Aufgaben & Lösungen 2014

DIGITALER MATHEON KALENDER

Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

3TU.AMI

Inhaltsverzeichnis

1 Jongleur

Aufgabensteller: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

1.1 Aufgabe

Im Weihnachtszirkus jongliert heute der magische Schneemann Schnebulus mit Bällen, Kegeln, Tetraedern und Würfeln. Ab und zu murmelt er dabei ein mächtiges Zauberwort:

Ebrecedebre verwandelt einen Ball in einen Kegel und ein Tetraeder

Ibricidibri verwandelt einen Kegel in zwei Tetraeder und einen Würfel

Obrocodobro verwandelt ein Tetraeder in einen Würfel und drei Bälle

Ubrucudubru verwandelt einen Würfel in einen Ball und vier Kegel

Wenn Schnebulus ein Zauberwort umdreht, so wirkt es in umgekehrter Richtung:

erbedecerbE verwandelt einen Kegel und ein Tetraeder in einen Ball

irbidicirbI verwandelt zwei Tetraeder und einen Würfel in einen Kegel

orbodocorbO verwandelt einen Würfel und drei Bälle in ein Tetraeder

urbuducurbU verwandelt einen Ball und vier Kegel in einen Würfel

Momentan jongliert Schnebulus nur mit einem einzigen Kegel (und keinem Ball, keinem Tetraeder und keinem Würfel). Schnebulus würde gerne die folgenden vier Jongliersituationen erreichen:

B: Mindestens fünf Bälle, aber keine Kegel, Tetraeder oder Würfel

K: Mindestens fünf Kegel, aber keine Bälle, Tetraeder oder Würfel

T: Mindestens fünf Tetraeder, aber keine Bälle, Kegel oder Würfel

W: Mindestens fünf Würfel, aber keine Bälle, Kegel oder Tetraeder

Das Publikum verharrt in atemloser Spannung: Welche dieser Situationen kann Schnebulus rein durch Anwendung seiner Zauberworte erreichen?

Antwortmöglichkeiten:

1. B, K, T und W
2. Nur B, K und T
3. Nur B, K und W
4. Nur B, T und W
5. Nur K, T und W
6. Nur B und K
7. Nur B und T
8. Nur B und W
9. Nur K und T
10. Nur K und W

1.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 3.
Im Folgenden werden wir die Zauberworte Ebrecedebre, Ibricidibri, Obrocodobro, Ubrucudubru durch die Großbuchstaben E, I, O, U abkürzen, und die umgedrehten Worte durch die Kleinbuchstaben e, i, o, u. Weiter bezeichnen wir die Anzahl der von Schnebulus gemurmelten Worte Ebrecedebre minus der Anzahl der gemurmelten Worte erbedecerbE mit n_E; analog definieren wir n_I, n_O und n_U für die anderen Zauberworte.

Situation B. Um Situation B von der Anfangssituation (mit einem einzigen Kegel) aus zu erreichen, müssen $b \geq 5$ Bälle dazu kommen, muss der Kegel verschwinden und darf sich die Zahl der Tetraeder und Würfel nicht ändern. Mit anderen Worten, das folgende Gleichungssystem muss für eine ganze Zahl $b \geq 5$ erfüllt sein:

$$\begin{aligned} b &= -n_E + 3n_O + n_U \\ -1 &= n_E - n_I + 4n_U \\ 0 &= n_E + 2n_I - n_O \\ 0 &= n_I + n_O - n_U \end{aligned}$$

Dieses System hat die Lösung

$$n_E = -\frac{1}{12}(11b+9), \qquad n_I = \frac{1}{12}(5b+3), \qquad n_O = -\frac{1}{12}(b+3), \qquad n_U = \frac{1}{3}b.$$

Für $b = 9$ ergibt das zum Beispiel die Werte $n_E = -9$, $n_I = 4$, $n_O = -1$ und $n_U = 3$.
Schnebulus kann die Situation B mit neun Bällen nun zum Beispiel dadurch erreichen, dass er der Reihe nach die folgenden siebzehn Zauberworte aufsagt:

I, U, I,I,I, U,U, o, e,e,e,e,e,e,e,e,e

Situation K. Damit Situation K von der Anfangssituation aus erreichbar ist, müssen $k \geq 4$ neue Kegel zum bereits vorhandenen Kegel dazu kommen. Daher muss folgendes Gleichungssystem für eine ganze Zahl $k \geq 4$ erfüllt sein:

$$\begin{aligned} 0 &= -n_E + 3n_O + n_U \\ k &= n_E - n_I + 4n_U \\ 0 &= n_E + 2n_I - n_O \\ 0 &= n_I + n_O - n_U \end{aligned}$$

Dieses zweite Gleichungssystem hat die Lösung

$$n_E = 3k/4, \qquad n_I = -k/4, \qquad n_O = k/4, \qquad n_U = 0.$$

Für $k = 4$ ergibt das zum Beispiel $n_E = 3$, $n_I = -1$, $n_O = 1$ und $n_U = 0$. Schnebulus erreicht die Situation K mit fünf Kegeln, indem er die folgenden sieben Worte spricht:

I, O, E,E,E, i,i

Situation T. Analog zu den obigen Diskussionen sehen wir, dass der Kegel verschwinden muss, dass $t \geq 5$ Tetraeder dazu kommen müssen, und dass die Zahl der Bälle und Würfel gleich 0 bleiben muß. Das führt uns zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= -n_E + 3n_O + n_U \\ -1 &= n_E - n_I + 4n_U \\ t &= n_E + 2n_I - n_O \\ 0 &= n_I + n_O - n_U \end{aligned}$$

Dieses dritte Gleichungssystem hat die Lösung

$$n_E = -\frac{1}{12}(8t+9), \quad n_I = \frac{1}{12}(8t+3), \quad n_O = -\frac{1}{12}(4t+3), \quad n_U = \frac{1}{3}t.$$

Da $4t+3$ fr ein ganzzahliges t eine ungerade Zahl ist, kann $n_O = -\frac{1}{12}(4t+3)$ sicherlich nicht ganzzahlig sein. Da n_O aber die gemurmelten Zauberworte Obrocodobro und orbodocorbO zählt, ist die Situation T von der Anfangssituation aus nicht erreichbar.

Situation W. Schlussendlich wollen wir die Erreichbarkeit von Situation W analysieren. Die bisherigen Überlegungen führen uns zum folgenden Gleichungssystem mit $w \geq 5$:

$$\begin{array}{rcrrrr} 0 & = & -n_E & & +\,3n_O & +\;\;n_U \\ -1 & = & n_E & -\;\;n_I & & +\,4n_U \\ 0 & = & n_E & +\,2n_I & -\;\;n_O & \\ w & = & & n_I & +\;\;n_O & -\;\;n_U \end{array}$$

Dieses vierte Gleichungssystem hat die Lösung

$$n_E = \frac{1}{12}(25w-9), \quad n_I = -\frac{1}{12}(7w-3), \quad n_O = \frac{1}{12}(11w-3), \quad n_U = -\frac{2}{3}w.$$

Für $w = 9$ erhalten wir zum Beispiel $n_E = 18$, $n_I = -5$, $n_O = 8$ und $n_U = -6$. Schnebulus erreicht die Situation W mit neun Würfeln von der Anfangssituation aus, indem er die folgenden neununddreißig Zauberworte deklamiert:

I, O,O, E,E,E,E,E,E, O,O,O,O,O,O,
E,E,E,E,E,E,E,E,E,E,E,E, i,i,i,i,i, u,u,u,u,u,u

Zusammenfassung. Die Situationen B, K und W sind von der Anfangssituation aus erreichbar, die Situation T ist es nicht. Somit ist Antwort #3 richtig.

2 Weihnachtssudoku

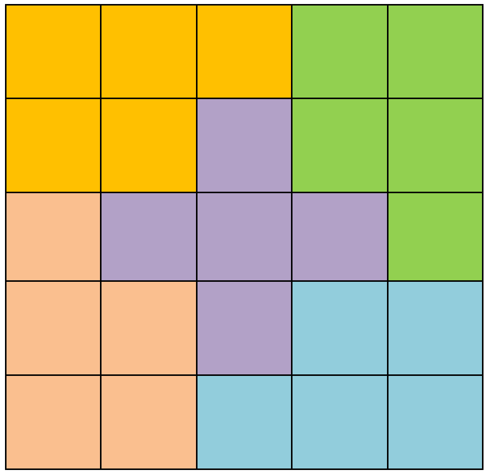
Aufgabensteller: Marcus Weber (Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin)

2.1 Aufgabe

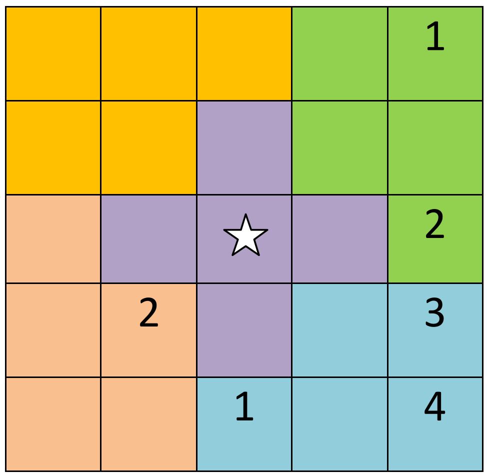
Oft kommt es in der Angewandten Mathematik darauf an, die Eigenschaften eines Systems zu erkennen, die unverändert bleiben, auch wenn sich das System auf bestimmte Weise ändert. Dabei geht es oft um Änderungen, die

eine Symmetrie des Systems ausnutzen, z.B. mögliche Permutationen (Vertauschungen) der Lösungen einer Gleichung.
Sudoku-Rätsel sind eine gute Übung, um die Eigenschaften von Permutationen zu verstehen. Bei den drei vorgegebenen Sudoku-Rätseln sollen die Ziffern 1 bis 5 in die freien Felder eingetragen werden, so dass jeweils pro Zeile und Spalte und pro farbig markiertem Bereich jede Ziffer genau einmal vorkommt.
Je nachdem, wie viele und welche Ziffern vorgegeben sind, kann das Sudoku lösbar oder nicht lösbar sein. Es kann, wenn es lösbar ist, eindeutig lösbar sein oder mehrere Lösungen besitzen. Um Aussagen dieser Form wird es im Folgenden gehen. Noch eine Anmerkung: Ist das Rätsel weihnachtlich? Leider sind es nicht 24, sondern 25 Felder, aber dafür gibt es einen kleinen Weihnachtsstern auf einigen freien Feldern und eine weihnachtlich anmutende Antwortmöglichkeit.... Wichtig: Genau eine der folgenden Aussagen ist richtig. Welche?

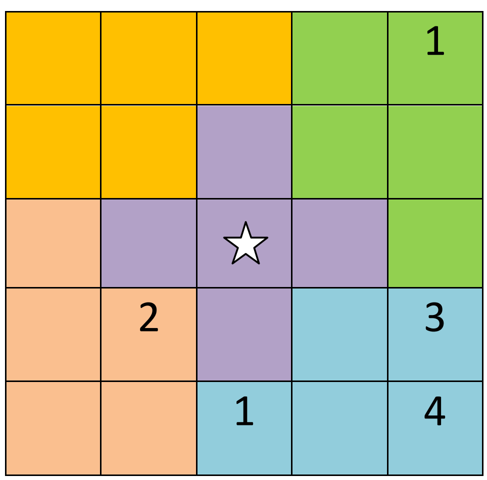
Sudoku A



Sudoku B



Sudoku C



Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt eine Möglichkeit, in dem Sudoku A nur die Ziffern 1, 2 und 3 in geeigneter Weise vorzugeben, so dass das Sudoku dann eindeutig lösbar wird, das heißt genau eine Lösung hat.

2. Nehmen wir an, wir haben einige Ziffern in dem Sudoku A bereits vorgegeben, so dass das Sudoku eindeutig lösbar wird. Eine Permutation der vorgegebenen Felder (bei der ein neues Sudoku entsteht) führt in jedem Fall dazu, dass das Sudoku nicht eindeutig lösbar wird.

3. Denkt man sich die Zeilen des Sudokus als fünfstellige Zahlen (Zehnersystem), dann gibt es eine Lösung des Sudokus A, so dass nicht genau eine dieser Zahlen durch 15 teilbar ist.

4. Es gibt eine Lösung des Sudokus A, bei der die Ziffern in einer der Zeilen in der gleichen Reihenfolge (von rechts nach links) auftauchen wie die Ziffern in einer der Spalten (von oben nach unten).

5. Es gibt eine Lösung des Sudokus A, bei der die Summe der Ziffern einer der Diagonalen 24 beträgt.

   Anmerkung: Hier ist ein Fehler im Kalender aufgetreten, da diese Aufgabe mit „bei der die Summe der Ziffern einer der Diagonalen 23“ online gestellt wurde.

6. Das Sudoku B ist lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

7. Das Sudoku B ist eindeutig lösbar, auf dem Feld mit dem Weihnachtsstern steht eine 4 in der Lösung.

8. Das Sudoku C ist eindeutig lösbar.

9. Das Sudoku C ist nicht eindeutig lösbar. Es gibt eine Lösung, bei der die Ziffer 2 auf dem Feld mit dem Weihnachtsstern steht.

10. Der Erfinder dieses Rätsels verschenkt - als Weihnachtsmann verkleidet - Sudokus an seine Verwandten.

2.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 8.

Zunächst zur Aussage 10 über den Erfinder der Sudokus. Diese Aussage lässt sich nicht prüfen. Durch die Angabe jedoch, dass genau eine Aussage wahr ist, kann man durch das Ausschlussprinzip auf den Wahrheitsgehalt der Aussage 10 kommen. Das Ausschlussprinzip ist auch genau die Technik, um ein Sudoku zu lösen. Mit dieser Technik findet man schnell heraus, dass das Sudoku B eindeutig lösbar ist. In der Lösung steht auf dem Feld mit dem Stern eine "3". Aussagen 6 und 7 sind demnach falsch. Aussage 5 ist falsch, da 5 Felder eine Diagonalen bilden. Dazu müssten mindestens 4 der 5 Felder mit der Ziffer 5 belegt sein. Das ist verboten, da die Diagonale nur durch 3 verschiedenfarbig markierte Bereiche führt und deshalb zwei gleiche Ziffern in einem Bereich auftreten würden.
Macht man sich nun an die Lösung von Sudoku C, dann ist dieses Sudoku (da es ja eine Vorgabe weniger besitzt als Sudoku B) zumindest lösbar. Eine Lösung kennt man also schon. Gäbe es eine weitere Lösung von Sudoku C, dann müssten in der letzten Spalte die Ziffern 5 und 2 getauscht vorkommen (letzte Spalte also "1,2,5,3,4"). Mit dieser Vorgabe (inklusive der weiterhin vorgegebenen 1 und 2) lässt sich das Sudoku jedoch nicht mehr lösen. Das Sudoku C ist also eindeutig lösbar und Aussage 8 ist wahr. Damit sind alle andere Aussagen falsch.
Nur, um den Beweis noch für die Unrichtigkeit der anderen prüfbaren Aussagen zu zeigen:
Aussage 9 ist falsch, da Aussage 8 wahr ist.
Aussage 1 ist falsch. Wenn man weder 4 noch 5 in einem Sudoku vorgibt, dann kann man in einer Lösung des Sudokus diese beiden Ziffern tauschen und erhält eine weitere Lösung.
Aussage 2 ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist Sudoku B, bei dem man die 3 und die 4 austauscht.
Aussage 3 ist falsch. Jede der Zahlen ist durch drei teilbar (unabhängig von einer Permutation ist die Quersumme der Zahlen immer 15 und somit durch drei teilbar). Nur genau eine der Zahlen ist auch durch fünf teilbar, denn die Endziffer fünf kommt genau einmal vor.
Aussage 4 ist falsch. Die gleiche Reihenfolge der Ziffern kann nur in der jeweils ersten Zeile und Spalte oder in der jeweils letzten Zeile und Spalte vorkom-

men. In beiden Fällen kommt eine Ziffer doppelt in einem farbig markierten Bereich (orange bzw. blau) vor. Das widerspricht den Regeln des Sudoku. Und Aussage 10 braucht man dann nicht mehr zu widerlegen. Wir hoffen sehr, dass keiner glaubt, dass der Autor so etwas machen würde...

3 Truhenspiel

Aufgabensteller: Cor Hurkens (TU Eindhoven) und Frits Spieksma (KU Leuven)

3.1 Aufgabe

In einer langen Reihe stehen 101 Truhen, die mit den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 100$ durchnummeriert sind. Der Grinch und Knecht Ruprecht spielen mit diesen Truhen das T-Truhen-Spiel (in dem T eine positive ganze Zahl ist).

- Der Grinch wählt zwei Zahlen x und y mit $0 \leq x, y \leq 100$ und $|x - y| \leq 50$ und versteckt Ruprechts Korkenzieher in Truhe x und eine Flasche Rum in Truhe y. Alle anderen Truhen bleiben leer.
- Knecht Ruprecht darf dann der Reihe nach insgesamt T Truhen öffnen: Seine erste Truhe darf Ruprecht dabei beliebig wählen. Jede weitere Truhe darf aber nur dann geöffnet werden, wenn die links oder die rechts benachbarte Truhe bereits offen ist.

