mit diesen Zahlenkongruenzen fast rechnen wie mit normalen Gleichungen. Einzig bei Divisionen muss man etwas aufpassen, aber diese brauchen wir hier nicht.

Genauer reicht es natürlich P_6 $(mod\ 50)$ zu betrachten; das Ergebnis müssen wir dann nur noch mit 2 multiplizieren. Und natürlich wissen wir, dass P_6 gerade ist. Also interessieren wir uns eigentlich für P_6 $(mod\ 25)$.

Wir wissen, dass $2^{10} = 1024 \equiv -1\ (mod\ 25)$, also $2^{20} \equiv 1\ (mod\ 25)$ ist. Da $P_6 = 2^{P_5}$ eine Zweierpotenz ist, können wir so also den Exponenten modulo 20 reduzieren. D. h. wir wollen P_5 $(mod\ 20)$ bestimmen. Offenbar ist P_5 nicht nur immer noch gerade, sondern auch durch vier teilbar. Also genügt es uns P_5 $(mod 5)$ zu bestimmen. P_5 ist ja auch eine Zweierpotenz und so können wir einen ähnlichen Ansatz verfolgen:
Wir wissen, dass $2^4 = 16 \equiv 1\ (mod\ 5)$ ist, d. h. die Reste $(mod\ 5)$ von Zweierpotenzen sich in Vierer-Zyklen wiederholen. Also müssen wir nun vom Exponenten von $P_5 = 2^{P_4}$, also P_4, den Rest bei der Teilung durch 4 bestimmen. Offenbar ist aber auch P_4 durch 4 teilbar, d. h. P_5 lässt den gleichen Rest $(mod\ 5)$ wie 2^0 (und 2^4), also 1.

Damit haben wir den Rest von P_5 $(mod\ 5)$ bestimmt. Wir brauchen ihn aber $(mod\ 20)$. Wir suchen also denjenigen Rest zwischen 0 und 20 (0 ein-, 20 ausgeschlossen), der durch 4 teilbar und $\equiv 1\ (mod\ 5)$ ist. (Das dieser existiert und eindeutig bestimmt ist, liefert der chinesische Restsatz.) Das ist natürlich 16. Also lässt P_5 den Rest 16 bei der Teilung durch 20.

Damit erhalten wir, wenn wir dies oben einsetzen, dass P_6 den gleichen Rest (mod 25) lässt wie $2^{16} = 65536$, also 11. Setzen wir dies wieder mit dem chinesischen Restsatz zusammen, erhalten wir

$$P_6 \equiv 36\ (mod\ 50) \quad \text{und} \quad 2 \cdot P_6 \equiv 72\ (mod\ 100).$$

Die letzten zwei Ziffern der maximalen Plätzchenanzahl, die Rudolph auf diese Weise erhalten kann, lauten also 72; die gesuchte vorletzte Ziffer ist damit 7.

Zur Zusatzfrage 2:

Lässt man zu, dass vier nebeneinander liegende Felder belegt sein können, erhält man die Phasenübergänge $(a, 0, 0, 0) \to (0, P_a, 0, 0)$. In jeder Phase wird also nicht der Potenzturm um Eins höher, sondern die Höhe des neuen Potenzturms ergibt sich aus dem Wert des alten... Dies iteriert nach oben, je mehr belegte Felder man zulässt.

Hierbei handelt es sich um eine verkappte Form der Ackermann-Funktion. Diese ist in der Theoretischen Informatik von Interesse, da sie der erste Prototyp einer totalen (d. h. für alle Eingaben definierten) berechenbaren Funktion, die nicht primitiv-rekursiv berechenbar ist, ist: Sie wächst einfach zu schnell.

Für die Frage nach der vorletzten Stelle hat das allerdings keine Auswirkungen: Auch dann noch ist die maximale Anzahl der Plätzchen das Doppelte eines genügend hohen Zweierpotenzturms. Die Rechnung zur Ermittlung der vorletzten Stelle dieser Zahl wäre auch dann noch haargenau die Gleiche.

