Aufgaben und Lösungen 2017

MATHEON KALENDER

4TU.AMI

Inhaltsverzeichnis

1 Ein Bug am Nordpol

Autor: Christian Hercher (Europa-Universität Flensburg)

1.1 Aufgabe

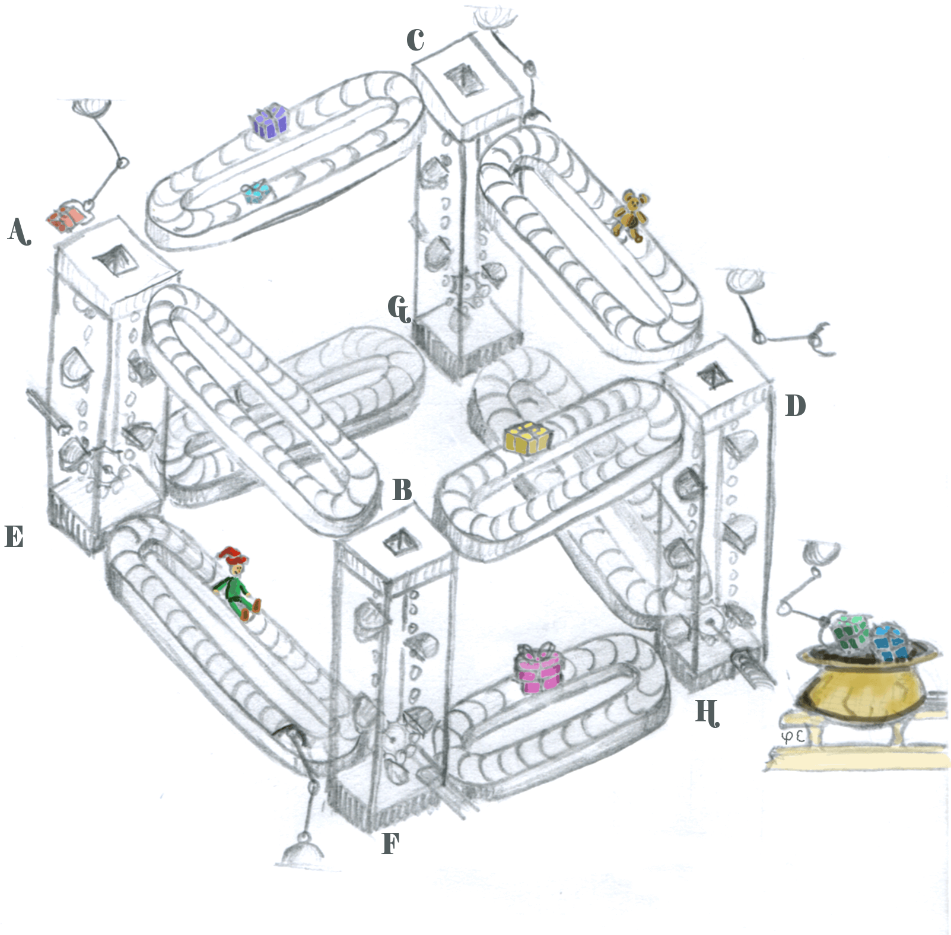
„Na, was ist denn hier los?!“ Wichtel Willi, der in der Geschenke-Fabrik die Herstellung, Verpackung und Lieferung (bis zum Schlitten) überwacht, stellt fest, dass sich das Förderband-System nicht so verhält, wie es sollte. „Das muss wohl ein Bug sein, ein Fehler in der Programmierung.“

Bevor aus der Produktion die Geschenke in den Sack auf dem Schlitten gelangen, damit sie der Weihnachtsmann dann den braven Kindern zukommen lassen kann, müssen sie erst einmal dorthin transportiert werden. Dafür gibt es ein ausgeklügeltes – und eigentlich perfekt funktionierendes – System von Förderbändern. Dabei kommen die Geschenke in Punkt A von den fleißigen Wichteln, die sie herstellen, an und werden schließlich am Punkt H in den Schlitten verladen. Dabei verbinden die Förderbänder genau die folgenden Punkte: A mit B, A mit C, B mit D, C mit D, A mit E, B mit F, C mit G, D mit H, E mit F, E mit G, F mit H und G mit H. (Die Förderband-Transportanlage ist in der untenstehenden Zeichnung skizziert.)

Um von A nach H zu kommen, können die Geschenke auf den Förderbändern von einem Punkt zum nächsten fahren. Jede solche Fahrt von einem Punkt zum nächsten dauert 1 Minute. Dort angekommen, werden die Geschenke automatisch und ohne zeitliche Verzögerung auf das nächste Förderband verladen, und die Reise geht weiter. (Dabei können die Förderbänder prinzipiell in beide Richtungen benutzt werden, d.h., man kann von A nach B gelangen, aber auch von B direkt wieder zurück zu A.) Eigentlich sollte das automatische Umladen so funktionieren, dass jedes Geschenk in kürzester Zeit sein Ziel im Punkt H erreicht.

Doch etwas läuft gerade völlig schief: Anstatt die Geschenke auf einer optimalen Route durch das Förderbandsystem zu schicken, funktionieren die Umsetzer an den Punkten A bis H nicht mehr: Kommt dort ein Geschenk an, so wird dieses im nächsten Takt *zufällig* – genauer: mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit – auf eines der Förderbänder, die von diesem Punkt ausgehen, gesetzt und auf die weitere Reise geschickt. Teilweise werden sie sogar dorthin zurückgesandt, wo sie eben herkamen. Selbst in Punkt H wird das Geschenk nicht mehr vom Förderband genommen und in den Schlitten verladen, sondern wird weiter nach dem oben beschriebenen Prinzip durch die Anlage geschickt. Zum Glück konnte Willi das Auftreten der Fehlfunktion recht schnell entdecken: Nur 5 Minuten nach dem Einsetzen dieser Fehlfunktion fällt diese ihm auf, er betätigt den roten Knopf und alles steht still. Doch wo ist nun das Geschenk, das zeitgleich mit dem Einsetzen der Störung in Punkt A seine Reise begann? Genauer fragt Willi sich, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das Geschenk glücklicherweise doch gerade an Punkt H befindet und nun einfach in den Schlitten geladen werden kann?

Zusatzfrage (außerhalb der Wertung): Wie würde sich das Ergebnis verändern, wenn Willi die Störung erst eine, zwei oder vier Minuten später festgestellt hätte?



Antwortmöglichkeiten:

1. 0
2. 1/8
3. 1/4
4. 1/243
5. 2/81

6. 1/2
7. 2/9
8. 20/81
9. 32/81
10. 1

1.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Wir fassen je vier Förderbänder zusammen, in dem wir sagen, sie verlaufen in der gleichen Richtung:

x-Richtung: A-B, C-D, E-F, G-H,
y-Richtung: A-C, B-D, E-G, F-H und
z-Richtung: A-E, B-F, C-G, D-H.

In jedem Punkt gibt es genau ein anliegendes Förderband pro Richtung (siehe Skizze). Jede Fahrt lässt sich also nicht nur durch die Reihenfolge der Punkte, die unterwegs erreicht werden, beschreiben, sondern auch allein durch die Angabe der Richtung, in der es jeweils weiter geht. Umgekehrt entspricht auch jede Folge solcher Richtungsangaben einer möglichen Fahrtroute. Nun stellt man fest, dass man, wenn man von A nach H gelangen will, jede Richtung mindestens einmal, konkreter: ungeradzahlig oft benutzen muss. Unser Problem entspricht also der Fragestellung, wie viele mögliche Folgen der Länge fünf es gibt, in der an jeder Stelle einer der drei Buchstaben (= Richtungen) x, y oder z stehen kann; und wie viele davon jeden dieser Buchstaben ungeradzahlig oft enthalten.

Die erste Frage ist leicht beantwortet: An jeder der fünf Stellen gibt es drei mögliche Bewegungsrichtungen des Pakets. Das macht also $3^5 = 243$ mögliche Folgen. Auch die zweite Frage ist nicht schwer zu beantworten: Offenbar ist es bei fünf Positionen nur dann möglich, dass jede Richtung ungeradzahlig oft vorkommt, wenn eine Richtung genau dreimal verwendet wird und die anderen beiden je genau einmal. Für die Auswahl der dreifach verwendeten Richtung gibt es drei Möglichkeiten. Die beiden einzelnen stehen dann fest. Für die erste der beiden gibt es nun fünf verschiedene Positionen in der Folge, für die zweite dann noch vier. Zusammen ergeben sich also $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ mögliche solche Routen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$\frac{60}{243} = \frac{20}{81}.$$

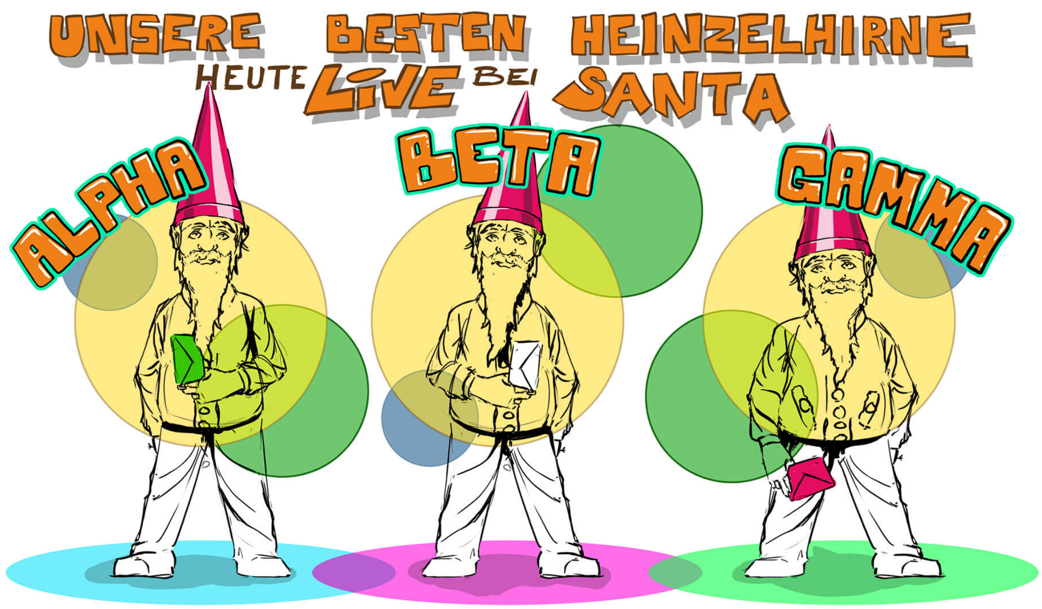
Bemerkung: Mit dieser Modellierung ist auch die Zusatzfrage zu beantworten. Nach einer weiteren Minute kann das Paket gar nicht in H sein, nach zwei bzw. vier weiteren schon, wobei die Wahrscheinlichkeiten nach einem ähnlichen Vorgehen ermittelt werden können. Einfach mal ausprobieren!

2 Zauberkarte

Autor: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)
Übersetzung: Gabriele Neumann (HU Berlin)

2.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann überreicht jedem der drei überaus klugen Elfen Alpha, Beta und Gamma einen Umschlag und sagt ihnen: "*In jedem dieser drei Umschläge befindet sich jeweils eines der drei Symbole von genau einer der Karten K1, K2, . . . , K10, die ihr auf dem Tisch liegen seht. Bitte öffnet euren Umschlag, schaut auf euer Symbol, aber zeigt es nicht euren Freunden!*"



K1:	$\triangle$	$\oplus$	$\leftrightarrow$
K2:	$\bowtie$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$
K3:	∞	$\bowtie$	$\times$
K4:	$\leftrightarrow$	$\heartsuit$	$\#$
K5:	$\spadesuit$	$\bowtie$	$\oplus$
K6:	$\equiv$	$\bigstar$	$\$$
K7:	$\bigstar$	$\square$	$\approx$
K8:	$\div$	$\triangle$	$\bowtie$
K9:	$\heartsuit$	∞	$\approx$
K10:	$\bigstar$	$\Rightarrow$	$\heartsuit$

Alpha, Beta und Gamma öffnen ihre Umschläge und schauen sich jeweils ihr eigenes Symbol an. Alpha sagt: *"Ich weiß schon, welche Karte unsere Symbole zeigt."* Dann sagt Beta: *"Ich kenne die Karte auch schon!"* Und schließlich sagt Gamma: *"Jetzt weiß ich auch, welche Karte es ist!"*

Und du? Kennst du jetzt auch die richtige Karte?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es ist Karte K1.
2. Es ist Karte K2.
3. Es ist Karte K3.
4. Es ist Karte K4.
5. Es ist Karte K5.
6. Es ist Karte K6.
7. Es ist Karte K7.
8. Es ist Karte K8.
9. Es ist Karte K9.
10. Es ist Karte K10.

2.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 4.

Die Schlußfolgerungen aus Alphas Aussage: Die acht Symbole $\triangle$, $\oplus$, $\leftrightarrow$, $\bowtie$, ∞, $\heartsuit$, $\bigstar$, $\approx$ kommen alle auf mindestens zwei unterschiedlichen Karten vor, also könnte Alpha niemals durch eines dieser Symbole die geheime Karte erkennen. Folglich muss Alphas Symbol eines der zehn Zeichen $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\times$, $\#$, $\spadesuit$, $\equiv$, **\$**, $\square$, $\div$, $\Rightarrow$ sein, die alle stets nur einmal auf den Karten vorkommen. Die zwei Karten K1 mit $\boxed{\triangle \oplus \leftrightarrow}$ und K9 mit $\boxed{\heartsuit \infty \approx}$ enthalten keine nur einmal vorkommenden Symbole. Somit ist keine dieser beiden die gesuchte Karte.

Schlussfolgerungen aus Betas Aussage: Beta weiß nun auch, dass Alphas Zeichen nur einmal vorkommen kann. Beta weiß auch, dass weder K1 noch K9 die gesuchte Karte ist, da dort überhaupt keine Einzelzeichen vorkommen.
Falls Betas Karte auch ein Einzelzeichen zeigt, müsste die gesuchte Karte gleich zwei solcher Einzelzeichen enthalten. Davon gibt es nur zwei Karten:

- K2 mit $\boxed{\bowtie \clubsuit \diamondsuit}$ und Gamma hätte dann $\bowtie$
- K6 mit $\boxed{\equiv \bigstar \$}$ und Gamma hätte dann $\bigstar$

Falls Betas Symbol jedoch kein Einzelzeichen ist, kann Betas Zeichen sich nur noch auf den acht verbleibenden Karten K2, K3, K4, K5, K6, K7, K8, K10 befinden.

Davon sind jedoch nur fünf Karten möglich:

- K3 mit $\boxed{\infty \bowtie \times}$, dann hätte Beta ∞ und Gamma hätte dann $\bowtie$
- K4 mit $\boxed{\leftrightarrow \heartsuit \#}$, dann hätte Beta $\leftrightarrow$ und Gamma hätte dann $\heartsuit$
- K5 mit $\boxed{\spadesuit \bowtie \oplus}$, dann hätte Beta $\oplus$ und Gamma hätte dann $\bowtie$
- K7 mit $\boxed{\bigstar \square \approx}$, dann hätte Beta $\approx$ und Gamma hätte dann $\bigstar$
- K8 mit $\boxed{\div \triangle \bowtie}$, dann hätte Beta $\triangle$ und Gamma hätte dann $\bowtie$

K10 mit $\boxed{\bigstar \Rightarrow \heartsuit}$ ist dabei kein möglicher Kandidat mehr für die gesuchte Karte, da Gammas Entscheidung dann nicht eindeutig wäre.

Schlußfolgerungen aus Gammas Aussage: Nach Betas Äußerung weiß Gamma ebenfalls, dass nur die sieben Karten K2, K3, K4, K5, K6, K7, K8 übrig geblieben sind. Gamma kann unmöglich das Symbol $\bowtie$ haben, denn sonst blieben noch die Karten K2, K3, K5 and K8 als nicht eindeutige Kandidaten. Gamma kann auch unmöglich das Symbol $\bigstar$ haben, denn dann blieben die beiden Karten K6 und K7 zur Auswahl. Daher muss Gamma das Zeichen $\heartsuit$ gehabt haben.

Zusammengefasst bleibt die Karte K4 mit $\boxed{\leftrightarrow\ \heartsuit\ \#}$ als einzige Möglichkeit. Alpha hat dann $\#$ und Beta hat das Zeichen $\leftrightarrow$.

3 Der Spiegelsee

Autoren: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)
Übersetzung: Falk Ebert (HU Berlin)

3.1 Aufgabe

An einem wunderschönen, kreisrunden See, der wegen seines ruhigen, klaren Wassers auch Spiegelsee genannt wird, liegen im Uhrzeigersinn die folgenden 5 Punkte: Anlegestelle, Birkenwäldchen, Campingplatz, Dörfchen und Erlenwäldchen. Dabei liegen sich das Birken- und Erlenwäldchen direkt gegenüber auf verschiedenen Seiten des Sees. Seit letzter Woche ist der See komplett zugefroren und mittlerweile auch sicher begehbar. Das hat Weihnachtswichtel Penelope zum Anlass genommen und gestern ihre erste Schlittschuhtour auf dem See unternommen.

Sie startete an der Anlegestelle und fuhr direkt zum 1922 Meter entfernten Birkenwäldchen. Dann fuhr sie $1798\,m$ weiter zum Campingplatz und dann wieder $1798\,m$ weiter zum Dörfchen. Anschließend fuhr sie $2162\,m$ bis zum Erlenwäldchen und zuletzt zurück zur Anlegestelle – alle Etappen entlang gerader Linien über den See.

Bevor jemand fragt: Ja, sowohl das Dörfchen als auch der Campingplatz und die Wäldchen können als punktförmig angenommen werden.

Frage: Welches ist die zweite Nachkommastelle des Abstands vom Anleger zum Erlenwäldchen (in Metern)?

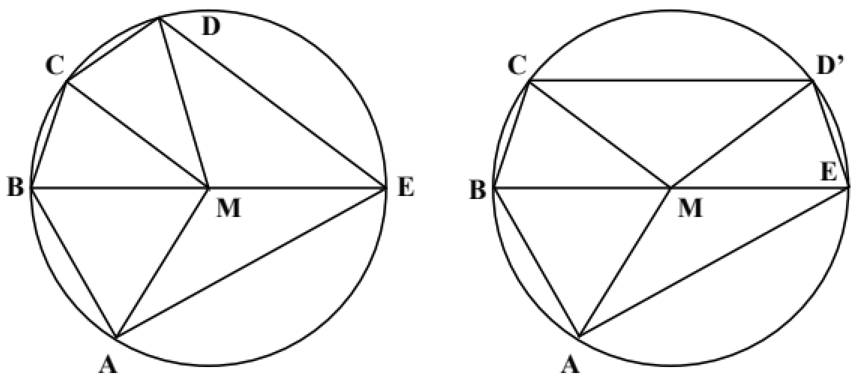
Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

3.2 Lösung

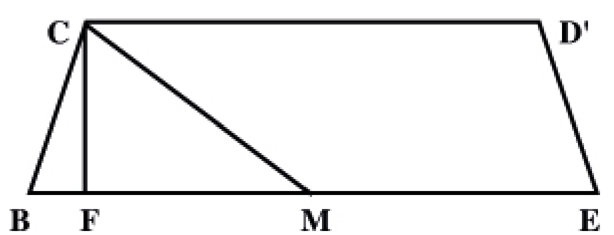
Die richtige Antwort ist: 10.

Zur Vereinfachung werden die Punkte um den See mit ihren Anfangsbuchstaben A,B,C,D,E und der Mittelpunkt des Sees mit M bezeichnet (Bild links). Weiterhin wurden die Streckenabschnitte $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$ in ihrer Reihenfolge vertauscht (Bild rechts).



Da die Strecken $\overline{BC}$ and $\overline{CD}$ im linken Bild gleich lang sind, bilden nach der Umordnung der Streckenabschnitte die 4 Punkte $BCD'E$ im rechten Bild ein Trapez mit den Streckenlängen $|\overline{BC}| = |\overline{D'E}| = 1798$ and $|\overline{CD'}| = 2162$. Weiterhin sei, $|\overline{MB}| = |\overline{MC}| = |\overline{MD'}| = |\overline{ME}| = r$ der Radius des kreisrunden Sees.

Wir betrachten das Trapez $BCD'E$ etwas genauer. Sei F der Fußpunkt des Lots von C aus auf die Grundseite $\overline{BE}$ des Trapezes.



Dann gilt $|\overline{FM}| = \frac{|\overline{CD'}|}{2} = 1081$. In dem Dreieck ΔMCF gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$|\overline{CF}|^2 \ = \ |\overline{MC}|^2 - |\overline{FM}|^2 \ = \ r^2 - 1081^2.$$

Im Dreieck ΔBFC liefert Pythagoras

$$|\overline{CF}|^2 \ = \ |\overline{BC}|^2 - |\overline{BF}|^2 \ = \ |\overline{BC}|^2 - (|\overline{BM}| - |\overline{FM}|)^2 \ = \ 1798^2 - (r - 1081)^2.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für $|\overline{CF}|^2$ gleich, erhält man

$$0 \ = \ 2r^2 - 2 \cdot 1081r - 1798^2 \ = \ 2(r + 841)(r - 1922).$$

Folglich ist der Radius des Kreises $r = 1922$.

Damit können wir zum Ausgangsproblem zurückkehren. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ΔABE rechtwinklig, da seine Hypotenuse ein Kreisdurchmesser ist. Also ist $|\overline{BE}| = 2r$. Wie in der Aufgabenstellung gegeben, hat die eine Kathete die Länge $|\overline{AB}| = 1922 = r$. Folglich ist nach dem Satz des Pythagoras $|\overline{AE}| = r \cdot \sqrt{3} \approx 3329.00165$. Demnach ist Antwort **10** (0) richtig.

Alternative: Ist $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Seitenlängen $|\overline{AB}| = a$, $|\overline{BC}| = b$ and $|\overline{CD}| = c$ und Umkreisradius r wobei $\overline{DA}$ ein Durchmesser des Umkreises ist, dann gilt $4r^3 - (a^2 + b^2 + c^2)r - abc = 0$. Mit $a = b = 1798$ und $c = 2162$ liefert diese Gleichung sofort $r = 1922$.

4 Hyperinflation am Weihnachtsabend

Autor: Ernst van de Kerkhof
Übersetzung: Gabriele Neumann (HU Berlin), Clara Jansen (MATHEON)

4.1 Aufgabe

Weihnachten steht vor der Tür und wie in jedem Jahr scheuen der Weihnachtsmann und seine Wichtelbelegschaft keine Mühen, um die termingerechte Lieferung der Weihnachtsgeschenke für die braven Kinder überall auf der Welt zu garantieren. Wie Ihr Euch sicher vorstellen könnt, ist dies eine gewaltige logistische und finanzielle Herausforderung. Doch, was viele von Euch nicht wissen: der Weihnachtsmann ist nicht nur ein großer Kinderfreund, nein, er ist auch ein gewiefter Geschäftsmann, stets auf der Suche nach Steuervergünstigungen. In seinem Auftrag kümmern sich daher die Buchhaltungswichtel, die alle ihre Aufgabe sehr, sehr ernst nehmen, um die Verbuchung der Geschenkkäufe. Die Ausgaben für die Geschenke sind nämlich steuerlich absetzbar, daher werden sie registriert und umgehend dem Grönländischen Finanzamt gemeldet. Angesichts der riesigen Zahl an Geschenken, gibt es insgesamt 9 solcher „Wiwi“-Abteilungen, um diese gigantische Aufgabe zu bewältigen. („Wiwis“ steht übrigens offiziell für „Wirtschaftswichtel“, was mitunter einige der anderen Wichtel abfällig als „Wichtigwichtel“ übersetzen.)

- Abteilung A_1 kümmert sich dabei um alle Geschenke, deren Preis mit der Ziffer 1 anfangen,

- Abteilung A_2 kümmert sich um alle Geschenke, deren Preis mit der Ziffer 2 anfangen,
- etc.

Also wird ein Geschenk, das 122 Grönländische Kronen kostet, von der Abteilung A_1 bearbeitet, wohingegen ein Geschenk mit einem Einkaufspreis von 389 Kronen von Abteilung A_3 verbucht wird und ein anderes von 95 Kronen natürlich von A_9. Auf diese Weise versuchen die Wiwis, die Arbeit möglichst gerecht und nachvollziehbar auf die 9 Abteilungen zu verteilen. Übrigens wird keine Abteilung A_0 benötigt, da alle Geschenke mindestens eine Grönländische Krone kosten.)

Eine Woche vor Weihnachten wird die endgültige Einkaufsliste den neun Abteilungen ausgehändigt. Damit kennen nun die jeweiligen Personalchefs die Menge der zu bearbeitenden Buchungen und damit die benötigte genaue Mitarbeiterzahl. Eventuelle Urlaubsanträge der Mitarbeiter können damit nun endlich entschieden werden.
Doch, welch' ein ein Schicksalsschlag! Einige Tage später entscheidet sich nämlich die Grönländische Regierung nach einem ernsten Börsencrash für eine drastische Abwertung der heimischen Währung. Hyperinflation! Die Grönländische Krone hat nunmehr nur noch die Hälfte ihres ursprünglichen Wertes. Da der Weihnachtsmann die Geschenke im Ausland kauft (die meisten übrigens in sehr bekannten Online-Geschäften...), haben sich nun alle Einkaufspreise der Geschenke auf einen Schlag verdoppelt!

Wie Ihr Euch vorstellen könnt, löst dies eine kolossale Panik in der Wichtelwirtschaftsabteilung aus! Alle Geschenkelisten sind nun durcheinander und müssen neuen Abteilungen zugeordnet werden. Die Abteilungsleiter rufen ihre Mitarbeiter aus dem Urlaub zurück, man ist auf das Schlimmste gefasst. Als sich endlich nach und nach der Nebel lichtet und alle etwas klarer sehen, kristallisiert sich langsam, aber sicher die wundersame Tatsache heraus, dass die Anzahl der zu bearbeitenden Geschenke exakt die gleiche geblieben ist und zwar für alle Abteilungen! Da die zu bearbeitenden Stapel nun doch jeweils gleich groß geblieben sind, stimmen auch nach Umverteilung der Kauflisten die Personalberechnungen und es muss keiner der „Wiwis“ aus seinem wohlverdienten Urlaub geholt werden.

Sei nun N die Gesamtzahl der Geschenke und $n_1, n_2, \ldots, n_9$ jeweils die Anzahl der zu verbuchenden Geschenkkäufe der Abteilungen $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Dann ist

$N = \sum_{i=1}^{9} n_i$.

Wenn nach Voraussetzung die n_i ($i = 1,2,\ldots,9$) auch nach der oben beschriebenen Transformation konstant bleiben, **welche der folgenden Aussagen ist dann in jedem Fall immer eine wahre Aussage**?

Antwortmöglichkeiten:

1. $n_1 + n_2 + n_3 > n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9$
2. $n_2 \geq n_3$
3. $n_1 n_6 \geq n_2 n_3$
4. $n_3 \leq n_2 + n_4 + n_6 + n_8$
5. $\frac{1}{4}N \leq n_1 \leq \frac{1}{3}N$
6. $N \neq 3k + 2$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$
7. $\lfloor \frac{1}{9}N \rfloor \leq n_5 \leq \lceil \frac{1}{9}N \rceil$
8. $n_8 \geq n_9$

9. $\frac{1}{3}N \leq n_1 + n_2 \leq \frac{1}{2}N$

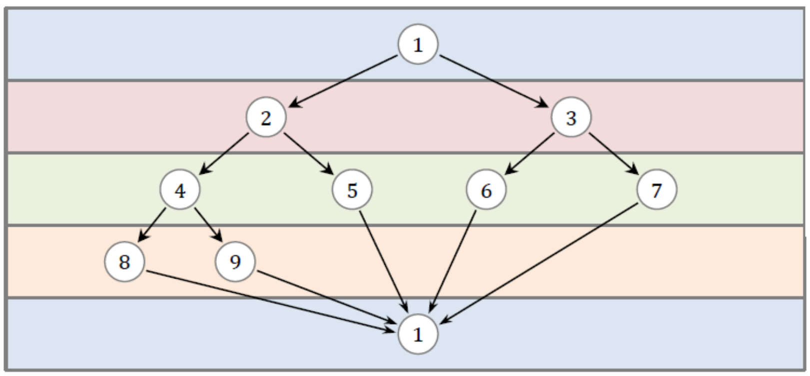
10. $n_9 \leq \lceil \frac{1}{9}N \rceil$

Hinweis: Die Abrundungsfunktion $\lfloor \cdot \rfloor$ ist die Funktion, die einer reellen Zahl x die größte ganze Zahl $\lfloor x \rfloor$ kleiner oder gleich x zuordnet. Analog ordnet die Aufrundungsfunktion $\lceil \cdot \rceil$ einer reellen x die kleinste ganze Zahl $\lceil x \rceil$ zu, die größer oder gleich x ist.

4.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Der folgende Graph zeigt jeweils den Übergang der führenden Ziffern der möglichen Preisangaben (≥ 1), die als Zahlen im Dezimalsystem dargestellt werden, und zwar nachdem sie mit 2 multipliziert wurden.



Betrachtet man nun die gegebene Menge von Zahlen, also alle Preise der Geschenke, und setzt voraus, dass die Anzahl der Elemente ihrer je nach führenden Ziffern gebildeten Teilmengen gleich bleiben (d.h. alle n_i ($i = 1,2,\ldots,9$ sollen unverändert bleiben), kann man folgende Gleichungen aus dem obigen Graphen ablesen:

$$n_1 = n_2 + n_3 \tag{1}$$
$$n_2 = n_4 + n_5 \tag{2}$$
$$n_3 = n_6 + n_7 \tag{3}$$
$$n_4 = n_8 + n_9 \tag{4}$$
$$n_1 = n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 \tag{5}$$

(Gleichung (5) kann aus dem Graphen abgelesen werden, sie kann jedoch auch aus den ersten vier Gleichungen abgeleitet werden.)

Die Addition von Gleichung (1) und (5) führt dann zu:

$$2n_1 = n_2 + n_3 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 = N - (n_1 + n_4) \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = \frac{N - n_4}{3}. \tag{6}$$

Daraus folgt, dass $n_1 \leq \frac{1}{3}N$, wobei Gleichheit im Falle $n_4 = 0$ eintritt.

Darüber hinaus kann durch Einsetzen der Gleichungen (2) und (3) in Gleichung (1) gezeigt werden, dass

$$n_1 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7.$$

Für den Fall, dass $n_5 = n_6 = n_7 = 0$, ist auch $n_1 = n_4$ und dann lässt sich aus Gleichung (6) folgern, dass $n_1 = \frac{1}{4}N$. Insgesamt liegt somit n_1 in dem Bereich:

$$\frac{1}{4}N \leq n_1 \leq \frac{1}{3}N.$$

Alles in allem ist daher Nummer **5** die richtige Antwort.

Wir geben hier zum Abschluss noch die Auswertungen der übrigen Aussagen:

1. $n_1 + n_2 + n_3 > n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9$:

   Diese Aussage ist fast immer richtig, allerdings nicht für den Fall $n_5 = n_6 = n_7 = 0$, denn dann würde Gleichheit gelten, also $n_1+n_2+n_3 = n_4+n_8+n_9$.

2. $n_2 \geq n_3$:

   Diese Aussage ist falsch. Man weiß nur, dass $n_1 = n_2 + n_3$; dies führt zu keiner allgemeinen Aussage über die Größerrelation zwischen n_2 and n_3.

3. $n_1 n_6 \geq n_2 n_3$:

   Auch diese Aussage ist falsch, denn n_6 könnte null sein, aber n_2 oder n_3 müssen nicht ebenfalls null sein.

4. $n_3 \leq n_2 + n_4 + n_6 + n_8$:

   Diese Aussage ist falsch. Betrachten wir den Fall $n_2 = n_4 = n_8 = 0$ und $n_7 \neq 0$. Dann wäre $n_3 \geq n_6$.

5. $\frac{1}{4}N \leq n_1 \leq \frac{1}{3}N$:

   Diese Aussage ist, wie oben schon gezeigt, immer wahr.

6. $N \neq 3k + 2$ für alle ganze Zahlen $k \geq 0$:

   Diese Aussage ist wahr für $k = 0$ und $k = 1$, aber falsch für alle $k \geq 2$.

7. $\lfloor \frac{1}{9}N \rfloor \leq n_5 \leq \lceil \frac{1}{9}N \rceil$:

   Dies unterstellt, dass der in der Mitte der neun Werte stehende Wert (der Median) die gleiche durchschnittliche Häufigkeit wie alle anderen Werte habe, was im Allgemeinen falsch ist.

8. $n_8 \geq n_9$:

   Die Aussage ist falsch, denn auch hier kann aus der Gleichung $n_4 = n_8 + n_9$ wieder nicht auf eine Größerrelation zwischen n_8 und n_9 geschlossen werden.

9. $\frac{1}{3}N \leq n_1 + n_2 \leq \frac{1}{2}N$:

   Dies ist wieder falsch, denn n_1 und n_2 könnten beide gleich $\frac{1}{3}N$ sein in dem Fall, dass $n_3 = n_4 = 0$ ist.

10. $n_9 \leq \lceil \frac{1}{9}N \rceil$:

    Dies ist wieder falsch, falls der Fall $n_5 = n_6 = n_7 = n_8$ eintritt. Dann ist $n_9 = \frac{1}{4}N$.

Anwendungsbezug:

Die Aufgabe ist eine Veranschaulichung des *Benford'schen Gesetzes*, welches Gesetzmäßigkeiten bei der Verteilung der Ziffern von 1 bis 9 als führende Ziffern bei Zahlen aus zufälligen Datensätzen beschreibt. (Die Zufälligkeit wird in dieser Aufgabe annähernd durch die Stabilität der Mengengrößen auch nach der gegebenen Transformation, also der Multiplikation mit der Zahl 2, widergespiegelt.)