Knecht Ruprecht gewinnt das Spiel, falls er sowohl Korkenzieher als auch Rum findet; andernfalls gewinnt der Grinch. Beide Spieler treffen die für sie bestmöglichen Entscheidungen. Der Grinch muss sich also eine Taktik überlegen, wie er, egal wie Knecht Ruprecht suchen will, möglichst häufig gewinnt, wohingegen Knecht Ruprecht sich eine Taktik überlegen muss, wie er, egal wie der Grinch die Dinge versteckt hat, möglichst beide Dinge finden kann. Wir definieren p (respektive q und r) als die Wahrscheinlichkeit, dass Ruprecht das 60-Truhen-Spiel (respektive das 70-Truhen-Spiel, respektive das 80-Truhen-Spiel) gewinnt. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Antwortmöglichkeiten:

1. $p = 30/101$, und $q = 40/101$, und $r = 50/101$.
2. $p = 60/101$, und $q = 70/101$, und $r = 80/101$.
3. $p = 3/9$, und $q = 4/9$, und $r = 5/9$.
4. $p = 3/10$, und $q = 4/10$, und $r = 5/10$.
5. $p = 3/11$, und $q = 4/11$, und $r = 5/11$.
6. $p = 3/12$, und $q = 4/12$, und $r = 5/12$.
7. $p = 1/6$, und $q = 1/3$, und $r = 2/3$.
8. $p = 1/4$, und $q = 1/3$, und $r = 1/2$.
9. $p = 1/3$, und $q = 1/3$, und $r = 1/3$.
10. $p = 1/3$, und $q = 1/3$, und $r = 1/2$.

3.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 10.
Wir werden eine vollständige Analyse des Spieles präsentieren, die alle möglichen

Werte T mit $1 \leq T \leq 101$ diskutiert. Für $T \leq 50$ gewinnt natürlich immer der Grinch (indem er zum Beispiel den Korkenzieher in Truhe 0 und die Rumflasche in Truhe 50 gibt). Für $T = 101$ gewinnt natürlich immer Knecht Ruprecht (indem er alle 101 Truhen öffnet). Wir werden zeigen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit von Ruprecht für $51 \leq T \leq 75$ gleich 1/3 und für $76 \leq T \leq 100$ gleich 1/2 ist. Somit ist #10 die korrekte Antwort. Hierfür geben wir jeweils eine optimale Strategie an.

(1) Falls $76 \leq T \leq 100$ gilt, so gewinnt Knecht Ruprecht das Spiel mit Wahrscheinlichkeit **höchstens** 1/2: Mit Wahrscheinlichkeit 1/2 versteckt der Grinch beide Gegenstände in der Truhe 0, und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 versteckt er beide in der Truhe 100. Da Ruprecht höchstens eine dieser beiden Truhen 0 und 100 öffnen kann, wird seine Gewinnwahrscheinlichkeit niemals die Schranke 1/2 überschreiten.

(2) Falls $76 \leq T \leq 100$ gilt, so gewinnt Knecht Ruprecht das Spiel mit Wahrscheinlichkeit **mindestens** 1/2: Mit Wahrscheinlichkeit 1/2 öffnet Ruprecht die Truhen $0, \ldots, 75$ (Möglichkeit A) und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 öffnet er die Truhen $25, \ldots, 100$ (Möglichkeit B). Falls der Grinch beide Gegenstände in den Truhen $0, \ldots, 75$ versteckt, so gewinnt Ruprecht mit Wahrscheinlichkeit 1/2 unter Möglichkeit A. Falls der Grinch aber einen (oder beide) Gegenstände in den Truhen $76, \ldots, 100$ versteckt, so gewinnt Ruprecht mit Wahrscheinlichkeit 1/2 unter Möglichkeit B.

(3) Falls $51 \leq T \leq 75$ gilt, so gewinnt Knecht Ruprecht das Spiel mit Wahrscheinlichkeit **höchstens** 1/3: Mit Wahrscheinlichkeit 1/3 versteckt der Grinch die beiden Gegenstände in den Truhen 0 und 25 (Möglichkeit A), mit Wahrscheinlichkeit 1/3 in den Truhen 25 und 75 (Möglichkeit B), und mit Wahrscheinlichkeit 1/3 in den Truhen 75 und 100 (Möglichkeit C). Da Ruprecht höchstens eine der beiden Truhen 0 und 75 und höchstens eine der beiden Truhen 25 und 100 öffnen kann, kann er höchstens eine der drei Möglichkeiten A, B, C überprüfen.

(4) Falls $51 \leq T \leq 75$ gilt, so gewinnt Knecht Ruprecht das Spiel mit Wahrscheinlichkeit **mindestens** 1/3:

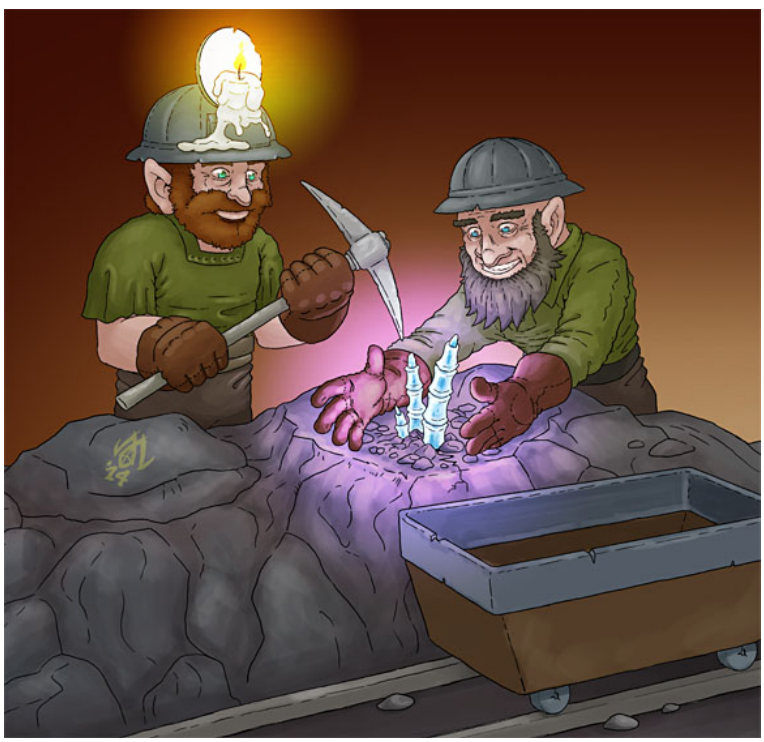
- Möglichkeit A: Mit Wahrscheinlichkeit 1/3 öffnet Ruprecht die Truhen $0, 1, \ldots, 50$.
- Möglichkeit B: Mit Wahrscheinlichkeit 1/3 öffnet Ruprecht die Truhen $50, \ldots, 100$.

- Möglichkeit C: Mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ öffnet Ruprecht zunächst der Reihe nach die Truhen $50, 51, 52, \ldots$ Falls er einen Gegenstand entdeckt, so beginnt er danach die Truhen $49, 48, 47, \ldots$ zu öffnen.

Falls der Grinch beide Gegenstände in den Truhen $0, \ldots, 50$ versteckt, so gewinnt Ruprecht mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ unter Möglichkeit A. Falls der Grinch beide Gegenstände in den Truhen $50, \ldots, 100$ versteckt, so gewinnt Ruprecht mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ unter Möglichkeit B. Falls der Grinch einen Gegenstand in den Truhen $0, \ldots, 49$ und den anderen in den Truhen $51, \ldots, 100$ versteckt, so gewinnt Ruprecht mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ unter Möglichkeit C.

4 Bambus

Aufgabensteller: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)



4.1 Aufgabe

Tief in den finstersten Schächten der Wichtelbergwerke wachsen prächtige kristallene Bambuspflanzen. Jede Pflanze besteht aus einem oder mehreren

Trieben. Jeder Trieb wird aus einem oder mehreren Segmenten gebildet. Um den wild wuchernden Bambuspreisdschungel eingermaßen unter Kontrolle zu bringen, hat das Ministerium für Wichtelwirtschaft ein neues Gesetz erlassen. Dieses *"Gesetz zur Entwicklung, Regulierung und Verbesserung des Kristallbambusmarktes im Wichtelland"* gibt die folgenden Rahmenbedingungen für die Bambuspreise vor.

§1 Der Preis einer kristallenen Bambuspflanze hängt ausschließlich von der Anzahl ihrer Triebe und von den Segmentzahlen der Triebe ab, nicht aber von Anordnung oder Form dieser Triebe.

§2 Der Preis einer Bambuspflanze ist ein ganzzahliger positiver Eurobetrag.

§3 Der Preis von Bambuspflanzen mit einem einzigen Trieb wird auf 1 Euro festgesetzt.

§4 Zusätzliche Triebe oder zusätzliche Segmente dürfen den Preis einer Pflanze nicht vermindern.

§5 Wenn bei einer Pflanze ein einzelner Trieb dazuwächst, so darf sich ihr Preis dadurch um höchstens einen Euro erhöhen.

§6 Wenn aus einer Pflanze X mit dem Preis p durch das Hinzuwachsen eines einzelnen Triebes mit p Segmenten eine neue Pflanze Y entsteht, und wenn aus dieser neuen Pflanze Y durch das Hinzuwachsen von genau einem Segment an jedem ihrer Triebe eine dritte Pflanze Z entsteht, so darf der Preis von Y jenen von X nicht überschreiten und so muss der Preis von Z jenen von X überschreiten.

(Das Wichtelamtsdeutsch dieser sechs Paragraphen und insbesondere der unverständliche letzte Paragraph bringen den Kristallbambusmarkt des Wichtellandes fast zum Stillstand.)
Der Wichtel Christian will drei wunderschöne Bambuspflanzen mit je 120 Trieben an die Wichtelin Gisela verkaufen. Die erste Pflanze hat 120 Triebe mit $1, 2, 3, 4, \ldots, 120$ Segmenten. Die zweite Pflanze hat 40 Triebe mit je 33, 40 Triebe mit je 66 und 40 Triebe mit je 99 Segmenten. Die dritte Pflanze hat 120 Triebe mit je 31 Segmenten. Wie lauten der kleinstmögliche Preis K und der größtmögliche Preis G, den Christian laut *"Gesetz zur Entwicklung,*

Regulierung und Verbesserung des Kristallbambusmarktes im Wichtelland" für seine drei Pflanzen von Gisela verlangen darf?

Antwortmöglichkeiten

1. $K = 3$ und $G = 360$
2. $K = 64$ und $G = 216$
3. $K = 120$ und $G = 240$
4. $K = 128$ und $G = 128$
5. $K = 128$ und $G = 256$
6. $K = 144$ und $G = 166$
7. $K = 157$ und $G = 157$
8. $K = 169$ und $G = 289$
9. $K = 177$ und $G = 214$
10. $K = 256$ und $G = 256$

4.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 7.
Das *"Gesetz zur Entwicklung, Regulierung und Verbesserung des Kristallbambusmarktes im Wichtelland"* legt den Preis für jede Bambuspflanze *eindeutig* fest:

> $(*)$ Der Preis einer Kristallbambuspflanze ist die größte ganze Zahl q, für die die Pflanze mindestens q Triebe mit je mindestens q Segmenten besitzt.

Christians erste Pflanze hat 60 Triebe mit mindestens 60 Segmenten (aber nicht 61), seine zweite Pflanze hat 66 Triebe mit mindestens 66 Segmenten (aber nicht mit 67) und seine dritte Pflanze hat 31 Triebe mit mindestens 31 Segmenten (aber nicht mit 32). Daher beträgt der Gesamtpreis dieser drei Pflanzen $60 + 66 + 31 = 157$ Euro, und Antwort #7 ist korrekt.
Wir wollen nun $(*)$ aus den sechs Paragraphen herleiten. Im folgenden bezeichnen wir den gesetzestreuen Preis einer Bambuspflanze X mit $p(X)$.

(1) Laut §3 hat eine Bambuspflanze mit einem einzigen Trieb den Preis 1 Euro, und laut §5 erhöht sich ihr Preis mit jedem weiteren Trieb um höchstens einen weiteren Euro. Daher beträgt der Preis einer Pflanze mit k Trieben höchstens k Euro.

(2) Es sei X eine Bambuspflanze mit Preis p. Die Bambuspflanze Y entsteht aus X durch Hinzufügen eines einzelnen Triebes mit genau p Segmenten, und die Pflanze Y' entsteht aus X duch Hinzufügen eines einzelnen Triebes mit höchstens p Segmenten. Laut §4 gilt dann $p(X) \leq p(Y') \leq p(Y)$, und laut §6 gilt $p(Y) \leq p(X)$. Ergo $p(Y') = p(X)$.
Wir fassen zusammen: Gibt man zu einer Pflanze mit Preis p einen einzelnen Trieb mit höchstens p Segmenten dazu, so ändert sich ihr Preis dadurch nicht.

(3) Nun wollen wir die speziellen Bambuspflanzen B_m mit $m \geq 1$ betrachten, die aus exakt m Trieben mit jeweils exakt m Segmenten bestehen. Wir behaupten, dass für diese Pflanzen $p(B_m) = m$ gilt.
Die Behauptung gilt auf jeden Fall für $m = 1$: Laut §3 kostet jede Pflanze mit einem einzigen Trieb (und insbesondere die Pflanze B_1) genau 1 Euro. Als nächstes zeigen wir, dass die Wahrheit der Behauptung für m immer auch die Wahrheit der Behauptung für $m+1$ impliziert: Wir betrachten die Bambuspflanze $X = B_m$ mit Preis $p(X) = m$. Die Bambuspflanze Y entsteht aus X durch Hinzuwachsen eines einzelnen Triebes mit m Segmenten. Die Bambuspflanze $Z = B_{m+1}$ entsteht dann aus Y durch Hinzuwachsen von genau einem Segment an jedem ihrer Triebe. Laut §6 gilt dann $p(Z) > p(X) = m$, und laut (1) gilt $p(Z) \leq m + 1$. Diese beiden Ungleichungen implizieren gemeinsam mit §2 die gewünschte Gleichung $p(Z) = p(B_{m+1}) = m + 1$.

(4) Als nächstes betrachten wir eine Bambuspflanze Y aus m Trieben mit je mindestens m Segmenten. Die Pflanze Y hat gleich viele Triebe wie die spezielle Bambuspflanze B_m in (3) und verfügt über zusätzliche Segmente. Laut §4 gilt daher $p(Y) \geq p(B_m) = m$. Da laut (1) ausserdem $p(Y) \leq m$ ist, folgern wir $p(Y) = m$.

(5) Schlussendlich betrachten wir eine beliebige Bambuspflanze X. Wir wollen zeigen, dass der Preis von X durch $(*)$ festgelegt wird und dass daher $p(X) = q$ gilt.
Dazu ordnen wir die Triebe $T_1, T_2, \ldots, T_s$ von X absteigend ihrer Länge nach, sodass die langen Triebe $T_1, \ldots, T_q$ jeweils mindestens q Segmente haben,

während alle kurzen Triebe $T_{q+1}, \ldots, T_s$ höchstens q Segmente haben. Wir definieren eine neue Pflanze Y, die aus den q langen Trieben $T_1, \ldots, T_q$ von X besteht. Laut (4) gilt dann $p(Y) = q$.
Dann geben wir der Reihe nach die kurzen Triebe $T_{q+1}, \ldots, T_s$ zur Pflanze Y hinzu. Laut (2) lassen diese Hinzufügungen den Preis von Y unverändert, sodass der Preis aller entstehenden Pflanzen gleich q ist. Am Ende erhalten wir eine Pflanze, die aus den Trieben $T_1, T_2, \ldots, T_s$ besteht und ebenfalls den Preis q hat. Laut §1 impliziert dies $p(X) = q$.

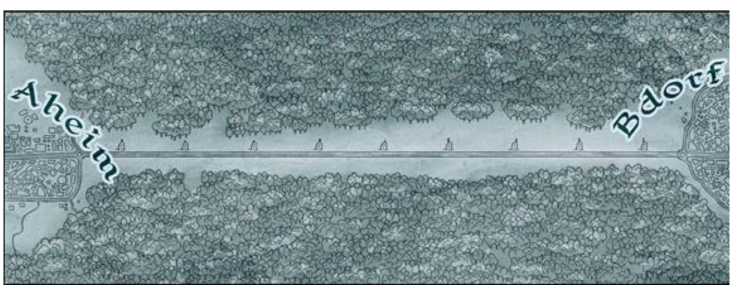
Zusammenfassend: Wir haben gezeigt, dass der Preis einer beliebigen Bambuspflanze durch $(*)$ festgelegt wird. Man prüft auch leicht nach, dass die Preise in $(*)$ alle Eigenschaften erfüllen, die in den sechs Paragraphen des Gesetzes zur Entwicklung, Regulierung und Verbesserung des Kristallbambusmarktes im Wichtelland gefordert werden.

5 Abklatschen

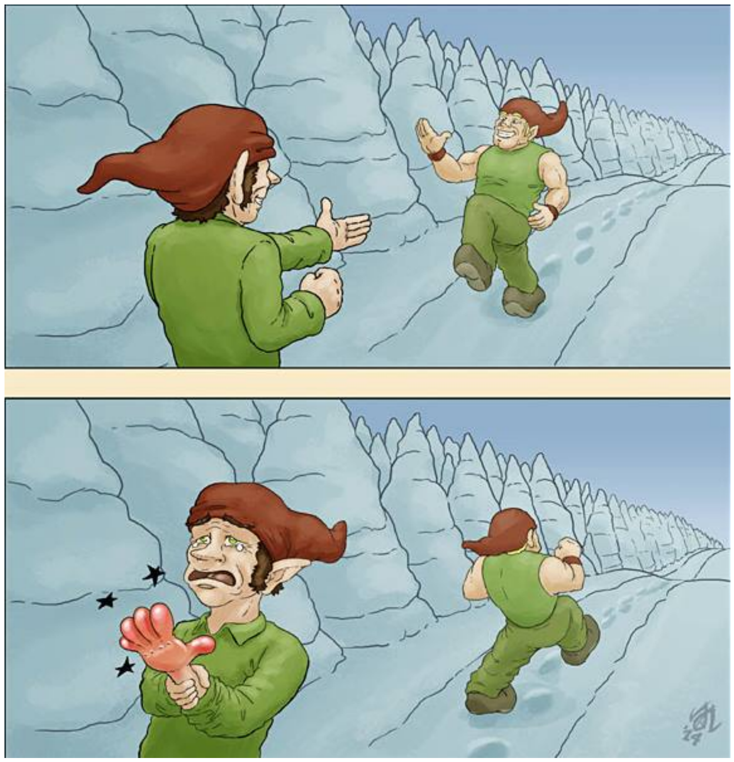
Aufgabensteller: Stefan Felsner (TU Berlin)

5.1 Aufgabe

Zwischen Aheim im Westen und Bdorf im Osten verläuft eine 10 Kilometer lange Straße gerade durch den Wald. Entlang dieser Strecke zwischen den beiden Städten steht nach jeweils einem Kilometer ein Kilometerstein. Auf jedem der 9 Kilometersteine sitzt ein Wichtel und blickt die Straße entlang nach Osten oder Westen. Dabei sind die Kilometersteine aufsteigend von Aheim nach Bdorf nummeriert. Die Zahl des jeweiligen Kilometersteins gibt dabei dessen Entfernung (in km) zu Aheim an.