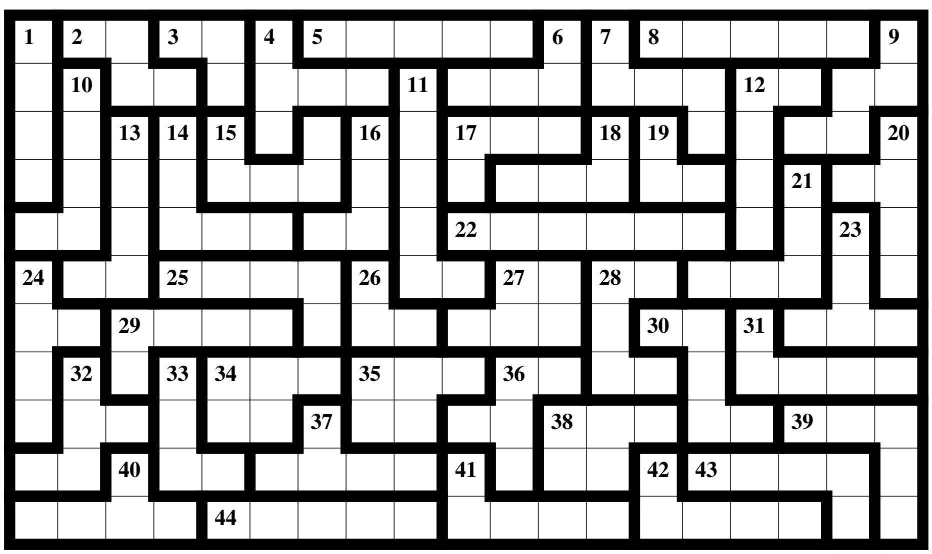
Bemerkung: Das Ganze ist eine Abwandlung (und in der oben gestellten Form etwas vereinfacht) von Aufgabe 5 der IMO 2010. Dort war zu zeigen, dass mit 6 Feldern (um im hiesigen Vokabular zu bleiben), auf denen zu Beginn je ein Plätzchen lag, man genau $2010^{2010^{2010}}$ Plätzchen auf dem letzten Feld erzeugen kann (ohne Einschränkung, welche Felder leer oder belegt sein können).

23 Mondrian

Autoren: Hajo Broersma (Universiteit Twente), Cor Hurkens (TU Eindhoven)

23.1 Aufgabe

Der Malwichtel Mondrian hat eine Weihnachtskarte entworfen und in 44 Gebiete unterteilt. Mondrian nennt zwei Gebiete **benachbart**, falls sie eine horizontale oder eine vertikale Kante gemeinsam haben. (Zum Beispiel ist das Gebiet 2 zu den Gebieten 1, 10, 13, 14 und 3 benachbart, aber nicht zum Gebiet 15, mit dem es nur einen einzigen Punkt gemeinsam hat.)



Mondrian malt nun jedes Gebiet mit einer der vier Farben rot, gelb, blau und schwarz aus, sodass keine zwei benachbarten Gebiete dieselbe Farbe erhalten. Zuerst einmal malt Mondrian eines der Gebiete schwarz aus. Da er seinen schwarzen Farbstift dabei völlig aufbraucht, malt er die übrigen 43 Gebiete dann mit rot, gelb und blau aus. Am Ende sind die rot, die blau und die gelb ausgemalte Fläche jeweils genau gleich groß.

Wir wollen von Euch wissen: Welches der Gebiete hat Mondrian denn schwarz ausgemalt?