Nach dem Benford'schen Gesetz ist theoretisch der Anteil von Zufallszahlen mit einer führenden Ziffer 1 gleich dem Wert 0,301, welcher durch das hier in der Aufgabe ermittelte Intervall von $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ in der Tat recht gut genähert wird.

5 Ein Flugzeug zu Weihnachten

Autoren: Jo Andrea Brueggemann (WIAS), Jonas Holley (WIAS), Tobias Keil (WIAS)
Projekt: SE5 – *Optimal design and control of optofluidic solar steerers and concentrators*

5.1 Aufgabe

„Nur noch 24 Tage bis Weihnachten!“, denkt sich der Weihnachtsmann, und nichts ist geklärt. Gar nichts. „Dieses Jahr läuft auch einfach alles schief“, murmelt er missgelaunt vor sich hin. Sogar auf die Rentiere ist kein Verlass, seit das Oberrentier Rudolf von Arthritis in den Knien geplagt wird.

Da kommt dem verzweifelten Weihnachtsmann nur gelegen, dass die Fluglinie *Air Berolina* so kurz vor Weihnachten Insolvenz beantragt hat. Zumal die Flugzeuge der Flotte bereits kürzlich ganz im Sinne der Nachhaltigkeit modernisiert wurden: Der Weihnachtsmann wittert seine Chance, denn immerhin lässt sich mit seinen hauseigenen Bioabfällen und denen der Wichtel mit dem *Fischer-Tropsch-Verfahren* hervorragendes Biokerosin herstellen.

Der Weihnachtsmann überlegt kurz, telefoniert mit dem Packwichtel und dann mit *Air Berolina*: Genau 22 Tage hat er Zeit, bis dahin muss er sein Flugzeug „Santa Air“ gekauft haben, damit er am 23. Dezember die Geschenke in den Laderaum verfrachten und losfliegen kann.

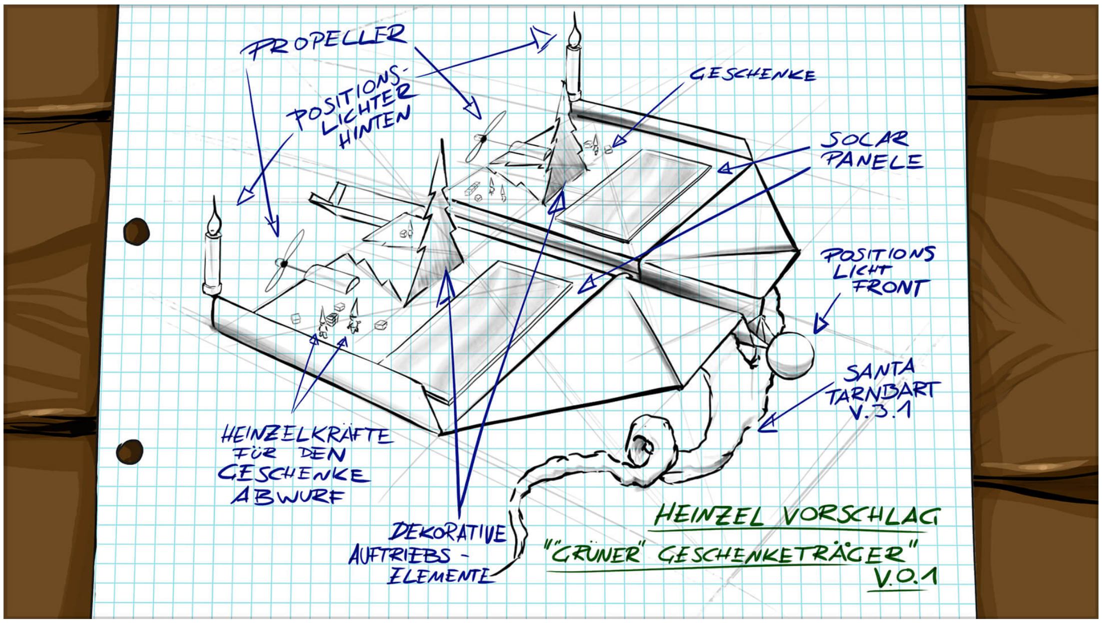
Nun hat *Air Berolina* genau 22 Frachtflugzeuge, die alle mit Biokerosin fliegen und sich alle ausschließlich in der Größe ihres Ladevolumens unterscheiden. Da der Weihnachtsmann nunmal der Weihnachtsmann ist, hat die Fluglinie ein ganz besonderes Angebot für ihn:
Jeden Tag vom 1. bis zum 22. Dezember wird dem Weihnachtsmann ein Flugzeug angeboten, immer zu demselben Preis, aber immer unterschiedlich in seinem Ladevolumen. Welches das maximale Ladevolumen der 22 Flugzeuge ist, verrät *Air Berolina* aber nicht. Das Angebot für zum Kauf gilt immer nur für deb jeweiligen Tag und verfällt am nächsten Tag.

Da der Weihnachtsmann sich nur ein einziges Flugzeug leisten kann, möchte er nur das beste Angebot auswählen – also genau das Flugzeug mit dem größten Ladevolumen – denn wenn nicht alle Geschenke hinein passen, hat er auch nichts gewonnen.

Der Weihnachtsmann weiß keinen Rat, aber das erfahrene Oberrentier Rudolf, ein gewitzter Stratege, schlägt vor, die ersten 8 Tage abzuwarten und sich das Flugzeug mit der größten Ladefläche zu merken. Nach dem 8. Tag, so rät Rudolf, solle der Weihnachtsmann einfach das nächste Flugzeug nehmen, das eine noch größere Ladefläche hat als dieses (also eine größere Ladefläche als jedes der Flugzeuge der ersten 8 Tage).

Der Weihnachtsmann ist verwirrt und fragt: „Angenommen, ich wende deine Strategie an und bekomme tatsächlich 22 unabhängige Angebote, und schlage davon die ersten 8 Angebote aus, und ab dem 9. Dezember nehme ich das nächste bessere Angebot an, genauso, wie Du vorschlägst. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwische ich dann mit dieser Strategie tatsächlich das Flugzeug mit der insgesamt größten Ladefläche?“

Welche der folgenden Antwortmöglichkeiten kommt dieser Wahrscheinlichkeit am nächsten?



Antwortmöglichkeiten:

1. 100%
2. 9%
3. 51%
4. $\frac{1400}{22}$%
5. 33,$\bar{3}$%
6. $\frac{1}{22}$%
7. $\frac{800}{22}$%
8. 42%
9. 38%
10. $\frac{100}{22}$%

Projektbezug:

Probleme der optimalen Strategie treten in vergleichbarer Weise in der Spieltheorie, z.B. bei Gleichgewichtsproblemen, auf, finden allgemein jedoch auch Anwendung bei Problemen der Optimierung oder Steuerung von physikalischen oder biomedizinischen Prozessen.

5.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Um die Erfolgswahrscheinlichkeit der von Rudolf vorgeschlagenen Strategie zu berechnen, wird das Flugzeug mit der maximalen Ladekapazität betrachtet und der Tag, an dem es angeboten wird, mit a bezeichnet. Da der Weihnachtsmann keine Informationen bekommt, wann das beste Flugzeug angeboten wird, ist für a jede Zahl (bzw. jeder Tag) zwischen 1 und 22 gleich wahrscheinlich.
Befindet sich das beste Flugzeug unter den ersten 8 angebotenen Flugzeugen ($a \leq 8$), scheitert die Strategie, da die ersten 8 Angebote abgelehnt werden. Wir betrachten daher nun den Fall, dass das beste Flugzeug erst ab dem 9. Tag angeboten wird ($a \geq 9$).
Entscheidend für den Erfolg der Strategie ist nun der Tag, an dem das Zweitbeste unter den ersten a Flugzeugen angeboten wird. Hierfür gibt es zwei Fälle:

1. Ist das zweitbeste Flugzeug nicht unter den ersten 8 Angeboten (und es wird ja per Definition vor dem insgesamt besten Flugzeug, also innerhalb der ersten $a-1$ Tage, angeboten) scheitert die Strategie, da in diesem Fall das zweitbeste Flugzeug zwischen dem 9. und $(a-1)$-ten Tag angeboten wird und der Weihnachtsmann in diesem Fall definitiv nicht das beste Flugzeug kaufen würde.

2. Es bleibt der Fall, in dem das Zweitbeste unter den ersten a Flugzeugen in den ersten 8 Tagen angeboten wird. In diesem Fall merkt sich der Weihnachtsmann das Beste unter den ersten $(a-1)$-Tagen und wählt somit nach den 8 Tagen tatsächlich das a-te Flugzeug. Da dieses das gesamt beste Flugzeug ist, hat die Strategie in diesem Fall Erfolg.

Insgesamt gibt es 8 zulässige Tage, an denen das Flugzeug angeboten wird unter einer Gesamtanzahl von $(a-1)$ möglichen Tagen. Die Wahrscheinlichkeit p_a, dass das zweitbeste Flugzeug in den ersten 8 Tagen angeboten wird, unter Annahme dass das beste Flugzeug am a-ten Tag geboten wird, ist daher $p_a = \frac{8}{a-1}$. Berücksichtigt man nun, dass das beste Flugzeug (im erfolgreichen Fall) zwischen dem 9. und 22. Tag angeboten wird und jeder Tag dafür gleich wahrscheinlich ist, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit P des Erfolgs von Rudolf's Strategie zu:

$$
\begin{aligned}
P_8 = \sum_{i=9}^{22} \frac{1}{22} \cdot p_i =& \frac{1}{22} \cdot p_9 + \frac{1}{22} \cdot p_{10} + ... + \frac{1}{22} \cdot p_{22} \\
=& \frac{1}{22} \cdot \frac{8}{8} + \frac{1}{22} \cdot \frac{8}{9} + ... + \frac{1}{22} \cdot \frac{8}{21} \\
=& \frac{8}{22} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{21} \right) \\
=& 0{,}3827.
\end{aligned}
$$

Der Weihnachtsmann wählt also mit etwas mehr als 38 % das Flugzeug mit dem größten Ladevolumen aus.

In der Tat lässt sich zeigen, dass Rudolf offensichtlich ein ziemlich schlauer Kopf ist und dem Weihnachtsmann sogar zur optimalen Strategie – also derjenigen, die mit der höchsten Wahrscheinlichkeit dazu führt, dass der Weihnachtsmann das beste Flugzeug erwischt – geraten hat. Nehmen wir mal an, Rudolf hätte dem Weihnachtsmann gar nicht verraten, wieviele Tage er warten soll, um sich das beste Flugzeug daraus zu merken und der Weihnachtsmann würde vielleicht eine andere Anzahl r an Tagen warten. Dann können wir die Wahrscheinlichkeit P_r dafür, dass er das beste Flugzeug auswählt, mit Hilfe der obigen Formel (mit r anstatt 8) wie folgt ausrechnen:

$$
P_r = \sum_{i=r+1}^{22} \frac{1}{22} \cdot p_i = \sum_{i=r+1}^{22} \frac{1}{22} \cdot \frac{r}{i-1} = \frac{r}{22} \cdot \sum_{i=r}^{21} \frac{1}{i}.
$$

Die letzte Summe auf der rechten Seite der Gleichungskette kann man auch im Sinne einer Stufenfunktion für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ verstehen. Genauer gesagt, berechnet man damit den Flächeninhalt der Stufenfunktion mit der äquidistanten Stufenbreite 1 zu der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[r{,}22]$. Der Wert von $\sum_{i=r}^{21} \frac{1}{i}$ kann also durch das Integral von $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[r{,}22]$ approximiert werden, das sich wie folgt berechnet:

$$
\int_r^{22} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_r^{22} = \ln(22) - \ln(r) = \ln\left(\frac{22}{r}\right).
$$

Damit ergibt sich Näherungsweise für die Wahrscheinlichkeit P_r:

$$P_r = \frac{r}{22} \cdot \sum_{i=r}^{21} \frac{1}{i} \approx \frac{r}{22} \cdot \ln\left(\frac{22}{r}\right).$$

Wenn wir nun ermitteln wollen für welches r wir die höchste Wahrscheinlichkeit P_r erhalten und somit am wahrscheinlichsten das Flugzeug mit der grössten Ladefläche auswählen, müssen wir das Maximum der Funktion $g(r) = \frac{r}{22} \cdot \ln\left(\frac{22}{r}\right)$ ermitteln. Da das Maximum einer Funktion nur dort wo die Ableitung gleich null ist (oder am Rand des Intervalls) angenommen werden kann, setzen wir:

$$g'(r) = \frac{1}{22} \cdot \ln\left(\frac{22}{r}\right) + \frac{r}{22} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Durch äquivalentes Umformen erhalten wir nun die folgende Gleichung:

$$\ln\left(\frac{22}{r}\right) = 1 \Leftrightarrow r = \frac{22}{e} \approx 8.$$

Das heißt, die Funktion g hat nahe bei 8 ein lokales Maximum und es ist tatsächlich am besten 8 Tage zu warten, bevor wir uns für das nächstbeste Flugzeug entscheiden!

6 Tischkarten

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)
Übersetzung: Gabriele Neumann (HU Berlin)

6.1 Aufgabe

Auf der Weihnachtsfeier sitzen fünf Ehepaare um einen runden Tisch herum: Herr und Frau Koriander, Herr und Frau Zimt, Herr und Frau Ingwer, Herr und Frau Muskat sowie das Herr und Frau Rosmarin. Jeder Ehemann sitzt neben seiner Ehefrau, also unmittelbar rechts oder links von ihr. Herr Koriander sitzt rechts von seiner Frau. Außerdem ist Herr Koriander der einzige Mann, der nicht neben einem anderen Mann sitzt.

Die Tischkarten der Eheleute tragen die Nummern 1 bis 10 und sind im Uhrzeigersinn (aufsteigend) auf dem Tisch angeordnet. Als die bekannte walisische Tanzkapelle *Red Hot Rudi Rapper* endlich zur Wichtelpolka aufspielt, gibt es bei der Tischgemeinschaft kein Halten mehr: Alle strömen zur Tanzfläche und schwingen das Tanzbein. Dabei bilden sie gemischte Paare der Plätze 1 - 5, 2 - 4, 3 - 9, 6 - 8 and 7 - 10, also Paare, die alle stets aus genau einem Mann und genau einer Frau bestehen.

Frage: Wie lautet Herrn Korianders Tischkartennummer?

Antwortmöglichkeiten:

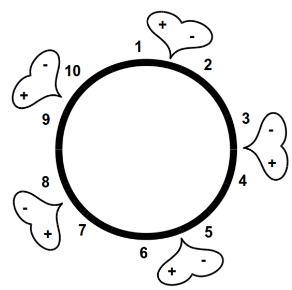
1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 10

6.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 2.

Wir wissen schon, dass die Paare 1–5, 2–4, 3–9, 6–8 and 7–10 aus je einem Mann und einer Frau bestehen. Nun benennen wir bei dem ersten Paar das Geschlecht von 1 with + (Plus), und das Geschlecht von 5 mit − (Minus).

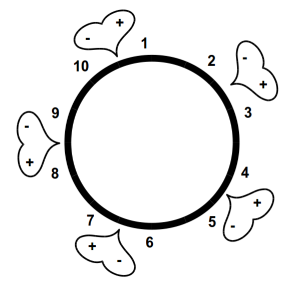
Erster Fall:
Die Ehepaare werden durch die Plätze 1–2, 3–4, 5–6, 7–8 und 9–10 gebildet. Da jedes der Paare 1–2, 2–4, 4–3, 3–9, 9–10, 10–7, 7–8, 8–6, 6–5, 5–1 genau einen Mann und genau eine Frau enthält, können die unterschiedlichen Geschlechter von 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 also mit $+, -, -, +, -, +, +, -, +, -$ bezeichnet werden. (Siehe Abbildung) Sollte + einen Mann bezeichnen, würden die drei Männer 1,4,9 zwischen zwei Frauen sitzen. Dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung. Sollte − einen Mann bezeichnen, würden wiederum die zwei Männer 5 und 8 zwischen zwei Frauen sitzen. Dieser Fall führt daher zu keiner Lösung.



Fall 1

Zweiter Fall:

Die Ehepaare sitzen auf den Plätzen 1–10, 9–8, 7–6, 5–4 and 3–2. Da wieder jedes der Paare 1–10, 10–7, 7–6, 6–8, 8–9, 9–3, 3–2, 2–4, 4–5, 5–1 genau einen Mann und eine Frau enthält, müssen die Geschlechter der Personen mit den Nummern 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 verteilt sein über die Reihenfolge $+, -, +, +, -, -, +, +, -, -$. Falls nun $+$ einen Mann bezeichnet, sitzt nur 1 zwischen zwei Frauen. Dies müsste Herr Koriander sein. Dann säße er aber links von seiner Frau.Dies ist wieder ein Widerspruch. Wenn aber $-$ ein Mann ist, dann sitzt 2 als einziger zwischen zwei Frauen. Wenn Nummer 2 Herr Koriander ist, dann sitzt er außdem rechts von Frau Koriander, wie gefordert.



Fall 2

Damit ist gezeigt, dass dies die einzig mögliche Sitzanordnung ist.

7 Schlitten verschütten

Autor: Falk Ebert (HU Berlin)

7.1 Aufgabe

Wichtel Nadja und Wichtel Marek spielen zusammen Schlitten verschütten. Früher haben sie dazu diverse Schlitten des Weihnachtsmanns auf verschiedenen Seiten einer Mauer geparkt und dann versucht, über die Mauer hinweg die Schlitten des jeweils anderen mit Schneebällen zu treffen. Seit sie dabei einmal den Geschenkeschlitten mit umgeparkt haben und der Weihnachtsmann diesen erst suchen musste, dürfen sie nicht mehr mit echten Schlitten spielen. Seit dem gibt es in manchen Ländern die Geschenke übrigens erst am 25. Dezember.

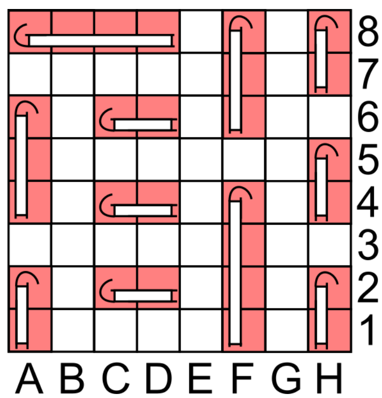
Die weniger ärgeranfällige Variante wird auf Papier gespielt. Jeder Wichtel positioniert seine Schlitten in den Feldern eines quadratischen 8-mal-8 Spielfeldes. Dabei gelten folgende Regeln:

- Es gibt Schlitten der Längen 1, 2, 3, 4 und 5. Diese werden als eine entsprechende Anzahl von benachbarten Kästchen in einer Reihe dargestellt.
- Schlitten werden immer horizontal oder vertikal genau in die Kästchen des Rasters platziert.
- Zwei Schlitten dürfen sich nicht berühren – auch nicht an nur einer Ecke.

Dann nennen Nadja und Marek abwechselnd die Koordinaten eines Quadrates und der Gegenspieler muss sagen, ob ein Schlitten getroffen wurde oder nicht.

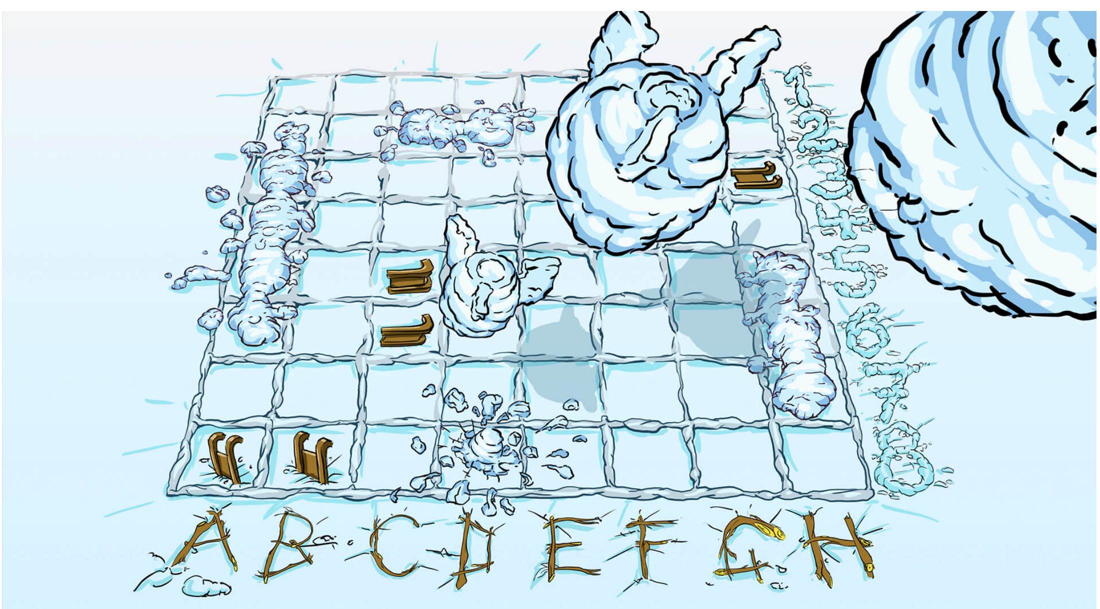
(Das Spielprinzip könnte einigen bekannt vorkommen.)

Heute haben sie aber keine Lust auf das klassische Spiel. Statt dessen haben sie es sich als Ziel gesetzt, das Spielfeld regelkonform möglichst voll zu stellen. Eine Beispielbelegung ist die folgende:



Dabei sind genau 28 Felder belegt.

Was ist die Maximalzahl von regelkonform belegten Feldern?



Antwortmöglichkeiten:

1. 27
2. 28
3. 29
4. 30
5. 31
6. 32
7. 33
8. 34
9. 35
10. 42

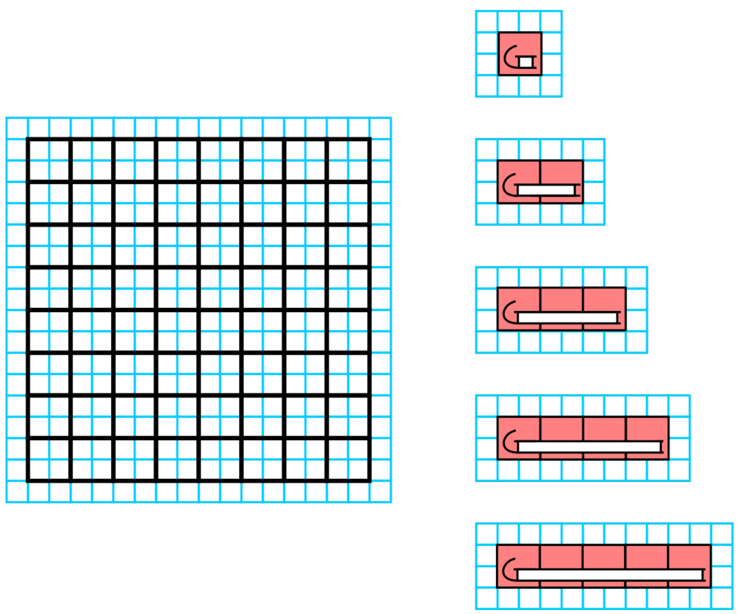
Bemerkung:

Diese Aufgabe hat keinen unmittelbaren Bezug zu industriellen Mathematikanwendungen. Aber es gibt geschickte Möglichkeiten, die Zwangsbedingungen (Spielregeln) umzuformulieren, so dass die Aufgabe deutlich leichter wird. Das ist ein in der mathematischen Optimierung ein gängiges Prinzip. Denn auch wenn viele Aufgaben heutzutage von Computern gelöst werden können, kann eine geschickte Formulierung einer Problemstellung Rechenzeiten enorm verkürzen.

7.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 6.

Solange es nur darum geht, Schlitten auf dem Spielfeld zu platzieren, ist die Aufgabe simpel. Mit den gegebenen Schlitten lassen sich die 64 Einzelfelder problemlos abdecken. Der schwierige Teil der Aufgabe besteht darin, die zusätzlichen Bedingungen, dass die einzelnen Schlitten sich nicht berühren dürfen, mit unterzubringen. Eine Möglichkeit, das zu realisieren, besteht darin um jeden Schlitten einen Rand der Breite $\frac{1}{2}$ Kästchen zu legen. Liegen zwei dieser „Schlitten mit Rand“ direkt nebeneinander, dann bleibt zwischen ihnen immer ein Kästchen frei. Da die Schlitten aber direkt am Rand des Spielfelds liegen dürfen, muss das gesamte Spielfeld ebenfalls um diesen Rand erweitert werden.

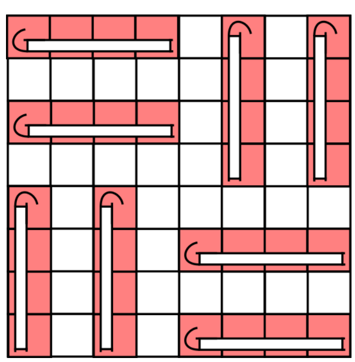


In der Graphik sind sowohl das Spielfeld als auch die Schlitten jeweils mit dem Rand versehen. Die veränderte Aufgabenstellung lautet dann, das „Spielfeld mit Rand“ möglichst vollständig mit „Schlitten mit Rand“ zu üllen. Dies wird nicht komplett gelingen, wie wir gleich sehen. Zuvor betrachten wir die Größe der verbreiterten Schlitten und des größeren Spielfelds.

	Original	mit Rand	Anteil
1-Schlitten	1 Feld	4 Felder	$\frac{1}{4}$
2-Schlitten	2 Feld	6 Felder	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
3-Schlitten	3 Feld	8 Felder	$\frac{3}{8}$
4-Schlitten	4 Feld	10 Felder	$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
5-Schlitten	5 Feld	12 Felder	$\frac{5}{12}$
Feld	64 Felder	81 Felder	

Aus der Tabelle entnehmen wir, dass das erweiterte Spielfeld eine Größe von 81 Feldern hat und wir diese mit erweiterten Schlitten der Größen 4, 6, 8, 10 und 12 füllen müssen. Offensichtlich wird das nicht komplett gelingen, da 81 ungerade ist. Maximal werden wir also 80 Felder belegen können. Weiterhin entnehmen wir der Tabelle, dass mit zunehmender Länge des Schlittens, der Anteil des eigentlichen Schlittens an dem Schlitten mit Rand immer größer wird. Es ist also effizienter, möglichst lange Schlitten zu verwenden (nicht unerwartet).

Durch systematisches Probieren kann man jetzt feststellen, dass $6\times 12+1\times 8 = 80$ und $5\times 12+2\times 10 = 80$ die einzigen Partitionen von 80 sind, die zu 33 ($6\times 5+1\times 3$ und $5\times 5+2\times 4$) mit Schlitten belegten Kästchen auf dem Spielfeld führen. Bei diesen beiden wird man auch feststellen können, dass der 5er-Schlitten - egal wie er positioniert wird - an seinem schmalen Ende den Platz zum Rand ungünstig ausnutzt. Beide Partitionen sind also nicht im Spielfeld als Schlittenbelegungen realisierbar. Hingegen ist $8\times 10 = 80$ mit 8 Schlitten der Länge 4 leicht realisierbar und belegt 32 Felder:



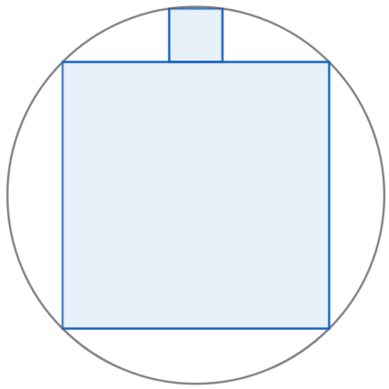
8 Da geht noch was!

Autoren: Luise Fehlinger (HU Berlin), Falk Ebert (HU Berlin)

8.1 Aufgabe

Geschenke verpacken ist eine Kunst. Aus Effizienzgründen werden die meisten Geschenke aber mittlerweile in quaderförmigen Kisten verpackt. Die Effizienzsteigerung hat aber auch merkwürdige Blüten getrieben. Weil aufgrund der Aerodynamik der Geschenkeraum des Weihnachtsmannschlittens ein hohler Zylinder ist, wird von der Wichtelpackstation ein großer quaderförmiger Geschenkebehälter bereitgestellt, der exakt in den zylindrischen Geschenkeraum eingepasst wurde. Dieser Geschenkebehälter hat einen quadratischen Querschnitt und es ist der größte einzelne Quader, der in den Zylinder passt.

Packwichtel Pascal hat sich jetzt bereits mehrere Jahre über den verschwendeten Platz neben dem Quader geärgert und möchte in die vier noch freien Zylinderabschnitte auch quaderförmige Pakete einpassen. Diese sollen so lang sein, wie der große Geschenkebehälter und ebenfalls einen quadratischen Querschnitt haben. (Sämtliche Hinweise seiner Kollegen, das quadratisch nicht immer optimal heißt, hat er bisher in den Wind geschlagen.) Also hat er sich jetzt daran gemacht, entsprechende Geschenkekisten zu entwickeln.



In diesem Beispiel ist nur ein Zylinderabschnitt mit noch einem Quader mit quadratischem Querschnitt gefüllt.

Wenn er in alle noch freien Zylinderabschnitte maximal große Quader mit quadratischem Querschnitt einpasst, um wie viel kann der für Geschenke nutzbare Platz vergrößert werden?

Antwortmöglichkeiten:

1. 4%
2. 5%
3. 6%
4. 8%
5. 12%
6. 13%
7. 14%
8. 15%
9. 16%
10. 42%

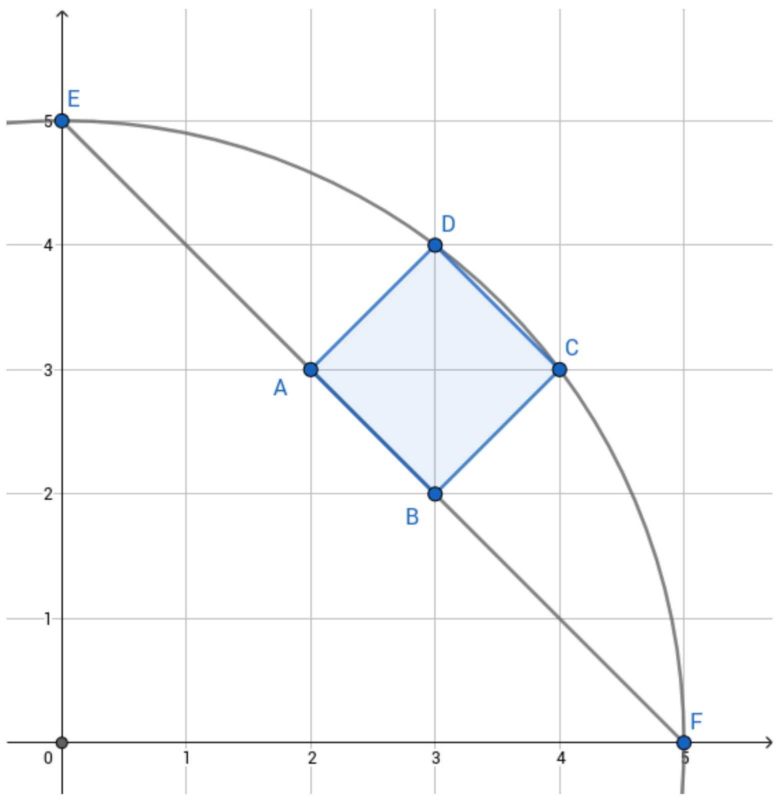
Projektbezug:

Packungsprobleme treten in mathematischen Anwendungen immer wieder auf. Selten sind sie so klar begrenzt und exakt lösbar wie dieses. Prinzipiell passiert beim Ausstechen von Plätzchenteig das Gleiche wie hier, aber eine optimale Nutzung des Plätzchenteigs ist immer nur näherungsweise möglich – zumal in der Realität auch noch naschende Kinder als zusätzliche Bedingung mit auftreten.

8.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Es gibt viele verschiedene, unterschiedlich komplizierte Möglichkeiten, den Flächeninhalt eines der kleinen zusätzlich einzupassenden Quadrate als $\frac{1}{25}$ des großen Quadrates zu bestimmen. Diese hier hat die charmante Eigenschaft, ohne große Worte auszukommen:



Die geeignete Wahl des Koordinatensystems zeigt sowohl, dass es sich bei $\square ABCD$ um ein Quadrat mit den geforderten Eigenschaften handelt und gleichzeitig, dass die Seitenlänge des kleinen Quadrats $\frac{1}{5}$ der Seitenlänge des großen Quadrats beträgt. Der Flächeninhalt ist folglich $\frac{1}{25}$ des Flächeninhalts des großen Quadrats und da es 4 davon gibt, beträgt die zusätzliche Fläche $\frac{4}{25} = 16\%$ des großen Quadrats.