Um 12 Uhr beginnen alle Wichtel in die Richtung, in die sie blicken, zu gehen, alle mit konstanter Geschwindigkeit 5km/h. Wenn sich zwei Wichtel begegnen, klatschen sie ab, beide drehen sich auf der Stelle 180° um und gehen sofort und ohne Zeitverlust wieder in entgegengesetzte Richtungen auseinander. Wenn ein Wichtel in Aheim oder Bdorf ankommt, setzt er sich in die Wärmstube.



Für die Fragen 2 und 3 nehmen wir an, dass die Blickrichtung jedes Wichtels am Anfang durch einen unabhängigen Münzwurf bestimmt wird. Fragen:

1. Wie viele Minuten dauert es maximal, bis alle Wichtel in einer der beiden Wärmstuben angekommen sind?

2. Wie viele Kilometer legen alle Wichtel zusammen im Erwartungswert zurück, bevor sie alle in den Wärmstuben sitzen.

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p sitzt der Wichtel von Kilometerstein 4 am Ende in der Wärmstube in Bdorf? (Wir runden p auf zwei Nachkommastellen).

Antwortmöglichkeiten:

im Format (Antwort1)(Antwort2)(Antwort3):

1. (120)(54)(0,20)
2. (108)(45)(0,25)
3. (204)(40)(0,33)
4. (120)(36)(0,35)
5. (108)(54)(0,38)
6. (204)(45)(0,20)
7. (120)(40)(0,25)
8. (108)(36)(0,33)
9. (204)(54)(0,35)
10. (120)(45)(0,38)

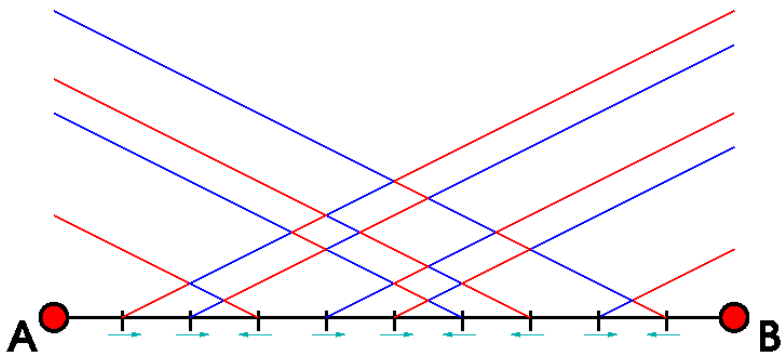
Projektbezug:
Aufgaben wie diese werden unter Mathematikern wie kleine Geschenke ausgetauscht. Solche Aufgaben haben oft keinen unmittelbaren Anwendungsbezug, eignen sich aber bestens als Trainingseinheiten für geistige Kreativität.

5.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 2.

Die Aufgabe lässt sich gut lösen, wenn man sich für eine Anfangsausrichtung die Wanderungen der Wichtel in einem Ort/Zeit Diagramm darstellt (die Abbildung zeigt ein Beispiel). Man beobachtet, dass die Wanderung eines individuellen Wichtels ein kompliziertes Zickzack sein kann, aber in dem Diagramm von jedem Kilometerstein eine Gerade ausgeht. Alle diese Geraden haben Steigung $+a$ oder $-a$ (a hängt von der Skalierung der Achsen ab und ist nicht weiter relevant). Das Vorzeichen der Steigung der Geraden G_i,

die bei Kilometerstein i beginnt, ist alleine durch die Blickrichtung des zum Stein gehörigen Wichtels bestimmt, $+$, wenn er nach Osten schaut und $-$, wenn er nach Westen schaut.
Die Gerade G_i entspricht der Bewegung eines Staffelstabs, der anfangs vom Wichtel bei Kilometerstein i getragen wird und bei jeder Begegnung (jedem Abklatschen) übergeben wird. Der Staffelstab bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf die am Anfang in Blickrichtung liegende Ortschaft zu.



Die von einem Staffelstab zurückgelegte Strecke beträgt höchstens 9 Kilometer. Daher kann auch kein Wichtel mehr als 9 Kilometer wandern und nach 108 Minuten sind alle in den Wärmstuben.

Der Staffelstab von Kilometerstein i legt mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine Strecke von i Kilometern zurück und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine Strecke von $10 - i$ Kilometern. Die im Erwartungswert zurückgelegte Strecke dieses Stabes ist also 5 Kilometer. Das gilt für jeden der 9 Staffelstäbe. Mit der Linearität des Erwartungswertes folgt, dass die erwartete Gesamtstrecke der Stäbe (und also auch der Wichtel) 45 Kilometer ist.

Wenn zu Beginn k Wichtel nach Westen blicken, dann erreichen k Staffelstäbe (und also auch k Wichtel) die Ortschaft Aheim. Da Wichtel nie aneinander vorbeigehen, müssen dies die k Wichtel von den Kilometersteinen $1, \ldots, k$ sein. Wenn der Wichtel von Kilometerstein 4 am Ende in der Wärmstube in Bdorf sitzt, kann es also höchstens 3 Wichtel gegeben haben, die am Anfang nach Westen blicken. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, muss man alle Möglichkeit finden, wie man höchstens 3 Wichtel, die am Anfang nach Westen blicken, anordnen kann. Teilt man diese Anzahl durch die Anzahl aller möglichen Fälle, erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Insgesamt gibt es 2^9 Möglichkeiten, wie die Zwerge am Anfang blicken können und es gibt jeweils $\binom{9}{n}$ Möglichkeiten um n Zwerge, die nach Westen schauen, auf die 9 Kilometersteine zu verteilen. Die Wahrscheinlichkeit ist demnach:

$$\frac{1}{2^9}\left(\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}\right)=\frac{1}{512}(1+9+36+84)=\frac{130}{512}=0,25390625$$

Die gerundete Antwort ist also $0,25$.

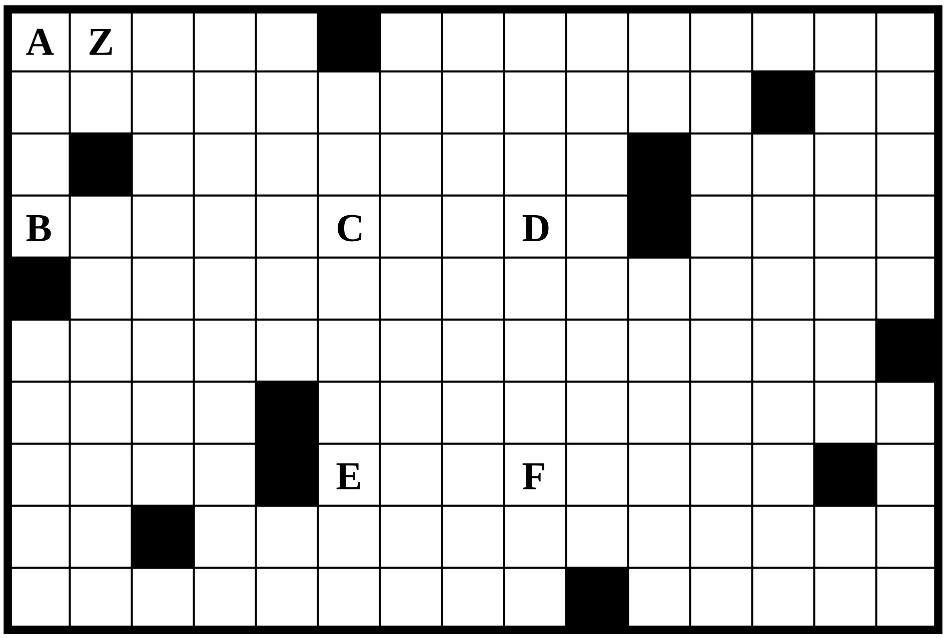
Bemerkung: Die Aufgaben gehören zur Klasse von Problemen die Peter Winkler in der Sammlung *Mathematical Mind-Benders* (A K Peters 2007) im Kapitel *The Adventures of Ant Alice* vorstellt.

6 Mondrian

Aufgabensteller: Hajo Broersma (Universiteit Twente)

6.1 Aufgabe

Der Malwichtel Mondrian hat eine Weihnachtskarte entworfen und in 150 kleine Quadrate unterteilt. Zwölf dieser Quadrate hat Mondrian bereits schwarz ausgemalt.



Nun taucht Mondrian den Pinsel tief in den roten Farbtopf und malt mit einem einzigen langen durchgehenden Pinselstrich alle 138 leeren Quadrate aus. Er kann immer nur hintereinander Quadrate ausmalen, nicht gleichzeitig.

Mondrian setzt den Pinsel im Quadrat A an, zieht ihn gerade weiter nach B und dann immer weiter zu einem jeweils waagrecht oder senkrecht benachbarten leeren Quadrat. Jedes Quadrat wird vom Pinsel genau einmal durchquert und schlussendlich endet der Pinselstrich im Quadrat Z.

In welcher Reihenfolge hat Mondrian die vier Quadrate C, D, E, F ausgemalt?

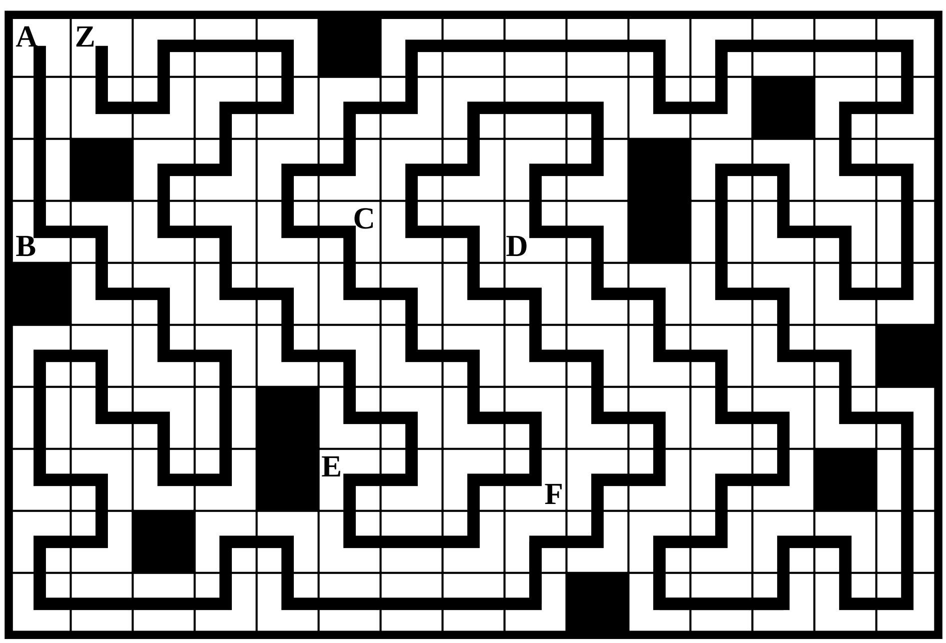
Antwortmöglichkeiten:

1. C-D-E-F
2. C-E-D-F
3. C-E-F-D
4. D-C-F-E
5. D-F-E-C

6. E-C-F-D
7. E-D-F-C
8. E-F-D-C
9. F-D-C-E
10. F-E-D-C

6.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 4.
Es gibt nur einen einzigen Pinselstrich, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Man kann diesen Pinselstrich durch systematisches Probieren finden, oder dadurch, dass man Schritt für Schritt kleine Stücke der Strichführung identifiziert. Zum Beispiel muss der Pinselstrich das Quadrat in der linken unteren Ecke mit dessen (einzigen) beiden Nachbarn verbinden; und er muss das Quadrat unmittelbar südöstlich von A mit Z und mit dem östlichen Nachbarn verbinden; etc; etc. Auf jeden Fall ist #4 die einzig und allein richtige Antwort.



7 Andere Länder, andere Sitten

Aufgabensteller: Falk Ebert (ehemaliger Organisator des MATHEon-Kalenders)

7.1 Aufgabe

Warnung: Der folgende Text kann gerade auf jüngere Mathekalenderteilnehmer traumatisierend wirken. Sie sollten in diesem Fall von einem tröstenden Erwachsenen begleitet werden.

„Weißt du, manchmal bin ich wirklich dankbar, dass in den USA (und anderen Staaten) die Geschenkeverteilung asynchron erfolgt“, sagt der Weih-

nachtsmann zu Voro. Voro ist ein Neuwichtel, der in diesem Jahr erstmalig in das Weihnachtsgeschäft einsteigt. Als dieser ihn nur fragend anschaut, erklärt er weiter:
„Naja, in Deutschland komme ich mit dem Sack an die Haustür, klingle, warte, werde hereingebeten, schaue die Kinder kritisch, aber wohlwollend an. Dann kommt das ganze Singen und Gedichtevortragen, ich verteile Geschenke, sage nochmal “**Hohoho!**” und es geht zur nächsten Tür. Man muss zur gleichen Zeit mit dem Empfänger am gleichen Ort sein - synchronisiert eben. Und wenn die Familie noch beim Weihnachtsspaziergang ist, kommt jeder Zeitplan komplett durcheinander.“ Der Wichtel nickt etwas erschrocken, aber verständnisvoll: „Und in Amerika ist das besser?“
„Genau. Dort läuft das asynchron. Die Kinder sind im Bett und die Zustellung erfolgt zu irgendeinem Zeitpunkt transkaminal - also durch den Kamin.“ Wieder nickt der Wichtel wissend.
„Und hier kommst du ins Spiel. Weil ich in Europa so viel zu tun habe, werden die Geschenke in den asynchronen Zonen - also USA et cetera - von euch Wichteln verteilt.“
Der Weihnachtsmann holt eine Karte hervor. „Siehst du, die Bundesstaaten in den USA sind geometrisch so schön einfach. Nehmen wir zum Beispiel Quadratorado. An diesen Stellen“, er zeichnet einige Punkte ein, „sind sechs Geschenkelager. Und insgesamt sechs Wichtel betreuen den ganzen Bundesstaat.“
„Aber wer hat welchen Bereich?“
„Das ist einfach. Jeder Wichtel kümmert sich um alle Punkte, die seinem Lager näher liegen als irgendeinem anderen Lager. Damit ist jeder Punkt versorgt. Und die Punkte, an denen der Abstand exakt gleich ist, liegen nie in einem Schornstein - bevor Du jetzt besserwisserisch werden willst!“ Der Weihnachtsmann schaut kritisch, aber wohlwollend. Dann erzählt er noch weiter von Schlittenattrappen und Lautsprecher-Hohohos. Aber der Wichtel ist nicht mehr bei der Sache. Er überlegt sich, welches der Lager er sich wohl heraussuchen sollte, damit er eine möglichst große Fläche abdecken kann, um den Weihnachtsmann ordentlich zu beeindrucken.

Die Abbildung stellt die Karte von Quadratorado dar und beinhaltet ein quadratisches 10×10 Raster. Sie zeigt die sechs Geschenkelager und ihre bisherigen Lagerwichtel. Für welches Geschenkelager soll sich der fleißige Wichtel entscheiden?

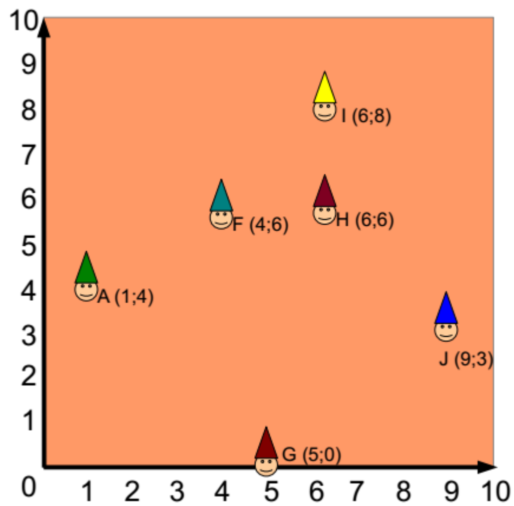


Abbildung 1: Karte von Quadratorado mit eingezeichneten Geschenkelagern

Antwortmöglichkeiten:

1. A (Anna Lemma)
2. F (Friedemann der Friese)
3. G (Geronimo)
4. H (Hieronymo)
5. I (Inka Reis)
6. J (Jordan)
7. Alle Gebiete sind gleich groß.
8. Nur Inkas und Friedemanns Gebiete sind beide am größten.
9. Nur Annas und Inkas Gebiete sind beide am größten.
10. Die Angaben reichen nicht aus für eine eindeutige Bestimmung der größten Fläche.