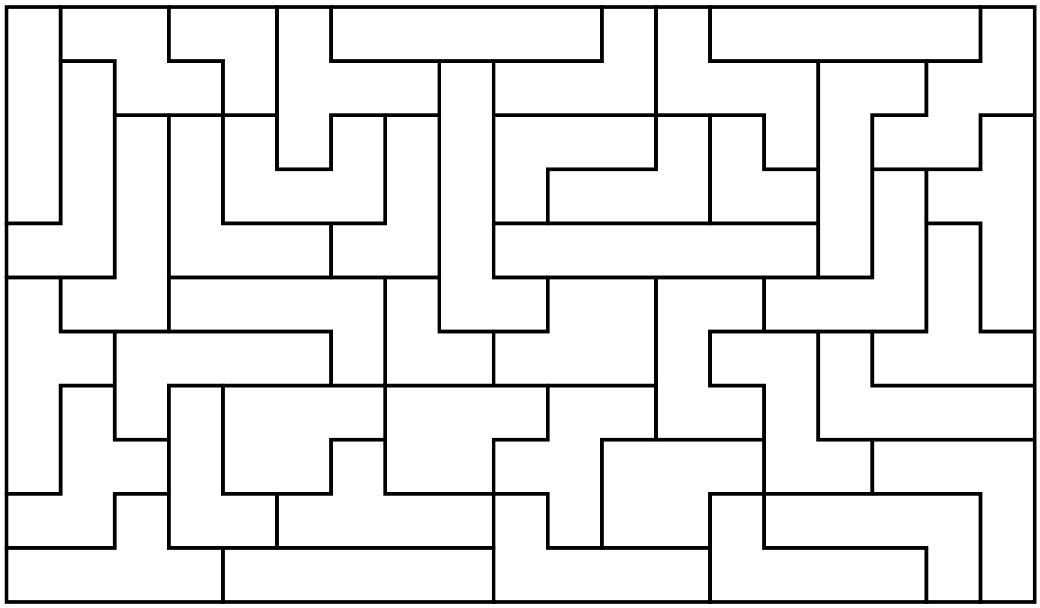
Illustration: Friederike Hofmann

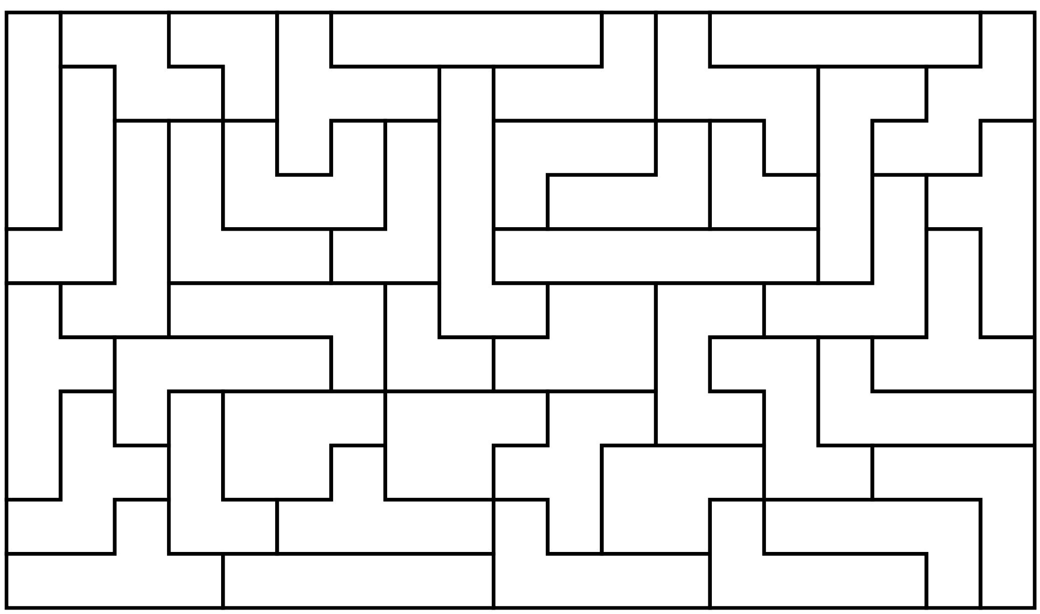
Antwortmöglichkeiten:

1. Eines der Gebiete 1, 11, 21, 31, 41 ist schwarz.
2. Eines der Gebiete 2, 12, 22, 32, 42 ist schwarz.
3. Eines der Gebiete 3, 13, 23, 33, 43 ist schwarz.
4. Eines der Gebiete 4, 14, 24, 34, 44 ist schwarz.
5. Eines der Gebiete 5, 15, 25, 35 ist schwarz.
6. Eines der Gebiete 6, 16, 26, 36 ist schwarz.
7. Eines der Gebiete 7, 17, 27, 37 ist schwarz.
8. Eines der Gebiete 8, 18, 28, 38 ist schwarz.
9. Eines der Gebiete 9, 19, 29, 39 ist schwarz.
10. Eines der Gebiete 10, 20, 30, 40 ist schwarz.

Arbeitsmaterial

Diese Seite kann ausgedruckt und als Arbeitsmaterial (zum Ausmalen) verwendet werden.