9 Zertifizierte Plätzchen aus dem 19. Jahrhundert

Autoren: Rafael Arndt (HU Berlin), Caroline Löbhard (WIAS), Simon Rösel (HU Berlin)
Projekt: C-SE15

9.1 Aufgabe

„Oh jemine, dieses Jahr ist es wirklich schlimm“, dachte sich der Weihnachtsmann als er mitten im Advent grübelnd in der Weihnachtsbäckerei saß. Es mussten doch unbedingt wieder die tollen Weihnachtsplätzchen gebacken werden, auf die sich die Kinder am Heiligen Abend seit mehr als einem Jahrhundert so sehr freuen. Leider hatten die Weihnachtselfen mal wieder geschlampt und das traditionelle Rezept aus dem Jahre 1892 „irgendwo auf dem Weg zum Nordpol bei einem Schlittenrennen“ verloren. Zum Glück konnte sich der Weihnachtsmann daran erinnern, dass dieses ungemein erfolgreiche Rezept genau eine Tonne Mehl, 4000 frische Eier, 800kg Butter, 200kg Zucker, eine Prise Zimt (ganz wichtig!), sowie eine gewisse Menge an Salz und/oder gemahlenen Mandeln enthielt. Auf Nachfrage bei den Elfen hieß es, dass ihnen die optimale Menge an Mandeln und Salz auch nicht bekannt sei. Sie hätten sich aber zumindest die geheime Plätzchen-Geschmacksfunktion G notiert, die durch jahrelanges Experimentieren (und nach zahlreichen Klagen enttäuschter Kinder) in mühevoller Kleinarbeit bestimmt wurde. Der Geschmack wird nämlich durch die Funktion

$$
\begin{aligned}
G(m,s) = &-\frac{1}{8}\left(\frac{m}{20}-1\right)^2\left(\frac{m}{20}-2\right)\left(\frac{m}{20}-4\right)^2 \\
&-\left(\frac{s}{800}-1\right)\left(\frac{s}{800}-2\right)\left(\frac{s}{800}-7\right)+22
\end{aligned}
$$

beschrieben, wobei m die Menge an gemahlenen Mandeln (gemessen in Kilogramm (kg)) und s die Menge an Salz (in Gramm (g)) ist. Weiter meinten die Elfen, dass „das gelungene 1892er-Rezept dadurch bestimmt ist, dass sich der Geschmack nicht verbessern kann, wenn man, ausgehend von der 1892er-Mandel/Salz-Kombination, ein anderes zertifiziertes Rezept verwendet, dessen Mandel- und Salzgehalt sich um jeweils maximal 40kg bzw. 800g von der Kombination des Jahres 1892 unterscheidet.“

Natürlich wusste der Weihnachtsmann, dass die Elfen in Folge der großen Plätzchenkatastrophe des Jahres 1984 ein ausgeklügeltes Sicherheitssystem entworfen hatten, das für zukünftige Experimente nur solche Rezepte zertifizierte, die die Eigenschaft haben, dass die Quadratwurzel der Summe der Quadrate der Mandel- und Salzmenge (gemessen in kg bzw. g) stets kleiner oder gleich der Mandelmenge des Rezeptes von 1892 ist. Weiter muss jedes Rezept für die Zertifizierung natürlich Mandeln, aber nicht unbedingt Salz enthalten.

Die Hinweise der Elfen ließen den Weihnachtsmann ratlos zurück. Er war sich lediglich sicher, dass das 1892er-Rezept maximal 100 kg gemahlene Mandeln bzw. 5000g Salz enthält, und, dass dieses Rezept natürlich selbst zertifiziert ist.

Nun ist er auf eure Hilfe angewiesen. Wieviel Salz und gemahlene Mandeln enthält das Rezept des Jahres 1892?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0kg Mandeln, 0g Salz
2. 0kg Mandeln, 4151g Salz
3. 20kg Mandeln, 4151g Salz
4. 100kg Mandeln, 4151g Salz
5. 32kg Mandeln, 0g Salz
6. 60kg Mandeln, 4151g Salz
7. 32kg Mandeln, 4151g Salz
8. 80kg Mandeln, 0g Salz
9. 80kg Mandeln, 4151g Salz
10. 100kg Mandeln, 0g Salz.

Projektbezug:

Die obige Aufgabe kann als restringiertes Optimierungsproblem aufgefasst werden, bei dem die zulässige Menge von der Lösung abhängt. Im weiteren Sinn handelt es sich hierbei um eine Quasivariationsungleichung.

Die Untersuchung von Quasivariationsungleichungen und deren Steuerung stellt einen aktuellen Forschungsgegenstand in der Mathematischen Optimierung dar und wartet mit einer Reihe von interessanten Aspekten aber auch vielen Fragestellungen auf. Dies betrifft z.B. die Lösbarkeit und die Stabilität solcher Probleme. Nicht zuletzt möchte man auch effiziente numerische Lösungsverfahren entwickeln.

Quasivariationsungleichungen dienen als mathematisches Modell für viele Probleme aus verschiedenen Fachgebieten. Hierzu zählen beispielsweise das Verhalten von Bakterien, die mechanische Reibung zwischen zwei Objekten in Kontakt oder das Wachstum von Sanddünen. In der Finanzmathematik treten Quasivariationsungleichungen im Zusammenhang mit der Interaktion und Strategieoptimierung verschiedener Markteilnehmer auf (Spieltheorie).

9.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Zunächst bezeichnen wir die passende Kombination aus gemahlenen Mandeln und Salz für das Rezept aus dem Jahr 1892 mit $(\overline{m},\overline{s})$. Gemäß den Erinnerungen des Weihnachtsmanns, gilt $(\overline{m},\overline{s}) \in (0{,}100] \times [0{,}5000]$, mit den entsprechenden Einheiten. Diese Zusatzinformation benötigen wir jedoch nicht. Laut den Weihnachtselfen ist $(\overline{m},\overline{s})$ durch die Maximalitäts-Eigenschaft

$$G(m,s) \le G(\overline{m},\overline{s}), \quad \text{für alle } (m,s) \in K(\overline{m},\overline{s}), \tag{7}$$

bestimmt, wobei die Menge

$$\begin{aligned} K(\overline{m},\overline{s}) = \{&(m,s) \in \mathbb{R}^2 : m > 0, s \ge 0, \sqrt{m^2+s^2} \le \overline{m}, \\ &\overline{m} - 40 \le m \le \overline{m} + 40, \overline{s} - 800 \le s \le \overline{s} + 800\} \end{aligned}$$

alle Mandel/Salz-Paare (m,s) enthält, die der Zertifizierung entsprechen und die sich von dem 1892er Rezept um maximal 40 kg bzw. 800 g unterscheiden. Beachte, dass die zulässige Menge $K(\overline{m},\overline{s})$, über der optimiert werden soll, von der Lösung $(\overline{m},\overline{s})$ abhängt!

Zunächst stellen wir fest, dass das 1892er Rezept selbst zertifiert ist. Insbesondere gilt $\overline{m} > 0$ und $\sqrt{\overline{m}^2 + \overline{s}^2} \le \overline{m}$. Andererseits gilt immer $\sqrt{\overline{m}^2 + \overline{s}^2} \ge \overline{m}$, und damit $\sqrt{\overline{m}^2 + \overline{s}^2} = \overline{m}$, also $\overline{s} = 0$. Die Salzmenge aus dem Jahr 1892 ist somit bereits gefunden! Damit ist Problem (7) äquivalent dazu, ein $\overline{m} \in (0{,}100]$ zu finden, für das gilt:

$$G(m,s) \le G(\overline{m},0), \quad \text{für alle } (m,s) \in K(\overline{m},0), \tag{8}$$

also

$$\max_{(m,s)\in K(\overline{m},0)} G(m,s) \le G(\overline{m},0). \tag{9}$$

Nach Einsetzen in die obige Definition von K, können wir die Menge $K(\overline{m},0)$ wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} K(\overline{m},0) = \{&m > 0, s \in [0{,}800] : \\ &\overline{m} - 40 \le m \le \overline{m}, \ \sqrt{m^2+s^2} \le \overline{m}\}. \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass die Ungleichung $\sqrt{m^2+s^2} \leq \overline{m}$ insbesondere $m \leq \overline{m}$ impliziert. Nun schauen wir uns die Geschmacksfunktion G etwas genauer an und definieren die jeweiligen Geschmacksanteile, die durch die gemahlenen Mandeln und das Salz bestimmt sind, also

$$G(m,s) = G_1(m) + G_2(s) + 22$$

mit

$$\begin{aligned} G_1(m) &= -\frac{1}{8}\left(\frac{m}{20}-1\right)^2\left(\frac{m}{20}-2\right)\left(\frac{m}{20}-4\right)^2 \\ G_2(s) &= -\left(\frac{s}{800}-1\right)\left(\frac{s}{800}-2\right)\left(\frac{s}{800}-7\right). \end{aligned}$$

Um den Maximierungsterm in (9) zu vereinfachen, beobachten wir zunächst, dass

$$\max_{(m,s)\in K(\overline{m},0)} G(m,s) \geq \max_{\{m>0:\, \overline{m}-40\leq m\leq \overline{m}\}} G_1(m) + G_2(0) + 22 \tag{10}$$

gilt; dies folgt durch die spezielle Wahl $s = 0$. Andererseits kann man die Menge $K(\overline{m},0)$ vergrößern, indem man statt $\sqrt{m^2+s^2} \leq \overline{m}$ nur $m \leq \overline{m}$ fordert. Daher gilt also

$$\max_{(m,s)\in K(\overline{m},0)} G(m,s) \leq \max_{\{m>0:\, \overline{m}-40\leq m\leq \overline{m}\}} G_1(m) + \max_{s\in[0,800]} G_2(s) + 22. \tag{11}$$

Beachte, dass auf der rechten Seite das Maximum von G_2 auf einer Menge gesucht wird, die nicht mehr von der Lösung abhängt! Da G_2 ein Polynom dritten Grades mit negativem Leitkoeffizient und drei verschiedenen Nullstellen ist, dessen kleinste Nullstelle bei $s = 800$ liegt, wird das Maximum von G_2 auf dem Intervall $[0,800]$ bei $s = 0$ angenommen, also $\max_{0\leq s\leq 800} G_2(s) = G_2(0) = 14$. Alternativ kann man auch zeigen, dass die erste Ableitung von G_2 keine Nullstellen im Intervall $[0,800]$ besitzt und dann die Werte $G_2(0)$ und $G_2(800)$ vergleichen (Monotonie!).

Damit gilt

$$\max_{(m,s)\in K(\overline{m},0)} G(m,s) \leq \max_{\{m>0:\, \overline{m}-40\leq m\leq \overline{m}\}} G_1(m) + G_2(0) + 22.$$

Laut (10) gilt diese Ungleichung allerdings auch in die andere Richtung! Also folgt

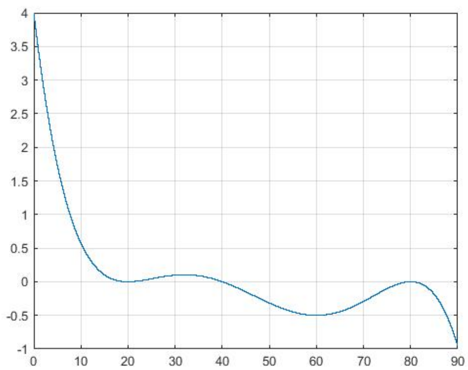


Abbildung 1: Graph von $G_1 = G_1(m)$

$$\max_{(m,s)\in K(\overline{m},0)} G(m,s) = \max_{\{m>0:\, \overline{m}-40\leq m\leq \overline{m}\}} G_1(m) + G_2(0) + 22.$$

Das Problem (9) hat man nun auf das Problem reduziert, ein $\overline{m} \in (0{,}100]$ zu finden, so dass gilt

$$\max_{\{m>0:\, \overline{m}-40\leq m\leq \overline{m}\}} G_1(m) \leq G_1(\overline{m}). \tag{12}$$

Man muss also die Mandelmenge $\overline{m}$ so bestimmen, dass der Geschmack durch Verkleinerung des Mandelanteils um maximal 40 kg nicht verbessert werden kann. Dabei ist gemäß der Zertifizierung der Mandelanteil immer positiv zu halten.
Um die Lösung von (12) zu finden, diskutieren wir die Funktion G_1 und berechnen dazu die erste Ableitung. Um sich etwas Rechenarbeit zu ersparen, kann man mit der „gestauchten“ Funktion $\tilde{G}_1(m) := G(20m)$ arbeiten, und man erhält

$$\tilde{G}_1'(m) = -\frac{5}{8}(m-1)(m-4)(m^2 - \frac{23}{5}m + \frac{24}{5}).$$

Die Nullstellen von $G_1'(m)$ lauten damit (p-q-Formel)

$$m_1 = 20, m_2 = 32, m_3 = 60, m_4 = 80.$$

Da G_1 auf dem Intervall $(0{,}20]$ streng monoton fällt, kann es keine Lösung von (12) in diesem Intervall geben, da wir den Mandelanteil immer halbieren könnten, um den Geschmack zu verbessern. Auf dem Intervall [20,40] können wir einfach abschätzen;

$$G_1(m) = \frac{1}{8}\left(\frac{m}{20} - 1\right)^2 \left(2 - \frac{m}{20}\right)\left(\frac{m}{20} - 4\right)^2 \leq \frac{1}{8} \cdot 1^2 \cdot 1 \cdot 3^2 = 9/8.$$

Da $G_1(0) = 4$, liegt die Lösung von (12) auch nicht in [20,40]. Da $G_1(80) = 0$ und $G_1(m) \leq 0$ für alle $m \in [40,80]$ ist somit $\overline{m} = 80$ eine Lösung von (12). Außerdem kann es keine weitere Lösung geben, da G_1' auf dem offenen Intervall $(80, +\infty)$ negativ ist, sodass G_1 auf diesem Intervall streng monoton fallend ist. Wieder könnte man die Menge an gemahlenen Mandeln reduzieren, um den Geschmack zu verbessern.

Um die Plätzchen nach dem Rezept von 1892 zu backen, sollte der Weihnachtsmann also auf Salz verzichten und 80 kg gemahlene Mandeln verwenden. Demnach ist **Antwort 8** korrekt.

10 Chaos in der Plätzchenfabrik

Autoren: Miriam Schlöter (TU Berlin), Leon Sering (TU Berlin)
Projekte: SPP 1736 – *Algorithms for Big Data* (DFG), MI12 – *Dynamic Models and Algorithms for Equilibria in Traffic Networks* (MATHEON)

10.1 Aufgabe

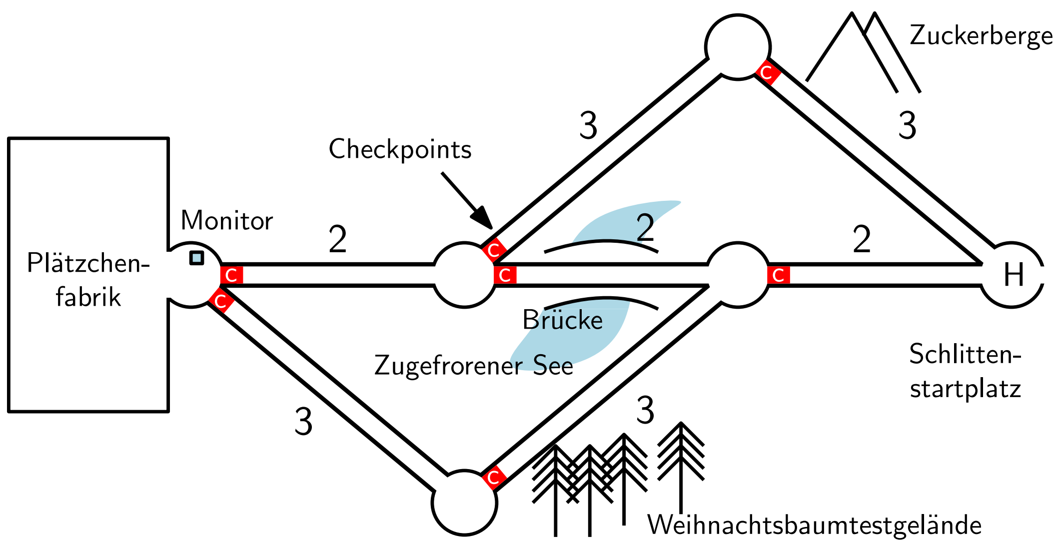
Wie konnte das passieren? Jetzt haben sich nicht nur die Mathematiker-Helfer-Elfin Alvina und ihr Vertreter Melvin BEIDE krank gemeldet, sondern auch die Rentiere der *Rudolphs Heiligabend Logistik (RHL)* drohen mal wieder damit, ihre Arbeit niederzulegen. Rudolph und der Weihnachtsmann könnten sich glatt die Kerzen vom Weihnachtsbaum reißen. Immerhin ist die erste Verhandlungsrunde mit der *Vereinten Rentier Gewerkschaft (VeR.ti)* halbwegs gut verlaufen. Die Plätzchenfabrik versinkt derweil im Chaos: Tausende von Helfer-Elfen, die eigentlich die fertigen Plätzchen von der Plätzchenfabrik zum Schlittenstartplatz bringen sollten, schreien durcheinander, laufen im Kreis und bewerfen sich mit Kekskrümeln und Mehl.

„Es reicht", ruft der Weihnachtsmann und schlägt so heftig auf den Tisch, dass Rudolph vor Schreck seinen Spekulatius fallen lässt, den er gerade in seinen Morgen-Kakao tunken wollte. „Du sorgst dafür, dass die Rentiere wieder den ganzen Tag Plätzchen ausliefern und ich sorge dafür, dass so viele Plätzchen wie möglich zum Schlittenstartplatz transportiert werden!"

Ein Telefonat später:

Rudolph: Die Rentiergewerkschaftsversammlung stimmt heute um 17 Uhr über meinen Vorschlag ab. Wenn sie ihn annehmen, wird die letzte Lieferung um 23 Uhr abgeholt. Wenn der Vorschlag allerdings abgelehnt wird, werden die Rentiere keine weiteren Lieferungen beginnen. In diesem Fall können wenigstens alle Plätzchen, die bis 17 Uhr beim Schlittenstartplatz sind, ausgeliefert werden, alle Plätzchen, die nach 17 Uhr ankommen, werden allerdings nicht mehr ausgeliefert.

Weihnachtsmann: Ich habe keine Ahnung, wie Alvina und Melvin diesen chaotischen Haufen von Helfer-Elfen in den Griff bekommen haben! Wenigstens habe ich in deren Büro das Wegenetz zwischen der Plätzchenfabrik und dem Schlittenstartplatz gefunden. Das sieht eigentlich nicht so kompliziert aus, aber so richtig verstehe ich es trotzdem nicht...



Rudolph: Schau Weihnachtsmann, das ist eigentlich ganz einfach: Hier links kommen die Helfer-Elfen aus der Plätzchenfabrik und sollen ihre Plätzchen hier rechts zum Schlittenstartplatz befördern. Das Wegenetz besteht aus einzelnen Wegabschnitten. Es gibt kurze Wegabschnitte der Länge 2, d.h. die Helfer-Elfen brauchen 2 Stunden um diesen Wegabschnitt zu durchqueren, und längere Wegabschnitte der Länge 3. Weiterhin ist zu erkennen, dass es insgesamt drei verschiedene Wege gibt, die von der Plätzchenfabrik zum Schlittenstartplatz führen, denn alle Streckenabschnitte sind Einbahnstraßen von links nach rechts.

In unserer Plätzchenfabrik arbeiten Tausende von Helfer-Elfen, die im Vergleich zu den Wegen in der Fabrik sehr klein sind. Man muss sich die Helfer-Elfen, die sich durch das Wegenetz bewegen, deswegen eher wie eine Flüssigkeit vorstellen, die durch ein Netz aus Rohren fließt. Dabei werden die Elfen in Elfeneinheiten gemessen (eine Elfeneinheit besteht aus sehr vielen Elfen), wobei die Elfen die Plätzchenfabrik mit einer Rate von zwei Elfeneinheiten pro Stunde verlassen.

Unmittelbar am Anfang jedes Wegabschnitts gibt es einen Checkpoint (c), an dem überprüft wird, ob alle Plätzchenlieferungen noch vollständig sind. Der Überprüfungsprozess nimmt keine Zeit in Anspruch. Allerdings ist die Kapazität der Checkpoints begrenzt und es kann nur maximal eine Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde kontrolliert werden. Man kann sich die Checkpoints also als eine Engstelle im Wegenetz vorstellen, an dem sich die Elfen aufstauen können.

Für den Fall, dass die Helfer-Elfen in einer höheren Rate an einem Checkpoint ankommen, als dieser überprüfen kann, gibt es einen extra Wartebereich neben der Strecke, in dem sich die Elfen anstellen. Die Warteschlange funktioniert dabei so, wie eine Flüssigkeit durch eine Engstelle fließt. Sind beispielsweise zwei Elfeneinheiten in der Warteschlange, müssen die Elfen ganz hinten genau zwei Stunden warten, bis sie den Checkpoint passieren können (siehe Abbildung 2).

Wichtig ist, dass wir uns jetzt möglichst schnell für eine Strategie entscheiden, denn dann können die Helfer-Elfen um 8 Uhr anfangen zu arbeiten. Damit so viele Plätzchen wie möglich ausgeliefert werden können, egal wie sich die Rentiere entscheiden, sollte unsere Strategie die Eigenschaft haben, dass bis 17 Uhr **und** bis 23 Uhr so viele Elfeneinheiten wie möglich am Schlittenstartplatz ankommen. Es kommen bis 17 Uhr (bzw. 23 Uhr) so viele Elfeneinheiten wie möglich an, wenn es keine Strategie gibt, in der bis 17 Uhr (bzw. 23 Uhr) mehr Elfeneinheiten am Schlittenstartplatz ankommen.

Weihnachtsmann: So ist das also... Dann ist es doch ganz einfach! Damit die Zahl der ausgelieferten Plätzchen maximal ist, egal wie die Abstimmung von Ver.Ti ausgeht, sollten wir alle Helfer-Elfen mit einer Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde auf dem kürzesten Weg über die Brücke zum Schlittenstartplatz schicken.

Auch Knecht Ruprecht, der sich eben noch eine Eierschlacht mit den Helfer-Elfen geliefert hat, mischt sich grinsend ein:

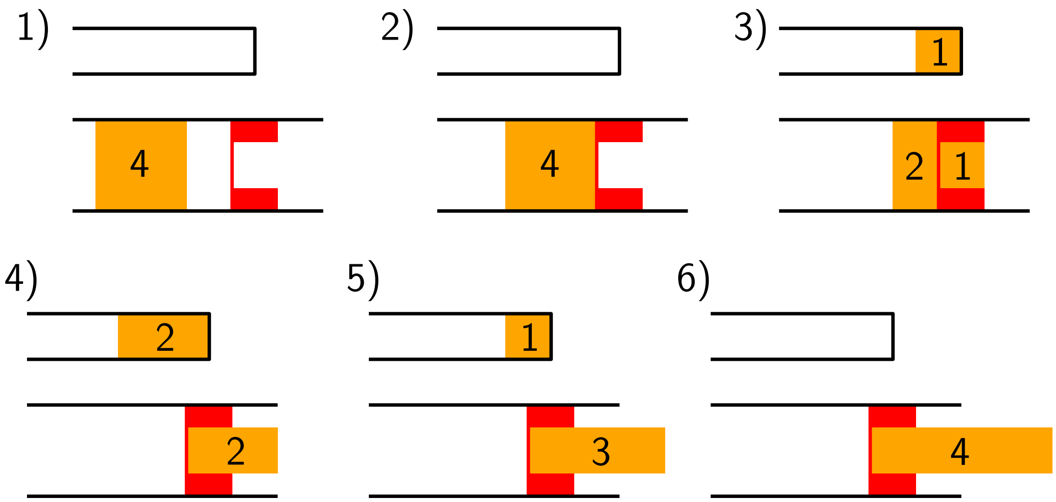


Abbildung 2: Die Funktionsweise eines Checkpoints, wenn eine Rate von zwei Elfeneinheiten pro Stunde den Checkpoint passieren wollen. Die Situation ist ein kontinuierlicher Prozess und wird in der Abbildung im Stundentakt angezeigt.

Knecht Ruprecht: Ach, Weihnachtsmann! Das ist eine sehr schlechte Idee! Wenn alle Elfen nur den oberen Weg an den Zuckerbergen vorbei und den unteren Weg entlang des Weihnachtsbaumtestgeländes benutzen und das mit einer Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde, dann können wir zu jedem Zeitpunkt viel mehr Elfeneinheiten losschicken, als bei deinem Plan. Das muss besser sein!

Der Weihnachtsmann beginnt verzweifelt sich Haarbüschel aus dem Bart zu reißen. Nur Rudolph bewahrt einen klaren Kopf. Nach einiger Zeit kommt ihm eine Idee.

Rudolph: Eure Ideen sind beide nicht gut, denn bei beiden Plänen bleiben Wege völlig ungenutzt! Ich weiß aber, wie wir die Helfer-Elfen durch das Wegenetz schicken können, sodass, egal wie die Verhandlungen mit den Rentieren ausgehen, immer so viele Plätzchen wie möglich von den Rentieren ausgeliefert werden. In meiner optimalen Strategie ist sogar um 15 Uhr schon eine komplette Elfeneinheit beim Startplatz.

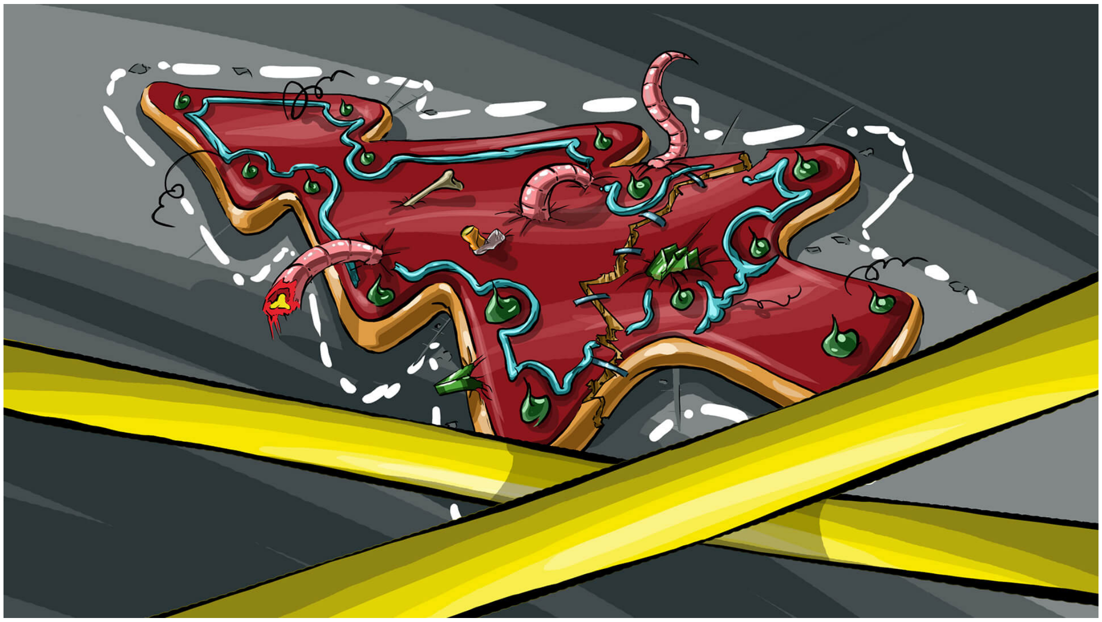
Rudolph erklärt seinen Plan dem Weihnachtsmann, der erleichtert ruft: „So ist es gut. Es ist völlig egal, wie die Vereinte Rentier Gewerkschaft entscheidet, mehr Plätzchen können wir nicht transportieren lassen. Weihnachten ist gerettet!“

Über ein Megafon versuchen Rudolph und der Weihnachtsmann den Helfer-Elfen ihren Plan zu vermitteln. Doch diese maulen nur und wollen sich nicht darauf einlassen. Die Helfer-Elfen finden den Plan aus irgendeinem Grund ungerecht und dem Weihnachtsmann und Rudolph fehlt die Autorität, sich durchzusetzen. Am Ende verliert der Weihnachtsmann die Geduld und ruft völlig resigniert: „Okay dann machen wir es eben anders. Ihr dürft selber entscheiden, welchen Weg ihr nehmen wollt. Wer seine Plätzchen bei den Rentieren abgeliefert hat, darf nach Hause gehen!“

Auf diesen Arbeitsplan lassen sich die Elfen ein. Natürlich möchte nun jeder von ihnen so schnell wie möglich Feierabend haben und jeder Elf entscheidet sich, sobald er die Plätzchenfabrik verlässt, für den Weg, der ihn aktuell am schnellsten zum Schlittenstartplatz führt. Beim Verlassen der Plätzchenfabrik wissen die Helfer-Elfen dabei ganz genau, wie sie schnellstmöglich zum Schlittenstartplatz kommen, da sie auf einem Monitor am Ausgang der Fabrik beobachten können, wie viele Elfeneinheiten sich im Netzwerk befinden und wie sich die Warteschlangen vor den Checkpoints entwickeln werden.

Punkt 8 Uhr kommen die ersten Elfen aus der Fabrik und machen sich auf den Weg. Der Weihnachtsmann ist sich nicht sicher, ob das eine gute Idee von ihm war, denn bis kurz vor 10 Uhr wollen immer noch alle Elfen auf dem direkten Weg über die Brücke zum Schlittenstartplatz. Der erste Checkpoint auf der Strecke ist völlig überfordert und die anderen Wege blieben bisher völlig ungenutzt. Er überlegt schon, ob er die Elfen nicht irgendwie bestechen kann, damit sie sich doch noch gleichmäßiger auf die Wege verteilen, aber just in dem Moment, die Uhr schlägt gerade 10, gibt es die ersten Abweichler. Nun macht sich die Hälfte der Elfen plötzlich auf den Weg entlang des Weihnachtsbaumtestgeländes, während die andere Hälfte sich weiter stur in die Warteschlange des ersten Checkpoints einreiht.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?



Antwortmöglichkeiten:

1. Der Plan von Knecht Ruprecht führt zu einem optimalen Ergebnis, falls die Rentiere bis 23 Uhr abfliegen.

2. In dem Arbeitsplan der Elfen sind die Wartezeiten vor den Checkpoints nie länger als zwei Stunden.

3. In Rudolphs optimaler Strategie gibt es Elfen, die später beim Schlittenstartplatz ankommen als andere Elfen, obwohl sie früher losgehen müssen.

4. Wenn die Rentiere um 17 Uhr zum letzten Mal starten, ist der Arbeitsplan, den die Elfen befolgen, genauso gut, wie die Strategie vom Weihnachtsmann; d.h. es kommen genauso viele Plätzchen an.

5. In der Strategie vom Weihnachtsmann erreichen bis 23 Uhr 5 Elfeneinheiten weniger den Schlittenstartplatz als in Rudolphs optimaler Strategie.

6. In dem Arbeitsplan der Elfen entscheiden sich manche Elfen, den oberen Weg zu benutzen.

7. Die Strategie vom Weihnachtsmann ist optimal, wenn die Rentiere um 17 Uhr ihre letzte Lieferung starten.
8. Im Arbeitsplan der Elfen kommen die Elfen, die früher aus der Plätzchenfabrik kommen, auch früher am Startplatz an.
9. In Rudolphs optimaler Strategie würden mindestens 1,5-mal so viele Elfeneinheiten bis 23 Uhr am Startplatz ankommen, wie in dem Arbeitsplan, den die Elfen befolgen.
10. In Rudolphs optimaler Strategie und dem Arbeitsplan der Elfen werden die Elfen in einem bestimmten Zeitintervall wie in Knecht Ruprechts Strategie geschickt.

Projektbezug:

Das Verkehrsaufkommen in großen Metropolen ist in den letzten Jahrzehnten dramatisch gestiegen und ein Ende dieser Entwicklung ist nicht abzusehen. Dies stellt Verkehrsplaner und Verkehrswissenschaftler vor immer neue Herausforderungen. Andererseits ermöglichen neue Technologien wie moderne Navigationsgeräte mit Zugang zu immer umfangreicheren und genaueren Echtzeitdaten, dass Autofahrer beispielsweise schneller auf spontan entstehende Staus reagieren können.

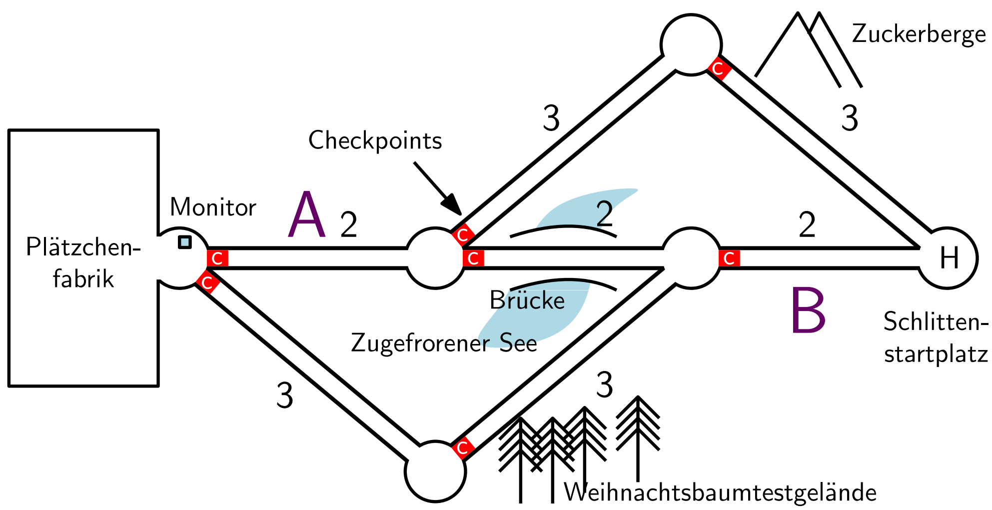
Bei unserem Forschungsprojekt geht es um dynamische Netzwerkflussmodelle für Verkehrsströme. Hierbei wird der Verkehr über einen kontinuierlichen Fluss modelliert und das Straßennetzwerk kann man sich als kompliziertes Rohrsystem vorstellen, durch das der Fluss fließt. Bedeutende neue Erkenntnisse gibt es hier im Bereich der dynamischen Spieltheorie, den sogenannten *Nash Flows*. Dafür stellt man sich jedes kleine Flusspartikel als einzelnen Verkehrsteilnehmer vor, der so schnell wie möglich zu seinem Ziel kommen möchte, genau wie bei dem Elfenarbeitsplan. Um das zu erreichen, ist es natürlich ratsam, Staus zu umfahren, und vor allem genug Informationen darüber zu haben, wie sich die anderen Verkehrsteilnehmer verhalten werden – keine unvorstellbare Voraussetzung mehr im Zeitalter der Digitalisierung und großer Mengen Echtzeitdaten. Mit diesem Modell ist es uns gelungen, ein sogenanntes Nash-Gleichgewicht zu berechnen, also ein Gleichgewicht, bei dem keiner der Verkehrsteilnehmer mit einer anderen Strecke als der ausgewählten schneller ans Ziel kommt.