Projektbezug:
Die Unterteilung eines Gebietes in Vielecke nennt man *Voronoi-Diagramm* oder auch *Thiessen-Polygone*. Sie dient dazu, Daten, die nur an einigen diskreten Punkten eines Gebiets vorhanden sind, auf das gesamte Gebiet zu übertragen. Eine andere, nahe mit dem Voronoi-Diagramm verwandte Unterteilungsmethode für Flächen ist die *Delaunay-Triangulation*, die auch im Matheon zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen angewandt wird.

7.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 5. I (Inka Reis).

Betrachten wir zuerst die Situation mit zwei Lagern A und G. Quadratorado kann in zwei Teile unterteilt werden, in denen alle Punkte entweder näher an A oder an G liegen. Dies geschieht geometrisch durch das Einzeichnen der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AG}$, wie in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt. (Zu diesem Zeitpunkt könnte man auf den Gedanken kommen, eine Geometriesoftware wie *Geogebra* ins Spiel zu bringen.) Das Gebiet, in dem A liegt, beinhaltet aber noch weitere Lager, nämlich F, H und I. Davon ist F am nächsten an A gelegen. Zeichnen wir auch die Mittelsenkrechte von $\overline{AF}$ mit ein, wird der Bereich um A weiter eingeschränkt (siehe Abbildung 3). Zeichnen wir noch die Mittelsenkrechten von $\overline{AH}$, $\overline{AI}$ und $\overline{AJ}$ mit ein, sehen wir, dass der Bereich um A mit keinem anderen Lager im Konflikt steht (siehe Abbildung 4).
Analog kann man alle Einzugsgebiete konstruieren. Das fertige Resultat ist in Abbildung 6 abgebildet. Hier kann man durch grobes Auszählen von Kästchen schon mal die größten Kandidaten herausfinden. Inka und Friedemann haben beide ein Gebiet von etwa $19\frac{1}{2}$ Kästchen. Genaueres Ausrechnen (z.B. mittels Geogebra) liefert die Flächen in Tabelle 1 und damit als Wunschziel für den fleißigen Wichtel: **Inka Reis**!

Wichtel	Anna	Friedemann	Geronimo	Hieronymo	Inka	Jordan
Fläche	18,51	19,49	13,50	12,00	19,50	17,00

Tabelle 1: Gebietsgrößen in Kästchen

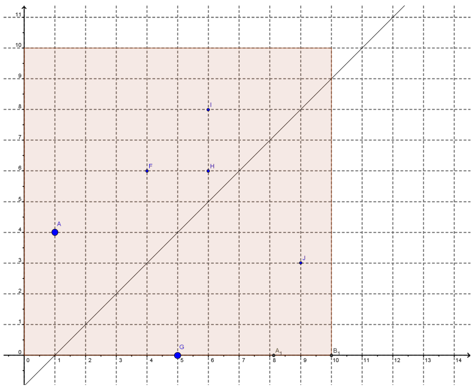


Abbildung 2: Mittelsenkrechte von $\overline{AG}$

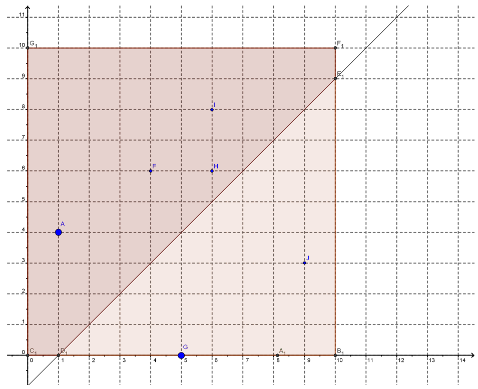


Abbildung 3: Eingrenzung des Gebiets um A

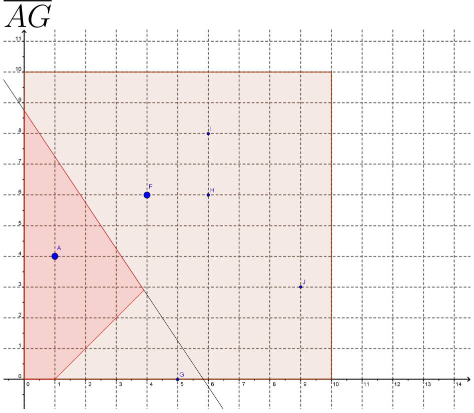


Abbildung 4: weitere Eingrenzung mit Mittelsenkrechte von $\overline{AF}$

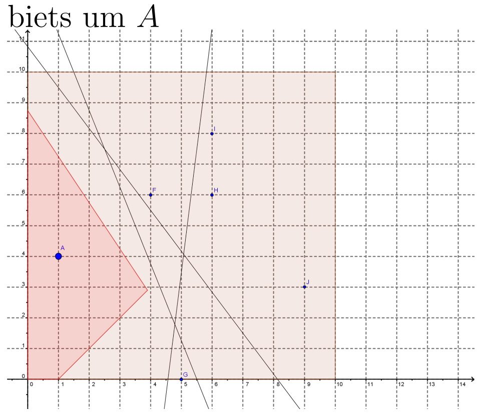


Abbildung 5: keine Konflikte mit H, I und J

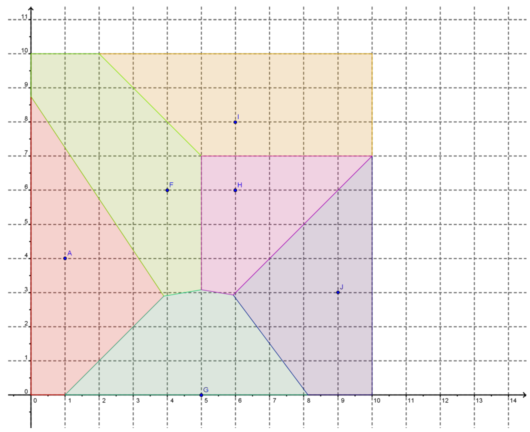


Abbildung 6: Komplette Aufteilung in Einzugsgebiete

8 Tischtennis

Aufgabenstreller: Rudi Pendavingh (TU Eindhoven)

8.1 Aufgabe

Am großen Tischtennisturnier haben je fünf Wichtel aus den fünf Orten Eisstedt, Frostberg, Gletscherdorf, Kaltburg und Schneehausen teilgenommen. Zuerst wurden unter den 25 Teilnehmern die Startnummern von 1 bis 25 verlost. Jeder Wichtel spielte im Verlauf des Turniers genau einmal gegen jeden der zwanzig Wichtel aus den anderen vier Orten. Dabei passierte etwas ganz erstaunliches: Jedes einzelne Spiel wurde vom Wichtel mit der kleineren Startnummer gewonnen! Noch erstaunlicher waren allerdings die folgenden Ergebnisse:

- Eisstedt hat mindestens 0 der 25 Spiele gegen Frostberg gewonnen.
- Frostberg hat mindestens 0 der 25 Spiele gegen Gletscherdorf gewonnen.
- Gletscherdorf hat mindestens 0 der 25 Spiele gegen Kaltburg gewonnen.
- Kaltburg hat mindestens 0 der 25 Spiele gegen Schneehausen gewonnen.
- Schneehausen hat mindestens 0 der 25 Spiele gegen Eisstedt gewonnen.

Noch viel erstaunlicher wäre es natürlich, wenn in diesen fünf Sätzen statt der Zahl 0 ("mindestens 0 der 25 Spiele") jeweils eine viel größere Zahl x stünde ("mindestens x der 25 Spiele"). Frage: Wie lautet die größte Zahl x, für die diese Geschichte noch stimmen kann?

Antwortmöglichkeiten:

1. $x = 13$
2. $x = 14$
3. $x = 15$
4. $x = 16$
5. $x = 17$
6. $x = 18$
7. $x = 19$
8. $x = 20$
9. $x = 21$
10. $x = 22$

8.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 4.

Obere Schranke: Als erstes wollen wir zeigen, dass $x \leq 16$ gelten muss. Dazu ordnen wir für jeden Ort die fünf Wichtel nach ihren Startnummern und betrachten jeweils den Wichtel mit der mittleren Startnummer; das ergibt eine mittlere Startnummer E für Eisstedt, eine mittlere Startnummer F für Frostberg, eine mittlere Startnummer G für Gletscherdorf, eine mittlere Startnummer K für Kaltburg und eine mittlere Startnummer S für Schneehausen.

Wir nehmen nun an, dass E die größte dieser fünf mittleren Startnummern ist. (Die anderen vier Fälle können völlig analog behandelt werden.) Dann sind im Eisstedt-Team drei Wichtel mit Startnummern $\geq E$, während im Frostberg-Team drei Wichtel mit Startnummern $\leq F < E$ sind. Da diese drei speziellen Wichtel aus Eisstedt ihre 9 Spiele gegen diese drei speziellen Wichtel aus Frostberg verlieren, kann Eisstedt höchstens $25 - 9 = 16$ Spiele gegen Frostberg gewinnen.

Untere Schranke: Als nächstes wollen wir an einem Beispiel zeigen, dass $x = 16$ tatsächlich möglich ist. Dazu betrachten wir die Startnummernverteilung der 25 Wichtel in der folgenden Tabelle. Wenn man nachprüft, sieht man,
dass Eisstedt 20 Spiele gegen Frostberg gewinnt,
dass Frostberg 17 Spiele gegen Gletscherdorf gewinnt,
dass Gletscherdorf 16 Spiele gegen Kaltburg gewinnt,
dass Kaltburg 17 Spiele gegen Schneehausen gewinnt,
dass Schneehausen 20 Spiele gegen Eisstedt gewinnt.

Ort	Startnummern				
Eisstedt	11	12	13	14	15
Frostberg	1	16	17	18	19
Gletscherdorf	2	3	20	21	22
Kaltburg	4	5	6	23	24
Schneehausen	7	8	9	10	25

Zusammenfassung: Alles in allem ist $x = 16$ die größtmögliche Zahl, für die diese Geschichte eintreten kann. Antwort #4 ist korrekt.

9 Wahl des Weihnachtsmanns

Aufgabensteller: Max Klimm (TU Berlin), Antje Bjelde (TU Berlin)

9.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist beim Skifahren schwer gestürzt und muss dieses Jahr am Weihnachtstag das Bett hüten. Einer der Weihnachtswichtel muss ihn daher vertreten. Jeder Wichtel möchte gern den Weihnachtsmann spielen. Es entspinnt sich unter den Wichteln ein Streit darum, wer ein würdiger Vetreter des Weihnachtsmanns wäre.

Die Wichtel einigen sich darauf, den Vertreter des Weihnachtsmanns im Zuge einer Abstimmung festzulegen. Jeder Wichtel soll diejenigen Wichtel nominieren, von denen er denkt, dass sie in die (zugegebenermaßen recht großen) Fußstapfen des Weihnachtsmanns treten können. Dabei darf kein Wichtel sich selbst nominieren und kein Wichtel darf einen anderen Wichtel mehr als einmal nominieren. Anschließend soll einer derjenigen Wichtel ausgewählt werden, welche die meisten Nominierungen erhalten haben.
Bei einer Probeabstimmung unter den Wichteln **A**lex, **B**ente und **C**hris ergibt sich folgendes Meinungsbild:

Meinungsbild

- **A** nominiert **C**,
- **B** nominiert **A** und **C**,
- **C** nominiert niemanden.

Würde man bei diesem Meinungsbild aus der Menge der Wichtel, die die meisten Nominierungen erhielten, einen zufällig gleichverteilt aussuchen, so wäre dies mit Wahrscheinlichkeit 1 Wichtel **C**. Nun überlegt sich Wichtel **A**, dass er dann durch eine Änderung seiner Nominierungen die Wahrscheinlichkeit, dass er selbst ausgewählt wird, verändern kann: Nominiert er beispielsweise **B** anstelle von **C**, so wird er selbst mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ ausgewählt.
Die Wichtel wollen ein Wahlverfahren entwerfen, das für alle möglichen Meinungsbilder mit einer beliebigen Anzahl von Wichteln anwendbar ist. Das Ziel dabei ist, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Wichtel ausgewählt wird, unabhängig davon ist, welche Wichtel von ihm nominiert wurden. Ein solches Verfahren soll *nicht manipulierbar* heißen. Es ist klar, dass in einem solchem Verfahren nicht in jedem Fall ein Wichtel mit den meisten Nominierungen ausgewählt wird, aber es sollte dennoch möglichst häufig passieren.
Nach tagelangem Kopfzerbrechen werden die folgenden Verfahren diskutiert, welche nach Abgabe der Nominierungen angewendet werden können:

Zufällige Wahl Es wird ein Wichtel zufällig gleichverteilt ausgewählt.

Zufälliger Entscheider Es wird zunächst ein Wichtel zufällig und gleichverteilt bestimmt und zum „Entscheider“ erklärt. Hat der Entscheider niemanden nominiert, so wird einer der anderen Wichtel zufällig und gleichverteilt als Weihnachtsmann ausgewählt. Ansonsten wird einer der vom Entscheider nominierten Wichtel zufällig und gleichverteilt ausgewählt.

Zweimalige Zufällige Wahl Führe das Verfahren **Zufällige Wahl** zweimal aus. Seien X und Y die Wichtel, die beim ersten beziehungsweise zweiten Lauf des Verfahrens ausgewählt wurden. Falls X und Y gleich viele Nominierungen bekommen, so wähle X und Y jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ aus. Ansonsten wähle denjenigen Wichtel aus, der mehr Nominierungen bekommt.

Partitionsverfahren Für jeden Wichtel wird eine faire Münze geworfen. Zeigt die Münze jedes Wichtels „Zahl “, so wird das Verfahren **Zufällige Wahl** angewendet. Ansonsten wähle zufällig und gleichverteilt einen derjenigen Wichtel, dessen Münze „Kopf“ zeigt und der unter den Wichteln, deren Münze „Kopf“ zeigt, die meisten Nominierungen von Wichteln erhalten hat, deren Münze „Zahl“ zeigt.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Antwortmöglichkeiten:

1. Wendet man das Verfahren **Zufällige Wahl** auf obiges Meinungsbild an, so werden **A**, **B** und **C** jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ ausgewählt.

2. Wendet man das Verfahren **Zufälliger Entscheider** auf obiges Meinungsbild an, so werden **A** mit Wahrscheinlichkeit $1/3$, **B** mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ und **C** mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ausgewählt.

3. Wendet man das Verfahren **Zweimalige zufällige Wahl** auf obiges Meinungsbild an, so werden werden **A** mit Wahrscheinlichkeit $3/9$, **B** mit Wahrscheinlichkeit $1/9$ und **C** mit Wahrscheinlichkeit $5/9$ ausgewählt.

4. Wendet man das **Partitionsverfahren** auf obiges Meinungsbild an, so werden **A** mit Wahrscheinlichkeit $16/48$, **B** mit Wahrscheinlichkeit $13/48$ und **C** mit Wahrscheinlichkeit $19/48$ ausgewählt.

5. Das Verfahren **Zufällige Wahl** ist nicht manipulierbar.
6. Das Verfahren **Zufälliger Entscheider** ist nicht manipulierbar.
7. Das Verfahren **Zweimalige zufällige Wahl** ist nicht manipulierbar.
8. Das **Partitionsverfahren** ist nicht manipulierbar.
9. Für alle Meinunsgbilder gilt:
   Die erwartete Anzahl Nominierungen, die der Gewinner der Wahl beim **Partitionsverfahren** erhält, ist mindestens 1/4 der maximalen Anzahl an Nominierungen, die ein Wichtel erhält.
10. Es gibt kein nicht manipulierbares Wahlverfahren, das für alle Meinungsbilder mit zwei Wichteln und genau einer Nominierung den nominierten Wichtel mit Wahrscheinlichkeit 1 auswählt.

9.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 7.

1. Ist **richtig**.

   Es wird jeder Wichtel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 1/3 ausgewählt.

2. Ist **richtig**.

   Es gilt:

   - **A** Entscheider $\Rightarrow$ **C** wird ausgewählt.
   - **B** Entscheider $\Rightarrow$ **A**/2 + **C**/2 werden ausgewählt.
   - **C** Entscheider $\Rightarrow$ **A**/2 + **B**/2 werden ausgewählt.

   Da jeder Wichtel mit Wahrscheinlichkeit 1/3 Entscheider wird, sind die Auswahlwahrscheinlichkeiten für Wichtel **A**, **B** und **C** gleich 1/3, 1/2 und 1/6.

3. Ist **richtig**.

   Die folgenden Ausgänge der zwei Wahlen treten jeweils mit Wahrscheinlichkiet 1/9 ein:

- **AA** $\Rightarrow$ **A** wird ausgewählt.
- **AB** $\Rightarrow$ **A** wird ausgewählt.
- **AC** $\Rightarrow$ **C** wird ausgewählt.
- **BA** $\Rightarrow$ **A** wird ausgewählt.
- **BB** $\Rightarrow$ **B** wird ausgewählt.
- **BC** $\Rightarrow$ **C** wird ausgewählt.
- **CA** $\Rightarrow$ **C** wird ausgewählt.
- **CB** $\Rightarrow$ **C** wird ausgewählt.
- **CC** $\Rightarrow$ **C** wird ausgewählt.

Die Auswahlwahrscheinlichkeiten für Wichtel **A**, **B** und **C** sind also gleich 1/3, 1/9 und 5/9.