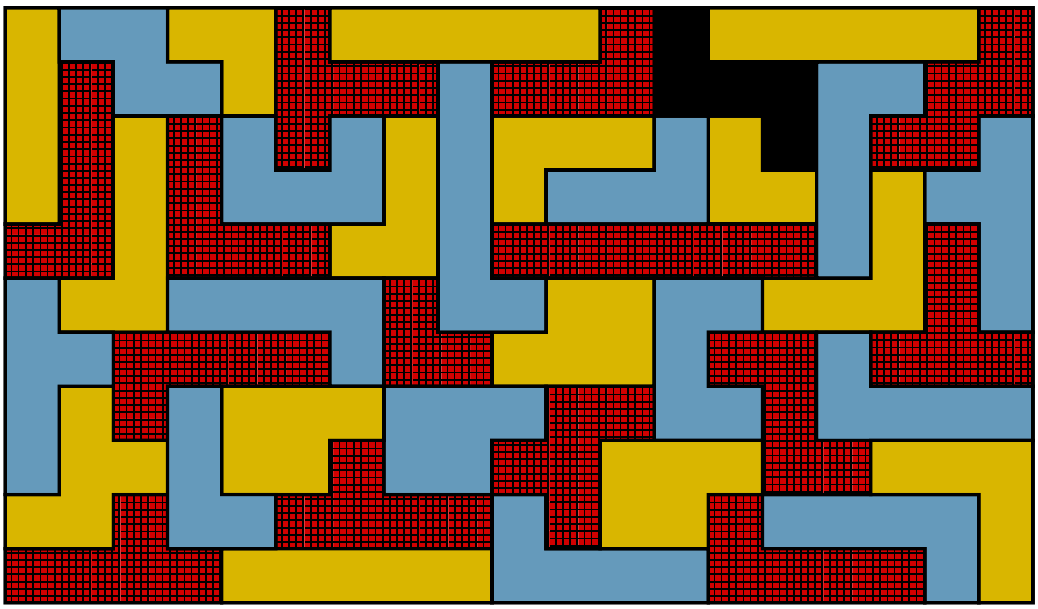




23.2 Lösung

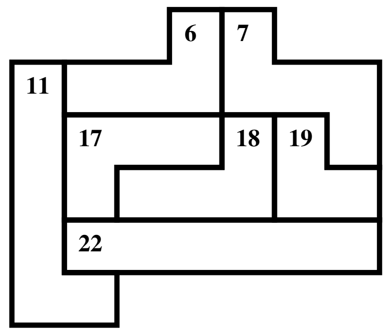
Die richtige Antwort ist: 7.

Die folgende Abbildung zeigt eine mögliche Färbung der Weihnachtskarte, in der die rote (karierte), die blaue (dunkel gefärbte) und die gelbe (hell gefärbte) Fläche jeweils 68 Einheitsquadrate bedecken und in der das Gebiet 7 schwarz ausgemalt ist.



Nun wollen wir noch zeigen, dass nur das Gebiet 7 als schwarzes Gebiet in Frage kommt. Zuerst denken wir ein wenig über die Flächen der Gebiete nach: Die Fläche der gesamten Weihnachtskarte beträgt $11 \times 19 = 209$ Einheitsquadrate. Da die rote, blaue und gelbe Fläche laut Angabe genau gleich groß sind, ist die rot-blau-gelbe Gesamtfläche $\equiv 0 \bmod 3$. Daraus folgt, dass die Fläche F des schwarzen Gebietes von der Form $F \equiv 2 \bmod 3$ ist.
Die Fläche der kleinsten Gebiete (wie zum Beispiel der Gebiete 3 und 26) beträgt 3 Einheitsquadrate und die Fläche der größten Gebiete (wie zum Beispiel der Gebiete 11 und 22) beträgt 6 Einheitsquadrate. Daraus folgt, dass das schwarze Gebiet eine Fläche von 5 Einheitsquadraten haben muss.

Als nächstes nehmen wir zwecks Widerspruchs an, dass keines der sieben Gebiete 6, 7, 11, 17, 18, 19, 22 schwarz gefärbt ist. Dann hat Mondrian für diese sieben Gebiete nur die drei Farben rot, gelb und blau verwendet.



- Da die beiden Gebiete 18 und 19 benachbart sind, haben sie zwei verschiedene Farben (sagen wir: die Farben rot und blau).
- Da das Gebiet 7 zu den Gebieten 18 und 19 benachbart ist, hat 7 dann die Farbe gelb.
- Da das Gebiet 22 ebenfalls zu den beiden Gebieten 18 und 19 benachbart ist, hat 22 dann ebenfalls die Farbe gelb.
- Da die beiden Gebiete 11 und 17 zueinander und auch zum gelben Gebiet 22 benachbart sind, muss eines dieser beiden Gebiete rot und das andere blau sein.