Die oben erwähnten dynamischen Flussmodelle finden auch in anderen Bereichen ihre Anwendung. Man kann dieses Modell auch nutzen, um die Grundlagen für optimierte Evakuierungspläne voranzubringen. Man stelle sich folgendes Szenario vor: Ein Gebäude, beispielsweise eine Konzerthalle voll mit Menschen, sieht sich einer Bombendrohung ausgeliefert und muss so schnell wie möglich evakuiert werden. Niemand weiß, wann die Bombe explodieren wird. Deshalb ist das Ziel einer guten Evakuierungsstrategie, so viele Menschen wie möglich aus dem Gebäude zu schaffen, sodass bei jedem möglichen Unglückszeitpunkt maximal viele Menschen gerettet wären. Die optimale Lösung nennt man *Earliest Arrival Flow*, dem entspricht die optimale Strategie von Rudolph.

10.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Es gibt insgesamt 3 Wege, über die Elfeneinheiten zum Schlittenstartplatz geschickt werden können. Den oberen Weg entlang der Zuckerberge nennen wir W_o. Er hat die Länge 8. Den mittleren Weg, der über die Brücke führt, nennen wir W_m (er hat Länge 6) und der Weg entlang des Weihnachtsbaumtestgeländes wird W_u genannt (auch er hat Länge 8).



Laut Aufgabenstellung ist es das Ziel von Rudolph und dem Weihnachtsmann, die Elfeneinheiten so durch das Wegenetz zu schicken, dass sowohl um 17 Uhr als auch um 23 Uhr die maximal mögliche Anzahl an Elfeneinheiten den Schlittenstartplatz der Rentiere erreicht hat. In der Aufgabenstellung werden verschiedene Strategien genannt, die dieses Ziel erreichen sollen:

- **Strategie des Weihnachtsmanns:** So viele Elfeneinheiten wie möglich werden entlang von W_m geschickt.
- **Strategie von Knecht Ruprecht:** So viele Elfeneinheiten wie möglichen werden parallel entlang von W_o und entlang von W_u geschickt.
- **Rudolphs optimale Strategie:** Die Elfeneinheiten werden so entlang des Wegenetzes geschickt, dass um 17 Uhr **und** um 23 Uhr so viele Elfen, wie

möglich den Schlittenstartplatz erreicht haben. Außerdem kommt in seiner Strategie bereits um 15 Uhr eine Elfeneinheit am Schlittenstartplatz an.

In allen 3 Strategien werden die Elfen ab 8 Uhr losgeschickt, sodass sie spätestens um 23 Uhr ankommen. Neben diesen 3 Strategien gibt es zusätzlich noch den **Arbeitsplan der Elfen**.

Um herausfinden zu können, welche der Antwortmöglichkeiten falsch ist, müssen einige Dinge berechnet werden:
Wir wissen schon, wie die Strategien vom Weihnachtsmann und von Knecht Ruprecht aussehen. Die optimale Strategie von Rudolph muss allerdings noch genau beschrieben werden. Wir müssen also herausfinden, wie die Elfeneinheiten in Rudolphs optimaler Strategie durch das Wegenetz geschickt werden. Auch für den Arbeitsplan der Elfen müssen wir herausfinden, wie er genau aussieht. Es muss also insbesondere berechnet werden, für welche Wege sich die Elfen zu bestimmten Zeiten entscheiden, und auch, wie lang zu jedem Zeitpunkt die Warteschlangen sind, die sich unter Umständen an den Checkpoints bilden.
Für alle Strategien und den Arbeitsplan der Elfen ist dabei insbesondere interessant, wie viele Elfeneinheiten den Schlittenstartplatz bis 17 Uhr und bis 23 Uhr erreichen. Für die Strategie des Weihnachtsmanns und von Knecht Ruprecht können wir diese Frage direkt beantworten:

Strategie des Weihnachtsmanns:

In der Strategie vom Weihnachtsmann werden die ganze Zeit **so viele Elfeneinheiten wie möglich** in den Weg W_m geschickt, sodass sie noch rechtzeitig (bis 23 Uhr) am Schlittenstartplatz ankommen. Zuerst müssen wir verstehen, was hier „so viele Elfeneinheiten wie möglich“ bedeutet: Am Anfang des Weges befindet sich ein Checkpoint, an dem maximal eine Elfeneinheit pro Stunde kontrolliert werden kann. Das heißt also, dass nicht mehr als eine Elfeneinheit pro Stunde in den Weg W_m geschickt werden kann. Dass so viele Elfeneinheiten wie möglich über den Weg W_m geschickt werden, bedeutet also, dass die Elfeneinheiten mit einer **Rate** von einer Elfeneinheit pro Stunde auf den Weg geschickt werden. Alle übrigen Elfen müssen vor dem ersten Checkpoint warten.

Der Weg W_m hat die Länge 6. Das bedeutet, dass Elfen, die um 8 Uhr auf den Weg geschickt werden, 6 Stunden später den Schlittenstartplatz erreichen, also um 14 Uhr. Elfen, die um 9 Uhr losgeschickt werden, kommen um 15 Uhr an, Elfen, die um 10:23 Uhr losgehen, um 16:23 Uhr, und so weiter.

Wir wollen jetzt berechnen, wie viele Elfen um 17 Uhr und um 23 Uhr in dieser Strategie am Schlittenstartplatz ankommen. Da die Elfen 6 Stunden brauchen, um den Weg W_m zurückzulegen, kommen nur Elfen, die bis spätestens 11 Uhr losgeschickt wurden, bis 17 Uhr am Schlittenstartplatz an. Wir haben also von 8 Uhr bis 11 Uhr Zeit, Elfen auf den Weg zu schicken (also insgesamt 3 Stunden). Da wir die Elfeneinheiten maximal mit einer Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde auf den Weg schicken können, können in 3 Stunden also maximal 3 Elfeneinheiten über den Weg W_m losgeschickt werden. Die 3 Elfeneinheiten kommen auch bis 17 Uhr am Schlittenstartplatz an.

Analog kommen Elfen, die bis spätestens 17 Uhr losgeschickt werden, bis 23 Uhr am Schlittenstartplatz an. Alle Elfen, die zwischen 8 Uhr und 17 Uhr losgeschickt werden, erreichen also bis 23 Uhr den Schlittenstartplatz. In diesen 9 Stunden können also maximal 9 Elfeneinheiten auf den Weg geschickt werden, die alle bis 23 Uhr ankommen.

Insgesamt kommen in der Strategie des Weihnachtsmannes also **bis 17 Uhr 3 Elfeneinheiten** am Schlittenstartplatz an und **bis 23 Uhr 9 Elfeneinheiten**.

Strategie von Knecht Ruprecht:

In der Strategie von Knecht Ruprecht werden die ganze Zeit so viele Elfeneinheiten wie möglich über die Wege W_u und W_o zum Schlittenstartplatz geschickt. Genauso wie für den Weg W_m bedeutet hier **so viele Einheiten wie möglich**, dass die Elfeneinheiten die ganze Zeit jeweils mit der maximal möglichen Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde auf die Wege geschickt werden. Beide Wege haben die Länge 8. Elfen brauchen also 8 Stunden, um den gesamten Weg zurückzulegen. Außerdem überschneiden sich beide Wege nicht. Deswegen reicht es für einen der Wege auszurechen, wie viele Elfeneinheiten über diesen Weg bis 17 Uhr und bis 23 Uhr am Schlittenstartplatz ankommen. Über beide Wege können dann jeweils doppelt so viele Elfeneinheiten ankommen.

Wir schauen uns also nur den Weg W_o an. Da dieser Weg die Länge 8 hat, kommen also nur Elfen, die bis 9 Uhr losgeschickt wurden, auch bis 17 Uhr am Schlittenstartplatz an. Wir haben also von 8 Uhr bis 9 Uhr (also eine Stunde) Zeit, Elfen auf den Weg W_o zu schicken, wenn sie bis 17 Uhr ankommen sollen. Da wir die Elfeneinheiten maximal mit einer Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde auf den Weg schicken können, kann also maximal eine Elfeneinheit entlang des Weges W_o bis 17 Uhr am Schlittenstartplatz ankommen. Bis 23 Uhr kommen Elfen entlang des Weges W_o am Schlittenstartplatz an, die bis spätestens 15 Uhr losgeschickt werden. Von 8 Uhr bis 15 Uhr vergehen 7 Stunden, in denen Elfeneinheiten losgehen können. Maximal können also bis 23 Uhr über den Weg W_o insgesamt 7 Elfeneinheiten den Schlittenstartplatz erreichen.

Insgesamt kommen in den Strategie von Knecht Ruprecht (also entlang der Wege W_o **und** W_u) also **2 Elfeneinheiten bis 17 Uhr** und **14 Elfeneinheiten bis 23 Uhr** am Schlittenstartplatz an.

Rudolphs optimale Strategie:

Um Rudolphs optimale Strategie herausfinden zu können, müssen wir zuerst berechnen, wie viele Elfeneinheiten maximal bis 17 Uhr bzw. bis 23 Uhr am Schlittenstartplatz ankommen können.

Wir fangen an zu berechnen, wie viele Elfen bis 17 Uhr maximal am Schlittenstartplatz ankommen können. Bis 17 Uhr können maximal M viele Elfeneinheiten am Schlittenstartplatz ankommen, wenn es **keine** Strategie gibt, in der bis 17 Uhr mehr als M Elfeneinheiten ankommen. Wir wollen M berechnen:
Wie schon in der Strategie von Knecht Ruprecht beschrieben, kann entlang des Weges W_o maximal eine Elfeneinheit den Schlittenstartplatz bis 17 Uhr erreichen. Dabei erreichen nur Elfen den Schlittenstartplatz bis 17 Uhr, die zwischen 8 Uhr und 9 Uhr losgeschickt wurden entlang des Weges W_o losgeschickt werden.
Die Wege W_o und W_m teilen sich darüber hinaus den Wegabschnitt A am Anfang der Wege W_m und W_o. Es ist möglich, dass in einer Strategie zwischen 8 Uhr und 9 Uhr Elfen entlang beider Wege, also entlang W_m und W_o geschickt werden. Dabei muss aber gewährleistet sein, dass die Gesamtrate mit der Elfeneinheiten in beide Wege gemeinsam geschickt werden, zwischen 8 Uhr und 9 Uhr immer maximal eine Elfeneinheit pro Stunde ist. In jeder möglichen Strategie kann also zwischen 8 Uhr und 9 Uhr maximal eine Elfeneinheit über die Wege W_m und W_o in das Wegenetz geschickt werden. Diese Elfeneinheit erreicht insgesamt den Schlittenstartplatz bis 17 Uhr.
Genauso teilen sich die Wege W_m und W_u den Wegabschnitt am Ende des Weges

W_m. Wieder erreichen nur Elfen, die zwischen 8 Uhr und 9 Uhr in den Weg W_u geschickt werden, den Schlittenstartplatz pünktlich bis 17 Uhr. Elfen, die um 8 Uhr und x Minuten auf den Weg W_u geschickt werden, erreichen den Wegabschnitt B gleichzeitig mit Elfen, die zum Zeitpunkt 10 Uhr und x Minuten in den Weg W_m geschickt werden. In einer Strategie ist es wiederum möglich, dass Elfeneinheiten zwischen 10 Uhr und 11 Uhr in den Weg W_m geschickt werden und zwischen 8 Uhr und 9 Uhr in den Weg W_u. Dabei darf die Summe der Raten, mit denen Elfeneinheiten zwischen 10 Uhr und 11 Uhr in den Weg W_m geschickt werden, und der Raten, mit denen Elfeneinheiten zwischen 8 Uhr und 9 Uhr in den Weg W_u geschickt werden, nie eine Elfeneinheit pro Stunde überschreiten. In jeder möglichen Strategie summieren sich die Elfeneinheiten, die zwischen 10 Uhr und 11 Uhr auf den Weg W_m geschickt werden und die zwischen 8 Uhr und 9 Uhr auf den Weg W_u geschickt werden also maximal zu einer Elfeneinheit auf. Diese Elfeneinheit erreicht wieder insgesamt den Schlittenstartplatz bis 17 Uhr.
Zwischen 9 Uhr und 10 Uhr können die Elfen nur den Weg W_m nutzen (entlang der anderen Wege kommen sie nicht mehr rechtzeitig bis 17 Uhr an) und sie überschneiden sich nie mit Elfen, die einen der anderen Wege benutzen. Das heißt, dass zwischen 9 Uhr und 10 Uhr insgesamt eine weitere Elfeneinheit in den Weg W_m geschickt werden kann, die bis 17 Uhr am Schlittenstartplatz ankommt.

Das bedeutet also, dass in jeder Strategie **bis 17 Uhr maximal 3 Elfeneinheiten** am Schlittenstartplatz ankommen können:

- Eine Elfeneinheit, die zwischen 8 Uhr und 9 Uhr entlang der Wege W_o und W_m geschickt wird,
- eine Elfeneinheit, die zwischen 9 Uhr und 10 Uhr entlang des Weges W_m geschickt wird und
- eine Elfeneinheit, die insgesamt zwischen 8 Uhr und 9 Uhr entlang W_u und zwischen 10 Uhr und 11 Uhr entlang W_m geschickt wird.

Die Strategie vom Weihnachtsmann hat zum Beispiel diese Eigenschaft.

Mit einer ähnlichen Rechnung rechnen wir aus, wie viele Elfeneinheiten maximal bis 23 Uhr am Schlittenstartplatz ankommen können:
Wie schon in der Strategie von Knecht Ruprecht beschrieben, können entlang des Weges W_o maximal 7 Elfeneinheiten den Schlittenstartplatz bis 23 Uhr erreichen.

Dabei erreichen nur Elfen den Schlittenstartplatz bis 23 Uhr, die zwischen 8 Uhr und 15 Uhr losgeschickt wurden.
Die Wege W_o und W_m teilen sich darüber hinaus den Wegabschnitt A. Es ist wiederum möglich, dass zwischen 8 Uhr und 15 Uhr Elfen entlang beider Wege, also entlang von W_m und W_o geschickt werden. Dabei muss aber gewährleistet sein, dass die Gesamtrate mit der Elfeneinheiten in beide Wege gemeinsam geschickt werden zwischen 8 Uhr und 15 Uhr immer maximal eine Elfeneinheit pro Stunde ist. In jeder möglichen Strategie können also zwischen 8 Uhr und 15 Uhr maximal sieben Elfeneinheiten über die Wege W_m und W_o in das Wegenetz geschickt werden. Damit maximal viele Elfeneinheiten bis 23 Uhr ankommen, müssen die Elfeneinheiten die ganze Zeit mit einer Gesamtrate von einer Elfeneinheit pro Stunde in beide Wege gemeinsam geschickt werden. Die so geschickten sieben Elfeneinheiten erreichen insgesamt den Schlittenstartplatz bis 23 Uhr.
Genauso teilen sich die Wege W_m und W_o den Wegabschnitt am Ende des Weges W_m. Wieder erreichen nur Elfen, die zwischen 8 Uhr und 15 Uhr in den Weg W_u geschickt werden, den Schlittenstartplatz pünktlich bis 23 Uhr. Elfen, die zum Zeitpunkt x auf den Weg W_u geschickt werden, erreichen den Streckenabschnitt B gleichzeitig mit Elfen, die zwei Stunden später auf den Weg W_m geschickt werden. In einer Strategie ist es wiederum möglich, dass Elfeneinheiten zwischen 10 Uhr und 17 Uhr in den Weg W_m geschickt werden und zwischen 8 Uhr und 15 Uhr in den Weg W_u. Dabei darf die Summe der Raten, mit denen Elfeneinheiten zwischen 10 Uhr und 17 Uhr in den Weg W_m geschickt werden, und der Raten, mit denen Elfeneinheiten zwischen 8 Uhr und 15 Uhr in den Weg W_u geschickt werden, nie eine Elfeneinheit pro Stunde überschreiten. In jeder möglichen Strategie summieren sich die Elfeneinheiten, die zwischen 10 Uhr und 17 Uhr auf den Weg W_m geschickt werden und die zwischen 8 Uhr und 15 Uhr auf den Weg W_u geschickt werden also maximal zu sieben Elfeneinheiten auf.

Eine Strategie besteht also aus den Elfeneinheiten, die zwischen 8 Uhr und 15 Uhr gemeinsam auf die Wege W_m und W_o geschickt werden (maximal 7 Elfeneinheiten) und aus den Elfeneinheiten, die zwischen 8 Uhr und 15 Uhr auf den Weg W_u und zwischen 10 Uhr und 17 Uhr auf den Weg W_m geschickt werden (maximal 7 Elfeneinheiten). Es können also nicht meht als 14 Elfeneinheiten den Schlittenstartplatz bis 23 Uhr erreichen. Da z.B. in der Strategie von Knecht Ruprecht 14 Elfeneinheiten bis 23 Uhr am Schlittenstartplatz ankommen, ist **14 die maximale Anzahl an Elfeneinheiten, die bis 23 Uhr den Schlittenstartplatz erreichen können**.

Nun können wir beschreiben wie Rudolphs optimale Strategie aussieht. Nach Aufgabenstellung und der vorherigen Argumentation, suchen wir also eine Strategie, in der bis 15 Uhr eine Elfeneinheit am Schlittenstartplatz angekommen ist, bis 17 Uhr sollen 3 Elfeneinheiten angekommen sein und bis 23 Uhr insgesamt 14 Elfeneinheiten.
Entlang des Weges W_o bzw. W_u kann eine Elfeneinheit frühestens um 17 Uhr am Schlittenstartplatz angekommen sein. Um zu erreichen, dass eine Elfeneinheit um 15 Uhr am Schlittenstartplatz angekommen ist, muss also zwischen 8 Uhr und 9 Uhr eine Elfeneinheit in den Weg W_m geschickt werden.
Nun wollen wir zusätzlich erreichen, dass um 17 Uhr 3 Elfeneinheiten am Schlittenstartplatz angekommen sind und um 23 Uhr insgesamt 14. Damit 3 Elfeneinheiten bis 17 Uhr ankommen, könnten wir 3 Elfeneinheiten entlang des Weges W_m schicken (wie in der Strategie vom Weihnachtsmann), aber dann können wir bis 23 Uhr nicht mehr genug Elfeneinheiten schicken. Wir müssen uns also eine andere Strategie ausdenken.
Solange wir Elfeneinheiten mit der Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde entlang des Weges W_m schicken, können keine Elfen entlang des Weges W_o geschickt werden. Damit Elfen entlang des Weges W_o bis 17 Uhr den Schlittenstartplatz erreichen, müssen sie ohnehin bis 9 Uhr losgeschickt werden. Das ist nicht möglich, da wir bis 9 Uhr eine Elfeneinheit in den Weg W_m schicken. Die 3 Elfeneinheiten, die bis 17 Uhr den Schlittenstartplatz erreichen sollen, können also nur entlang der Wege W_m und W_u geschickt werden. Wenn wir nicht 3 Elfeneinheiten entlang des Weges W_m schicken, ist die einzige Möglichkeit, 3 Elfeneinheiten bis 17 Uhr zu schicken, dass von 8 Uhr bis 10 Uhr zwei Elfeneinheiten entlang des Weges W_m geschickt werden und von 8 Uhr bis 9 Uhr eine Elfeneinheit entlang des Weges W_u. So erreichen 3 Elfeneinheiten bis 17 Uhr den Schlittenstartplatz. Damit bis 23 Uhr 14 Elfeneinheiten ankommen, schicken wir dann von 9 Uhr bis 15 Uhr weitere 6 Elfeneinheiten in den Weg W_u und von 10 Uhr bis 15 Uhr insgesamt 5 Elfeneinheiten entlang des Weges W_o.
Rudolphs optimale Strategie sieht also insgesamt so aus:

- Schicke von 8 Uhr bis 10 Uhr insgesamt 2 Elfeneinheiten entlang des Weges W_m.
- Schicke von 8 Uhr bis 15 Uhr insgesamt 7 Elfeneinheiten entlang des Weges W_u.

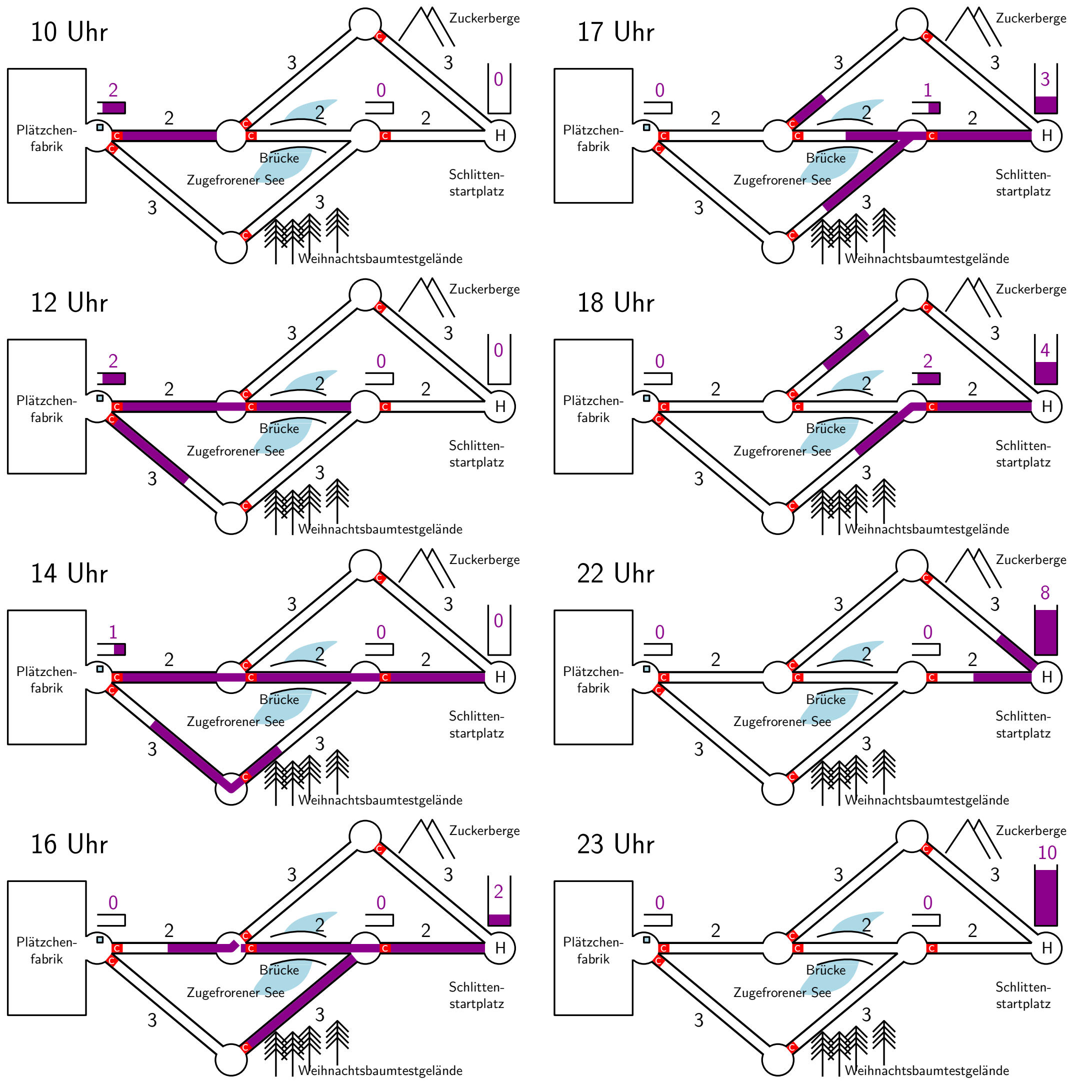
- Schicke von 10 Uhr bis 15 Uhr insgesamt 5 Elfeneinheiten entlang des Weges W_o.

Arbeitsplan der Elfen:

Ab 8 Uhr laufen die Elfeneinheiten mit einer Rate von 2 aus der Plätzchenfabrik. In den ersten zwei Stunden wollen alle Elfen (mit Rate 2) den kürzesten Weg W_m nehmen, denn damit sind sie trotz Wartezeit nach weniger als 8 Stunden Arbeit fertig. Im Vergleich dazu würden die Elfen, wenn sie sich für den Weg W_u oder W_o entscheiden würden, mindesten 8 Stunden bis zum Schlittenstartplatz brauchen. Zwischen 8 Uhr und 10 Uhr kommen also Elfen mit einer Rate von 2 Elfeneinheiten pro Stunde am ersten Checkpoint von Streckenabschnitt A an. Da der Checkpoint nur eine Elfeneinheit pro Stunde kontrollieren kann, bildet sich an diesem Checkpoint eine Warteschlange, die mit einer Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde wächst. Um 10 Uhr sind demnach 2 Elfeneinheiten in der Warteschlange vor dem ersten Checkpoint und somit beträgt die Wartezeit 2 Stunden. Das heißt für die folgenden Elfen dauert es 8 Stunden weiterhin den direkten Weg über die Brücke zu nehmen (inklusive anstehen) und genauso lange, wenn sie den unteren Weg W_u und die Schlange vermeiden. Es wird eine Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde weiterhin den Weg W_m nehmen und eine Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde den unteren Weg W_u, denn so behält die Warteschlange vor dem ersten Checkpoint konstant die Länge 2.
Wäre die Rate für den direkten Weg kleiner als 1, so würde die Schlange und damit die Wartezeit vor dem ersten Checkpoint kürzer werden und die Elfen auf dem unteren Weg hätten sich doch lieber für W_m entschieden. Andererseits wäre die Rate für W_m größer als 1 so würde die Schlange und damit die Wartezeit vor dem ersten Checkpoint länger werden, d.h. W_m würde länger als 8 Stunden und somit länger als W_u dauern. Die Elfen auf dem direkten Weg hätten also lieber W_u genommen.

Um 16 Uhr kommen die Elfen vom Weg W_m und Weg W_u gleichzeitig an dem Checkpoint vom Streckenabschnitt B an. Das heißt eine Gesamtrate von 2 Elfeneinheiten pro Stunde möchte diesen Checkpoint passieren. Es bildet sich also wieder eine Warteschlange, die mit einer Rate von einer Elfeneinheit pro Stunde wächst. Demnach hat die Warteschlange um 18 Uhr eine Länge von zwei Elfeneinheiten und sorgt damit für eine Wartezeit von zwei Stunden. Das heißt, für die Elfen lohnt es sich nun auch den oberen Weg W_o an den Zuckerbergen vorbei

zu nutzen.
Da die Elfen allerdings am Monitor schon die zukünftige Situation sehen, wissen die Elfen, die um 12 Uhr aus der Plätzchenfabrik kommen, dass sie, wenn sich sich für W_m entscheiden erst um 18 Uhr am Checkpoint vom Streckenabschnitt B sind und dort dann eine Schlange von zwei Elfeneinheiten gebildet hat.
Das heißt ab 12 Uhr nehmen alle Elfen W_o und W_u jeweils mit Rate eins, so wie in Knecht Ruprechts Strategie. Da bei W_o eine Wartezeit von 2 Stunden vor dem Streckenabschnitt A in Kauf genommen werden muss und bei W_u ebenfalls eine Wartezeit von 2 Stunden vor dem Streckenabschnitt B besteht, brauchen die Elfen also 10 Stunden für diese Strecken. Das heißt die Elfen, die um 13 Uhr aus der Plätzchenfabrik kommen, können nicht mehr vor 23 Uhr am Startplatz sein.
Es ergibt sich – wie auch der Abbildung entnommen werden kann, dass **3 Elfeneinheiten um 17 Uhr** am Startplatz sind und **10 Elfeneinheiten um 23 Uhr**.


10 Uhr
12 Uhr
14 Uhr
16 Uhr
17 Uhr
18 Uhr
22 Uhr
23 Uhr
Plätzchen-
fabrik
Zuckerberge
Brücke
Zugefrorener See
Schlitten-
startplatz
Weihnachtsbaumtestgelände
H

Nun haben wir alle Strategien beschrieben und wir erhalten ingesamt die folgende Tabelle:

Strategie	17 Uhr	23 Uhr
Weihnachtsmann	3	9
Ruprecht	2	14
Optimal (Rudolph)	3	14
Elfenarbeitsplan	3	10

Wir können jetzt alle Antwortmöglichenkeiten durchgehen und entscheiden, welche Aussagen richtig sind:

1. *Der Plan von Knecht Ruprecht führt zu einem optimalen Ergebnis, falls die Rentiere bis 23 Uhr abfliegen.*

   Diese Aussage ist **richtig**, da in einer optimalen Strategie bis 23 Uhr insgesamt 14 Elfeneinheiten am Schlittenstartplatz ankommen und in Knecht Ruprechts Strategie bis 23 Uhr genau 14 Elfeneinheiten den Schlittenstartplatz erreichen.

2. *In dem Arbeitsplan der Elfen sind die Wartezeiten vor den Checkpoints nie länger als zwei Stunden.*

   Diese Aussage ist **richtig**, wie der Beschreibung des Arbeitsplanes der Elfen und der Abbildungen entnommen werden kann.

3. *In Rudolphs optimaler Strategie gibt es Elfen, die später beim Rentierstartplatz ankommen als andere Elfen, obwohl sie früher losgehen müssen.*

   Diese Aussage ist **richtig**. Man betrachte die Elfen die in Rudolphs Strategie genau um 8 Uhr entlang des Weges W_u losgehen. Diese kommen um 17 Uhr an. Die Elfen, die um 9 Uhr entlang des Weges W_m losgehen, kommen allerdings um 16 Uhr an. Sie kommen also früher an, obwohl sie später losgehen.

4. *Wenn die Rentiere um 17 Uhr zum letzten mal starten, ist der Arbeitsplan, den die Elfen befolgen, genauso gut, wie die Strategie vom Weihnachtsmann, das heißt es kommen genauso viele Plätzchen an.*

   Diese Aussage ist ebenfalls **richtig**, wie der Tabelle entnommen werden kann.

5. *In der Strategie vom Weihnachtsmann erreichen bis 23 Uhr 5 Elfen-Einheiten weniger den Rentier-Startplatz als in Rudolphs optimaler Strategie.*

   Diese Aussage ist ebenfalls **richtig**, wie der Tabelle entnommen werden kann.

6. *In dem Arbeitsplan der Elfen entscheiden sich manche Elfen, den oberen Weg zu benutzen.*

   Diese Aussage ist **richtig** (siehe Beschreibung des Elfenarbeitsplanes).

7. *Die Strategie vom Weihnachtsmann ist optimal, wenn die Rentiere um 17 Uhr ihre letzte Lieferung starten.*

   Diese Aussage ist **richtig**, da in einer optimalen Strategie bis 17 Uhr ingesamt 3 Elfeneinheiten am Schlittenstartplatz ankommen und der Strategie des Weihnachtsmanns bis 17 Uhr genau 3 Elfeneinheiten den Schlittenstartplatz erreichen.

8. *Im Arbeitsplan der Elfen kommen die Elfen, die früher aus der Plätzchenfabrik kommen, auch früher am Startplatz an.*

   Diese Aussage ist **richtig** (siehe Beschreibung des Elfenarbeitsplanes). Würden Elfen, die früher aus der Fabrik kommen als andere Elfen, später am Startplatz ankommen als die anderen Elfen, so haben diese nicht den schnellsten Weg gewählt, denn sie könnten stattdessen auch den Weg der anderen Elfen wählen und wären somit schneller am Ziel. Im Arbeitsplan nehmen aber alle Elfen den schnellsten Weg.

9. *In Rudolphs optimaler Strategie würden mindestens 1,5-mal so viele Elfeneinheiten bis 23 Uhr am Rentier-Startplatz ankommen, wie in dem Arbeitsplan, den die Elfen befolgen.*

   Diese Aussage ist **falsch**. In Rudolphs optimaler Strategie kommen bis 23 Uhr genau 14 Elfeneinheiten am Schlittenstartplatz an, im Arbeitplan der Elfen genau 10. Es kommen also 1,4-mal so viele bis 23 Uhr am Schlittenstartplatz an.

10. *In Rudolphs optimaler Strategie und dem Arbeitsplan der Elfen werden die Elfen in einem bestimmten Zeitintervall nach Knecht Ruprechts Strategie geschickt.*

Diese Aussage ist **richtig**. In dem Arbeitsplan der Elfen gehen die Elfen zwischen 12 Uhr und 13 Uhr nach Knecht Ruprechts Strategie los und in der Strategie von Rudolph zwischen 10 Uhr und 15 Uhr.

11 Die U-Bahn des Weihnachtsmanns

Autor: Niels Lindner (ZIB)
Projekt: MI7 – *Routing Structures and Periodic Timetabling*

11.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist besonders stolz auf das U-Bahn-Netz am Nordpol und hat einen großen Netzplan in seinem Büro hängen, siehe Abbildung 4.