4. Ist **richtig**.

   Es sei K die Menge der Wichtel, deren Münze Kopf zeigt. Dann treten die folgenden Ereignisse mit jeweils Wahrscheinlichkeit 1/8 auf:

   - $K = \emptyset \Rightarrow \mathbf{A}/3 + \mathbf{B}/3 + \mathbf{C}/3$ werden ausgewählt.
   - $K = \{\mathbf{A}\} \Rightarrow$ **A** wird ausgewählt.
   - $K = \{\mathbf{B}\} \Rightarrow$ **B** wird ausgewählt.
   - $K = \{\mathbf{C}\} \Rightarrow$ **C** wird ausgewählt.
   - $K = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \Rightarrow \mathbf{A}/2 + \mathbf{B}/2$ werden ausgewählt, denn sowohl **A** als auch **B** erhalten keine Nominierung von **C**.
   - $K = \{\mathbf{A}, \mathbf{C}\} \Rightarrow \mathbf{A}/2 + \mathbf{C}/2$ werden ausgewählt, denn sowohl **A** als auch **C** erhalten eine Nominierung von **B**.
   - $K = \{\mathbf{B}, \mathbf{C}\} \Rightarrow$ **C** wird ausgewählt, denn **C** erhält eine Nominierung von **A**, nicht aber **B**.
   - $K = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} \Rightarrow \mathbf{A}/3 + \mathbf{B}/3 + \mathbf{C}/3$ werden ausgewählt,

   Es ergeben sich fї **A**, **B** und **C** die Auswahlwahrscheinlichkeiten 16/48, 13/48 und 19/48.

5. Ist **richtig**.

   Die Auswahlwahrscheinlichkeit ist unabhängig von allen Nominierungenen, also insbesondere auch von den eigenen Nominierungen.

6. Ist **richtig**.

   Jeder Wichtel kann die Wahl nur dann beeiflussen, wenn er Entscheider ist, in diesem Fall kann er aber selber nicht mehr gewählt werden, egal wie seien Nominierungen ausfallen.

7. Ist **falsch**.

8. Ist **richtig**.

   Die Begründung ist ähnlich zu 6. Die Nominierungen eines jeden Wichtels werden nur in dem Fall betrachtet, dass die Münze des Wichtels „Zahl“ zeigt, und es mindestens einen Wichtel gibt, dessen Münze „Kopf “ zeigt. In diesen Fällen wird der Wichtel, dessen Münze „Zahl“ zeigt, nicht ausgewählt und er kann daher auch die Wahrscheinlichkeit seiner Wahl nicht beeinflussen.

9. Ist **richtig**.

   Betrachte einen Wichtel W, der eine maximale Anzahl von Nominierungen erhält. Sei im folgenden x die Anzahl dieser Nominierungen. Angenommen, die Münze von w zeigt „Kopf“ und W erhält y Nominierungen von Wichteln, deren Münze „Zahl“ zeigt. Dann wählt das Partitionierungsverfahren auf jeden Fall einen Wichtel aus, der insgesamt mindestens y Stimmen erhält. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze von W „Kopf“ zeigt ist $1/2$ und die erwartete Anzahl von Nominierungen von Wichteln mit „Zahl“ ist $x/2$ und somit ist die erwartete Anzahl schon mindestens $1/2 \cdot x/2 = x/4$. Daher wählt das Partitionsverfahren in Erwartung einen Wichtel mit mindestens $x/4$ Nominierungen.

10. Ist **richtig**.

    Betrachte zunächst das Meinungsbild mit zwei Wichteln **A** und **B** ohne Nominierung. Offensichtlich wählt jedes Wahlverfahren mindestens einen der beiden Wichtel mit Wahrscheinlichkeit mindestens $p \geq 1/2$ aus. O.B.d.A. sei dies Wichtel **A**. Betrachte nun das Meinungsbild, in dem **A B** nominiert, aber **B** niemanden nominiert. Aufgrund der

Nicht-Manipulierbarkeit wird in diesem Meinungsbild immer noch **A** mit Wahrscheinlichkeit p ausgewählt. Daher ist die Wahrscheinlichkeit **B** auszuwählen höchstens $1 - p \leq 1/2$.

10 Picasso

Aufgabensteller: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

10.1 Aufgabe

Niemand weiß, auf welch finsteren, krummen, schmutzigen Wegen der Grinch ein (fast) echtes Gemälde von Pablo Picasso in seinen Besitz gebracht hat. Auf jeden Fall bietet er es nun zum Verkauf an und sechs ultra-ehrliche, hyper-intelligente und super-selbstsüchtige Wichtel sind daran interessiert.

Wichtel Atto bietet für das Bild 9610 Euro. Für Bilbo ist es 6727 Euro wert, für Chico 4805 Euro, für Dondo 3968 Euro und für Espo 3100 Euro. Der knausrige Femto will nur 279 Euro dafür hergeben.
Der Grinch hört sich die Angebote der Wichtel an und schlägt vor, dass die sechs das Gemälde doch alle gemeinsam kaufen sollen. „Dann kann jeder es zu jederzeit betrachten und sich an seiner Schönheit erfreuen. Da das Gemälde dann jedem gehört, ist es nur gerecht, wenn auch jeder sein zu Beginn vorgeschlagenes Angebot bezahlt.“
Die Wichtel rufen empört: „Aber nein, nein, nein!“
Der Vorschlag gefällt den super-selbstsüchtigen Wichteln ganz und gar nicht. Jeder will das Bild entweder ganz für sich alleine oder gar nicht haben.
Der Grinch entschließt sich, eine „Große Pablo Picasso Lotterie“ (GPPL) zu veranstalten. Jeder Wichtel kann beliebig viele GPPL-Lose zum Stückpreis von 1 Euro kaufen und der Picasso wird dann unter allen gekauften GPPL-Losen verlost.
Nach langem Nachdenken kaufen sich die sechs hyper-intelligenten Wichtel ihre GPPL-Lose. Erstaunlicherweise maximiert die Losverteilung für jeden einzelnen Wichtel den erwarteten persönlichen Gewinn: Kein einziger Wichtel könnte seine Gewinnerwartung dadurch verbessern, dass er ein Hundertstel-Los oder Millionstel-Los mehr oder auch nur ein Milliardstel-Los weniger kauft. Der erwartete persönliche Gewinn wird durch die folgende Formel festgelegt:

$$G_k = W_k \cdot \frac{N_k}{N} \; - \; P_k$$

mit

- G_k= erwarteter persönlicher Gewinn vom k-ten Wichtel
- W_k= ursprüngliches Angebot des k-ten Wichtel
- N_k= Anzahl der vom k-ten Wichtel gekauften Lose
- N= Anzahl aller verkauften Lose
- P_k= Gesamtpreis der vom Wichtel k gekauften Lose

Welche der folgenden Aussagen trifft auf die Losverteilung zu?

Antwortmöglichkeiten:

1. Atto kauft 5107 GPPL-Lose und der Grinch nimmt 9270 Euro ein.
2. Atto kauft 2100 GPPL-Lose und der Grinch nimmt 6510 Euro ein.
3. Bilbo kauft 1596 GPPL-Lose und der Grinch nimmt 4123 Euro ein.
4. Bilbo kauft 1288 GPPL-Lose und der Grinch nimmt 4991 Euro ein.
5. Chico kauft 650 GPPL-Lose und der Grinch nimmt 4030 Euro ein.
6. Chico kauft 420 GPPL-Lose und der Grinch nimmt 4340 Euro ein.
7. Dondo kauft 744 GPPL-Lose und der Grinch nimmt 2976 Euro ein.
8. Dondo kauft gar kein Los und der Grinch nimmt 4740 Euro ein.
9. Espo kauft 496 GPPL-Lose und der Grinch nimmt 2480 Euro ein.
10. Der knausrige Femto kauft 2 GPPL-Lose und der Grinch nimmt 2480 Euro ein.

10.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 6.
Wir nummerieren die Wichtel in alphabetischer Reihenfolge von 1 bis 6 durch. Der k-te Wichtel ($1 \leq k \leq 6$) misst dem Bild einen Wert von W_k Euro zu und hat x_k GPPL-Lose gekauft. Die Wertbemessungen W_k sind dann absteigend geordnet: $W_1 > W_2 > \cdots > W_6$. Die Gesamtzahl aller vorhandenen GPPL-Lose beträgt $N = x_1 + x_2 + \cdots + x_6$. Schliesslich führen wir noch $R_k = N - x_k$ als Anzahl aller GPPL-Lose ein, die *nicht* vom k-ten Wichtel gekauft wurden. Die Gewinnerwartung des k-ten Wichtels beträgt

$$G(x_k) \quad = \quad W_k \cdot \frac{x_k}{R_k + x_k} - x_k. \tag{5}$$

In dieser Formel sind W_k (der Wert des Bildes) und $x_k + R_k$ (die Summe aus der vom k-ten Wichtel gekauften Lose, sowie der Gesamtzahl der Lose der anderen Wichtel) fest vorgegeben. Nur die Variable x_k kann durch den k-ten Wichtel verändert werden. Die ersten beiden Ableitungen der Funktion G

lauten:

$$
\begin{aligned}
G'(x_k) &= W_k \cdot \frac{R_k}{(R_k+x_k)^2} - 1 && (6)\\
G''(x_k) &= -2W_k \cdot \frac{R_k}{(R_k+x_k)^3} && (7)
\end{aligned}
$$

Da die zweite Ableitung G'' in (7) für alle $x_k \geq 0$ negativ ist, ist die Gewinnerwartung G in diesem Bereich strikt konkav. Wir folgern: Entweder (i) fällt G auf den nicht-negativen reellen Zahlen streng monoton, oder (ii) es gibt ein eindeutiges Maximum in einem Punkt $x^* > 0$, der die Gleichung $G'(x^*) = 0$ erfüllt.
Im Fall (i) kauft sich der Wichtel $x_k = 0$ (in Worten: keine) Lose. Im Fall (ii) kauft der Wichtel $x_k = x^*$ Lose. Wir setzen dann die erste Ableitung in (6) gleich 0, schreiben sie mit Hilfe von $R_k = N - x_k$ ein wenig um, und erhalten

$$
x_k = (W_k - N) \cdot \frac{N}{W_k}. \qquad (8)
$$

Aus (8) lesen wir ab, dass $x_k > 0$ dann und nur dann gilt, wenn $W_k > N$ ist. Wir fassen zusammen: Falls $W_k \leq N$, so kauft der k-te Wichtel keine Lose. Falls $W_k > N$, so kauft sich der k-te Wichtel genau $x_k = (W_k - N)\,N/W_k$ Lose.

Antwort. Jede der Antworten #1 bis #10 spezifiziert einen konkreten Wert für die Gesamtzahl N aller vorhandenen GPPL-Lose. Wir testen die vorgegebenen Werte für N der Reihe nach durch, und bestimmen mit Hilfe von (8) die entsprechenden Loszahlen x_k für $1 \leq k \leq 6$ mit $W_k > N$. Nur in Antwort #6 addieren sich die Loszahlen zur korrekten Summe N auf: Atto kauft $x_1 = 2380$ Lose, Bilbo $x_2 = 1540$, Chico $x_3 = 420$, und die anderen drei Wichtel kaufen nichts. Auf Grund von $2380 + 1540 + 420 = 4340$ ist #6 die richtige Antwort.
(Eine genauere mathematische Analyse der Situation zeigt, dass allein durch den Aufgabentext der Wert $N = 4340$ bereits eindeutig bestimmt ist.)

11 Wettbüro

Aufgabensteller: Janina Oertel (TU Berlin)

11.1 Aufgabe

Wie jedes Jahr erstellen die Wichtel für den Weihnachtsmann eine alphabetische Liste, welche Kinder in diesem Jahr lieb beziehungsweise böse waren. Leider hat der Wichtel Harald die Liste zum Buchstaben H verloren, was nun für ziemliches Chaos sorgt. Es ist leider nicht genug Zeit, alle Daten erneut zu sammeln, deshalb beschließen die anderen Wichtel, eine zufällige Auswahl zu treffen. Sie lassen mit einem Zufallsgenerator jedem Kind den Status „lieb “ oder „böse “ zuordnen, wobei beide Möglichkeiten gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Den Wichteln wird in der Zwischenzeit langweilig und sie beschließen, Wetten auf bestimmte Teilsequenzen der Liste abzuschließen. Dabei wetten die drei Wichtel Belinda, Emil und Ute auf die folgenden Ereignisse:

- **Wichtel Belinda**
  In der Liste erscheint die Sequenz „lieb - lieb - lieb - böse " vor den Sequenzen von Wichtel Emil und Ute.
- **Wichtel Emil**
  In der Liste erscheint die Sequenz „böse - böse - lieb - böse " vor den Sequenzen von Wichtel Belinda und Ute.
- **Wichtel Ute**
  In der Liste erscheint die Sequenz „lieb - böse - lieb - lieb " vor den Sequenzen von Wichtel Belinda und Emil.

Betrachten wir die Sequenz, die mit der kleinsten Wahrscheinlichkeit als Erste vor den anderen beiden auftritt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür kann als Bruch ausgedrückt werden. Welchen Nenner hat der vollständig gekürzte gemeine Bruch dieser Wahrscheinlichkeit?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 10

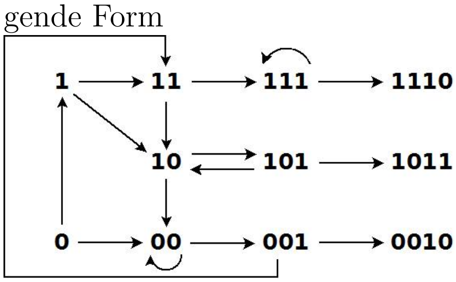
11.2 Lösung

Antwort Nummer 4 ist richtig.

Zur Vereinfachung steht die 0 für böse Kinder und die 1 für liebe Kinder. Dann wetten die drei Wichtel auf die folgenden Sequenzen:

- **Wichtel Belinda**
  Wichtel Belinda hat die Sequenz 1110.
- **Wichtel Emil**
  Wichtel Emil hat die Sequenz 0010.
- **Wichtel Ute**
  Wichtel Ute hat die Sequenz 1011.

Wir stellen diese Sequenzen nun in einem Graphen dar. Dieser hat die folgende Form



Im ersten Zug kann entweder ein liebes oder ein böses Kind zufällig gewählt werden. Darauf aufbauend wird nun geguckt, bei welchem folgenden Zug bereits Teile der gesuchten Sequenzen generiert werden, beziehungsweise durch das Hinzufügen der nächsten Stelle eine Teilsequenz unterbrochen wird und die Suche nach dem ersten Erscheinen einer Sequenz von vorne beginnt. Wenn beispielsweise bei der momentanen Sequenz 001 als nächstes eine 0 gezogen wird, dann hat Wichtel Emil gewonnen. Wenn allerdings eine 1 gezogen wird, dann ist die vorherige Teilsequenz, die Emil fast zum Sieg geführt hätte, unterbrochen. Allerings endet die Liste nun auf 11, was der Anfang der Sequenz von Belinda ist, wodurch diese auf einmal näher am Erfüllen ihrer Sequenz ist.

Wertet man den Graphen nun aus, erhält man ein lineares Gleichungssystem. Wir betrachten zunächst den Fall, dass wir wissen wollen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Sequenz 1110 auftritt, bevor die Sequenzen von Emil und Ute auftreten. Dann steht die Variable p_i für die Wahrscheinlichkeit die Sequenz 1110 vor den anderen beiden Endsequenzen zu erreichen, wenn man sich momentan im Punkt i befindet. Jeder Punkt steht dabei für eine bestimmte Teilsequenz, die zur Zeit vorliegt. Für die Punkte p_{1110}, p_{1011} und p_{0010} werden Startwerte vorgegeben. Wenn wir uns bereits im Punkt 1110 befinden, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Sequenz vor den anderen beiden auftritt gerade eins, also $p_{1110} = 1$. Analog ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Sequenz 1110 als erstes erreichen, wenn wir momentan im Punkt 1011 oder 0010 sind, null, also $p_{1011} = p_{0010} = 0$.

Mit den gegebenen Werten kann man nun ein Gleichungssystem konstruieren, über welches die restlichen Werte berechnet werden können. Exemplarisch betrachten wir dafür die Wahrscheinlichkeit p_{10}. Wenn wir in diesem Punkt sind, dann sind wir nach Ziehung der nächsten Zufallszahl entweder im Punkt 00 oder im Punkt 101, beides mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 Prozent. Demnach lässt sich daraus die Gleichung $p_{10} = \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{101}$ herleiten. Dieses Verfahren kann für jeden Punkt angewendet werden und liefert uns für die verbliebenen acht Punkte (die Wahrscheinlichkeiten in den Endsequenzen sind ja vorgegeben) ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_0 \\ p_{11} \\ p_{10} \\ p_{00} \\ p_{111} \\ p_{101} \\ p_{001} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5p_{1110} \\ 0.5p_{1011} \\ 0.5p_{0010} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Je nachdem welche Endsequenz gerade betrachtet wird, setzen wir nun die Anfangswahrscheinlichkeiten ein, zum Beispiel für die Sequenz 1110 $p_{1110} = 1$ und $p_{1011} = p_{0010} = 0$. Gesucht ist nun p_{Anfang}. Da gilt $p_{Anfang} = 0.5(p_1 + p_0)$ (wiederum werden bei der Ziehung mit 50 Prozent Wahrscheinlichkeit entweder eine 0 oder eine 1 gezogen), können wir durch Mittelung von p_1 und p_0 die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, dass die entsprechende Sequenz vor den anderen beiden in der Liste entsteht, berechnen. Wir erhalten die folgenden Werte für p_1 und p_0 für die drei Wetten der Wichtel:

- **Wichtel Belinda**
  $p_1 = 0.4$ und $p_0 = 0.35$, also $p_{Anfang} = 0.375$

- **Wichtel Emil**
  $p_1 = 0.3$ und $p_0 = 0.45$, also $p_{Anfang} = 0.375$
- **Wichtel Ute**
  $p_1 = 0.3$ und $p_0 = 0.2$, also $p_{Anfang} = 0.25$

Die Sequenz von Ute ist also am unwahrscheinlichsten mit 25 Prozent Wahrscheinlichkeit. Demnach ist der gekürzte Bruch $\frac{1}{4}$ und 4 die richtige Antwort.