Das Gebiet 6 ist zum Gebiet 7 (gelb) und zu den beiden Gebieten 11 und 17 (rot und blau) benachbart. Das ist aber ein Widerspruch, da nun für 6 keine legale Farbe übrig bleibt.

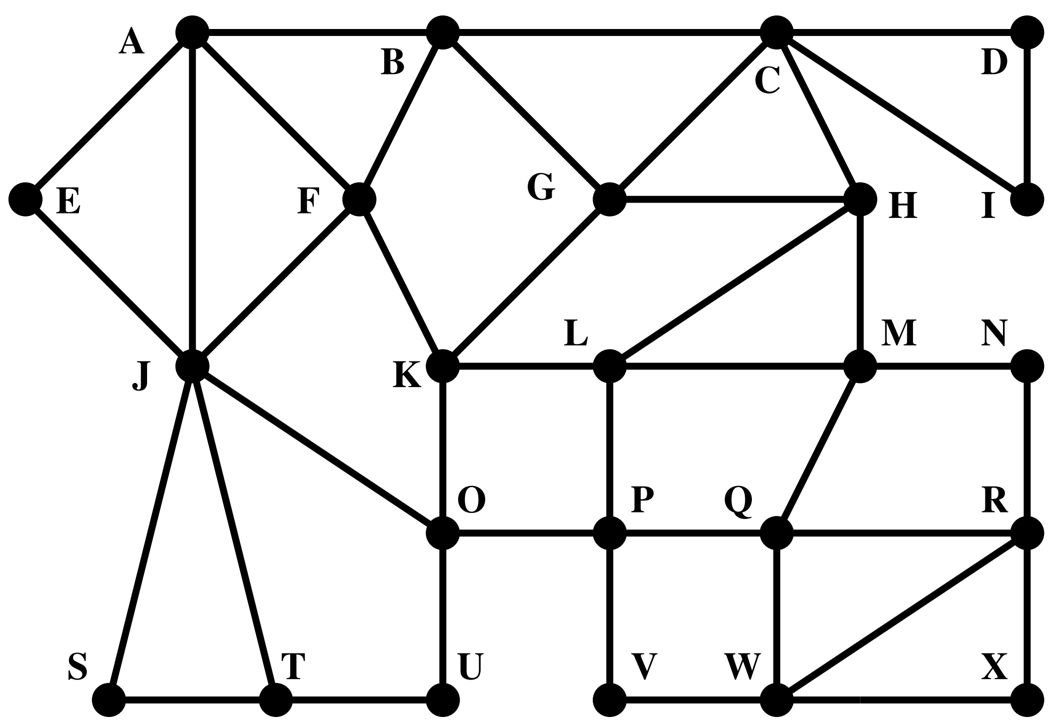
Wir wissen nun, dass eines der sieben Gebiete 6, 7, 11, 17, 18, 19 oder 22 schwarz gefärbt ist. Die Flächen dieser Gebiete betragen 4, 5, 6, 4, 4, 3 bzw. 6 Einheitsquadrate. Da das schwarze Gebiet eine Fläche von 5 Einheitsquadraten besitzt, hat Mondrian das **Gebiet 7** schwarz ausgemalt.

24 Nachtwache

Autor: Frits Spieksma (TU Eindhoven)

24.1 Aufgabe

Der Nachtwächterwichtel Wachfried berichtet: „Heute Nacht bin ich durch alle 41 Straßen im Wichteldorf patroulliert. Meine Patrouille begann am nördlichen Rand des Dorfes (in einem der vier Punkte A, B, C, D). Zwei Straßen habe ich fünfmal durchlaufen, eine Straße viermal, drei Straßen dreimal, eine Straße zweimal, und jede der restlichen vierunddreißig Straßen genau einmal. Zum Schluss war ich dann direkt vor meinem Haus angekommen."



Wie viele der vierundzwanzig Punkte $A, B, C, \ldots, X$ in der Abbildung kommen laut dieser Erzählung für Wachfrieds Haus in Frage?