Aber immer, wenn sein Kumpel Niko vorbeikommt, gibt es eine sehr angeregte Diskussion über die Schönheit von Netzplänen. Beim nächsten Besuch will der Weihnachtsmann Niko mit einem besonders schönen Netzplan des U-Bahn-Nordpol-Netzes überraschen. Beide sind sich darüber einig, dass ein Netzplan *oktilinear* sein sollte, d.h., es müssen folgende zwei Eigenschaften erfüllt sein:

1. Die Stationen müssen so angeordnet sein, dass die Strecken (das sind die Gradenstücke zwischen den Stationen) einen Steigungswinkel haben, der ein ganzzahliges Vielfaches von 45° beträgt (horizontal bezogen).

2. Es gibt keine sich kreuzenden Strecken.

Außerdem gibt es noch folgende Merkmale, die einen Netzplan beschreiben:

- *schräge Strecken*: Eine Strecke ist schräg, wenn sie einen Steigungswinkel von 45°, 135°, 225° oder 315° hat.

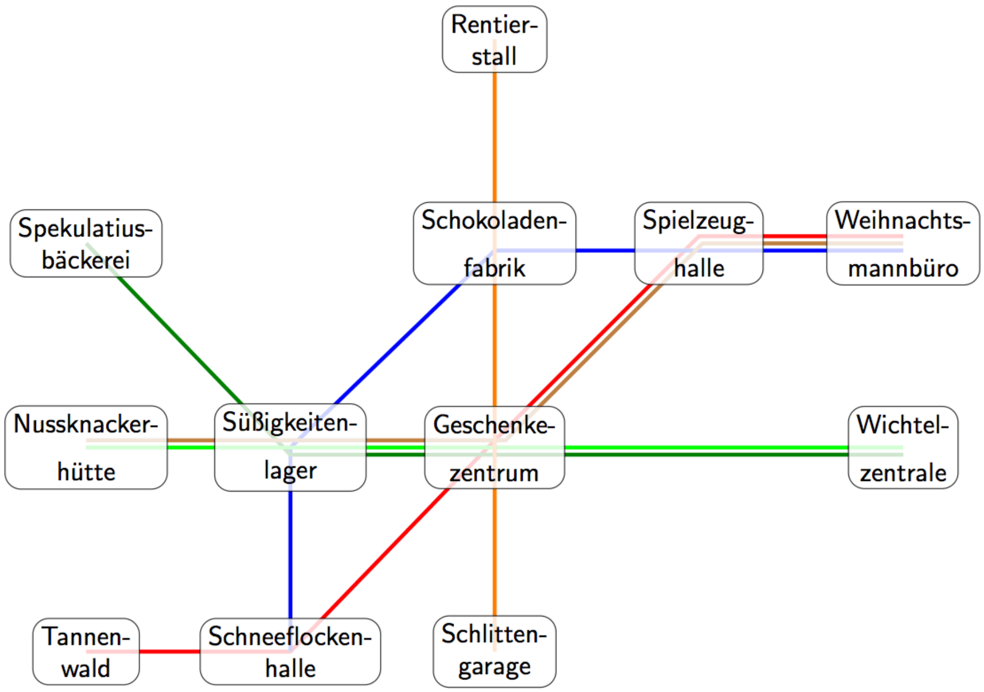


Abbildung 4: Netzplan aus dem Weihnachtsmannbüro. Das U-Bahn-Netz besteht aus 12 Stationen und 6 Linien, die sich aus einzelnen Strecken zusammensetzen. Auf einer Strecke können mehrere Linien verlaufen, z.B. gibt es 3 Linien auf der Strecke zwischen Süßigkeitenlager und Geschenkezentrum.

- *Krümmungszahl einer Linie*: Die Krümmungszahl einer Linie ist die Anzahl Stationen, die die Linie nicht in einem Winkel von 180° durchläuft, Anfangs- und Endpunkt der Linie ausgenommen.

- *Kreuzen zweier Linien*: Zwei Linien kreuzen sich in einer Station s, wenn sich ihre Linien(wege) in s schneiden und sie auf mindestens einer an s anliegenden Strecke gemeinsam verlaufen.

Der Netzplan im Büro des Weihnachtsmanns ist *oktilinear*. Er hat 4 schräge Strecken. Die Krümmungszahl der roten Linie ist 2 und die Krümmungszahl summiert über alle Linien ist 7. Es kreuzen sich z.B. die beiden grünen Linien in der Station Süßigkeitenlager oder die blaue und rote Linie in der Station Spielzeughalle. (Der Schnittpunkt ist in der Abbildung unter den Stationen versteckt.) Im Gegensatz dazu kreuzen sich die blaue und orange Linie an der Station Schokoladenfabrik nach obiger Definition nicht, weil sie weder direkt davor noch danach über eine gemeinsame Strecke verlaufen.

Der Weihnachtsmann hat alle Wichtel gebeten, sich Gedanken darüber zu machen, wie man das U-Bahn-Netz vom Nordpol noch darstellen kann. Während er sich ihre Aussagen ansieht und dabei überlegt, wie wohl der schönste Netzplan aussieht, bekommt er die Ahnung, dass sich ein Fehler eingeschlichen hat.

Welche der folgenden Aussagen ist **nicht richtig**?

Antwortmöglichkeiten:

1. Wenn die Stationen an den Stellen bleiben, wie sie auf dem Netzplan im Weihnachtsmannbüro sind, dann gibt es keine Möglichkeit die Linien kreuzungsfrei zu zeichnen.
2. Es gibt aber eine oktilineare Darstellung des Netzes, in der sich keine Linien kreuzen.

3. In jeder oktilinearen Darstellung ist die Summe der Krümmungszahlen der beiden grünen Linien größer als 0.

4. Es gibt keine oktilineare Darstellung, in der die blaue Linie Krümmungszahl 0 hat.

5. Es gibt eine oktilineare Darstellung, in der die blaue Linie eine kleinere Krümmungszahl hat als die braune Linie.

6. Unter allen oktilinearen Darstellungen ist die kleinstmögliche Summe der Krümmungszahlen aller Linien 4.

7. Es gibt eine oktilineare Darstellung des Netzes, in der die 12 Stationen in einem Raster von 4×3 Punkten angeordnet sind.

8. Es gibt eine oktilineare Darstellung, die mit genau 2 schrägen Strecken auskommt.

9. In jeder oktilineare Darstellung führen mindestens 3 Linien über schräge Strecken.

10. Falls die von vielen gewünschte Linie, die die Stationen Schlittengarage über das Süßigkeitenlager zur Spekulatiusbäckerei verbinden würde, eingeführt werden sollte, so ist es nicht möglich, eine oktilineare Darstellung des neuen Netzes anzufertigen.

Projektbezug:

Das Projekt MI7 - *Routing Structures and Periodic Timetabling* - beschäftigt sich mit der Optimierung von Fahrplänen, sodass Fahrgäste so wenig wie möglich warten müssen. Dabei wird die Auswahl der Fahrtroute in die Erstellung des Fahrplans miteinbezogen. Die Visualisierung von Verkehrsnetzen führt auf eine Reihe schwieriger Probleme, wie z.B. das Finden oktilinearer Darstellungen und das Minimieren von Krümmungen und Kreuzungen.

11.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

1. Die dunkelgrüne und braune Linie kreuzen sich immer: Vor dem Süßigkeitenlager liegt die dunkelgrüne über der braunen; hinter dem Geschenkezentrum ist es umgekehrt.

2. Eine kreuzungsfreie oktilineare Darstellung entsteht z.B. durch folgende Schritte:

   - Braune und rote Linie zwischen Geschenkezentrum und Weihnachtsmannbüro tauschen.
   - Die blaue Linie kommt zwischen Spielzeughalle und Weihnachtsmannbüro nach ganz oben.
   - Die Stationen Spekulatiusbäckerei und Nussknackerhütte tauschen ihre Plätze.

3. Es ensteht eine positive Krümmungszahl dadurch, dass die beiden grünen Linien zwischen Wichtelzentrale und Süßigkeitenlager über die gleichen Strecken laufen, sich danach aber trennen.

4. Das Geschenkezentrum ist direkt mit der Schneeflockenhalle, dem Süßigkeitenlager, der Schokoladenfabrik und der Spielzeughalle verbunden. Wäre die blaue Linie gerade, so lägen auch diese vier Stationen auf einer Geraden. Damit blieben aber auf jeder Seite der Geraden nur jeweils drei mögliche Winkel für die vier Verbindungsstrecken zum Geschenkezentrum übrig. Also ist die blaue Linie in jedem Fall gekrümmt.

5. Ein Beispiel für eine Darstellung, in der die blaue Linie Krümmungszahl 1 und die braune 2 hat, entsteht wie folgt: Die Stationen Schokoladenfabrik, Spielzeughalle, Weihnachtsmannbüro und Rentierstall werden alle um die gleiche Länge nach links verschoben, sodass die blaue Linie in der Schokoladenfabrik um 90° nach rechts abknickt.

6. An den Stationen Süßigkeitenlager, Spielzeughalle und Geschenkezentrum erzeugen die Abzweigungen immer jeweils eine Krümmungszahl von mindestens 1 - siehe (3). Zusätzlich wissen wir von (4), dass die blaue Linie zwischen Schneeflockenhalle und Spielzeughalle nicht gerade sein kann. Also ist

die totale Krümmungszahl mindestens 4. Für eine oktilineare Darstellung mit dieser Krümmungszahl siehe Abb. 5.

7. Ausgehend von der Darstellung in der Aufgabe genügt es, folgende Verschiebungen vorzunehmen:

   - Rentierstall zwischen Spekulatiusbäckerei und Schokoladenfabrik,
   - Weihnachtsmannbüro unter Spielzeughalle und rechts von Geschenkezentrum,
   - Wichtelzentrale unter Weihnachtsmannbüro und rechts von Schlittengarage.

8. Das Netz enthält folgende Dreiecke:

   - Schneeflockenhalle-Geschenkezentrum-Süßigkeitenlager,
   - Geschenkezentrum-Spielzeughalle-Schokoladenfabrik.

   Sie erzeugen jeweils eine schräge Strecke. Eine Darstellung, die genau 2 schräge Strecken benötigt, findet sich in Abb. 6.

9. Falsch: Es ist möglich, eine oktilineare Darstellung zu konstruieren, in der nur zwei Linien über schräge Strecken verlaufen: In Abb. 7 sind dies die blaue und orange Linie.

10. Die Strecke Süßigkeitenlager-Geschenkezentrum ist dann eine Seite von insgesamt 3 Dreiecken, wobei die dritten Punkte jeweils Schokoladenfabrik, Schneeflockenhalle und Schlittengarage sind. Wegen der Oktilinearität sind diese Dreiecke jeweils gleichschenklig und rechtwinklig, und die Strecke von Süßigkeitenlager bis Geschenkezentrum ist entweder Basis oder Hypotenuse. Damit können insgesamt nur 6 Dreiecke an diese Strecke angelegt werden, siehe Abb. 8.

    Benutzt man drei von diesen Dreiecken, schneiden sich aber immer zwei Seiten verschiedener Dreiecke, sodass keine kreuzungsfreie oktilineare Darstellung entstehen kann.

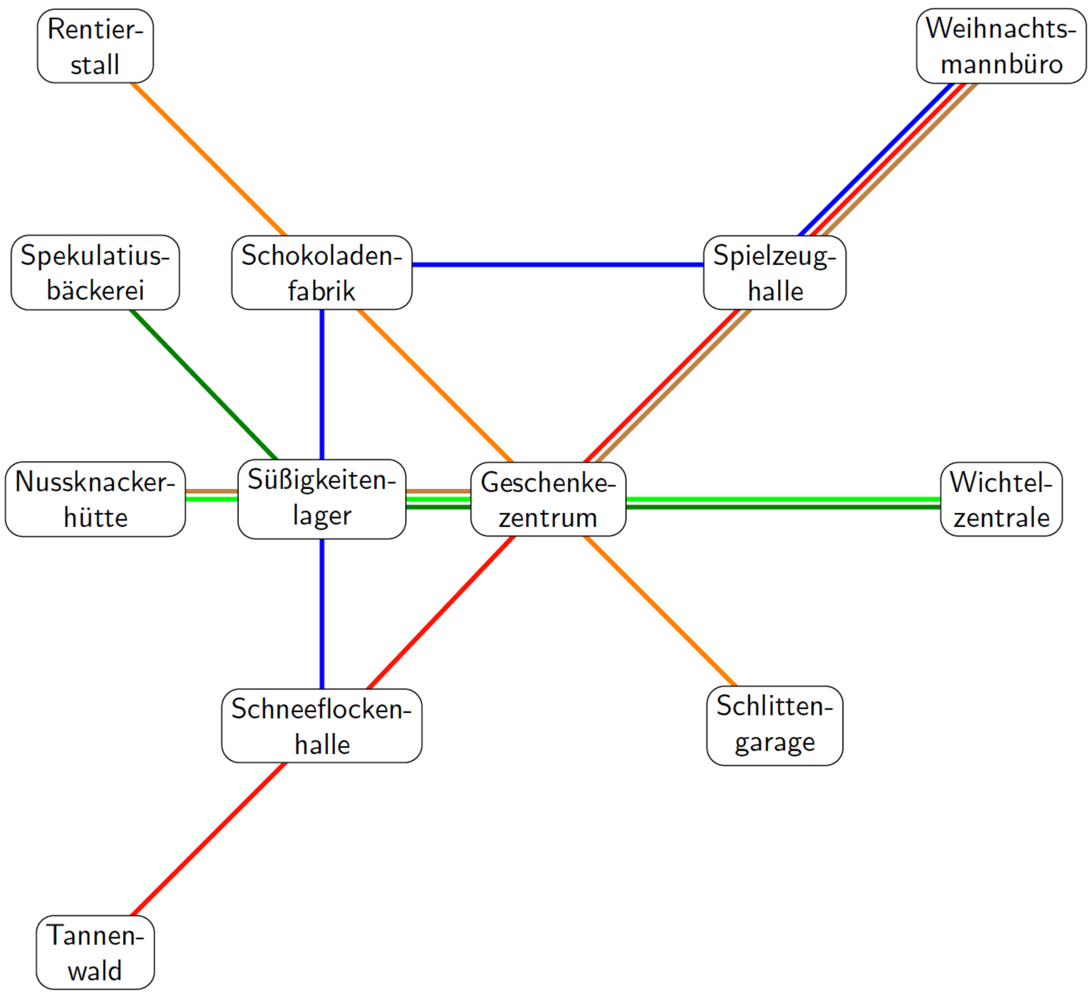


Abbildung 5: Zu Aussage 6: Oktilineare Darstellung mit minimaler totaler Krümmungszahl

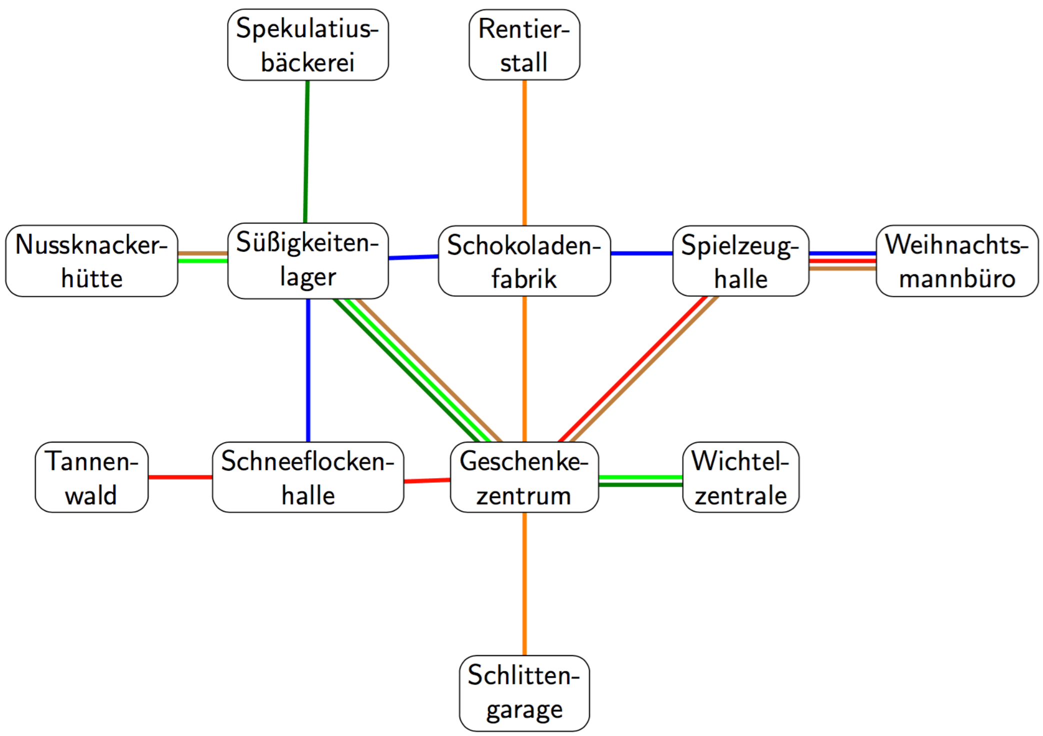


Abbildung 6: Zu Aussage 8: Oktilineare Darstellung mit minimaler Anzahl schräger Kanten

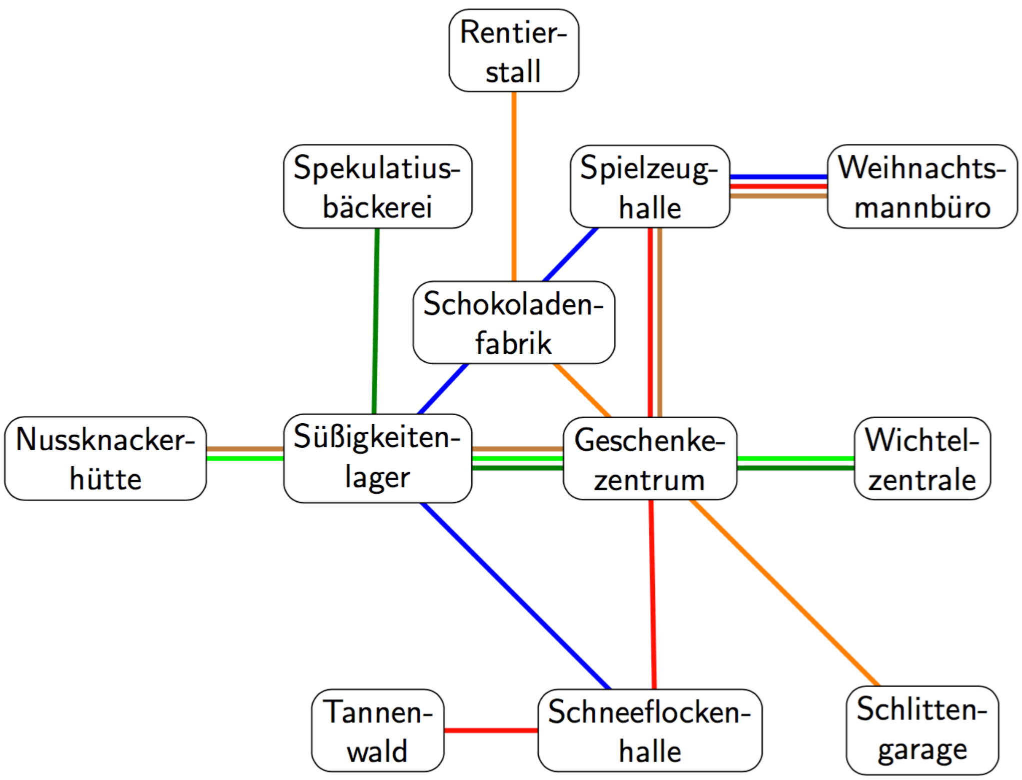


Abbildung 7: Zu Aussage 9: Nur zwei Linien über schräge Kanten

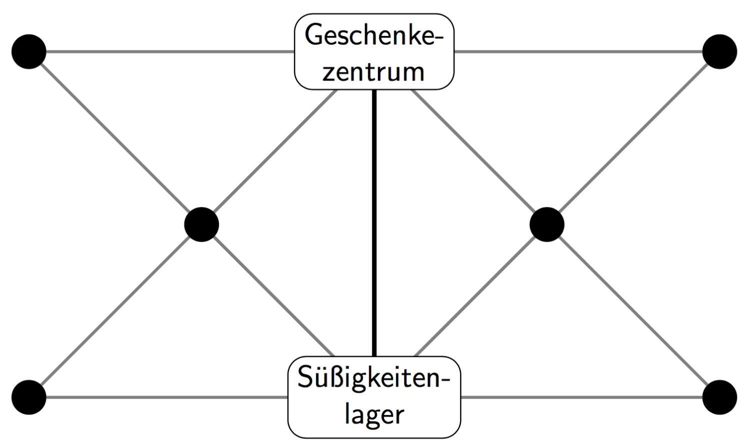


Abbildung 8: Zu Aussage 10: 6 Möglichkeiten für Dreiecke

12 Zielscheibe

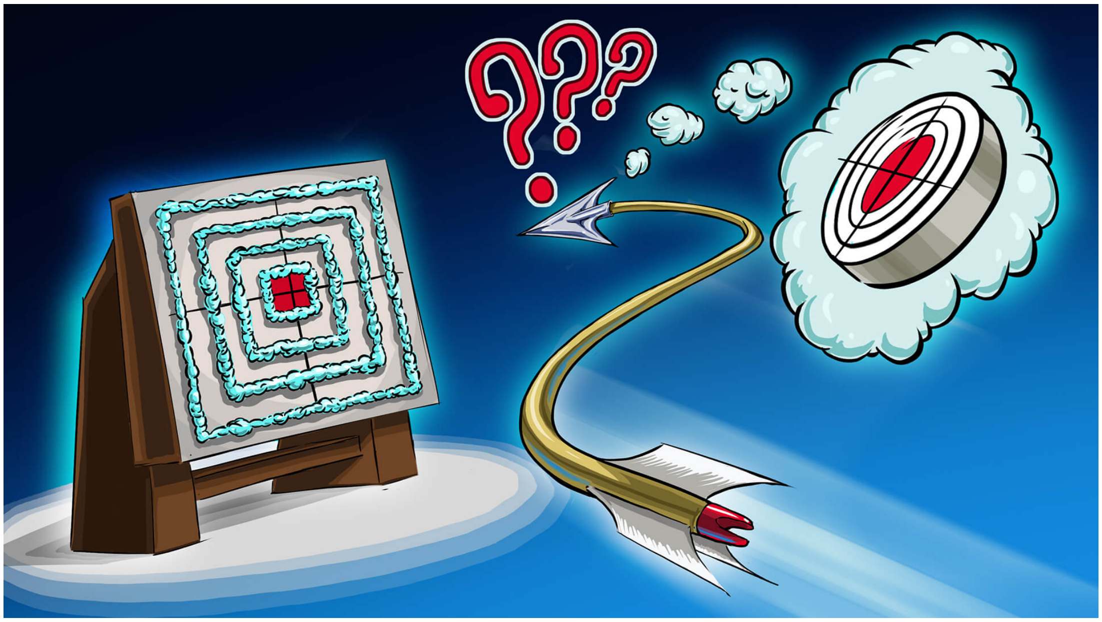
Autoren: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven), Falk Ebert (HU Berlin)

12.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht hat auch in diesem Jahr wieder am IronGnome 2017 teilgenommen – dem wahrscheinlich härtesten Sportwettbewerb aller Zeiten. Nach Schlittenziehen, Eismeerschwimmen und Tiefschneelaufen kam noch ein vierter Wettbewerb: Bogenschießen! Dabei mussten die Teilnehmer ein weit entferntes quadratisches Ziel treffen. Ruprecht erinnert sich: *„Ich bin kein besonders guter Bogenschütze. Ich treffe das Ziel, aber bei meiner Genauigkeit ist jeder Punkt auf der Zielscheibe gleichwahrscheinlich.“*

Für das Treffen der Zielscheibe erhält man einen Punkt. Dann wird der Abstand des Auftreffpunkts zu den Seiten des Quadrats und zum Mittelpunkt bestimmt. Wenn der Pfeil näher am Mittelpunkt als zur nächstgelegenen Quadratseite auftrifft, erhält man einen zweiten Punkt.

Aufgabe: Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Ruprecht mit seinem ersten Schuss zwei Punkte erzielt (gerundet auf zwei Dezimalstellen)?



Antwortmöglichkeiten:

1. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.16.
2. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.17.
3. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.18.
4. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.19.
5. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.20.
6. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.21.
7. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.22.
8. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.23.
9. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.24.
10. Die Wahrscheinlichkeit ist ≈ 0.25.

12.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Lösung (mittels Integralrechung)

Wir betten das Ziel in ein Quadrat mit Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$ ein. Der Punkt (x, y) hat dann den Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ zum Mittelpunkt (0,0) des Quadrats und die Abstände $1 - x$, $1 - y$, $1 + x$, $1 + y$ zum rechten, oberen, linken und unteren Rand. Der Punkt ist also näher am Mittelpunkt als am oberen Rand, wenn

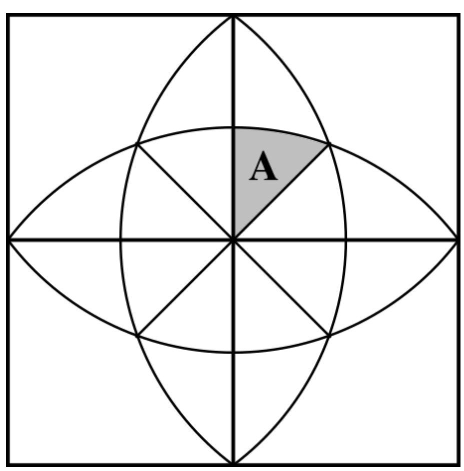
$$\sqrt{x^2 + y^2} < 1 - y.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$y \; < \; \frac{1}{2}(1 - x^2).$$

Diese Ungleichung beschreibt die Punkte unterhalb der Parabel $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$. Die Menge M der Punkte, die näher am Mittelpunkt als an der jeweils nächsten Quadratseite liegen, ist die Schnittmenge von vier durch Parabeln begrenzten Flächen.

In der folgenden Graphik ist außerdem erkennbar, dass der Flächeninhalt von M gleich dem von acht Kopien der Fläche A ist, welche durch $y \leq \frac{1}{2}(1 - x^2)$, $x \geq 0$ and $x \leq y$ beschrieben wird.



Man rechnet leicht nach, dass die zwei begrenzenden Kurven $y = \frac{1}{2}(1-x^2)$ und $y = x$ sich bei $(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$ schneiden. Folglich ist die Fläche von A gegeben als

$$\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{2}(1-x^2) - x \,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{2}-1} \quad = \quad \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{6}$$

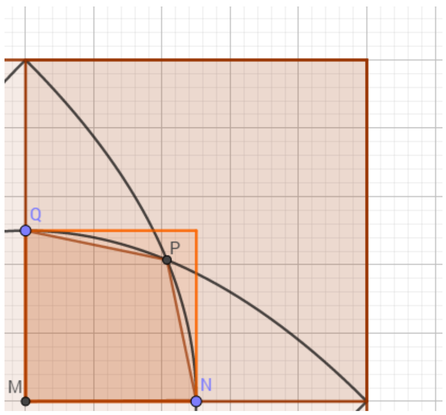
Die Wahrscheinlichkeit, dass Ruprecht zwei Punkte erreicht, ist gleich dem Verhältnis der Fläche von M zur Gesamtfläche des Quadrats. Die Fläche von M ist acht mal die Fläche A, und die Fläche des Quadrats ist 4. Die Gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach $8\frac{A}{4} = (4\sqrt{2}-5)/3 \approx 0.22$, und damit ist **Antwort 7** korrekt.

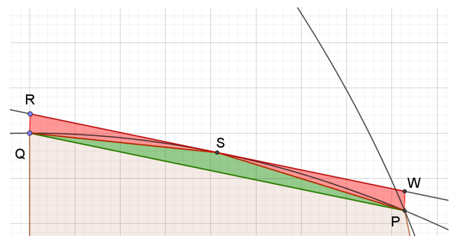
Lösung (ohne Integralrechung)

Wer nicht mit Integralrechung vertraut ist, kann die Lösung auch durch Ausschluss falscher Lösungsmöglichkeiten ermitteln. Wir nutzen die gleiche Einbettung wie bisher und betrachten dazu nur den ersten Quadranten der Zielscheibe. Die Wahrscheinlichkeit, in diesem Quadranten auch den in diesem Quadranten liegenden Teil $M_{\frac{1}{4}}$ von M zu treffen, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, M im gesamten Quadrat zu treffen. Und da die Fläche des Quadranten 1 beträgt, entspricht die Fläche von $M_{\frac{1}{4}}$ der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Der Flächeninhalt von $M_{\frac{1}{4}}$ lässt sich durch den Flächeninhalt eines ein- und eines umbeschriebenen Quadrats abschätzen. Das kleinere hat die Seitenlänge $\sqrt{2}-1$ und das größere die Seitenlänge $\frac{1}{2}$. Folglich gilt $(\sqrt{2}-1)^2 < area(M_{\frac{1}{4}}) < \frac{1}{4}$. Damit können wir bereits **a, b** und **j** ausschließen. Wenn wir das Viereck $\square(MNPQ)$ als eine bessere untere Schranke betrachten, erhalten wir $area(\square(MNPQ)) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) < M_{\frac{1}{4}}$. (Schneidet man entlang einer Parallelen zu MN durch P ein Dreieck ab und fügt es rechts neben $\overline{NP}$ wieder an, erhält man ein Rechteck mit Seitenlängen $\frac{1}{2}$ und $\sqrt{2}-1$.) Damit lassen sich **c, d** und **e** ausschließen.

Offenbar müssen wir noch präziser bei der Abschätzung werden. Als nächstes fügen wir kleine Dreiecke an den Seiten $\overline{NP}$ und $\overline{PQ}$ an.





Die Spitze S hat ihre x-Koordinate mittig zwischen P and Q bei $x = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ und die y-Koordinate bei $\frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}$. S befindet sich damit $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ über dem Mittelpunkt von $\overline{PQ}$. Das Dreieck ΔQPS hat damit eine Fläche von $area(\Delta QPS) = \frac{1}{2}\left((\sqrt{2}-1)\cdot(\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4})\right)$. Wir müssen die Fläche $area(\Delta QPS)$ zweimal zu $area(\square(MNPQ))$ hinzufügen (das zweite Dreieck neben $\overline{NP}$). Allerdings sieht man auch, dass das Hinzufügen des Parallelograms $\square PWRQ$, welches die doppelte Fläche wie ΔQPS hat, den Flächeninhalt unter der Parabel überschätzt. Wir können also folgende Abschätzungen angeben:

$$\begin{aligned} area(\square(MNPQ)) + 2area(\Delta QPS) &< area(M_{\frac{1}{4}}) \\ &< area(\square(MNPQ)) + 4area(\Delta QPS). \end{aligned}$$

Einsetzen der berechneten Werte liefert

$$0.21599... < area(M_{\frac{1}{4}}) < 0.22487...,$$

und damit bleibt nur **7** als Antwort übrig.

Anmerkung: Die Vorgehensweise bei dieser Lösung entspricht im großen und ganzen der sogenannten *Trapezregel*. Dabei wird die Fläche unter einer Kurve durch Trapeze angenähert. Und dieses Verfahren ist eines der am weitesten verbreiteten zur numerischen Bestimmung von Integralen.

13 Der beste Kartentrick aller Zeiten?

Autor: Adrian Ruf (University of Oslo)

13.1 Aufgabe

Der Zauberwichtel Michael kommt aufgeregt zum Weihnachtsmann gerannt: „Weihnachtsmann, Weihnachtsmann, ich habe einen unglaublichen neuen Kartentrick entwickelt. Den besten Kartentrick aller Zeiten!“, rief er schon von Weitem. „Nicht so hastig mein lieber Freund.“ sagt der Weihnachtsmann, „Zeig mal her!“
Noch etwas nervös beginnt der Zauberwichtel ein normales Kartendeck mit 52 Karten (4 Farben: $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$, jeweils 2, 3, …, 10, Bube, Dame, König, Ass) zu mischen. Dann sagt er zum Weihnachtsmann: „Bitte zieh aus diesem Kartendeck fünf beliebige Karten, so dass ich sie nicht sehen kann. Wenn du das gemacht hast, zeige die fünf Karten bitte meinem Assistenzwichtel Kleber.“
Nachdem der Weihnachtsmann fünf Karten ausgesucht hat und diese dem Assistenzwichtel gezeigt hat, fährt der Zauberwichtel Michael fort: „Kleber wird mir jetzt nacheinander vier der von dir ausgesuchten Karten geben und dir die fünfte zurückgeben. Aha, wir haben hier die $\spadesuit$ 7, dann die $\heartsuit$ Dame, die $\diamondsuit$ 3 und zu guter Letzt die $\clubsuit$ 8. Es ist jetzt nur noch eine Karte in deiner Hand, eine Karte, welche nur du und der Assistenzwichtel gesehen habt. Und diese Karte, mein lieber Weihnachtsmann, ist der $\spadesuit$ König.“
Tatsächlich war es der $\spadesuit$ König, welchen der Weihnachtsmann auf der Hand hielt. Völlig verblüfft von diesem Trick bedankt sich der Weihnachtsmann bei dem Zauberwichtel für diese Präsentation und gratuliert ihm zu der Erfindung dieses unglaublichen Kartentricks. Insgeheim aber will der Weihnachtsmann na-

türlich gerne wissen, wie der Zauberwichtel das angestellt hat. Tagelang zermartert er sich das Gehirn und versucht die Methode herauszufinden, mit der der Zauberwichtel Michael die letzte Karte herausgefunden hat. Er ist sich sicher, dass Michael ungezinkte Karten benutzt hat, keine versteckten Kameras installiert wurden und es auch sonst absolut fair zuging.