12 Die gefräßige Weihnachtsmaus

Aufgabensteller: Dirk Becherer (HU Berlin) und Martin Büttner (HU Berlin)

12.1 Aufgabe

Die Weihnachtsmaus Pauline kann ihren Augen nicht trauen. Was für ein festlich geschmückter Weihnachtsbaum mit all diesen Köstlichkeiten wie Lebkuchenherzen, Marzipankartoffeln und Baumkuchen. Ihr Ziel ist klar: Sie will die Spitze des Weihnachtsbaumes erreichen und sich dabei möglichst richtig satt essen, bevor sie sich zu ihrem Winterschlaf zurückzieht. Sie klettert dabei immer eine Ebene des Baumes nach oben und kann entweder direkt nach oben oder diagonal nach oben gehen, sodass sie für jeden Schritt maximal 3 verschiedene Möglichkeiten hat, nämlich, wenn möglich, diagonal nach links oben, diagonal nach rechts oben oder senkrecht nach oben.
Die Zahlen in der Abbildung symbolisieren den Nährwert der jeweiligen Nascherei in Kilokalorien.
Gerade will sich Pauline auf den Weg machen, als der Weihnachtsengel mit mahnenden Worten herbeigesaust kommt: „Wie kannst du nur so selbstsüchtig sein und den Kindern die Weihnachtsfreude verderben?“„Das tut mir leid“, antwortet Pauline ganz verdattert, „ich habe Hunger und ohne Winterspeck werde ich die kalte Jahreszeit wohl nicht überstehen.“„Auch du sollst eine frohe Weihnachtszeit haben“, erwidert der Engel mit gnädiger Stimme, „Du darfst dich satt essen, sage mir nur vorher schnell, wie viele Kilokalorien du auf deiner Route von unten nach ganz oben maximal verputzen kannst.“
Wie viele Kilokalorien kann Pauline auf ihrem Weg maximal essen und auf wie vielen verschiedenen Routen kann sie dies erreichen?

Antwortmöglichkeiten:

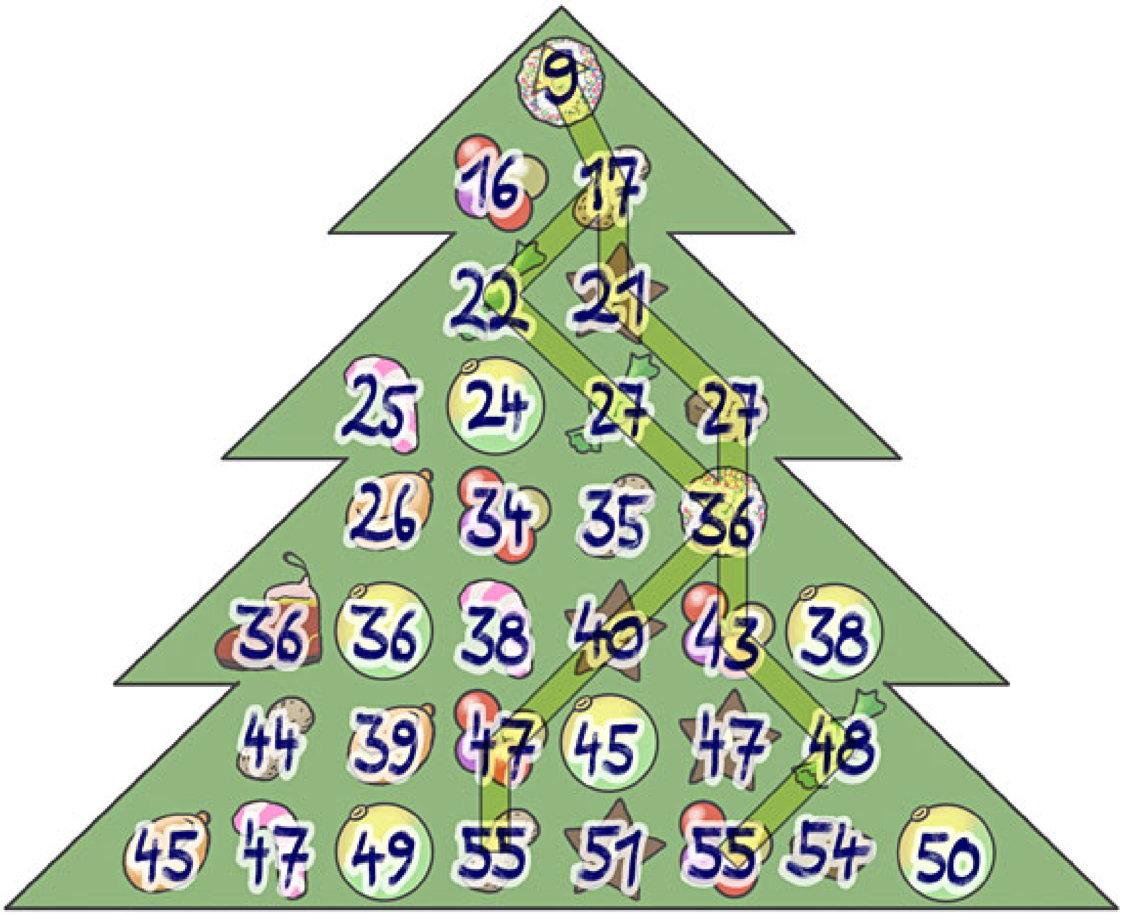
1. 0-50 Kilokalorien/genau 1 Route
2. 0-50 Kilokalorien/2-5 Routen
3. 0-50 Kilokalorien/6-10 Routen
4. 0-50 Kilokalorien/11-15 Routen
5. 0-50 Kilokalorien/mehr als 15 Routen
6. 51-100 Kilokalorien/genau 1 Route
7. 51-100 Kilokalorien/2-5 Routen
8. 51-100 Kilokalorien/6-10 Routen
9. 51-100 Kilokalorien/11-15 Routen
10. 51-100 Kilokalorien/mehr als 15 Routen

Projektbezug:
Dynamische optimale Kontrolle spielt auch in der Finanzmathematik eine große Rolle. Dabei geht es sogar um optimale Kontrolle unter Unsicherheit, z.B. für risikominimierende Absicherungsstrategien in einem Finanzmarkt, in dem die zukünftige Kursentwicklung natürlich unbekannt, also unsicher (zufällig) ist. Die Maus weiß gewissermaßen nur ungefähr, welche Naschereien wo im Baum hängen, und wohlmöglich auch nicht, wie der groß der Baum überhaupt ist. Wir entwickeln optimale Handels- und Absicherungsstrategien, welche robust gegenüber Unsicherheit sind, sowie Methoden, mit denen die Unsicherheit quantifiziert werden kann.

12.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 7.

Wir starten ganz oben auf der Spitze des Baumes und gehen dann mit jedem Schritt eine Stufe nach unten. Dabei notieren wir uns in einem separaten Schema die Summe der bis dahin aufgenommenen Kilokalorien.
Das passiert wie folgt: In der obersten Ebene steht die 9. Dann gehen wir eine Ebene nach unten und schreiben anstelle der 7 eine 16, da die Weihnachtsmaus Pauline auf dem Weg von der 7 zur 9 genau 7+9=16 Kilokalorien verputzen kann. In das benachbarte Feld wird eine 17 (17=9+8) geschrieben. In der Ebene darunter schreiben wir anstelle der 5 eine 22 (22=5+17). Das Schema wird nun Ebene für Ebene aufgebaut. Zu jedem neuen Eintrag addieren wir die größte Anzahl an Kilokalorien, die sich direkt darüber oder diagonal darüber befindet. In das jeweilige neue Feld kommt dann die von dieser Position aus bis nach oben zur Spitze maximal erreichbare Kalorienzahl. So notieren wir bis zur untersten Ebene des Weihnachtsbaumes die maximale Kilokalorienanzahl, die von jedem Ort bis ganz oben aufgenommen werden kann.
Dabei entsteht folgendes Schema:



In der untersten Ebene des Baumes lesen wir ab, dass die maximal aufnehmbare Kalorienanzahl 55 ist. Pauline kann an zwei verschiedenen Stellen starten. In Ebene 4 laufen diese Wege zusammen. verzweigen sich sofort, um in Ebene 7 wieder zusammenzulaufen, sodass Pauline insgesamt 4 verschiedene Möglichkeiten hat, sich die 55 Kilokalorien als Winterspeck anzufressen.

13 Der besondere Postversand von Weihnachtskalendern

Aufgabensteller: Daniël Kroes, Merlijn Staps

13.1 Aufgabe

Auch dieses Jahr wird der Weihnachtsmann wieder in der Adventszeit vom 1. bis 24. Dezember in einem Rentierschlitten durch die Welt reisen, um die Mathekalenderaufgaben zu verteilen. Das ist leichter als das Verteilen von Geschenken, deshalb hat er dafür einen Schlitten, der nur von vier Rentieren gezogen wird. Diese Rentiere laufen in einer Reihe hintereinander. Speziell für diese Aufgabe beschäftigt der Weihnachtsmann die vier Rentiere Norbert, Olivier, Pieter und Quinten.

Außerdem ist Rudolf, das Lieblingsrentier des Weihnachtsmanns, jeden Tag dabei und immer an der ersten Position. Deshalb braucht jeden Tag eines der anderen vier Rentiere nicht mitzukommen und hat Ruhetag. Die anderen Rentiere sind über die bevorzugte Behandlung von Rudolf so empört, dass sie mit ihm so wenig wie möglich zu tun haben wollen. Sie lehnen es ab, an zwei aufeinanderfolgenden Tagen direkt hinter Rudolf zu laufen, und wollen auch nicht am Tag direkt nach einem Ruhetag auf dieser Position eingeschirrt werden. Der Weihnachtsmann akzeptiert diese Forderungen und bemerkt, dass es genau $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ Möglichkeiten gibt, ein Rentier zu Hause zu lassen und die anderen drei auf die restlichen Positionen vor dem Schlitten zu verteilen. Um die Rentiere nicht noch mehr zu verärgern, beschließt er, jede dieser 24 Möglichkeiten einmal zu verwenden.
Er beauftragt einen Wichtel, einen Plan dafür zu erstellen, und fügt selbst noch eine weitere Forderung hinzu: Wenn zwei Rentiere an zwei aufeinanderfolgenden Tagen laufen, dann soll an beiden Tagen dasselbe dieser zwei Rentiere weiter vorn (also näher bei Rudolf) eingeschirrt werden.
Wenn so geplant wird, an wievielen direkt aufeinanderfolgenden Tagen kann ein Rentier dann höchstens mit auf die Reise gehen? (Es geht natürlich um Norbert, Olivier, Pieter und Quinten, nicht um Rudolf.)

Antwortmöglichkeiten

1. Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 2 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 3 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

2. Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 3 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 4 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

3. Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 4 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 5 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

4. Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 5 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 6 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

5. Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 6 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 7 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

6. Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 7 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 8 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

7. Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 8 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 9 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

8. Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 9 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 10 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

9. Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 10 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 11 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

10. Es gibt überhaupt keinen Plan, der alle Bedingungen erfüllt.

13.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 4.

Es gibt einen Plan, bei dem ein Rentier an 5 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, aber keinen Plan, bei dem ein Rentier an mindestens 6 aufeinanderfolgenden Tagen mitreist.

Wir nennen die Position direkt hinter Rudolf Position 1, die Position dahinter Position 2, und die Position dahinter (direkt vor dem Schlitten) Position 3. Wir beschreiben die Reihenfolge für einen Tag durch (a, b, c, d), wobei $\{a, b, c, d\} = \{\text{Norbert, Olivier, Pieter, Quinten}\}$, Rentier a läuft auf Position 1, Rentier b auf Position 2 und Rentier c auf Position 3. Rentier d hat dann Ruhetag.

Wir nehmen an, dass an einem bestimmten Tag k, $1 \leq k \leq 23$, die Rentiere in der Reihenfolge (a, b, c, d) laufen, und untersuchen, welche Reihenfolgen am Tag $k+1$ möglich sind. Die Rentiere a und d dürfen an diesem Tag nicht auf Position 1 laufen. Angenommen, am Tag $k+1$ läuft Rentier c auf Position 1. Da eines der Rentiere a oder b am Tag $k+1$ ebenfalls mitläuft, läuft c

nun vor diesem Rentier, obwohl es am Tag k hinter ihm lief. Das ist nicht zugelassen. Also läuft am Tag $k+1$ Rentier b auf Position 1.
Angenommen, Rentier a läuft am Tag $k+1$ wieder mit. Dann läuft es an diesem Tag hinter b, aber am Tag k lief es vor b. Das ist nicht zugelassen, also hat a am Tag $k+1$ Ruhetag.
Damit sind am Tag $k+1$ nur die Reihenfolgen (b, c, d, a) und (b, d, c, a) möglich. Insbesondere gilt, dass ein Rentier am Tag vor einem Ruhetag auf Position 1 lief, und am Tag davor auf Position 2 (sofern an diesen Tagen schon Fahrten stattfanden). Also kann ein Rentier von drei aufeinanderfolgenden Tagen höchstens einen Ruhetag haben.
Nehmen wir an, dass ein Rentier, ohne Beschränkung der Allgemeinheit Norbert, an sechs aufeinanderfolgenden Tagen läuft. Sei l das Datum des ersten dieser Tage, $1 \leq l \leq 19$. Da an den Tagen l bis $l+2$ kein Rentier zwei Ruhetage haben kann, haben Olivier, Pieter und Quinten jeder genau einen Ruhetag, ohne Beschränkung der Allgemeinheit in dieser Reihenfolge. Am Tag $l+3$ können Pieter und Quinten keinen Ruhetag haben, und Norbert hat nach unserer Annahme ebenfalls keinen Ruhetag. Folglich hat Olivier am Tag $l+3$ Ruhetag. Analog folgern wir, dass am Tag $l+4$ Pieter und am Tag $l+5$ Quinten Ruhetage haben. Da Pieter am Tag $l+1$ Ruhetag hat, muss er am Tag l auf Position 1 laufen. Da Quinten am Tag $l+2$ Ruhetag hat, muss er am Tag l auf Position 2 laufen. Also laufen am Tag l die Rentiere in der Reihenfolge (Pieter,Quinten,Norbert,Olivier). Ganz analog zeigen wir, dass am Tag $l+3$ die Rentiere in derselben Reihenfolge laufen. Das ist ein Widerspruch zur Forderung, dass jede mögliche Reihenfolge genau einmal vorkommen soll. Also war unsere Annahme falsch, dass ein Plan existiert, bei dem ein Rentier an sechs aufeinanderfolgenden Tagen läuft.
Zur vollständigen Lösung muss jetzt nur noch ein Plan angegeben werden, bei dem ein Rentier an fünf aufeinanderfolgenden Tagen mit auf die Reise geht. Ein solcher Plan ist:

Tag	Position 1	Position 2	Position 3	Ruhetag
1	Olivier	Pieter	Quinten	Norbert
2	Pieter	Quinten	Norbert	Olivier
3	Quinten	Norbert	Olivier	Pieter
4	Norbert	Pieter	Olivier	Quinten
5	Pieter	Olivier	Quinten	Norbert
6	Olivier	Quinten	Norbert	Pieter
7	Quinten	Norbert	Pieter	Olivier
8	Norbert	Olivier	Pieter	Quinten
9	Olivier	Quinten	Pieter	Norbert
10	Quinten	Pieter	Norbert	Olivier
11	Pieter	Norbert	Olivier	Quinten
12	Norbert	Quinten	Olivier	Pieter
13	Quinten	Pieter	Olivier	Norbert
14	Pieter	Olivier	Norbert	Quinten
15	Olivier	Norbert	Quinten	Pieter
16	Norbert	Pieter	Quinten	Olivier
17	Pieter	Quinten	Olivier	Norbert
18	Quinten	Olivier	Norbert	Pieter
19	Olivier	Norbert	Pieter	Quinten
20	Norbert	Quinten	Pieter	Olivier
21	Quinten	Olivier	Pieter	Norbert
22	Olivier	Pieter	Norbert	Quinten
23	Pieter	Norbert	Quinten	Olivier
24	Norbert	Olivier	Quinten	Pieter

Es ist leicht zu sehen, dass dieser Plan alle Bedingungen erfüllt und Pieter an fünf aufeinanderfolgenden Tagen mitreist, nämlich von Tag 7 bis 11.