Illustration: Frauke Jansen

Antwortmöglichkeiten:

1. Nur ein einziger Punkt.
2. Genau fünf Punkte.
3. Genau sechs Punkte.
4. Genau sieben Punkte.
5. Genau acht Punkte.
6. Genau neun Punkte.
7. Genau zehn Punkte.
8. Genau elf Punkte.
9. Genau zwölf Punkte.
10. Genau dreizehn Punkte.

24.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Wenn Wachfried eine Straße eine ungerade Anzahl von Malen durchläuft, so nennen wir diese Straße ungerade; andernfalls nennen wir sie gerade. Wenn an einem Punkt eine ungerade Anzahl von ungeraden Straßen anliegt, so nennen wir diesen Punkt ungerade.

Wichtige Beobachtung: Wenn ein ungerader Punkt existiert, dann muss Wachfried seine Patrouille in diesem Punkt entweder beginnen oder beenden. Und wenn so ein ungerader Punkt nicht einer der vier Punkte A, B, C, D ist, so muss Wachfried seine Patrouille in diesem ungeraden Punkt beenden und dort wohnen.

Laut Angabe gibt es in Wachfrieds Rundgang 39 ungerade und 2 gerade Straßen. Wir unterscheiden nun vier Fälle über die Position der beiden geraden Straßen:

1. Falls keine der drei Straßen TJ, TS, TU gerade ist, so ist T ein ungerader Punkt.

2. Falls TJ die einzige an J anliegende gerade Straße ist, so ist J ein ungerader Punkt.

   Falls TS die einzige an S anliegende gerade Straße ist, so ist S ein ungerader Punkt.

   Falls TU die einzige an U anliegende gerade Straße ist, so ist U ein ungerader Punkt.

3. Falls beide geraden Straßen an S anliegen, so ist J ein ungerader Punkt.

   Falls beide geraden Straßen an U anliegen, so ist O ein ungerader Punkt.

4. Wenn TJ eine gerade Straße ist und wenn auch die zweite gerade Straße an J anliegt, so ist A oder E oder F oder O oder S ein ungerader Punkt.

Im ersten Fall wohnt Wachfried gemäß unserer wichtigen Beobachtung im Punkt T. Man findet auch leicht eine Patrouille, die in A beginnt und in T

endet (und in der AB und BC die beiden geraden Straßen sind).

Im zweiten Fall wohnt Wachfried in einem der Punkte J, S, U. Man findet leicht eine Patrouille, die in B beginnt und in J oder S oder U endet (und in der BC die zweite gerade Straße ist).

Im dritten Fall wohnt Wachfried in J oder O. Man findet leicht eine Patrouille, die in C beginnt und in J oder O endet.

Der vierte Fall ist am interessantesten: Wenn in diesem Fall einer der Punkte E, F, O, S ungerade ist, so muss Wachfried gemäß unserer wichtigen Beobachtung in diesem ungeraden Punkt wohnen. Man findet dann auch leicht Patrouillen, die in C beginnen und im jeweiligen ungeraden Punkt enden.
Im allerletzten verbleibenden Unterfall sind TJ und JA die beiden geraden Straßen, wodurch A und C ungerade Punkte sind. Wachfried kann in diesem Unterfall seine Patrouille entweder in C (am nördlichen Dorfrand) beginnen und im Punkt A beenden, oder in A (am nördlichen Dorfrand) beginnen und im Punkt C beenden.

Zusammenfassend kommen genau die **neun Punkte** $A, C, E, F, J, O, S, T, U$ als Wachfrieds Wohnort in Frage.

Anmerkung: Der folgende Satz geht auf den Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) zurück:

> Wenn ein System von durchlaufenen Straßen zusammenhängt (das heißt: wenn jede Straße von jeder anderen Straße aus erreicht werden kann) und genau zwei ungerade Punkte enthält, dann gibt es eine Patrouille, die in dem einen ungeraden Punkt beginnt, die im anderen ungeraden Punkt endet und die alle Straßen im System genau einmal durchläuft.

Wenn wir mehrfach durchlaufende Straßen in unserem Problem jeweils als mehrere parallele einmal durchlaufende Straßen auffassen, liefert uns dieser Satz alle in der obigen Lösung benötigten Patrouillen. Die Wikipedia weiß dazu noch mehr zu sagen:

`https://de.wikipedia.org/wiki/Eulerkreisproblem`