Der Weihnachtsmann überlegt sich Folgendes: Der Zauberwichtel bekam von dem Assistenzwichtel vier Karten. Folglich blieben 48 Karten übrig, von denen eine die Karte des Weihnachtsmannes war. Der Zauberwichtel bekam keine geheimen Informationen von dem Assistenzwichtel, jedoch könnte die Reihenfolge, in der der Assistenzwichtel dem Zauberwichtel die vier Karten überreichte, eine Rolle spielen. Aber es gibt ja nur $4! = 24$ Möglichkeiten vier verschiedene Karten anzuordnen, nicht genug, um eine von $52 - 4 = 48$ Karten eindeutig zu identifizieren. Mehrere Wochen verstreichen und die Produktion der Weihnachtsgeschenke leidet, denn der Weihnachtsmann denkt noch immer über den Kartentrick nach. Dann endlich kommt ihm die zündende Idee und er weiß endlich, wie der Zauberwichtel es angestellt hat. Er bestellt den Zauberwichtel in sein Büro und sagt: „Ha, jetzt habe ich endlich herausgefunden, wie dein Zaubertrick funktioniert."

„Respekt! Aber was soll man auch von einem Mann erwarten, der seit Jahren immer im Winter mit kniffligen Problemstellungen zu kämpfen hat."
Der Weihnachtsmann fährt fort: „Du hast die Informationen tatsächlich nur durch die Rückgabe der Karten codiert. Richtig? Keine sonstigen geheimen Zeichen mit Deinem Assistenten. Denn die hätte ich bemerkt." Michael nickt.
„Aber der Knackpunkt war, dass in der Karte, die Kleber behalten hat, noch eine weitere Information steckt. Er kann sie sich ja aussuchen und Dir damit die Suche erleichtern. Zum Beispiel sind in 5 Karten ja garantiert zwei mit gleicher Farbe. Und davon kann er eine auswählen." Michael nickt wieder anerkennend.
„Tja, mein Lieber. Aber der beste Kartentrick aller Zeiten ist es nicht. Ich bin mir sicher, dass ich den Trick sogar mit mehr als 52 (paarweise verschiedenen) Spielkarten (aus denen dann weiterhin fünf ausgesucht werden) machen kann. Das wäre dann ein noch viel besserer Trick als deiner. Ha! Und ich brauche dafür nicht einmal die 4 Farben $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$, solange alle Karten verschieden sind."
Michaels Grinsen gefriert ihm auf den Lippen. Daraufhin weiß der Zauberwichtel nichts zu erwidern.

Kannst du Michael helfen und herausfinden, welche der folgenden Aussagen bezüglich der Anzahl der Karten in dem verbesserten Trick vom Weihnachtsmann richtig ist?

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Weihnachtsmann hat sich geirrt, $n = 52$ ist bereits die maximale Anzahl an Karten, mit denen der Trick ausgeführt werden kann.
2. Der Trick kann mit maximal $n = 54$ (paarweise verschiedenen) Karten ausgeführt werden.
3. Der Trick kann mit maximal $n = 60$ (paarweise verschiedenen) Karten ausgeführt werden.
4. Der Trick kann mit maximal $n = 120$ (paarweise verschiedenen) Karten ausgeführt werden.
5. Der Trick kann mit maximal $n = 124$ (paarweise verschiedenen) Karten ausgeführt werden.
6. Der Trick kann mit maximal $n = 125$ (paarweise verschiedenen) Karten ausgeführt werden.

7. Der Trick kann mit maximal $n = 255$ (paarweise verschiedenen) Karten ausgeführt werden.
8. Der Trick kann mit maximal $n = 256$ (paarweise verschiedenen) Karten ausgeführt werden.
9. Der Trick kann mit maximal $n = 257$ (paarweise verschiedenen) Karten ausgeführt werden.
10. Der Trick kann mit beliebig vielen (paarweise verschiedenen) Karten ausgeführt werden.

13.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Für die Neugierigen unter euch kommt hier zunächst einmal, wie der Trick vom Zauberwichtel funktioniert. In der Tat gibt es nur $4! = 24$ Möglichkeiten vier Karten anzuordnen, aber der Weihnachtsmann hat zuerst übersehen, dass der Assistenzwichtel noch eine weitere Entscheidung trifft und zwar, welche der fünf Karten der Weihnachtsmann behält. Und darin liegt auch der Trick. Da fünf Karten gezogen werden, es aber nur vier Farben ($\diamondsuit$,$\heartsuit$,$\spadesuit$ und $\clubsuit$) gibt, hat der Weihnachtsmann in jedem Falle zwei Karten von gleicher Farbe. Der Assistenzwichtel kann dem Zauberwichtel also zum Beispiel zuerst eine dieser zwei Karten geben und damit schon mal die Farbe mitteilen (im Beispiel in der Aufgabe war das Paar $\spadesuit$ 7 und $\spadesuit$ König und der Assistenzwichtel gab dem Zauberwichtel die $\spadesuit$ 7 zuerst).
Wenn der Zauberwichtel die erste Karte bekommen hat, kennt er also bereits die Farbe, er muss nur noch den Wert der Karte übermittelt bekommen. Insgesamt gibt es 13 Kartenwerte (Ass, 2,. . . ,10, Bube, Dame, König), da der Zauberwichtel jedoch schon eine Karte der gefragten Farbe bekommen hat, bleiben nur zwölf mögliche Werte übrig.
Durch Manipulation der Reihenfolge, in der der Assistenzwichtel dem Zauberwichtel die übrigen drei Karten gibt, kann er $3! = 6$ Mitteilungen kodieren, zu wenig, um eine von zwölf Kartenwerten auszuwählen. Es ist also noch ein wenig mehr Cleverness vonnöten.
Die verbleibende Wahl, die der Assistenzwichtel trifft, ist welche der beiden Karten gleicher Farbe er dem Zauberwichtel gibt und welche beim Weihnachtsmann bleibt. Wenn man sich die Kartenwerte als Zahlen von 1 bis 13 vorstellt, dann ist es immer möglich, auf eine der beiden Karten(werte) eine Zahl zwischen 1 und 6 zu addieren, so dass das Ergebniss modulo 13 der Kartenwert der anderen Karte ist. Hat man zum Beispiel die Kartenwerte Ass (entspricht 1) und König (entspricht 13), so kann man auf 13 die Zahl 1 hinzuzählen und erhält $14 \bmod 13 = 1$, was der Wert der anderen Karte ist (andersherum würde das nicht gehen).
Der Assistenzwichtel schaut also zuerst nach dem gleichfarbigen Paar in der Kartenhand des Weihnachtsmannes und wählt dann die Karte aus diesem Farbenpaar aus, auf deren Kartenwert man eine Zahl zwischen 1 und 6 addieren kann, so dass man (modulo 13) den Kartenwert der anderen erhält, und gibt sie zuerst

dem Zauberwichtel. Anschließend muss er mit der Reihenfolge der anderen drei Karten nur noch die entsprechende Zahl zwischen 1 und 6 kodieren, damit der Trick funktioniert.

Für diesen letzten Schritt gibt es viele Möglichkeiten, z.B. kann man im Vorfeld eine Referenzreihenfolge aller 52 Karten absprechen (z.B. nach Kartenwert Ass,2,3,...,10,Bube, Dame, König und diese Blöcke von je 13 Karten dann nach Farbe, z.B. $\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$), so dass es unter je drei Karten stets eine kleinste, mittlere und größte gibt. Dann kann man beispielsweise verabreden, dass wenn die kleinste der drei Karten als erste/zweite/dritte von den drei Karten gezeigt wird, dies bedeutet, dass die gesuchte Zahl in einer der Mengen $\{1{,}2\}, \{3{,}4\}, \{5{,}6\}$ ist. Wenn die mittlere Karte vor der größten kommt, kann das die erste Zahl aus der jeweiligen Menge kodieren und wenn die mittlere Karte nach der größten kommt, die jeweils zweite.

Im Beispiel aus der Aufgabe würde das folgendermaßen aussehen: Der Weihnachtsmann hat die Karten $\spadesuit$ 7, $\heartsuit$ Dame, $\clubsuit$ 8, $\diamondsuit$ 3 und $\spadesuit$ König ausgewählt. Der Assistenzwichtel hält zuerst nach dem gleichfarbigen Paar Ausschau, hier $\spadesuit$ 7 und $\spadesuit$ König. Wenn man auf den Wert der $\spadesuit$ 7 die Zahl 6 aufaddiert, bekommt man 13, was dem Kartenwert des Königs entspricht. Er muss dem Zauberwichtel also noch die Zahl 6 kodieren. Von den verbleibenden drei Karten ist bezüglich der oben genannten Ordnung die $\spadesuit$ 8 die kleinste, $\diamondsuit$ 3 die mittlere und $\heartsuit$ Dame die größte Karte. Der Assistenzwichtel gibt dem Zauberwichtel die kleinste Karte als letztes und zeigt damit an, dass die zu übermittelnde Zahl aus der dritten Menge $\{5{,}6\}$ stammt. Die mittlere Karte übergibt er nach der größten, also weiß der Zauberwichtel, dass es sich um die zweite Zahl aus der Menge, also die 6, handelt.

Nun zu dem vom Weihnachtsmann verbesserten Trick:

In dem ursprünglichen Trick kodiert der Assistenzwichtel dem Zauberwichtel eine Nachricht durch eine geordnete Menge von vier Karten. Davon gibt es $\frac{52!}{48!}$. Da der Zauberwichtel vier Karten sieht und die fünfte herausfindet, ist die Information, die kodiert werden muss, in letzter Konsequenz eine ungeordnete Menge von fünf Karten. Davon gibt es $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!}$.

Es ist also sehr wohl möglich, den Trick zu verbessern, denn die Menge an Nachrichten ist

$$\frac{\frac{52!}{48!}}{\frac{52!}{5!47!}} = \frac{120}{48} = 2{,}5$$

mal größer als die Menge an zu kodierenden Situationen.
Dieses Verhältnis kann nicht besser als 1 werden, wenn der Trick funktionieren soll. Wir suchen also n, so dass

$$\frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{5!(n-5)!}{(n-4)!} = \frac{120}{n-4} \overset{!}{=} 1.$$

Rechnet man nun damit n aus, kommt man auf $n = 124$, was Antwortmöglichkeit 5 suggeriert. Gibt es aber tatsächlich auch einen Algorithmus für 124 Karten? Ja, den gibt es. Hier ist eine Möglichkeit:
Zuerst nummerieren wir die Karten von 0 bis 123 (zum Beispiel in der Art wie oben beschrieben). Der Einfachheit halber können wir sogar annehmen, dass die Karten einfach direkt mit den Zahlen von 0 bis 123 beschriftet sind. Der Weihnachtsmann zieht dann fünf Karten $c_0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4$. Der Assistenzwichtel lässt dann die Karte c_i beim Weihnachtsmann, wobei $i = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \mod 5$.
Als nächstes nummeriert der Assistenzwichtel die Karten, die er nicht dem Zauberwichtel zeigen wird (also die Karten, welche immer noch im Deck sind und die Karte, die beim Weihnachtsmann bleibt), um, indem er die vier Karten, die er dem Zauberwichtel zeigen wird, aus der ursprünglichen Nummerierung herausstreicht. Die neue Nummerierung der Karten ist dann von 0 bis 119.
Die Summe der vier Kartenwerte der Karten, die gezeigt werden, nennen wir s. Dann ist der Wert der gesuchten Karte kongruent zu $-s \mod 5$. Unterteilt man die verbleibenden 120 Karten nun in 5er-Intervalle,

$$(0{,}1{,}2{,}3{,}4), (5{,}6{,}7{,}8{,}9), \ldots, (115{,}116{,}117{,}118{,}119),$$

stellt man fest, dass es in jedem Intervall nur ein Karte gibt, welche die gesuchte Karte sein kann (siehe Abbildung 9). Es gibt also lediglich noch 24 Möglichkeiten.

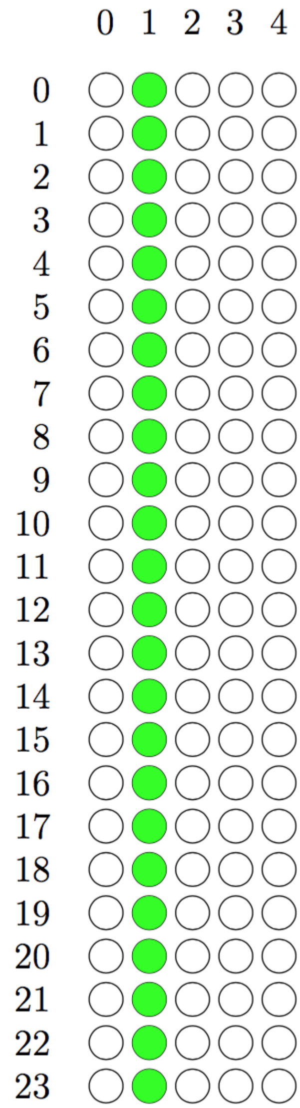


Abbildung 9: Hier ist $s \mod 5 = 4$ (beziehungsweise $-s \mod 5 = 1$) und die 24 Möglichkeiten sind grün markiert

Für die Reihenfolge, in der die vier Karten gezeigt werden, gibt es ebenfalls genau $4! = 24$ Möglichkeiten. Der Zauberwichtel und der Assistenzwichtel müssen sich also lediglich im Vorfeld auf eine Bijektion zwischen den Permutationen der vier Karten und den Intervallen verständigen. Dazu genügt jedwede Tabelle, welche die Permutationen den Intervallen zuordnet oder aber auch die folgende Formel: Wenn das p-te Intervall (p zwischen 0 und 23) kodiert werden soll, dann zerlegt der Assistenzwichtel p als $p = d_1 1! + d_2 2! + d_3 3!$.
Die Zahl d_i, $i = 0{,}1{,}2{,}3$, steht dabei für die Anzahl an Karten kleiner als die $4 - i$-größte rechts von ihr.
Wenn der Zauberwichtel zum Beispiel die folgende Karten

$$37, 7, 94 \text{ und } 61$$

in ebendieser Reihenfolge erhält, kann er d_0 berechnen, indem er zählt, wie viele Karten kleiner als die viertgrößte (also der kleinsten, in diesem Fall der 7) rechts von ihr stehen. Das sind natürlich null, denn es handelt sich ja bereits um die kleinste Karte. Zur Berechnung von d_1 zählt er die Karten kleiner als die drittgrößte, der 37, rechts von ihr. Das ist nur die 7, also ist $d_1 = 1$. Rechts von der zweitgrößten Zahl, der 61 befindet sich keine kleinere, demnach ist $d_2 = 0$. Um schließlich d_3 zu berechnen, schaut der Zauberwichtel, wie viele Zahlen kleiner als die größte Zahl, der 94, rechts von ihr stehen. Das ist nur die 61, folglich ist $d_3 = 1$. Damit berechnet der Zauberwichtel also $p = 1 \cdot 1! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 3! = 7$. Addiert er die drei Zahlen, erhält er $s = 199$ und $-s \mod 5 = 1$. Die gesuchte Karte ist also die erste Karte (nicht die 0-te, sondern die erste) im siebten Interval ((35,36,37,38,39)), also 36. Hierbei ist aber zu beachten, dass die 36-te Karte bezüglich der neuen Nummerierung gemeint ist, aus der die vier gezeigten Karten, insbesondere die 7 und die 37, herausgestrichen wurden. Die gesuchte Karte trägt also die Nummer 38 bezüglich der ursprünglichen Nummerierung.

Literatur

[1] Michael Kleber. The best card trick.
http://www.apprendre-en-ligne.net/crypto/magie/card.pdf, 2002.

14 Konzert

Autor: Onno Boxma (TU Eindhoven)
Übersetzung: Gabriele Neumann (HU Berlin)

14.1 Aufgabe

Heute Abend ist Weihnachtskonzert. 26 Wichtel möchten gerne ins Konzert gehen. Der Weihnachtsmann hat ihnen Eintrittskarten für die 26 Sitze der ersten Reihe besorgt. Die Sitze sind mit $1,2,\ldots,26$ durchnummeriert. Wie üblich steht die Nummer auch auf der Eintrittskarte jedes Wichtels. Diszipliniert, wie die Wichtel sind, jedenfalls immer, wenn der Weihnachtsmann zuschaut, gehen sie in alphabetischer Reihenfolge: Zuerst Atto, dann Bilbo, Chico, Dondo und so weiter, bis zum letzten Wichtel namens Ziggo.

Atto hat jedoch seine Eintrittskarte verloren und wählt daher zufällig (genauer: gleichverteilt) irgendeinen Sitzplatz in der ersten Reihe aus. Bilbo, Chico and Dondo sind ebenfalls etwas vergesslich und haben auch ihre Eintrittskarte verloren und müssen ihre Platzwahl in der ersten Reihe ebenfalls dem Zufall überlassen. Die nächsten 22 Wichtel haben noch ihre Eintrittskarte. Unter den strengen Blicken des Weihnachtsmanns, der jede Unruhe im Saal vermeiden möchte, entscheiden sich diese 22 Wichtel für folgendes Verhalten: Sie gehen zuerst immer zu ihrem Platz. Falls dieser frei ist, nehmen sie ihn, falls dort jedoch schon ein anderer Wichtel sitzt, wählen sie ihrerseits auch zufällig einen der noch freien Plätze in der ersten Reihe aus.

Berechne nun die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass Ziggo den Sitzplatz bekommt, dessen Nummer auch auf seiner Eintrittskarte steht. Welche der folgenden Aussagen über p ist korrekt?

Antwortmöglichkeiten:

1. $p \leq 0.002$
2. $0.002 < p \leq 0.004$
3. $0.004 < p \leq 0.008$
4. $0.008 < p \leq 0.016$
5. $0.016 < p \leq 0.032$
6. $0.032 < p \leq 0.064$
7. $0.064 < p \leq 0.128$
8. $0.128 < p \leq 0.256$
9. $0.256 < p \leq 0.512$

10. $0.512 < p$

14.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Die richtige Antwort ist **Nummer 8** mit $p = 1/5$. Wir zeigen zwei mögliche Lösungen:

Erster Lösungsweg:

Wir bezeichnen die Platznummern für Atto, Bilbo, Chico, Dondo und Ziggo entsprechend mit A, B, C, D und Z. Dann kann man zwei Feststellungen machen:

- Ziggo kann nur auf einem der fünf Plätze A,B,C,D,Z sitzen.
  Jeder andere freigebliebene Sitz wird nämlich letztendlich durch den Wichtel mit der entsprechenden Platznummer besetzt.
- Wenn einer der 25 Wichtel zufällig einen Platz auswählt, unterscheidet er nicht zwischen den Sitzen A,B,C,D,Z.

Daraus folgt, dass Ziggos Wahl für einen der Plätze A,B,C,D,Z gleichwahrscheinlich ist. Daher ist Ziggos Wahrscheinlichkeit, seinen eigenen Platz zu bekommen $p = 1/5$.

Zweiter Lösungsweg:

Wir verallgemeinern das Problem von $n = 26$ Wichtel auf eine beliebige Anzahl von $n \geq 5$ Wichteln. So wie zuvor suchen sich die ersten vier Wichtel ganz zufällig einen Platz aus und danach verhalten sich die verbleibenden $n - 4$ Wichtel wie schon beschrieben. Sei nun $P(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Wichtel auf seinem eigenen Platz sitzt. Dann kann man leicht erkennen, dass $P(5) = \frac{1}{5}$. Denn die ersten vier Wichtel wählen wieder zufällig einen Platz aus und der fünfte Wichtel hat daher jeweils die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$, einen der fünf Sitze zu erhalten.

Nun sei $n \geq 6$ und wir betrachten den Moment, in dem Espo, der 5. Wichtel, den Zuschauerraum betritt. Dann müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

- Im ersten Fall ist Espos Platz frei. Er nimmt den Platz ein und spielt in der weiteren Betrachtung keine Rolle mehr. Daher können wir Espo und seinen Platz nunmehr vernachlässigen und die ganze Geschichte auf das entsprechende Problem mit $n-1$ Wichteln zurückführen. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Wichtel seinen Platz bekommt $P(n-1)$.

- Im zweiten Fall wurde Espos Platz von einem der vier ersten Wichtel besetzt, zum Beispiel von Atto. Nun sind also 5 Sitze besetzt: Espos plus vier zufällige Plätze. Dann kann man sich Attos und Espos Plätze getauscht vorstellen, somit taucht Espo und sein Platz in der weiteren Betrachtung wiederum nicht mehr auf. Damit sind wir jetzt also in der gleichen Situation, in der die vier ersten Wichtel $n-1$ Plätze besetzen und erhalten wieder $P(n-1)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte der $(n-1)$ Wichtel seinen eigenen Sitz bekommt.

Der erste Fall trete nun mit der Wahrscheinlichkeit q ein, der zweite dann entsprechend mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1-q$. Also gilt:

$$P(n) \;=\; qP(n-1) + (1-q)P(n-1) \;=\; P(n-1).$$

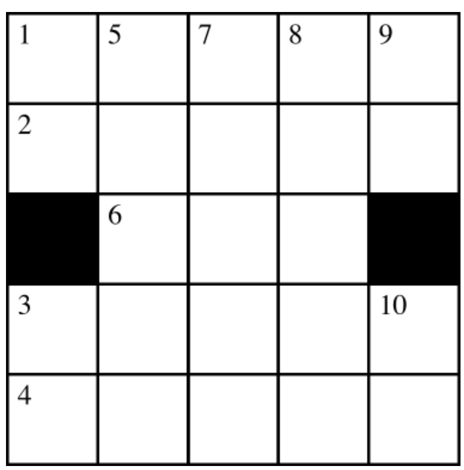
Mit Hilfe von Induktion folgt, dass $P(n) = P(5)$ für alle $n \geq 5$.

15 Zahlenrätsel auf Althochelbisch

Autoren: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)
Übersetzung: Gabriele Neumann (HU Berlin)

15.1 Aufgabe

Bei diesem Zahlenrätsel muss jedes leere Feld mit einer Ziffer aus dem Dezimalsystem ausgefüllt werden. Diese Ziffern ergeben dann fünf waagerecht notierte und 7 senkrecht notierte Zahlen, von denen keine mit der Ziffer 0 beginnt.



Um diese Zahlen zu finden, müssen Hinweise in Wortform entschlüsselt werden, die Zahlen im Dezimalsystem beschreiben. Diese Hinweise haben alle die Form

„xyz: abcd“. Zunächst wird dabei mit einem Zahlwort *„xyz“* die Hinweisnummer (also die Lage im Kreuzworträtsel) verschlüsselt, nach dem Doppelpunkt wird wiederum die Lösungszahl in Worten *„abcd“* genannt. Im Deutschen könnte also eine geforderte Lösung so **zum Beispiel** beschrieben werden: *(Waagerecht) Acht: zweitausend siebzehn.*

Man beachte, dass diese Hinweise zu unserem Bedauern jedoch nur in Althochelbischer Sprache veröffentlicht werden, denn der zuständige Übersetzungself Philogan wurde zum jahreszeitgemäßen Verpackungsdienst abgeordnet. Er fand jedoch noch Zeit, die Hinweise erstens alphabetisch zu ordnen und zweitens zu erklären, dass Althochelbisch ein äußerst klar strukturiertes und durchweg logisch aufgebautes System von Zahlwörtern benutzt.

Waagerecht:
Afri: farapuk-gemubol-luxadim-gemu
Fara: luxadim-faratek-kolm
Gemu: osmopuk-zabodim
Kolm: zabopuk-gemubol-zabodim-afritek-rucu
Zabo: afripuk-devebol-rucudim-gemutek-zabo

Senkrecht:
Deve: zabotek
Kolm: zabotek-fara
Luxa: devepuk-luxadim-gemutek-gemu
Osmo: gemupuk-kolmdim-afritek
Rucu: rucupuk-zabobol-faradim-zabotek-luxa
Zabo: afritek-osmo
Zabotek: rucutek-gemu

Sei W nun die Summe der fünf waagerechten Einträge und S entsprechend die Summe der sieben senkrechten Einträge. Welchen Wert hat dann $W - S$?

Antwortmöglichkeiten:

1. Farapuk-kolmbol-afridim-luxatek-osmo
2. Rucubol-luxadim-rucutek-kolm
3. Kolmpuk-devebol-gemudim-afritek-afri
4. Luxapuk-zabobol-kolmdim-luxatek-fara
5. Gemupuk-gemubol-afridim-zabotek
6. Kolmpuk-afridim-osmotek
7. Luxapuk-osmobol-gemudim-zabotek-deve
8. Zabopuk-devebol-devedim-faratek
9. Osmopuk-osmobol-faradim-luxatek-rucu
10. Rucupuk-farabol-osmotek-fara

15.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Da die waagerechten Einträge nummeriert sind mit 1, 2, 3, 4, 6, müssen die fünf Zahlwörter afri, fara, gemu, kolm, zabo eine Permutation dieser Zahlen sein. Ebenso müssen 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, durch die Wörter deve, kolm, luxa, osmo, rucu, zabo, zabotek in einer bestimmten Reihenfolge dargestellt werden.
Bei den waagerechten und senkrechten Lösungswörtern tauchen wiederholt die Wortteile afri, deve, fara, gemu, kolm, luxa, osmo, rucu, zabo und sie enthalten außerdem die mehrfach erscheinenden Suffixe -puk, -bol, -dim, -tek. Diese Nachsilben müssen also auf die entsprechende Position der Ziffern im Dezimalsystem hinweisen: zehn, hundert, tausend und zehntausend.

- Das Wort zabotek erscheint einmal als Nummer eines Eintrags (als zabotek senkrecht) und einmal als Lösungswort (deve senkrecht). Da jede einzutragende Lösung mindestens zwei Stellen hat und 10 die einzige zweistellige Nummer eines Eintrags ist, schließen wir daraus, dass zabotek zehn bedeutet. Daher gilt **zabo=1** und die Silbe -tek bezeichnet die Zehnerstelle.

- Die Eintragsnummern 1 und 3 sind die einzigen, die sowohl waagerecht als auch senkrecht vorkommen. Da die Nummern der Einträge nur in den Hinweisen zabo und kolm übereinstimmen und da zabo=1 ist, kann **kolm=3** gefolgert werden.

- Die Lösungszahl zabotek=10 der Nummer deve senkrecht kann entweder bei 1 senkrecht,bei 3 senkrecht, bei 9 senkrecht, oder bei 10 senkrecht eingetragen werden. Die Fälle 1 senkrecht und 3 senkrecht sind jedoch ausgeschlossen, da sonst die Nummer 2 waagerecht oder 4 waagerecht mit der Ziffer 0 beginnen müssten. Der Fall 10 senkrecht kann ebenfalls ausgeschlossen werden, da dort rucutek-gemu stehen müsste und nicht zabotek. Insgesamt folgt, dass 9 senkrecht das Lösungswort zabotek=10 enthält und damit **deve=9** ist.

- 1 waagerecht hat die Verschlüsselung zabo=1 und enthält die Zahl afripuk-devebol-rucudim-gemutek-zabo auf Althochelbisch. Da diese Sprache aber logisch aufgebaut sein soll und wir schon wissen, dass -tek die Zehnerstelle bezeichnet, müssen die im Lösungswort der vierstelligen Zahl verbleibenden Suffixe -puk, -bol, -dim nacheinander die Zehntausender-, Tausender- und

Hunderter-Stelle bezeichnen. Die fünf Ziffern in 1 waagerecht sind damit: afri, 9, rucu, gemu, 1.

- Jetzt ist bekannt, dass 5 senkrecht mit der Ziffer deve=9 beginnt. Das einzige dazu passende Lösungswort ist aber luxa mit devepuk-luxadim-gemutek-gemu. Dies bringt **luxa=5**. Da im Lösungswort luxa-senkrecht keinmal die Silbe -bol für die Tausender-Stelle vorkommt, kann diese Stelle mit 0 besetzt werden. Dann lauten die Ziffern in 5 waagerecht: 9, 0, 5, gemu, gemu.

- 6 waagerecht wiederum beginnt mit der Ziffer 5=luxa. Dies überlappt sich eindeutig mit fara waagerecht mit luxadim-faratek-kolm. Daher ist **fara=6** und die drei Ziffern 6 waagerecht sind 5, 6, 3.

- Osmosenkrecht mit gemupuk-kolmdim-afritek ist das einzige Lösungswort, das kolm=3 enthält, daraus folgt **osmo=8**. Hieraus ergeben sich automatisch die übrigen Ziffern **gemu=2** and **afri=4** and **rucu=7**.

Die folgende Tabelle fasst noch einmal die wichtigsten Zahlwörter von 1 bis 90.000 zusammen:

Ziffer	×1	×10	×100	×1000	×10000
1	zabo	zabotek	zabodim	zabobol	zabopuk
2	gemu	gemutek	gemudim	gemubol	gemupuk
3	kolm	kolmtek	kolmdim	kolmbol	kolmpuk
4	afri	afritek	afridim	afribol	afripuk
5	luxa	luxatek	luxadim	luxabol	luxapuk
6	fara	faratek	faradim	farabol	farapuk
7	rucu	rucutek	rucudim	rucubol	rucupuk
8	osmo	osmotek	osmodim	osmobol	osmopuk
9	deve	devetek	devedim	devebol	devepuk

Die folgende Abbildung zeigt schließlich die Lösung des Kreuzworträtsels:

[1]4	[5]9	[7]7	[8]2	[9]1
[2]8	0	1	0	0
	[6]5	6	3	
[3]1	2	1	4	[10]7
[4]6	2	5	0	2

Folglich haben die Summen den Wert $H = 205.033$ und $V = 182.623$. Mit Hilfe der Tabelle kann die gesuchte Differenz $H - V = 22{,}410$ leicht in das Zahlwort gemupuk-gemubol-afridim-zabotek übersetzt werden.
Daher ist Antwort **Nummer 5** die richtige Lösung.

16 Werkbank

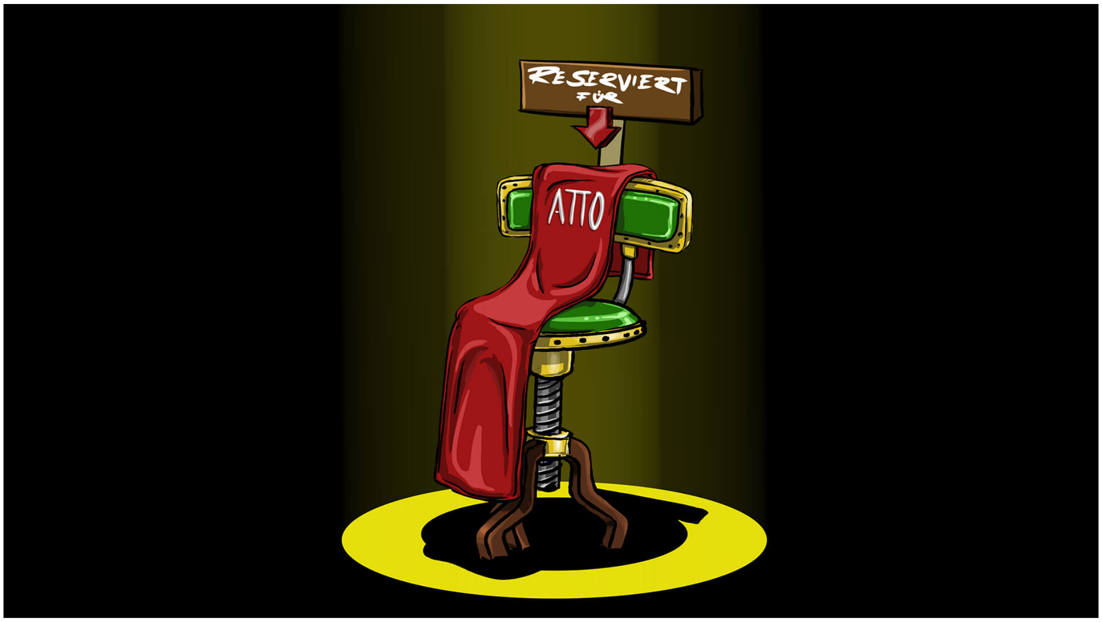
Autoren: Cor Hurkens (TU Eindhoven), Jesper Nederlof (TU Eindhoven)

16.1 Aufgabe

Die Wichtel Atto, Bilbo und Chico arbeiten gemeinsam an einer kleinen Werkbank mit drei Arbeitsplätzen: Einer sitzt links, einer sitzt rechts, und einer sitzt in der Mitte. Keiner der Wichtel will an zwei unmittelbar aufeinander folgenden Tagen am selben Platz arbeiten. Die Wichtel wollen auch nicht, dass eine schon einmal eingenommene Platzordnung (wie zum Beispiel: Atto links, Bilbo in der Mitte, Chico rechts) an einem nachfolgenden Tag wiederholt wird. So arbeiten die drei Wichtel x Tage lang.

Dann stößt der Wichtel Dondo zu dem Arbeitskommando, und die vier wechseln zu einer großen Werkbank mit vier Arbeitsplätzen: Einer sitzt im Norden, einer im Osten, einer im Süden, und einer sitzt im Westen. Auch an der großen Werkbank will keiner der Wichtel an zwei unmittelbar aufeinander folgenden Tagen am selben Platz arbeiten. Und auch an der großen Werkbank wollen die Wichtel nicht, dass ein und dieselbe Platzzuweisung (wie zum Beispiel: Atto im Norden, Bilbo im Osten, Chico im Süden, Dondo im Westen) an zwei verschiedenen Tagen verwendet wird. So arbeiten die vier Wichtel y Tage lang.

Nun wollen wir von Euch wissen: Wie lautet der größtmögliche Wert der Summe $x + y$?



Antwortmöglichkeiten:

1. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 19.
2. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 20.
3. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 21.
4. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 22.
5. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 23.
6. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 24.
7. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 25.
8. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 26.
9. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 27.
10. Der größtmögliche Wert von $x + y$ beträgt 28.