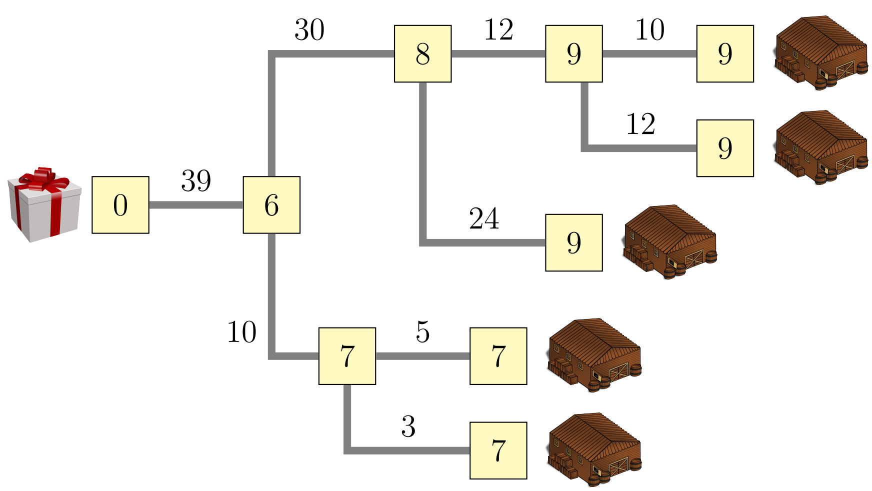
14 Notfall am Nordpol

Aufgabensteller: Martin Groß (TU Berlin)

14.1 Aufgabe

Am Montag fuhr die Wichtelmeisterin in den Urlaub. Am Mittwoch fraß Rentier Rudolf alle 72 Seiten mit den Anweisungen der Wichtelmeisterin. Ergebnis: Ein Rentier mit mörderischen Magenschmerzen und völliges Chaos in der Geschenkefabrik. Die Zauberstaub-Lieferungen durch die neu angeschaff-

ten Flutsch-&-Weg$^{\text{TM}}$-Zauberleitungen waren zusammengebrochen, und die Geschenkefabrik damit zur Untätigkeit verdammt.
Nach langer und ausführlicher Diskussion wurde Wichteline Wendy dazu bestimmt,[1] das Problem zu lösen oder die Wichtelmeisterin aus dem Urlaub zurückzurufen.[2]
Aus den noch vorhandenen spärlichen Bedienungsanweisungen ist zu entnehmen, dass das Zauberstaubleitungssystem aus einer Reihe von Leitungen und Knoten besteht, die Zauberstaub von fünf Lagern zur Geschenkefabrik befördern. Knoten (in der Abbildung quadratisch dargestellt) sind die Punkte, an denen mehrere Leitungen zusammenlaufen, sowie die Lager und die Fabrik.



Die Flutsch-&-Weg-Einstellungen erlauben es, jedem Lager anzuordnen, wieviel Zauberstaub es in seine Leitung pumpen soll. Damit der Zauberstaub durch die Leitungen strömt, muss der Druck am Start-Knoten größer als am Ziel-Knoten sein. Die genaue Menge an Zauberstaub in einer Leitung wird folgendermaßen bestimmt:
Sei d die Funktion, die uns den jeweiligen Druck an einem Knoten liefert. Dann ist die Menge an Zauberstaub in einer Leitung mit Startknoten s und Endknoten e gegeben durch $|d(s)^2 - d(e)^2|$, wobei $d(s)$ den Druck im Startknoten und $d(e)$ den Druck im Endknoten darstellt.

[1] Sie hatte das kürzeste Hölzchen gezogen.
[2] Was keine Option war.

Soll zum Beispiel ein Lager 3 Einheiten Zauberstaub in eine Leitung pumpen, an deren Endknoten ein Druck von z herrscht, muss der Druck im Lager-Knoten $\sqrt{3+z^2}$ betragen. An jedem Knoten, der weder ein Lager noch die Geschenkefabrik ist, muss genauso viel rausströmen, wie reinströmen – dadurch ergibt sich der Fluss in den restlichen Leitungen.
Lässt man die Lager zuviel Zauberstaub schicken, können die dadurch nötigen Drücke im System aber zu hoch werden – jeder Knoten hat einen Maximal-Druck, der nicht überschritten werden darf, und jede Leitung hat eine maximal zulässige Menge an Staub, die sie transportieren kann.
In der Abbildung sind die Zahlen in den Knoten die maximal möglichen Drücke und die Zahlen an den Leitungen die maximale Zauberstaubmenge der Leitung (negative Drücke sind nicht zulässig).
Wichteline Wendy muss folgende Frage beantworten: Wieviele Einheiten Zauberstaub können maximal zur Fabrik transportiert werden, ohne die Parameter für Leitungen und Knoten zu verletzen?

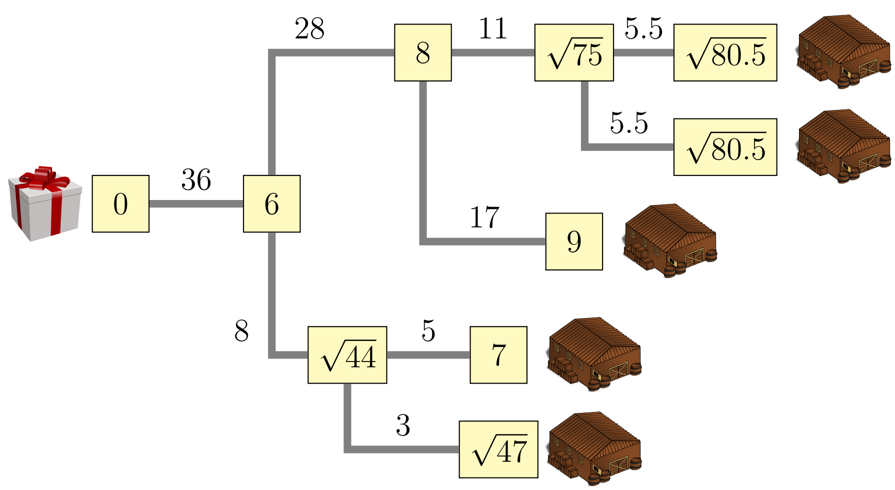
Antwortmöglichkeiten:

1. 30
2. 31
3. 32
4. 33
5. 34
6. 35
7. 36
8. 37
9. 38
10. 39

Projektbezug:
Effiziente Netzwerkflussmethoden für insttionäre Gasflüsse (TRR 154)
Das Zauberstaub-System in dieser Aufgabe ist eine (ziemlich starke) Vereinfachung von Transportproblemen, die in Gasnetzwerken auftreten. Ein dort auftretendes Problem ist es, gegebene Gasmengen von Start- zu Zielorten zu transportieren, ohne Komponenten überzustrapazieren oder gegen Bestimmungen zu verstoßen.

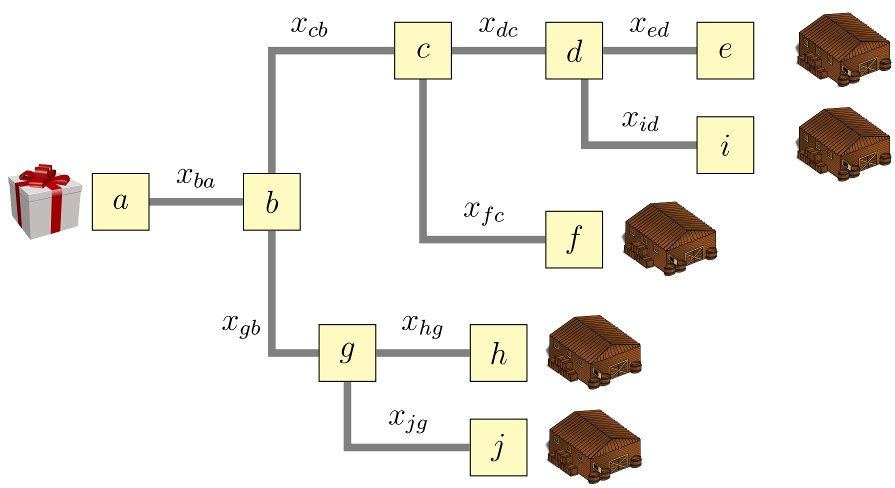
14.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 7.
Das gegebene Leitungs-Netzwerk hat eine (relativ) günstige Struktur: Es gibt genau einen Weg von jedem Lager zur Fabrik. Es ist nicht möglich mehr als 36 Einheiten Zauberstaub in die Fabrik zu schicken: Der Druck in der Fabrik ist 0, der Druck im benachbarten Knoten beträgt maximal 6. Damit ergibt sich 36 als maximale Differenz der quadrierten Drücke.
Eine Lösung, in der 36 Einheiten Zauberstaub an die Fabrik ausgeliefert werden, ist die folgende:



Eine solche Lösung kann entweder durch “Ausprobieren” gefunden werden – d.h., indem man versucht, möglichst viel Staub vom ersten Lager in die Fabrik zu befördern, dann vom zweiten Lager, etc. oder in dem man ein mathematisches Modell aufstellt:

- für jeden Knoten wird eine Variable eingeführt, die seinen Druck bezeichnet,
- für jeden Kante wird eine Variable eingeführt, die ihre Staubmenge darstellt.



Dann lassen sich die gegebenen Bedingungen schreiben als:

$$
\begin{array}{rrr}
x_{ba} = b^2 - a^2, & x_{cb} = c^2 - b^2, & x_{dc} = d^2 - c^2, \\
x_{ed} = e^2 - d^2, & x_{fc} = f^2 - c^2, & x_{id} = i^2 - d^2, \\
x_{jg} = j^2 - g^2, & x_{gb} = g^2 - b^2, & x_{hg} = h^2 - g^2, \\
x_{ba} = x_{cb} + x_{gb}, & x_{cb} = x_{dc} + x_{fc}, & x_{dc} = x_{ed} + x_{id}, \\
x_{gb} = x_{hg} + x_{jg}, & x_{ba} \leq 39, & x_{cb} \leq 30, \\
x_{dc} \leq 12, & x_{ed} \leq 10, & x_{id} \leq 12, \\
x_{fc} \leq 24, & x_{gb} \leq 10, & x_{hg} \leq 5, \\
x_{jg} \leq 3, & a = 0, & b \leq 6, \\
c \leq 8, & d \leq 9, & e \leq 9 \\
f \leq 9, & g \leq 7, & h \leq 7 \\
i \leq 9, & j \leq 7. &
\end{array}
$$

Dieses Ungleichungsystem kann dann unter der Zielfunktion $\max x_{ba}$ maximiert werden – aufgrund der Größe ist dies von Hand hier aber nicht sehr angenehm, und langsamer als durch "Ausprobieren", dank der einfachen Struktur des Netzwerks.

15 Meilensteine

Aufgabensteller: Georg Prokert (TU Eindhoven)

15.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann fliegt heute mit dem Helikopter in die Karibik, um auf der kreisrunden Adventsinsel seltene Tropenhölzer zu sammeln. Sein Wichtelpilot erzählt ihm, dass es auf der Adventsinsel sieben Meilensteine gibt, die mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F und G beschriftet sind. Diese sieben Meilensteine haben die folgenden Eigenschaften:

- Die drei Meilensteine A, B, C befinden sich jeweils am äußersten Rand der Insel.
- Der Meilenstein D liegt genau in der Mitte zwischen A und B.
- Der Meilenstein E befindet sich im Zentrum der kreisrunden Insel.
- Der Meilenstein F liegt im Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.
- Der Meilenstein G liegt im Schnittpunkt der Geraden durch A und B mit der Geraden durch C und F.
- Die vier Meilensteine D, E, F, G bilden ein Rechteck $DEFG$.
- Die Abstände zwischen D und E bzw. zwischen F und G betragen 24 Meilen, die Abstände zwischen D und G bzw. zwischen E und F betragen 11 Meilen.

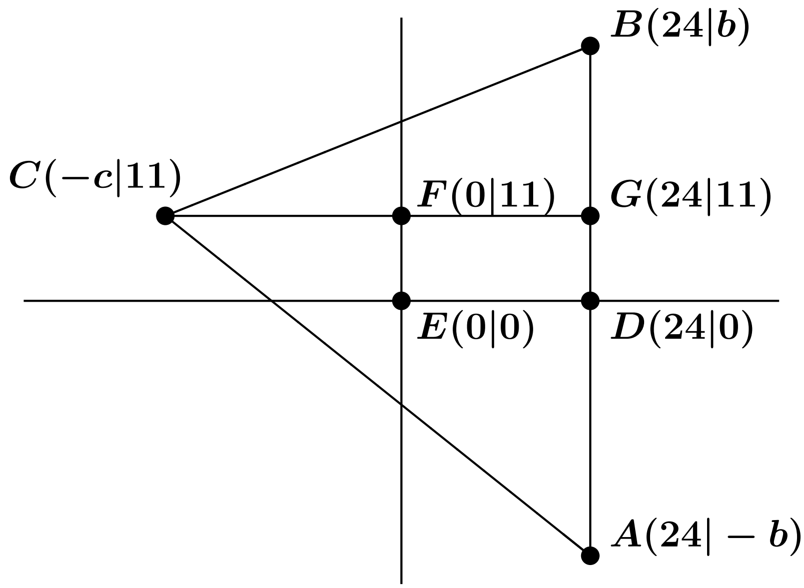
Auf der Insel gibt es drei Helikopterlandeplätze bei den Meilensteinen A, B und C. Das schönste Tropenholz wächst beim Meilenstein F. Der Weihnachtsmann fragt den Wichtelpiloten: Wie weit ist denn das schönste Tropenholz (Meilenstein F) vom nächst gelegenen Landeplatz (Meilenstein A oder B oder C) entfernt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 40 Meilen
2. 41 Meilen
3. 42 Meilen
4. 43 Meilen
5. 44 Meilen
6. 45 Meilen
7. 46 Meilen
8. 47 Meilen
9. 48 Meilen
10. 49 Meilen

15.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 1.
Wir führen ein Koordinatensystem ein, das den vier Ecken des Rechtecks $DEFG$ die Koordinaten $D(24|0)$, $E(0|0)$, $F(0|11)$ und $G(24|11)$ zuweist.
Da die Punkte A und B auf einer gemeinsamen Geraden mit $D(24|0)$ und $G(24|11)$ liegen, müssen beide den Wert 24 als x-Koordinate haben. Die y-Koordinate von B bezeichnen wir mit b, wobei b eine positive reelle Zahl ist. Da $D(24|0)$ genau in der Mitte zwischen A und B liegt, erhalten wir für den Punkt A die Koordinaten $A(24|-b)$.
Da die Höhenlinie von C durch die beiden Punkte $F(0|11)$ und $G(24|11)$ geht, muss die y-Koordinate von C gleich 11 sein. Die x-Koordinate von C bezeichnen wir mit $-c$, wobei c eine positive reelle Zahl ist. Alle Koordinaten sind in der folgenden Abbildung zusammengefasst.



Wir betrachten nun die Gerade g, die durch die Dreiecksseite BC läuft, und die Gerade h, die dazugehörende Höhe, die durch A und F geht. Da diese beiden Geraden senkrecht aufeinander stehen, ist das Produkt ihrer Steigungen -1. Da die Steigung von g gleich $(b-11)/(24+c)$ ist und da die

Steigung von h gleich $(b+11)/(-24)$ ist, erhalten wir

$$(b-11)(b+11) \;=\; 24\cdot(24+c). \tag{10}$$

Da die beiden Punkte B und C gleich weit vom Mittelpunkt E der kreisförmigen Adventsinsel entfernt sind, erhalten wir weiter

$$b^2+24^2 \;=\; c^2+11^2. \tag{11}$$

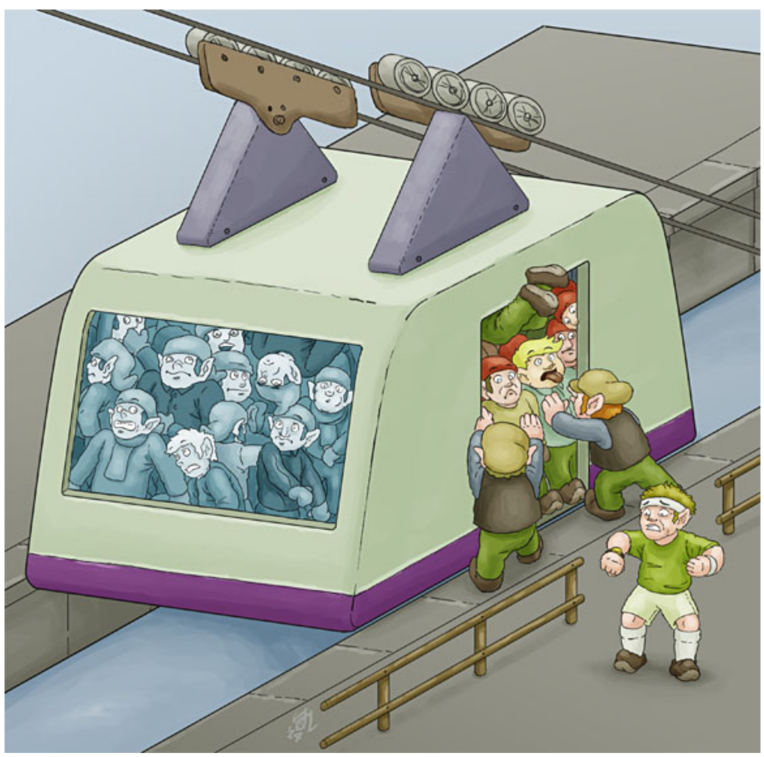
Wir subtrahieren (10) von (11) und vereinfachen das Resultat zu

$$(c+24)(c-48) \;=\; 0. \tag{12}$$

Da b und c positiv sind, folgern wir zunächst $c=48$ aus (12) und danach $b^2=48^2+11^2-24^2=1849$ und somit $b=43$ aus (11).
Der Abstand von $A(24|-43)$ nach $F(0|11)$ beträgt $\sqrt{24^2+54^2}\approx 59,09$ Meilen, von $B(24|43)$ nach $F(0|11)$ sind es $\sqrt{24^2+32^2}=40$ Meilen, und von $C(-48|11)$ nach $F(0|11)$ sind es 48 Meilen. Somit ist Antwort #1 richtig.