16.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Betrachtet man die Permutationen XYZ als Platzanordnung der kleinen Werkbank an einem bestimmten Tag, bleiben nur die zwei Permutationen YZX and ZXY als gültige Vertauschungen für die folgende Tage: Wenn X nämlich am nächsten Tag rechts arbeitet, muss Y links und Z muss dann in der Mtte arbeiten. Arbeitet X entsprechend in der Mitte am nächsten Tag, so muss Z links und Y muss rechts arbeiten.

Insgesamt kommen von den sechs Permutationen entweder nur ABC, CAB, BCA oder ACB, BAC, CBA als Platzzuweisungen in Betracht. Falls eine der drei Permutationen ABC, CAB, BCA als Platzanordnung des ersten Tages benutzt wird, können an den folgenden Tagen nur noch die beiden anderen genannten Permutationen durchgeführt werden. Entsprechendes gilt für jede der drei Anordnungen ACB, BAC, CBA, die nur durch die zwei anderen Permutationen variiert werden können. Demnach ist $x = 3$ der größte Wert für x.

Die folgende Tabelle zeigt nur einen möglichen Sitzplan für $y = 24$ Tage an der großen Werkbank:

1:	ABCD	9:	CDAB	17:	DBCA
2:	DCAB	10:	DABC	18:	ADBC
3:	CBDA	11:	BCDA	19:	BACD
4:	BCAD	12:	CABD	20:	ACDB
5:	ADCB	13:	BDCA	21:	BDAC
6:	BADC	14:	DBAC	22:	DACB
7:	CDBA	15:	CADB	23:	CBAD
8:	ABDC	16:	ACBD	24:	DCBA

Der obige Plan enthält alle $4! = 24$ möglichen Permutationen von A,B,C und D. Der maximale Wert ist also $y = 24$ für y. Insgesamt ergibt sich $x + y = 27$ als größter Wert für $x + y$. Daher ist **Antwort Nr. 9** die richtige Lösung.

17 Das Mützenproblem

Autoren: Aart Blokhuis (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)
Übersetzung: Falk Ebert (HU Berlin)

17.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat seine 12 schlauesten Wichtel antreten lassen: Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo, Frodo, Gumbo, Harpo, Izzo, Jacco, Kuffo and Loco. *„Meine lieben Wichtel! Herausfordernde Mützenknobelaufgaben haben eine lange Tradition im Mathekalender. Aus diesem Grund lade ich euch morgen zu einem geselligen Nachmittag mit Kakao und Keksen ein.“* – *„Hurra! Wir sind gern dabei“*, rufen die Angesprochenen.

Der Weihnachtsmann fährt fort: *„Heute Abend werde ich in jede eurer 12 Mützen je einen Zettel mit je einer der Zahlen von 1 bis 12 einnähen. Morgen setze ich dann jedem von euch eine dieser Mützen auf den Kopf. Da die Etiketten im Inneren der Mützen gut versteckt sind, wird keiner von euch die Nummern der Mützen kennen.“* Die Wichtel runzeln die Stirn. Der Weihnachtsmann ist zwar für seine Exzentrizitäten bekannt, aber das hier ist neu. *„Dann können jeweils zwei von euch die Hand heben und ich werde ihnen eine der Zahlen nennen, die sich unter den beiden Mützen befindet. Dann können sich wieder zwei melden und ich nenne ihnen wieder eine der beiden Zahlen. Das Ganze kann wiederholt werden, bis ihr beschließt aufzuhören. Im Anschluss daran möchte ich von jedem von euch die Zahl wissen, die sich unter seiner Mütze befindet. Es reicht aber nicht, die Nummer nur zu raten: Es muss auch klar argumentiert werden, warum das die* *einzig richtige Nummer ist. Kakao und Kekse gibt es nur für die mit richtiger Zahl und richtiger Begründung! Sobald ich alle Nummern gehört habe, schicke ich alle Wichtel mit falscher Nummer und alle Wichtel mit nicht stichhaltigem Argument nach Hause. Die Wichtel mit richtiger Nummer und richtigem Argument dürfen weiter in den großen Saal gehen und bekommen dort eine Tasse Kakao und ein paar leckere Kekse serviert.“*

„Dürfen die anderen zuhören, wenn einer seine Nummer sagt und argumentiert?“, fragt Kuffo. *„Ja, das ist erlaubt. Und Ihr dürft euch auch untereinander beraten“*, antwortet der Weihnachtsmann.

„Darf das gleiche Paar Wichtel sich auch ein zweites Mal melden?“, fragt Frodo. *„Auch das ist erlaubt“*, entgegnet der Weihnachtsmann.

„Und sagst Du uns dann eine andere Zahl oder die gleiche wie vorher?“, setzt Gumbo nach. Der Weihnachtsmann grinst verschmitzt: *„Es kann die gleiche oder auch eine andere sein.“*

Die 12 superschlauen Wichtel beginnen zu diskutieren. Sie denken und grübeln. Und dann denken und grübeln und diskutieren sie noch etwas mehr. Sie arbeiten schließlich eine Strategie aus, die die Anzahl N der Wichtel maximiert, die garantiert Kakao und Kekse erhalten.

Unsere Frage lautet: Wie groß ist diese Zahl N?

Antwortmöglichkeiten:

1. $N = 3$
2. $N = 4$
3. $N = 5$
4. $N = 6$
5. $N = 7$
6. $N = 8$
7. $N = 9$
8. $N = 10$
9. $N = 11$
10. $N = 12$.

17.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 7.

Die korrekte Antwort ist $N = 9$.

Warum gilt $N \geq 9$?

Betrachte eine beliebige Gruppe W,X,Y,Z von vier Wichteln. Aus diesen vier kann man 6 verschiedene Paare auswählen: WX, WY, WZ, XY, XZ and YZ. Da es unter vier Wichtelhüten nur vier Zahlen gibt aber 6 Paarungen von Wichteln existieren, muss der Weihnachtsmann zwei Paaren die gleiche Zahl nennen. Da die Zahlen eindeutig sind, müssen die Paare einen Wichtel gemeinsam haben und dieser kennt damit seine Zahl.

Solange es also vier Wichtel gibt, die ihre Zahl nicht kennen, können sie mit dieser Strategie eine weitere Zahl herausfinden. Damit können also mindestens 9 Wichtel ihre Zahlen erfahren.

Warum gilt $N \leq 9$?

Wir betrachten das folgende für die Wichtel ungünstige Szenario: Die Wichtel D,E,F,G,H,I,J,K,L haben (in dieser Reihenfolge) die Zahlen 4,5,6,7,8,9,10,11,12. Sollte einer von diesen bei dem Paar dabeisein, wird der Weihnachtsmann deren Zahlen nennen. Sollten beide aus dieser Menge sein, nennt er einfach eine beliebige der beiden Zahlen.

Es gibt nur 3 Paare von Wichteln, die nicht zu dieser Menge gehören: AB, BC und CA. Bei AB sagt der Weihnachtsmann 1, bei BC sagt er 2 und bei CA nennt er die 3. Aber sowohl 1,2,3 als auch $3, 1, 2$ sind mögliche konstistente Verteilungen der Zahlen auf die Wichtel A,B,C. Diese drei können ihre Zahlen also nicht eindeutig bestimmen und höchstens 9 Wichtel bekommen Kekse und Kakao.

18 Verlorene Geschenke

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)
Übersetzung: Falk Ebert (HU Berlin)

18.1 Aufgabe

Dass Knecht Ruprecht nicht die hellste Kerze auf dem Adventskranz ist, wusste der Weihnachtsmann schon lange. Aber heute hat er dem Ganzen die Krone aufgesetzt:

Nachdem Ruprecht den Rundweg, der an allen Geschenkemanufakturen und am Weihnachtsbüro vorbeigeht, genommen hatte, um alle neuen Geschenke einzusammeln, kam er zurück und sechs Geschenke haben gefehlt! *„Unterwegs verloren.“* meinte er. *„Verloren!“* Das muss man sich mal vorstellen.

„Fein, dann wirst du sie suchen gehen. Irgendwo auf dem Rundweg werden sie ja liegen“, sagte der Weihnachtsmann.

„Aber ich weiß doch gar nicht, wo sie sind. Die könnten überall auf der Straße sein. Und das ist eine lange Straße“, antwortete Ruprecht.

„Stell dich nicht so an! Sie ist gerade mal 660 m lang. Das wirst du doch schaffen. Abkürzen wird aber nichts. Nur die Straße ist beräumt und daneben haben wir meterhohe Schneewände. Also einmal den Rundweg entlang und nach den Geschenken suchen.“

Ruprecht stapfte tatsächlich los und ging den Rundweg ab. Und dann kam er wieder – aber immer noch mit leeren Händen.

„Und wo sind jetzt meine Geschenke?“ fragte der Weihnachtsmann.

„Du hast nur gesagt, dass ich sie suchen soll. Ich habe alle sechs gefunden und weiß genau, wo sie liegen.“
„Na, dann wirst du jetzt nochmal losgehen. Und dieses Mal bringst du mir die Geschenke mit!“ rief der aufgebrachte Weihnachtsmann.
Und Ruprecht stiefelte erneut los.

„Eigentlich“, überlegte der Weihnachtsmann, *„müsste Ruprecht nicht mal die 660 m gehen. Wenn er exakt weiß, wo sich die einzelnen Geschenke befinden, seine Route entsprechend plant und am Ende beim letzten Geschenk stehenbleibt, kommt er mit weniger aus.“*

Frage: Was ist die Länge M der kürzesten Route, die Ruprecht gehen muss, um alle Geschenke einzusammeln (nicht zurückzubringen)? Dabei ist irrelevant, wo genau sich die einzelnen Geschenke auf dem Rundweg befinden und wo er startet.

Antwortmöglichkeiten:

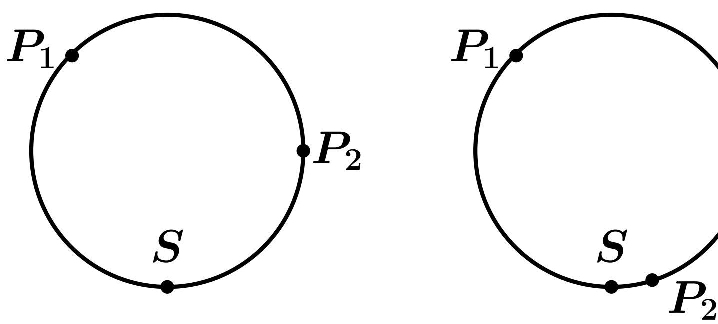
1. $555 < M \leq 565$.
2. $565 < M \leq 575$.

3. $575 < M \leq 585$.
4. $585 < M \leq 595$.
5. $595 < M \leq 605$.
6. $605 < M \leq 615$.
7. $615 < M \leq 625$.
8. $625 < M \leq 635$.
9. $635 < M \leq 645$.
10. $645 < M \leq 655$.

18.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 8.

Wir betrachten vorerst ein kleineres Beispiel mit nur 2 Geschenken. Ruprechts Startpunkt sei S. Ruprecht könnte den Rundweg komplett laufen und alle Geschenke einsammeln. Der Weg wird etwas kürzer, wenn er beim letzten Geschenk stehenbleibt. Allgemein kann man Ruprechts Weg durch die Punkte der Geschenke P_1 und P_2 beschreiben, wobei S, P_1, P_2 in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn auf dem Rundweg liegen:



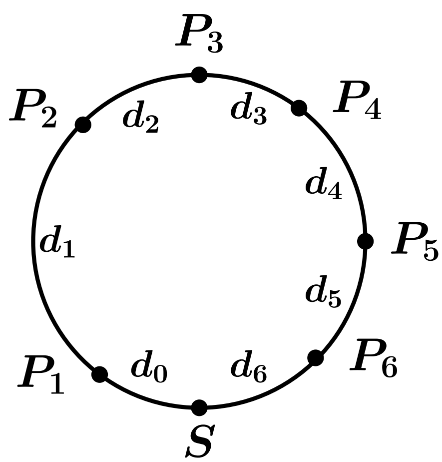
Im linken Beispiel läuft Ruprecht von S zu P_2 zu P_1 (gegen den Uhrzeigersinn). Das Stück P_1 nach S spart er aus. Im rechten Beispiel ist es sinnvoller, erst P_2 zu besuchen und dann wieder vorbei an S zu P_1 zu laufen. Je nach Lage der Punkte S, P_1, P_2 wird einer der Pfade

$$
\begin{aligned}
&|SP_1| + |P_1P_2|,\\
&|SP_2| + |P_1P_2|,\\
&2|SP_1| + |SP_2|,\\
&2|SP_2| + |SP_1|,
\end{aligned}
$$

der kürzeste sein.

Offensichtlich ist $|SP_1|+|P_1P_2|$ kürzer als $|SP_2|+|P_1P_2|$, falls $|SP_1| < |SP_2|$. Aber selbst $|SP_1| + |P_1P_2|$ kann noch zu $2|SP_2| + |SP_1|$ verkürzt werden, falls $|SP_2| < \frac{|P_1P_2|}{2}$. Mit $|SP_1|+|P_1P_2|+|SP_2| = L$ bedeutet das, dass $2|SP_2|+|SP_1|$ der kürzeste Weg ist, falls $|SP_2| < \frac{L}{4}$ und $|P_1P_2| < \frac{L}{2}$. Wenn $|SP_2| < \frac{L}{4}$ und $|P_1P_2| \geq \frac{L}{2}$, dann ist $|SP_2| + |P_1P_2|$ kürzer. Die gleiche Untersuchung kann durchgeführt werden, wenn $|SP_1| < \frac{L}{4}$. In jedem Fall wird man feststellen, dass kein kürzester Weg

länger ist als $\frac{3}{4}L$. In dem Fall, dass $|SP_1| = |SP_2| = \frac{L}{4}$, gibt es mehrere kürzeste Wege mit Länge $\frac{3}{4}L$.
In dem folgenden Bild gehen wir jetzt zu der Situation mit 6 Geschenken über. Wir bezeichnen deren Positionen (im Uhrzeigersinn von S ausgehend) mit $P_1, \ldots, P_6$ und die jeweiligen Abstände benachbarter Geschenke mit $d_0, d_1, \ldots, d_6$.



Laut Aufgabenstellung gilt $d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_6 = 660$. Wir werden jetzt acht mögliche Fälle besprechen und zeigen, dass Ruprecht stets mit 630 m auskommt:

1. Wenn $d_0 \geq 30$, dann läuft Ruprecht entgegen dem Uhrzeigersinn $660 - d_0 \leq$ 630 Meter von S bis P_1.

2. Wenn $d_0 < 30$ und $d_1 \geq 60$, dann läuft Ruprecht erst im Uhrzeigersinn von S zu P_1 und dann entgegen dem Uhrzeigersinn (über S) zu P_2. Der zurückgelegte Weg ist dann $660 + d_0 - d_1 < 630$ Meter.

3. Wenn $d_0 < 30$, $d_1 < 60$ und $d_2 \geq 120$, dann läuft Ruprecht erst im Uhrzeigersinn von S nach P_2 und dann entgegen dem Uhrzeigersinn bis P_3. Der zurückgelegte Weg ist $660 + d_0 + d_1 - d_2 < 630$ Meter.

4. Wenn $d_0 < 30$, $d_1 < 60$, $d_2 < 120$ und $d_3 \geq 240$, dann läuft Ruprecht erst im Uhrzeigersinn von S nach P_3 und dann entgegen dem Uhrzeigersinn von P_3 zu P_4. Der zurückgelegte Weg ist $660 + d_0 + d_1 + d_1 + d_2 - d_3 < 630$ Meter.

5. Wenn $d_6 \geq 30$, dann argumentieren wir analog zum ersten Fall.
6. Wenn $d_6 < 30$ und $d_5 \geq 60$, dann argumentieren wir analog zum zweiten Fall.
7. Wenn $d_6 < 30$, $d_5 < 60$ und $d_4 \geq 120$, dann argumentieren wir analog zum dritten Fall.
8. In den verbleibenden Situationen müssten folgende sieben Ungleichungen erfüllt sein: $d_0 < 30$ und $d_1 < 60$ und $d_2 < 120$ und $d_3 < 240$ und $d_4 < 120$ und $d_5 < 60$ und $d_6 < 30$. Die Summe dieser sieben Ungleichungen liefert $d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_7 < 660$. Das widerspricht aber der Aussage über die Länge des Rundwegs. Folglich kann dieser Fall nicht auftreten und alle möglichen Situationen sind durch die Fälle 1-7 abgedeckt.

Unsere Analyse ist damit vollständig. Es gibt immer eine Lösung mit höchstens $630m$.
Zuletzt betrachten wir noch den Fall, dass $d_0 = d_6 = 30$, $d_1 = d_5 = 60$, $d_2 = d_4 = 120$ und $d_3 = 240$. In diesem Fall ist jede mögliche Lösung mindestens 630 Meter lang. Folglich ist **Antwort 8** richtig.

19 Weihnachtliche Fließbandbarbeit

Autor: Erhard Zorn (TU Berlin)

19.1 Aufgabe

In der Schokoladenherzenfabrik herrscht Aufruhr: Die Wichtel wollen streiken, weil ihrer Meinung nach die Ruhezeiten nicht eingehalten werden.

Für die Produktion im Jahr 2017 wurde eine moderne Produktionsstraße in Betrieb genommen. Sie ist 1 km lang, in der Mitte befindet sich ein schmaler Transportgang, auf dem sich die Wichtel nur nach links oder nach rechts bewegen können. Sie tragen dabei Tabletts, auf die ihnen die Bäcker am Rande des Ganges die mit Schokolade übergossenen Herzen legen. Die Aufgabe der Wichtel ist es, die Schokoladenherzen zu einem beliebigen Ende des Ganges zu tragen. Sobald sie an einem Ende angekommen sind, schieben sie das Tablett in die Trockenanlage.

Leider ist die neue Produktionsstraße zu schmal, die Wichtel können nicht aneinander vorbeigehen – geschweige denn einander nicht überholen. Die Betriebsanleitung sieht daher Folgendes vor: Die 24 Wichtel stellen sich an beliebige Stellen auf dem Gang auf und wählen eine zufällige Anfangs-Laufrichtung, nach rechts oder nach links. Sobald der Werksleiter das Startsignal gibt, laufen alle Wichtel in ihre Laufrichtung los. Wenn zwei Wichtel auf der Produktionsstraße aufeinander treffen, drehen sie sich um und gehen in die entgegen gesetzten Richtungen weiter. Solange die Wichtel nicht aufeinander treffen, bewegen sie sich mit einer

Geschwindigkeit von 1 m/s.

Wenn alle Wichtel ihre Tabletts in die Trockenanlage geschoben haben, beginnt eine 5-minütige Pause. Danach beginnt der Transport, wie oben beschrieben, von vorne.

Die Wichtel denken, dass sie so zu selten Pause haben. Um den Streit zu schlichten, wird der Weihnachtsmann herbeigerufen. Er runzelt die Stirn und verfällt in tiefes Nachdenken.

Wer kann dem Weihnachtsmann helfen? Wie lange müssen die Wichtel maximal laufen bis sie Pause machen können?

Antwortmöglichkeiten:

1. Jeder Wichtel läuft maximal 600 Sekunden auf dem Transportgang.
2. Jeder Wichtel läuft maximal $\ln 2 \cdot 1000$ Sekunden auf dem Transportgang.
3. Jeder Wichtel läuft maximal $1/\sqrt{2} \cdot 1000$ Sekunden auf dem Transportgang.
4. Jeder Wichtel läuft maximal 800 Sekunden auf dem Transportgang.

5. Jeder Wichtel läuft maximal 1000 Sekunden auf dem Transportgang.
6. Jeder Wichtel läuft maximal 1100 Sekunden auf dem Transportgang.
7. Jeder Wichtel läuft maximal 1200 Sekunden auf dem Transportgang.
8. Jeder Wichtel läuft maximal $\sqrt{2} \cdot 1000$ Sekunden auf dem Transportgang.
9. Jeder Wichtel läuft maximal 2000 Sekunden auf dem Transportgang.
10. Es kann Wichtel geben, die den Transportgang nie verlassen.

19.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 5.

Wären die Wichtel ununterscheidbar, so könnte man sich vorstellen, dass zwei Wichtel bei einem Zusammentreffen nicht ihre Richtungen wechseln, sondern sich durchdringen und ihre Laufrichtung beibehalten. Für einen Beobachter wären beide Situationen nicht unterscheidbar.

Damit liefe jeder Wichtel genau so lange auf dem Transportweg, bis er das Ende erreicht, in dessen Richtung er am Anfang geschaut hat. Befindet er sich am Anfang in einer Entfernung von x Metern von dem Ende, in dessen Richtung er schaut, so verlässt er den Transportweg nach x Sekunden. Da ein Wichtel höchstens 1 km von einen Ende des Transportganges entfernt sein kann, verlässt er den Transportweg nach höchstens 1000 Sekunden.

Bei dieser Überlegung haben wir die *unterscheidbaren* Tabletts nicht berücksichtigt, die für die Betrachtung aber nicht relevant sind. Man kann sich auch vorstellen, dass zwei Wichtel bei einem Aufeinandertreffen ihre Laufrichtung ändern und die Tabletts austauschen. Damit werden die Tabletts mit konstanter Geschwindigkeit von 1 m/s bewegt. Analog wie oben verlässt jedes Tablett damit nach höchstens 1000 Sekunden den Transportgang. Da jedes Tablett von einem Wichtel getragen wird, gilt dies auch für jeden Wichtel.

20 Seifenschlittenrennen

Autorin: Marika Karbstein (ZIB)
Projekt: Flight Trajectory Optimization on Airway Networks

20.1 Aufgabe

Die ganze letzte Woche haben die Wichtel sich schon gefreut. Heute ist es soweit: Das große Seifenschlittenrennen findet statt. Der Gewinner darf beim nächsten gemeinsamen Filmabend den Film aussuchen.

Die Regeln des Rennens sind wie folgt. Alle starten gleichzeitig und jeder muss 6000 Meter nach Osten und 4000 Meter nach Norden fahren. Allerdings ist da die Sache mit dem Wind: Ohne Wind legt ein Seifenschlitten immer 100 Meter pro Minute zurück. Kommt der Wind von vorne, ist der Seifenschlitten nur halb so schnell, d.h. 50 Meter pro Minute, mit Rückenwind dagegen ist er doppelt so schnell wie ohne Wind. Interessanterweise hat Seitenwind keinen Effekt auf den Seifenschlitten, er wird nicht seitlich verschoben und ist genauso schnell wie ohne Seitenwind. Diese Geschwindigkeiten gelten auf der gesamten Rennstrecke.
Man weiß nie genau, wann der Wind aus welcher Richtung kommt. Sicher ist aber, dass der Wind nur aus einer der vier Richtungen Süden, Norden, Osten und Westen kommt und die Windrichtung sich alle 10 Minuten ändert. Der Start des Rennens fällt auf den Zeitpunkt eines Richtungswechsels des Windes.
Die Wichtel selber fahren nur in die Richtungen Norden und Osten. Dabei können sie die Richtung so oft wechseln, wie sie wollen. Allerdings müssen sie vorher ihre Route als zeitliche Abfolge von Richtungen festlegen. Sie dürfen während der

Fahrt nicht davon abweichen, sonst werden sie disqualifiziert. Eine Route sieht z.B. so aus: 20 Minuten nach Osten, 30 Minuten nach Norden, 10 Minuten nach Osten, 20 Minuten nach Norden usw.
Wer als erstes mindestens 6000 Meter nach Osten und mindestens 4000 Meter nach Norden zurückgelegt hat, hat gewonnen. Es kann dabei auch vorkommen, dass in eine Richtung weiter als nötig gefahren wurde. Sobald man aber auch in der zweiten Richtung die nötige Entfernung zurückgelegt hat, ist das Ziel erreicht.

Leider konnte der Weihnachtsmann beim Rennen nicht dabei sein. Aber immerhin schafft er es noch zur ausgelassenen Après-Seifenschlitten-Feier. Auf seinem Weg dahin trifft er den Verpackungsmeister Edward. In dem Moment als er fragt, wer denn das Rennen gewonnen hat, bereut er es schon, denn Edward verpackt nicht nur kunstvoll Geschenke, sondern seine Antworten immer gerne als Rätsel.

Seine Aussagen sind die folgenden:

a) Kein Wichtel hat mehr als 100 Minuten benötigt, um die geforderten Entfernungen zurückzulegen.

b) Alle Wichtel haben ihre Richtung nur bei Vielfachen von 10 Minuten gewechselt.

c) In den 100 Minuten nach Start des Rennens wehte der Wind genauso oft aus Richtung Süden wie aus Richtung Westen. Außerdem wehte er genauso oft aus Norden wie aus Osten. Der Wind kam aus keiner Richtung insgesamt mehr als 30 Minuten.

d) Nur Smettbo, Raichu und Glutexo sind als erstes nach Norden gefahren.

e) Der einzige, der die ganze Route über keinen Gegenwind hatte, war Glutexo. Er hatte nach 30 Minuten für 20 Minuten Rückenwind. Das war die einzige Phase mit Rückenwind für Glutexo.

f) Habitak und Raichu haben auf ihrer Route bis zum Ziel nur einmal die Richtung gewechselt, nach 40 Minuten fuhren sie mit Rückenwind für 10 Minuten in die gleiche Richtung. Während der eine die 10 Minuten davor schon Rückenwind hatte, hatte der andere auch die 10 Minuten danach Rückenwind.

g) Chaneira und Habitak haben in den ersten 80 Minuten die gleiche Route gehabt. Danach fuhr Chaneira in eine andere Richtung als Habitak.

h) Niemand ist mit Gegenwind gestartet. Zur Minute 90 drehte der Wind von aus Süden kommend auf aus Westen kommend.

i) Ersetzt man die Länge eines Morsezeichens durch eine Himmelsrichtung, so könnte man die ersten 90 Minuten der Routen von Blitza durch die Zeichenkette V C T beschreiben, von Evoli durch F C T, von Smettbo durch X U I, von Glutexo durch Y S N und von Ursaring durch S O S. Drei von ihnen mussten dann noch weiterfahren.

(j) Bis auf die ersten 10 Minuten war die zurückgelegte Route von Natu komplett anders als die von Blitza.

Man kann davon ausgehen, dass es keine Zeitverzögerungen beim Wechseln der Richtung gibt, die Seifenschlitten ändern, wenn gewünscht, sofort ihre Richtung. Auch gab es keine Unfälle, die Wichtel haben sich nicht gegenseitig behindert und niemand musste disqualifiziert werden.

Welcher Wichtel hat gewonnen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Blitza
2. Evoli
3. Smettbo
4. Chaneira
5. Habitak
6. Es kann keine eindeutige Aussage getroffen werden.
7. Raichu
8. Ursaring
9. Natu
10. Glutexo

Projektbezug:

Die Inspiration zur Aufgabe lieferte das Projekt „Flight Trajectory Optimization on Airway Networks“ (http://www.zib.de/projects/flight-trajectory-optimization-airway-networks). In dem Projekt geht es darum, Flugrouten mit minimalen Benzin- und Überflugkosten zwischen gegebenen Start- und Zielflughäfen möglichst schnell zu berechnen. Die Benzinkosten hängen dabei nicht nur von den Eigenschaften des Flugzeugs sondern u.a. auch von Wetterbedingungen und Windströmungen ab.

20.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 9.

Tabelle 10 zeigt die Windrichtungen, Richtungsänderungen der Wichtel und die Gesamtzeiten. Bemerkungen:

- Aus Aussage a) folgt, dass es reicht, nur die ersten 100 Minuten zu betrachten. Wegen Aussage b) und Windwechsel alle 10 Minuten kann der Zeitraum in 10-Minuten-Schritte eingeteilt werden.
- Aus d) folgt die erste Richtung aller Wichtel.
- Da die erste Richtung bekannt ist, folgt nun, dass der Morsecode „kurz" für Richtung Osten und „lang" für Richtung Norden steht. Damit bekommt man die ersten neun Richtungen für Blitza, Evoli, Smettbo, Glutexo und Ursaring. Mit j) ergibt sich die Route von Natu.
- Aus e) folgt dann die Windrichtung für Minute 30-40 sowie für 40-50.
- Aus f) folgen die Richtungen für Habitak und Raichu sowie die Windrichtung für Minute 50-60.
- Aus h) e) und c) folgen nun die Windrichtungen für alle anderen Zeiten.
- Beim Berechnen der Strecken sieht man, dass Blitza, Evoli und Smettbo noch weiterfahren müssen. Die Richtung ergibt sich, da alle nach 100 Minuten angekommen sind.

	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	
	→	↓	←	↑	→	↑	↓	←	↑	→	
Smettbo	↑ 1	→ 1	→ 0.5	↑ 2	→ 2	→ 1	↑ 0.5	→ 0,5	→ 1	↑ 1 [0.5]	95
Raichu	↑ 1	↑ 0.5	↑ 1	↑ 2	→ 2	→ 1	→ 1	→ 0.5	→ 1	→ 2 [0.25]	92.5
Glutexo	↑ 1	→ 1	↑ 1	↑ 2	→ 2	→ 1	→ 1	↑ 1	→ 1		90
Blitza	→ 2	→ 1	→ 0.5	↑ 2	↑ 1	→ 1	↑ 0.5	→ 0.5	↑ 2	→ 1 [1]	100
Evoli	→ 2	→ 1	↑ 1	→ 1	↑ 1	→ 1	↑ 0.5	→ 0.5	↑ 2	→ 2 [0,25]	92.5
Natu	→ 2	↑ 0.5	↑ 1	→ 1	→ 2	↑ 2	→ 1	↑ 1 [0.5]			75
Ursaring	→ 2	→ 1	→ 0.5	↑ 2	↑ 1	↑ 2	→ 1	→ 0.5	→ 1		90
Chaneira	→ 2	→ 1	→ 0.5	→ 1	→ 2	↑ 2	↑ 0.5	↑ 1	→ 1	↑ 1 [0.5]	95
Habitak	→ 2	→ 1	→ 0.5	→ 1	→ 2	↑ 2	↑ 0.5	↑ 1	↑ 2 [0.25]		82.5

Abbildung 10: Kopfzeile der Tabelle: Einteilung der ersten 100 Minuten des Rennens mit Windrichtung. Für jeden Wichtel ist die Fahrtrichtung pro 10-Minuten-Intervall angegeben sowie die unter den gegebenen Windverhältnissen mögliche Streckenlänge in km; Zahlen in []-Klammern geben den Zeitanteil an, der tatsächlich noch in die Richtung gefahren wird, falls die geforderten Streckenlängen schon erreicht wurden. Die letzte Zahl gibt die Gesamtzeit an.

21 Geschenkesortierungen

Autoren: Ulrich Reitebuch (FU Berlin), Martin Skrodzki (FU Berlin)
Projekt: GV-AP16 - *Computational and structural aspects of point set surfaces*

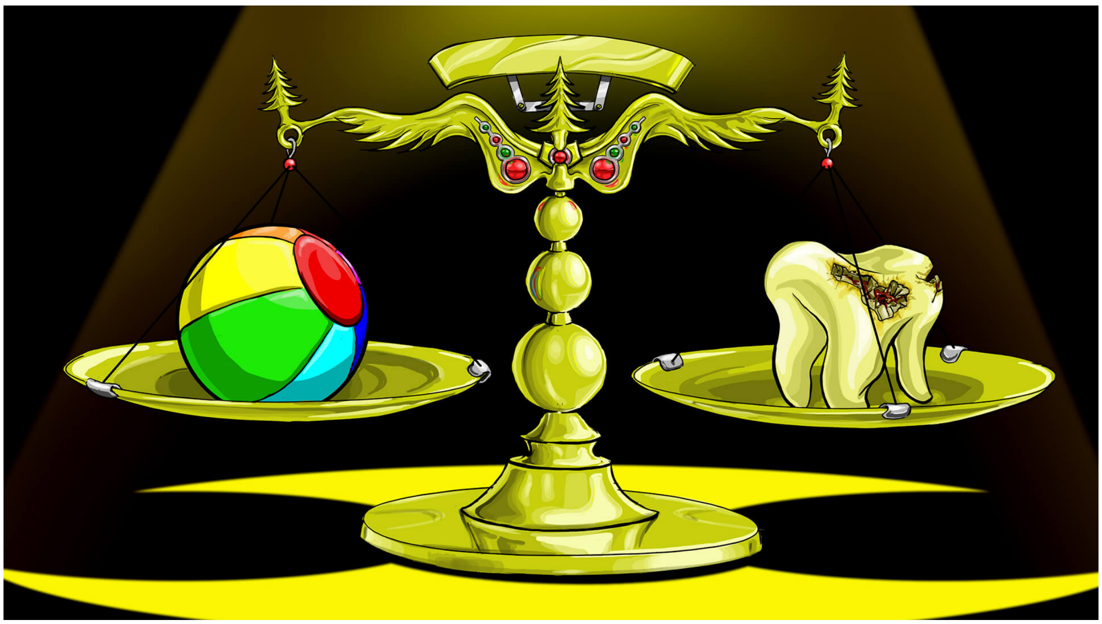
21.1 Aufgabe

Bisher haben die Wichtel des Weihnachtsdorfs die Geschenkpakete immer danach sortiert, wie viele Spielsachen sich in den Paketen befinden. Nach einigen Eingaben der weltweiten Zahnarzt-Vereinigung sollen die Wichtel aber auch einbeziehen, wie viele Süßigkeiten in jedem Paket sind. Jedes Paket P bekommt nun also eine Spiel-Bewertung S_P und eine Zucker-Bewertung Z_P. Die Bewertungen sind für je zwei Pakete verschieden. Nun wollen die Wichtel die Pakete stapeln und haben sich für die bessere Übersicht zwei Regeln überlegt:

- Für zwei Pakete P und Q, die nebeneinander stehen, soll gelten, dass P links von Q steht genau dann, wenn $S_P < S_Q$.
- Für zwei Pakete P und Q, die übereinander stehen, soll gelten, dass P unter Q steht genau dann, wenn $Z_P < Z_Q$.

Eine erste Lieferung von neun würfelförmigen Paketen trifft ein, sie sollen in drei übereinander stehende Reihen mit je drei Paketen sortiert werden . Die Pakete sind für die Kinder so bestückt, dass weniger Spielzeug durch mehr Zuckerzeug ausgeglichen wird. Die Bewertungen (S_P, Z_P) sind: $(1,9),(2,8),(3,7),\ldots,(9,1)$.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Pakete als 3×3-Stapel abzulegen, sodass beide Stapelregeln erfüllt sind? (Hinweis: Die Frage, ob der Stapel von beiden Seiten betrachtet werden kann, verbietet sich dadurch, dass *links* nur von einer Seite aus eindeutig definiert ist.)



Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 9
5. 11
6. 12
7. 13
8. 16

9. 21
10. 42

Projektbezug:

Die Frage taucht in Bezug auf die kombinatorische Ordnung von geometrischen Punktwolken auf. Will man n^2 Punkte $(x_1,y_1),\ldots,(x_{n^2},y_{n^2})$, $n \in \mathbb{N}$, in einem $n \times n$ Gitter so anordnen, dass die Reihen von links nach rechts aufsteigende x-Koordinate, die Spalten von unten nach oben aufsteigende y-Koordinate aufweisen, so gibt es für gegebenes n nur endlich viele kombinatorische Möglichkeiten, das Gitter zu füllen – unabhängig von den konkreten Punktkoordinaten. Das Gitter findet Anwendung in der Bestimmung von Nachbarschaften. Dies ist zum Beispiel in biologischen Zellsimulationen, physikalischen Partikelsimulationen, oder bei der Verarbeitung großer Datenmengen aus 3D-Scannern von Bedeutung.

21.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Die richtige Antwort ist: 42. Um diese Zahl zu ermitteln, übertragen wir das Problem zunächst. Angenommen, wir haben eine Sortierung der Pakete gefunden, die beide Regeln erfüllt (s. Abbildung 11 links). Nun ändern wir jede Bewertung (S,Z) zu $(S,10-Z)$ (s. Abbildung 11 mittig). Damit bekommt jedes Paket P eine Bewertung (S,S). Allerdings stimmt die Sortierung nun nicht mehr, dafür müssen wir die oberste und unterste Reihe austauschen (s. Abbildung 11 rechts). Mit dieser Umformung gilt, dass sich jede Sortierung der gegebenen Bewertungen in eine Sortierung der Bewertungen (1,1), (2,2), …, (9,9) umwandeln lässt. Das gilt auch umgekehrt. Es gibt also eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen - sie müssen gleich groß sein. Wenn wir wissen, wie viele Sortierungen es für die Bewertungen der Form (S,S) gibt, kennen wir sie auch für $(S,10-S)$, also unsere ursprünglichen Bewertungen.

(1,9)	(2,8)	(7,3)
(3,7)	(5,5)	(8,2)
(4,6)	(6,4)	(9,1)

(1,1)	(2,2)	(7,7)
(3,3)	(5,5)	(8,8)
(4,4)	(6,6)	(9,9)

(4,4)	(6,6)	(9,9)
(3,3)	(5,5)	(8,8)
(1,1)	(2,2)	(7,7)

Abbildung 11: Links eine Sortierung der Pakete mit ihren ursprünglichen Bewertungen, mittig eine Änderung der Bewertung und rechts eine entsprechende korrekte Sortierung mit neuen Bewertungen.

Wir wissen jetzt, dass $S_P = Z_P$ für alle Pakete P. Außerdem $S_P \neq S_Q$ für zwei Pakete P,Q. Da es uns nur auf die Sortierung ankommt, setzen wir für die neun Pakete $S_{P_1} = 1$, $S_{P_2} = 2$, …, $S_{P_9} = 9$. Die Frage ist nun, wie die Zahlen von 1 bis 9 in ein 3×3 Gitter geschrieben werden können, sodass die Zeilen von links nach rechts und die Spalten von unten nach oben aufsteigend geordnet sind. Hier ist die Gesamtzahl von 9 Paketen in (3,3,3) partitioniert.
Allgemeiner kann man für eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_i > \lambda_j$ für $i > j$ betrachten. Das Gitter mit λ_i Zellen in der i-ten Zeile heißt dann Ferrers Diagram (s. Abbildung 12 links). Die Anzahl von Möglichkeiten,

dieses Gitter mit den Zahlen 1 bis N zu füllen, sodass jede Zeile von links nach rechts und jede Spalte von unten nach oben aufsteigend sortiert ist, ist durch die Hook-Length Formel gegeben:

$$\frac{N!}{\prod h_\lambda(i,j)},$$

wobei für jede Zelle (i,j) im Gitter der Hook $H_\lambda(i,j)$ die Mengen an Zellen (a,b) ist, sodass $a = i$ und $b \geq j$ oder $a \geq i$ und $b = j$. Die Hook-Length $h_\lambda(i,j)$ ist die Anzahl von Zellen im Hook $H_\lambda(i,j)$ (s. Abbildung 12 rechts).
Im hier betrachteten speziellen Fall $N = 9$ und $\lambda = (3,3,3)$ ergibt sich für $h_\lambda(i,j) = (3 - i) + (3 - j) + 1$ und damit als mögliche Anzahl von Sortierungen genau 42.

$$\frac{9!}{\prod_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{3} ((3-i) + (3-j) + 1))} = 42$$

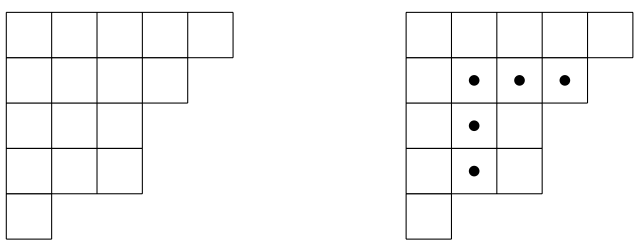


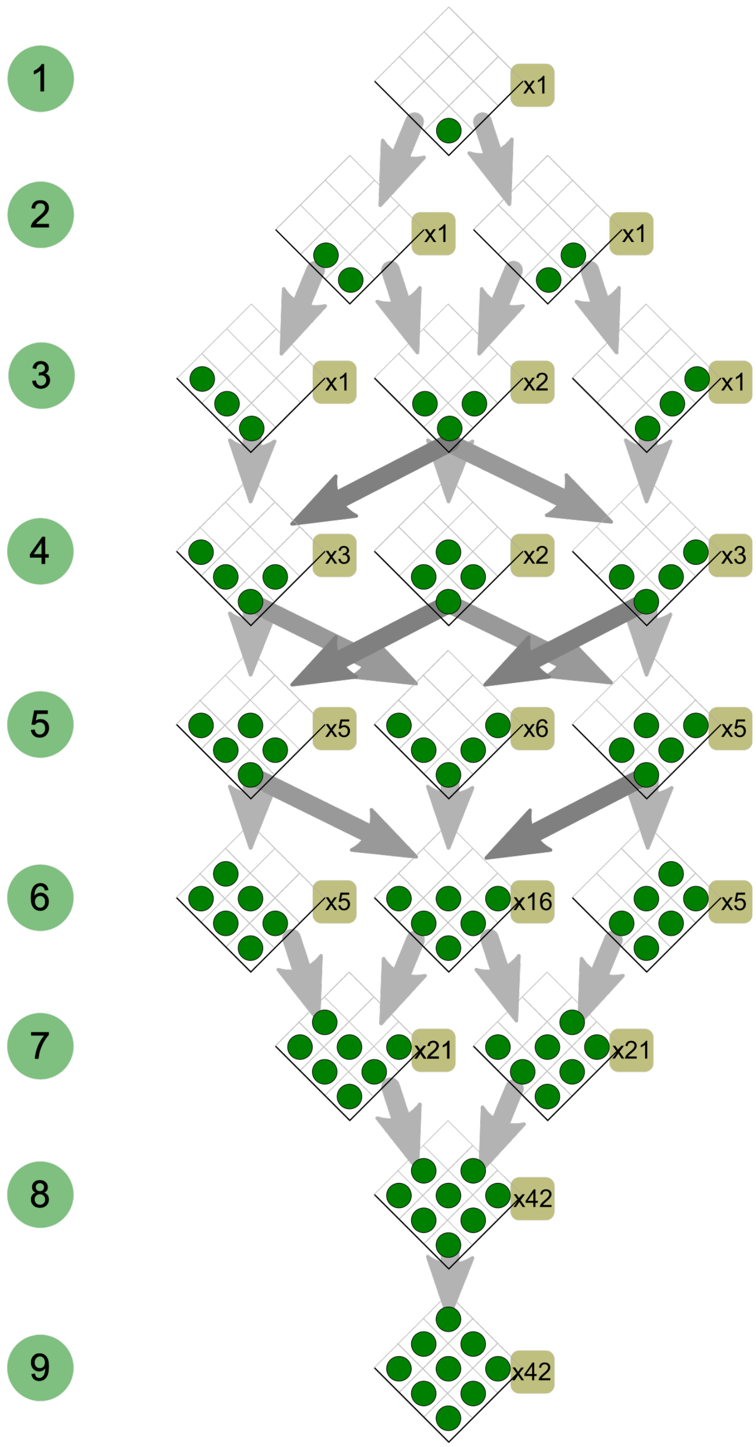
Abbildung 12: Links ein Ferrers Diagramm für die Partition $\lambda = (5,4,3,3,1)$ von $N = 16$. Rechts der entsprechende Hook $H_\lambda(2,2)$ mit einer Hook-Length von $H_\lambda(2,2) = 5$.

Für ein quadratisches Gitter der Seitenlänge 1, 2 oder 3 ist bekannt, für welche konkreten Bewertungen die geringsten, bzw. die meisten möglichen Sortierungen im Gitter existieren. So gibt es für $n \in \{1,2,3\}$ jeweils Bewertungen, die eine eindeutige Sortierung haben. Ab $n \geq 4$ gilt dies nicht mehr. Es wird vermutet, dass die Bewertung $(1,1),\ldots,(n^2,n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die meisten Sortierungen besitzt. Für $n \in \{1,2,3\}$ ist das bekannt, ab $n \geq 4$ ist die Frage jedoch offen.

Alternative Lösung:

Wer mit der Hook-Length Formel nicht vertraut ist, kann die Anzahlen auch zu Fuß ermitteln. Wir gehen wieder davon aus, dass die Pakete bereits auf die Bewertungen (1,1), … ,(9,9) transformiert wurden. Wir können also jedes Paket durch nur eine Zahl beschreiben. Und dabei gilt es, diese in das 3×3 - Raster einzupassen, sodass links von jedem Kästchen und darunter nur kleinere Zahlen sind. Zur besseren Vorstellung drehen wir das Quadrat um 45° auf die linke untere Ecke und lassen die Geschenke wie unter dem Einfluss der Schwerkraft in das 3×3 - Raster fallen. Das erste Päckchen kann sich dabei nur ganz unten festsetzen, denn links darunter oder rechts darunter darf kein weiteres Paket sein. Nach und nach lassen wir die weiteren Pakete 2, … ,9 hineinfallen. Diese können sich in unterschiedlichen Positionen festsetzen. Wichtig ist, dass es jeweils eine Art „Kerbe“ ist, die entweder aus vorherigen Paketen oder dem Rand gebildet wird. Damit wird jeweils sichergestellt, dass sich links darunter oder rechts darunter nur Pakete mit kleinerer Nummer befinden.

In dem folgenden Diagramm sind die möglichen Belegungsmuster dargestellt und durch Pfeile angedeutet, wie man von einem Muster zum anderen gelangt. Manchmal gibt es mehrere Wege zu einem Muster und darum ist neben jedem Muster die Anzahl der Wege angegeben, wie man dorthin gelangt. Ganz unten ergibt sich dann als Anzahl für die Belegung des kompletten Quadrats die Lösung 42.


1
x1
2
x1
x1
3
x1
x2
x1
4
x3
x2
x3
5
x5
x6
x5
6
x5
x16
x5
7
x21
x21
8
x42
9
x42

22 Bibliothek

Autoren: Aart Blokhuist (TU Eindhoven), Cor Hurkens (TU Eindhoven)
Übersetzung: Gabriele Neumann (HU Berlin)

22.1 Aufgabe

Der Elf Bippo ist der Bibliothekar der großen Bibliothek des Weihnachtsmannes. Beim Abendessen berichtet er den anderen Elfen und Wichteln oft ausführlich von seinem Arbeitstag. *“Heute bin ich endlich einmal dazu gekommen, den kleinen Nebenraum der Bibliothek aufzuräumen. Stellt Euch vor, als ich anfing, lagen genau 70 Bücher auf dem Boden dieses kleinen Raums, also sozusagen 70 Stapel, die nur ein Buch hoch waren. Ich fing an, die Stapel aufeinander zu legen, so dass die Stapelanzahl mit jedem Mal um eins abnahm. Dies tat ich solange, bis sich endlich nur noch ein Stapel mit 70 Büchern in diesem Raum befand.”* Theso, der Logikelf, legt seine Stirn in Falten und macht schließlich nach kurzem Grübeln die folgenden vier Aussagen:

A. Irgendwann im Laufe des Tages lagen heute also 3 Bücherstapel, die zusammen (genau) 70 Bücher enthielten, in dem Raum.

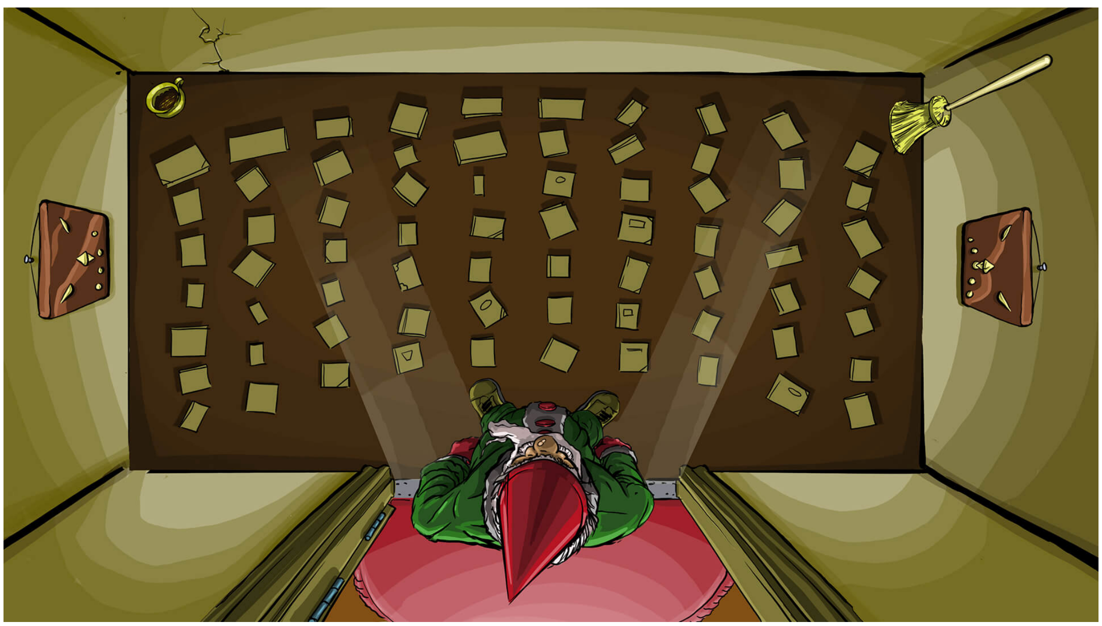
B. Irgendwann im Laufe des Tages lagen heute also 3 Bücherstapel, die zusammen (genau) 36 Bücher enthielten, in dem Raum.

C. Irgendwann im Laufe des Tages lagen heute also 21 Bücherstapel, die zusammen (genau) 42 Bücher enthielten, in dem Raum.

D. Irgendwann im Laufe des Tages lagen heute also 13 Bücherstapel, die zusammen (genau) 42 Bücher enthielten, in dem Raum.

Bemerkung: Jeder *(Bücher-)Stapel* in dieser Aufgabe enthält mindestens ein und höchstens 70 Bücher.

Welche von Thesos Aussagen ist stets wahr, wie auch immer Bippo seine Bücher gestapelt hat? Und welche Aussage ist falsch, in dem Sinne, dass es mindestens ein Gegenbeispiel für diese Aussage gibt?



Antwortmöglichkeiten:

1. A ist wahr, B, C, D sind falsch.
2. A, B sind wahr, C, D sind falsch.
3. A, C sind wahr, B, D sind falsch.
4. A, D sind wahr, B, C sind falsch.
5. B, C sind wahr, A, D sind falsch.

6. B, D sind wahr, A, C sind falsch.
7. A, B, C sind wahr, D ist falsch.
8. A, B, D sind wahr, C ist falsch.
9. A, C, D sind wahr, B ist falsch.
10. A, B, C, D sind alle wahr.

22.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 3.

Zur Untersuchung der einzelnen Aussagen:

Aussage A:

Da die Anzahl der Bücherstapel stets um einen Stapel vermindert wird, heißt dies, dass es zu irgendeinem Zeitpunkt genau drei Stapel mit insgesamt 70 Büchern gibt, daher ist Aussage A **wahr**.

Aussage B:

Diese Aussage ist **falsch**. Die folgende Strategie würde nämlich diese Konstellation vermeiden:

In Phase 1 bildet Bippo 7 Stapel mit jeweils 10 Büchern. In dieser Phase hat jeder Stapel nie mehr als 10 Bücher, daher wird es auch nie drei Stapel mit insgesamt 36 Büchern geben können.
In Phase 2 stapelt Bippo die 10 Bücher hohen Stapel übereinander. Egal, wie er jetzt dabei vorgeht, wird die Anzahl der Bücher in diesen Bücherstapeln immer ein Vielfaches der Zahl 10 betragen, aber niemals gleich 36 sein.

Aussage C:

Nach 21 Stapelschritten wird es genau 49 Bücherstapel mit der Gesamtzahl von 70 in dem besagten Raum geben. Von diesen 49 besteht eine Anzahl x noch aus einem 1-Buch-Stapel und die entsprechenden $49 - x$ Stapel müssen daher aus mindestens zwei Büchern bestehen. Über diese Anzahl x wissen wir damit folglich, dass $1 \cdot x + 2(49 - x) \leq 70$, also ist $x \geq 28$. Wenn wir jetzt von den 49 Stapeln mit 70 Büchern 28 Stapel aus einzelnen Büchern wegnehmen, bleiben uns genau 21 Stapel mit einer Gesamtzahl von 42 Büchern. Deshalb ist die Aussage C **wahr**.

Aussage D:

Diese Aussage ist **falsch** . Im Folgenden wird wieder eine Strategie geschildert, die diese Konstellation vermeidet:

In einer ersten Phase bildet Bippo 2 Stapel mit 2 Büchern und 22 Stapel mit 3 Büchern. Damit haben 13 Stapel höchstens $13 \cdot 3 = 39$ Bücher, aber niemals 42 Bücher.
In der zweiten Phase stapelt Bippo die beiden Zweierstapel zu einem Viererstapel, seinem Extrastapel. Auf diesen Extrastapel legt er nun nach und nach einen Dreierstapel. Somit gibt es in dieser zweiten Phase also nur Dreierstapel oder den Extrastapel mit stets einer Anzahl von $1 \bmod 3$ Büchern. Letztere kann nicht gleich 36 sein.
Alles in allem wird es nie 13 Stapel mit 42 Büchern geben.

23 Maulwurf in Not

Autoren: Falk Ebert (HU Berlin), Ariane Beier (MATHEON)

23.1 Aufgabe

Das kleine Wichtelmädchen Wilma hat letztes Jahr zu Weihnachten einen lang ersehnten Wunsch erfüllt bekommen: Sie hat nun endlich auch ein eigenes Haustier, einen Maulwurf, den sie Marco nennt. (WARNUNG: Maulwürfe sind als Haustiere für Menschenkinder leider nicht geeignet!!!) Wilma hat allerdings unterschätzt, wie viel Auslauf so ein Tier braucht. Wenn es dem kleinen Racker mal wieder zu langweilig in Wilmas Wichtelkinderzimmer wird, büchst er kurzerhand aus. Auf der Suche nach schmackhaften Insekten, die es sich jetzt im kalten Winter in den Kellern der Wichtelhäuser gemütlich machen und auf den Frühling warten, hat sich Marco auch schon einige Male verlaufen: Wie man weiß, sind Maulwürfe fast gänzlich blind und orientieren sich vor allem über ihren Tast- und Geruchssinn. Da im Hause der Wichtelfamilie aber schon seit Wochen die köstlichsten Weihnachtsleckereien gekocht und gebacken werden, riecht es wie auf einem Weihnachtsmarkt. Marcos Geruchssinn ist dadurch völlig verwirrt.

Heute ist es wieder soweit... Marco sitzt in der Mitte des Wichtelkellers (s. Abb. 13) beim Punkt S und läuft in Richtung Norden. Solange er auf kein Hindernis trifft, läuft er immer schnurstracks geradeaus. Trifft er auf eine Wand, dann läuft er in die eine oder andere Richtung an der Wand entlang weiter – beides mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Verliert er dabei den Kontakt zur Wand, ist ihm das egal, er läuft trotzdem geradeaus weiter. Kommt er an eine Ecke, dann biegt er mit 50% Wahrscheinlichkeit an der Ecke ab und mit 50% Wahrscheinlichkeit dreht er um und läuft zurück in die Richtung, aus der er gekommen ist.

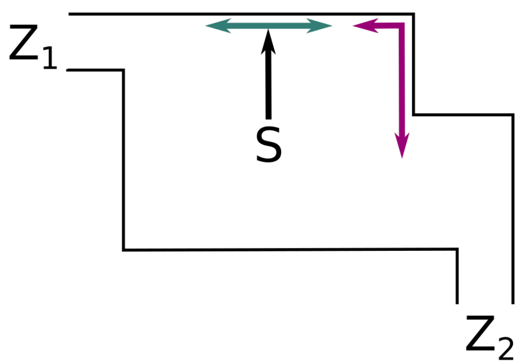


Abbildung 13: Keller der Wichtelfamilie. S: Marcos Startposition. Z_1 und Z_2: Ausgänge des Kellers.

Aus dem Keller gibt es zwei Ausgänge, Z_1 und Z_2, die er mit Wahrscheinlichkeiten P_{Z_1} und P_{Z_2} erreicht. Wie verhalten sich diese Wahrscheinlichkeiten zueinander, d. h. wie lautet das Verhältnis $P_{Z_1} : P_{Z_2}$?

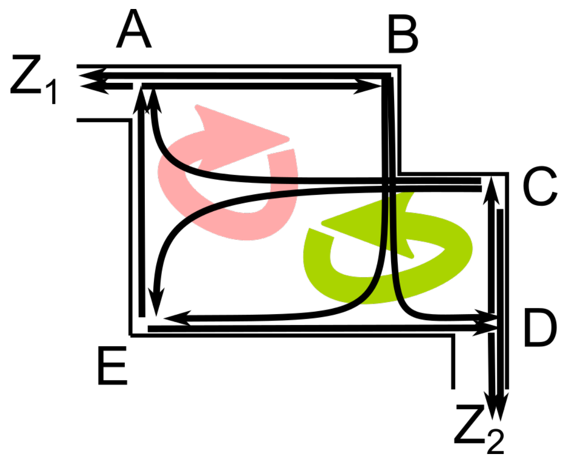
Antwortmöglichkeiten:

1. 1 : 1, d. h. beide Ausgänge sind gleichwahrscheinlich.
2. 2 : 1, d. h. Ausgang Z_1 ist doppelt so wahrscheinlich wie Z_2.
3. 3 : 1.
4. 5 : 1.
5. 6 : 1.
6. 13 : 2.
7. 16 : 3.
8. 64 : 13.
9. 128 : 25.
10. Das Verhältnis ist mit den angegebenen Daten nicht bestimmbar.

23.2 Lösung

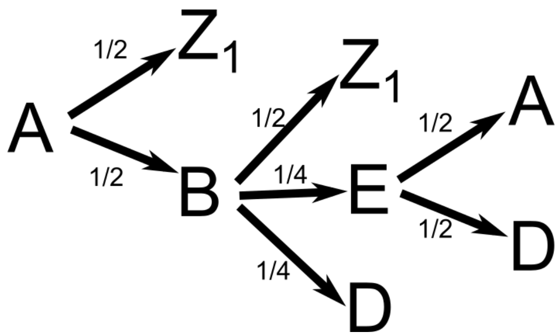
Die richtige Antwort ist: 4.

In der folgenden Zeichung sind die möglichen Wege des Maulwurfs schematisch dargestellt.

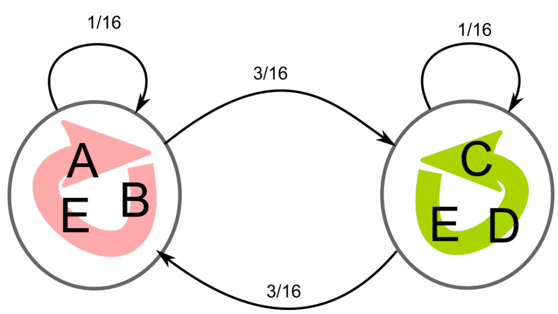


Von den Punkten A und B gibt es jeweils eine Chance von 50%, den Ausgang Z_1 zu nehmen. Analog geht es von C und D aus mit jeweils 50% Wahrscheinlichkeit zum Ausgang Z_2. Zu beachten ist, dass Punkt A nur von unten erreicht werden kann, da kommend von B, der Maulwurf auf kein Hindernis trifft und sofort zum Ausgang Z_1 weitergeht. Analog wird B nur von A aus erreicht. Die spiegelbildliche Situation ergibt sich bei D und C. Wenn der Maulwurf von B aus nicht zum Ausgang Z_1 geht, prallt er unten an die Wand und wird mit gleichen Wahrscheinlichkeiten zu den Punkten E oder D weitergehen. Insgesamt kann man den Weg des Maulwurfs so auffassen: Befindet er sich in dem Zyklus $A - B - E$, so kann er von A oder B aus nach Z_1 entwischen, von B oder E gelangt er zum Punkt D. Außerdem kann er von E aus wieder zu A zurück, wodurch sich die Bezeichnung *Zyklus* rechtfertigt. Der Punkt D wiederum gehört zu einem eigenen Zyklus $D - C - E$. Nur aus diesem Zyklus heraus kann man zum Ausgang Z_2 gelangen. Es fällt auf, dass die beiden Zyklen $A - B - E$ und $D - C - E$ sich prinzipiell symmetrisch verhalten. Dabei entsprechen die Punkte A und D einander sowie B und C. Die Ecke E tritt in beiden auf.
Es reicht also, einige Betrachtungen nur auf $A - B - E$ zu beschränken. Für $D - C - E$ ergibt sich dann ein analoges Ergebnis. Für das weitere Verhalten des Maulwurfs können wir davon ausgehen, dass er sich gerade von E zu A bewegt.

Die Wahrscheinlichkeiten, nach links oder rechts weiterzugehen, sind die gleichen wie bei S.



Aus dem Baumdiagramm erkennen wir, dass Marco ausgehend von A im $A-B-E-$ Zyklus zwei Möglichkeiten hat, nach Z_1 zu gehen. Diese nutzt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$ wandert er zu D und damit in den Zyklus $D-C-E$. Und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$ kommt er zurück zu A und bleibt damit im Zyklus $A-B-E$. Wir bezeichnen jetzt mit a_k und d_k die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass Marco sich im Schritt k im Zyklus $A-B-E$ bzw. $D-C-E$ befindet. Ein Schritt ist dadurch gekennzeichnet, dass er entweder den Punkt A oder den Punkt D erreicht. Die Startsituation ist $a_0=1$, da er (im Prinzip) bei A startet und $d_0=0$. Mit den aus dem Baumdiagramm gewonnenen Wahrscheinlichkeiten können wir folgendes Übergangsschema aufstellen.



Marco bleibt also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$ in einem Zyklus und wandert mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{16}$ in den anderen. Es gilt:

$$a_{n+1}=\frac{1}{16}a_n+\frac{3}{16}d_n, \tag{13}$$

$$d_{n+1}=\frac{1}{16}d_n+\frac{3}{16}a_n. \tag{14}$$

Wir definieren jetzt die Summen aller a_n und d_n als

$$
\begin{aligned}
T_A &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots, \\
T_D &= d_0 + d_1 + d_2 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Diese beiden Reihen sind trotz undendlich vieler Summanden endlich und geben die durchschnittliche Anzahl von Schritten an, die Marco in jedem Zyklus verbleibt. Um das Verhältnis der Ausgangswahrscheinlichkeiten zu bestimmen, muss nur das Verhältnis $T_A : T_D$ berechnet werden. Um die Reihen zu berechnen, bedienen wir uns eines Tricks.

$$
\begin{aligned}
T_A &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \\
T_D &= d_0 + d_1 + d_2 + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_A - a_0 &= T_A - 1 = a_1 + a_2 + \ldots \\
T_D - d_0 &= T_D = d_1 + d_2 + \ldots
\end{aligned}
$$

Die Terme a_n und d_n auf der rechten Seite können wir mittels (13) und (14) umformen.

$$
\begin{aligned}
T_A - 1 &= \frac{1}{16}(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots) + \frac{3}{16}(d_0 + d_1 + d_2 + \ldots) &&= \frac{1}{16}T_A + \frac{3}{16}T_D \\
T_D &= \frac{1}{16}(d_0 + d_1 + d_2 + \ldots) + \frac{3}{16}(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots) &&= \frac{1}{16}T_D + \frac{3}{16}T_A
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
-1 &= -\frac{15}{16}T_A + \frac{3}{16}T_D, \\
0 &= \frac{3}{16}T_A - \frac{15}{16}T_D
\end{aligned}
$$

mit Lösungen $T_A = \frac{10}{9}$ und $T_D = \frac{2}{9}$. Damit ergibt sich das Verhältnis $T_A : T_D = 5 : 1$. Als schöne Bestätigung dieses Ergebnisses können wir noch die Summe $T_A + T_D = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ betrachten. Marco bleibt also wahrscheinlich $\frac{4}{3}$ Zyklen im Keller. Und da er aus jedem Zyklus mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ zu einem Ausgang geht, ist er nach diesen $\frac{4}{3}$ Zyklen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$ zu einem Ausgang gegangen.

24 Saalwechsel

Autorin: Judith Keijsper (TU Eindhoven)
Übersetzung: Gabriele Neumann (HU Berlin)

24.1 Aufgabe

Am internationalen Symposium der Intelligenzwichtel nehmen in diesem Jahr 101 Wichtel teil, deren paarweise verschiedene Intelligenzquotienten jeweils $100, 101, 102, \ldots, 199, 200$ betragen.
Die Wichtel teilen sich in zwei Gruppen: Die erste Wichtelgruppe versammelt sich im blauen Saal, die zweite Wichtelgruppe im roten Saal. Wichtel Adalbert, der einen IQ von 124 besitzt, geht nach einiger Zeit von dem blauen Saal in den roten Saal. Durch diesen Wechsel steigt der Durchschnitt der Intelligenzquotienten in beiden Sälen genau um den Wert $\frac{1}{3}$.

Wie viele Wichtel waren in dem blauen Saal, **bevor** Adalbert ihn verlassen hat?

Antwortmöglichkeiten:

1. In dem blauen Raum waren 17 Wichtel.
2. In dem blauen Raum waren 24 Wichtel.
3. In dem blauen Raum waren 38 Wichtel.
4. In dem blauen Raum waren 49 Wichtel.
5. In dem blauen Raum waren 51 Wichtel.
6. In dem blauen Raum waren 56 Wichtel.
7. In dem blauen Raum waren 65 Wichtel.
8. In dem blauen Raum waren 72 Wichtel.
9. In dem blauen Raum waren 83 Wichtel.
10. In dem blauen Raum waren 90 Wichtel.

24.2 Lösung

Die richtige Antwort ist: 10.

Wir bezeichnen die Anzahl der Wichtel im blauen und roten Saal vor Adalberts Saalwechsel jeweils mit b und r, die Summe der jeweiligen Intelligenzquotienten in den Sälen bezeichnen wir entsprechend mit B und R.
Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} b + r &= 101, \\ B + R &= 100 + 101 + \cdots + 200 = 15150. \end{aligned}$$

Nach Adalberts Saalwechsel erhalten wir für das arithmetische Mittel jeweils die Gleichungen

$$\frac{B-124}{b-1} = \frac{B}{b} + \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad \frac{R+124}{r+1} = \frac{R}{r} + \frac{1}{3}.$$

Durch Äquivalenzumformungen erhält man

$$b^2 + 371b - 3B = 0 \qquad \text{und} \qquad r^2 - 371r + 3R = 0.$$

Mit Hilfe von $r = 101 - b$ and $R = 15150 - B$ kann die zweite Gleichung umgeformt werden zu $b^2 + 169b - 3B + 18180 = 0$.
Substrahieren wir nun diese neue Gleichung von der ersten Gleichung

$$b^2 + 371b - 3B = 0,$$

so erhalten wir $202b = 18180$ und damit $b = 90$.

Damit ist Nr. 10 die richtige Lösung. Man kann außerdem damit berechnen, dass $r = 11$ und $R = 1320$ und $B = 13830$. Dann könnten $r = 11$ Wichtel mit den Intelligenzquotienten $100, 101, \ldots, 107$ und $163, 164, 165$ im roten Saal sein.