16 Seilbahn-Meisterschaften

Aufgabensteller:
Heide Hoppmann (Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin),
Marika Karbstein (Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin)



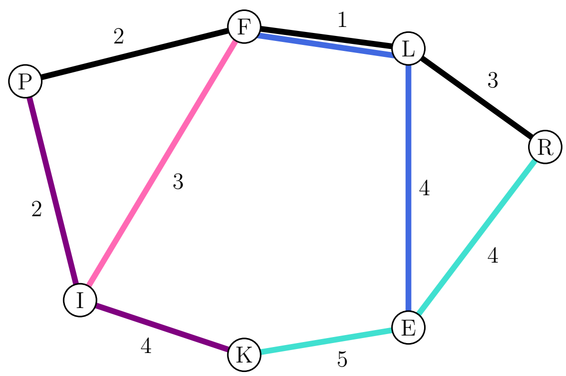
16.1 Aufgabe

Dieses Jahr finden zum 10. Mal die „Seilbahn-Meisterschaften“ statt. Bei diesem Wettbewerb versuchen die Teilnehmer so schnell wie möglich mit der Wichtel-Seilbahn in einer Tour alle Streckenabschnitte des Seilbahnnetzes zu befahren. Zu gewinnen gibt es wie jedes Jahr einen Jahresvorrat einer süßen Knabberei. Da aber die Wichtel von den ganzen vorweihnachtlichen Süßigkeiten schon ganz träge sind, hat der Weihnachtsmann einen zusätzlichen Gewinn versprochen, um seine Wichtel wieder munter zu machen. Jeder, der den Rekord – er liegt bei 83 Minuten – um mindestens fünf Minuten unterbietet, bekommt einen Tag frei.

Für die Seilbahn-Meisterschaft gelten dieses Jahr folgende Regeln:

1. Alle Teilnehmer müssen ihre Tour an der Station *Fertigungshalle* beginnen und beenden. Alle starten gemeinsam mit Seilbahn 1 Richtung *Plätzchenbäckerei*.
2. Da mit Seilbahn 5 gerade die Geschenke aus dem Lager zum Einpackcenter gebracht werden, dürfen alle Teilnehmer zwischen *Lager* und *Einpackcenter* nur in Richtung *Lager* fahren.
3. Die Teilnehmer müssen alle 9 Streckenabschnitte mindestens ein Mal befahren. Welche Seilbahnen sie dabei verwenden ist egal. Mit Ausnahme des Abschnittes *Einpackcenter – Lager* ist das Befahren jedes Abschnittes in beide Richtungen möglich. Allerdings darf ein Teilnehmer, der einen Abschnitt mehrfach befahren möchte, diesen immer nur in die *gleiche* Richtung befahren. Die Richtung eines jeden Streckenabschnittes entscheidet jeder Teilnehmer individuell für sich. Für die Abschnitte *Fertigungshalle – Plätzchenbäckerei* und *Einpackcenter – Lager* ist die Richtung bereits für alle vorgegeben (siehe 1. und 2.).
4. Das Umsteigen an einer Station in eine andere Seilbahn dauert immer genau 5 Minuten.

Das Seilbahnnetz mit seinen 5 Seilbahnen ist in der folgenden Grafik dargestellt. Die Fahrzeiten der einzelnen Streckenabschnitte sind jeweils in Minuten angegeben und immer für beide Richtungen gleich.



Seilbahn 1 : P – F – L – R
Seilbahn 2 : P – I – K
Seilbahn 3 : K – E – R
Seilbahn 4 : I – F
Seilbahn 5 : F – L – E

P = Plätzchenbäckerei, F = Fertigungshalle, L = Lager, R = Rentierställe
E = Einpackcenter, K = Kartendruckerei, I = Ideenschmiede

Letztes Jahr hat Hubertus gewonnen und den aktuellen Rekord aufgestellt. Da er glaubt, dass es ihm Glück bringt, wird er mit der Seilbahn 2 im Abschnitt K – I von der Kartendruckerei zur Ideenschmiede fahren. Leopold hat das Seilbahnnetz ausführlich untersucht und entscheidet sich vom Einpackcenter Richtung Rentierställe zu fahren (also von E nach R). Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt eine Tour, mit der man nur 58 Minuten braucht.
2. Hubertus muss mindestens 10 Mal umsteigen und muss mindestens 3 Mal an der Ideenschmiede vorbeifahren.
3. Es gibt eine Tour, bei der man auf jedem Streckenabschnitt nur genau ein Mal fährt.
4. Wenn beide die für sie bestmögliche Tour wählen, so kommt Hubertus vor Leopold das erste Mal bei den Rentierställen vorbei, Leopold beendet aber vor Hubertus die Tour.
5. Hubertus kann seinen Rekord vom letzten Jahr verbessern, bekommt aber keinen Tag frei.
6. Leopold muss mindestens 9 Mal umsteigen.

7. Es gibt eine Tour, bei der man nur 5 Mal umsteigen muss.
8. Leopold muss auf jeden Fall öfter umsteigen als Hubertus.
9. Hubertus wird dieses Jahr in jedem Falle länger brauchen, als letztes Jahr.
10. Egal, in welche Richtung Leopold zwischen der Fertigungshalle und der Ideenschmiede fährt, er kann immer vor Hubertus seine Tour beenden.

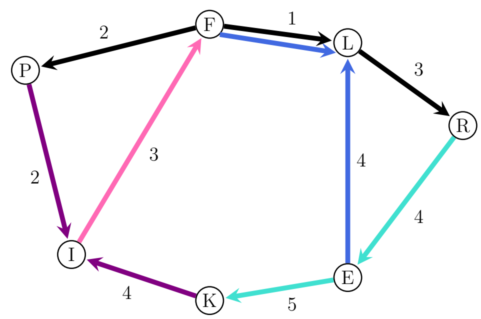
Projektbezug:
In dem MATHEON Projekt B-MI3 - Infrastructure design and passenger behaviour in public transport - wird das Passagierverhalten bezüglich der gewählten Reiserouten analysiert, um effiziente und nutzerfreundliche Fahrpläne zu gestalten. Eine adäquate Modellierung der Umsteigezeiten stellt dabei eine besondere Herausforderung dar. In der Aufgabe werden die Umsteigezeiten zur Vereinfachung geschätzt.

16.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 4.

- Die reine Fahrzeit für alle Abschnitte zusammen beträgt 28 Minuten. Egal welche Tour man fährt, an den Station P, I, K, E, R und F muss man umsteigen. Somit muss man mindestens 6 Mal umsteigen, braucht also mindestens 30 Minuten für das Umsteigen. Da es nicht reicht, jede Strecke genau einmal zu befahren (siehe Nummer 3), reichen 58 Minuten nicht aus und man muss mehr als 6 mal umsteigen. Antwort Nummer 1 und 7 sind falsch.
- Die Station I ist mit einer ungeraden Anzahl an Abschnitten verbunden. Jede Tour führt genauso oft in I hinein wie aus I hinaus. Damit kann es keine Tour geben, die jeden Abschnitt, der mit I verbunden ist, genau ein Mal nutzt. Somit ist Antwort Nummer 3 falsch.
- Da Hubertus von K nach I fahren möchte, ergibt sich automatisch für alle anderen Abschnitte jeweils eine mögliche Fahrtrichtung. Die

Richtung in der Hubertus die einzelnen Abschnitte nur befahren kann sind in folgender Grafik dargestellt.

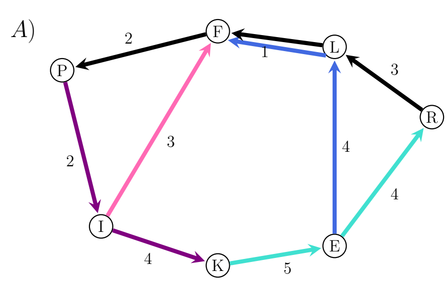


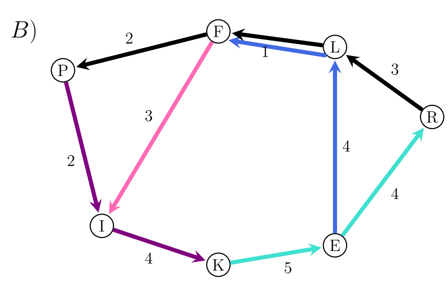
Die kürzeste Tour für Hubertus besucht die Stationen in der folgenden Reihenfolge:

$$\text{F} \to \text{P} \to \text{I} \to \text{F} \to \text{L} \to \text{R} \to \text{E} \to \text{L} \to \text{R} \to \text{E} \to \text{K} \to \text{I} \to \text{F}$$

Für diese Tour müsste er 9 Mal umsteigen und bräuchte insgesamt 83 Minuten. Damit sind die Antworten Nummer 2, 5 und 9 falsch. Bis zu den Rentierställen braucht er $2+5(\text{Umsteigen})+2+5(U)+3+5(U)+1+3=26$ Minuten.

- Leopold kann nur die Richtung, in der er den den Abschnitt I – F befahren möchte, frei wählen. Daraus ergeben sich, bei der Wahl der Richtung für jeden Streckenabschnitt prinzipiell zwei Möglichkeiten:





Eine kürzeste Tour für Leopold entsprechend Möglichkeit A) besucht dann die Stationen in der Reihenfolge:

$$\text{F} \to \text{P} \to \text{I} \to \text{F} \to \text{P} \to \text{I} \to \text{K} \to \text{E} \to \text{R} \to \text{L} \to \text{F} \to \text{P} \to \text{I} \to \text{K} \to \text{E} \to \text{L} \to \text{F}$$

Er müsste 9 Mal umsteigen und bräuchte insgesamt 91 Minuten. Wählt Leopold diese Route, so erreicht Hubertus vor ihm das Ziel. Antwort 10 ist falsch.

Eine kürzeste Tour entsprechend Möglichkeit B) besucht die Stationen in der Reihenfolge:

$$\text{F} \to \text{P} \to \text{I} \to \text{K} \to \text{E} \to \text{R} \to \text{L} \to \text{F} \to \text{I} \to \text{K} \to \text{E} \to \text{L} \to \text{F}$$

Bei dieser Tour müsste Leopold nur 7 Mal umsteigen und bräuchte insgesamt 73 Minuten. Bis zu den Rentierställen benötigt er bei dieser Streckenwahl $2 + 5(U) + 2 + 4 + 5(U) + 5 + 4 = 27$ Minuten. Hubertus wäre vor Leopold bei den Rentierställen, käme aber erst nach ihm ins Ziel. Antwort Nummer 4 ist richtig und die Antworten Nummer 6 und 8 sind falsch.

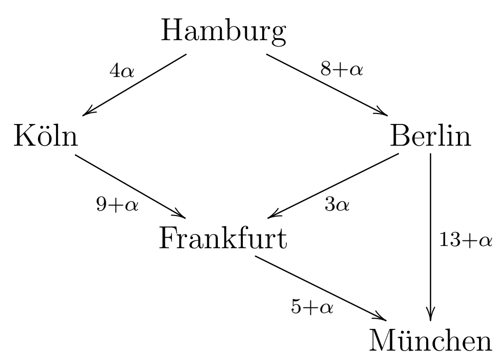
17 Flughafen BEW: Eröffnung pünktlich zu Weihnachten

Aufgabensteller: Tobias Keil (HU Berlin), Simon Rösel (HU Berlin), Andrea von Schirp (HU Berlin)

17.1 Aufgabe

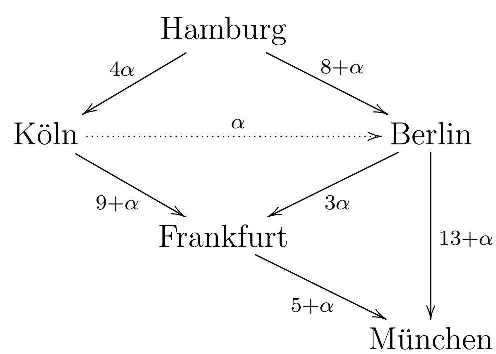
„Warum ist alles nur immer so kompliziert?“, denkt Hartmut, Oberrentier und Hauptverantwortlicher des Weihnachtsflugnetzes, verzweifelt. Wie jedes Jahr hatte er sich um die Erhaltung seiner Flughäfen und Flugzeuge gekümmert, damit die insgesamt 6 Super-Wichtel, jeweils mit zwei Tonnen

Weihnachtsgeschenken im Rucksack beladen, ihre Geschenke pünktlich ausliefern können. Davon kommen laut Plan des Weihnachtsmanns am Weihnachtsabend je 3 Super-Wichtel in Hamburg (mit je einer Tonne Geschenke für die Frankfurter und für die Hamburger Kinder) und Berlin (mit je einer Tonne Geschenke für die Berliner und die Münchner Kinder) mit dem magischen Rentierschlitten vom Nordpol an. Nach Auslieferung der Geschenke an die örtlichen Kinder müssen die Super-Wichtel sodann mit ihrer verbliebenen Ware eine Flugstrecke wählen, die sie möglichst rasch von Hamburg nach Frankfurt, bzw. von Berlin nach München führt, um den dortigen Kindern eine Freude zu bereiten. Da das Weihnachtsflugnetz leider nur mit alten, aber schnellen (und sicheren!) Flugzeugen vom Typ „Concorde" betrieben wird, sind die jeweiligen Flugzeiten zwar sehr kurz, hängen dafür aber stark vom transportierten Geschenkgewicht ab. Außerdem darf aus Lärmschutzgründen jede Strecke am Weihnachtsabend höchstens einmal geflogen werden, wenn also mehrere Wichtel ein und die selbe Strecke fliegen wollen, so müssen diese zusammen fliegen und das transportierte Gewicht erhöht sich dementsprechend. Um die Übersicht zu bewahren, hat sich Hartmut deswegen mit einem detaillierten Flugplan beholfen, der zu jeder Strecke die genaue Flugzeit (in Minuten) angibt, wenn α Tonnen Geschenke auf ihr transportiert werden. Das Gewicht der Wichtel selbst spielt hierfür keine Rolle.
Flugplan:



Letztes Jahr ergab sich dabei folgende Verteilung: Von den drei Super-Wichteln, die in Hamburg starteten, flogen zwei über Köln nach Frankfurt, und einer über Berlin nach Frankfurt. Von den drei Super-Wichteln, die in Berlin starteten, flogen zwei direkt nach München, und einer flog über Frankfurt nach München. Hartmut schloss daraus, dass die egoistischen Wichtel sich nicht absprechen, sondern so fliegen, dass alle zu ihrem Ziel gelangen und

dabei kein einzelner Wichtel, bei gegebener Flugstrecke der anderen fünf, die Möglichkeit hat, durch einen Streckenwechsel Zeit zu sparen. Außerdem würden die Wichtel die Geschenke niemals anders verteilen, so dass jeder Wichtel die jeweilige Tonne an Geschenken an seinen vom Weihnachtsmann vorgegeben Zielort transportiert. Auf diese Weise haben die Wichtel im letzten Jahr im Durchschnitt $15\frac{5}{6}$ Minuten gebraucht, um an ihr jeweiliges Ziel zu fliegen.
Unglücklicherweise gab es letztes Jahr doch einige Beschwerden, dass Geschenke zu spät ausgeliefert wurden. Deshalb hatte sich Harmut entschieden, den Berliner Wichtelflughafen (BEW) zu erneuern, sodass nun eine zusätzliche Maschine von Köln nach Berlin eingesetzt werden kann, die für die Strecke nur α Minuten benötigt.
Damit ergibt sich der erweiterte Flugplan:



Daraufhin bekam Hartmut einen Anruf vom weisen Weihnachtsmann, der ganz genau wissen wollte, wie sich die Reisezeit der Super-Wichtel im erweiterten Flugnetz verändern würde, wenn diese wieder, wie im letzten Jahr, so fliegen, dass alle zu ihrem Ziel gelangen und dabei kein einzelner Wichtel, bei gegebener Flugstrecke der anderen fünf, die Möglichkeit hat, durch einen Streckenwechsel Zeit zu sparen. Nun muss Hartmut also die neue durchschnittliche Flugzeit der Super-Wichtel im Flugnetz mit der neuen Strecke voraussagen. Leider hat er keine Ahnung, wie sich die Wichtel verhalten werden. Kannst du ihm sagen, wie sich die durchschnittliche Flugzeit durch die neue Flugstrecke verändern wird?

Antwortmöglichkeiten:

(1) Sie verkürzt sich um $\frac{5}{6}$ Minuten.

(2) Sie verkürzt sich um $\frac{51}{54}$ Minuten.

(3) Sie verkürzt sich um $\frac{1}{6}$ Minuten.

(4) Sie verlängert sich um $\frac{2}{3}$ Minuten.

(5) Sie verändert sich gar nicht.

(6) Sie verkürzt sich um $1\frac{1}{6}$ Minuten.

(7) Sie verkürzt sich um $\frac{19}{30}$ Minuten.

(8) Sie verkürzt sich um $1\frac{1}{3}$ Minuten.

(9) Sie verkürzt sich um $\frac{2}{3}$ Minuten.

(10) Sie verkürzt sich um 1 Minute.

Projektbezug:
Das Finden eines Gleichgewichtes ist ein klassisches Problem der mathematischen Spieltheorie, welches die Lösung mehrerer miteinander gekoppelter Optimierungsprobleme erfordert. Diese Problemklasse lässt sich nahtlos in das Konzept der nichtglatten Optimierung einbetten, mit deren Hilfe sich viele Fragestellungen in der Mechanik und Steuerung physikalischer Prozesse formulieren lassen.

17.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 4.
Betrachten wir erst einmal die Situation im Vorjahr. Hier hatten die Super-Wichtel, die von Hamburg nach Frankfurt mussten, zwei mögliche Strecken zur Auswahl. Einerseits den Flug über Köln – im Folgenden nennen wir diese Route Strecke A – und auf der anderen Seite den Flug über Berlin, Strecke B. Die Wichtel wiederum, die von Berlin nach München mussten, konnten zwischen dem Direktflug (Strecke E) und dem Weg über Frankfurt (Strecke D) wählen.

Bei der in der Aufgabenstellung beschriebenen Verteilung von Wichteln auf die einzelnen Routen aus dem letzten Jahr benötigten die zwei Super-Wichtel, die sich für die Strecke A entschieden, jeweils 19 Minuten (denn sie flogen jeweils zusammen von Hamburg nach Köln und benötigten dafür $4 \cdot 2$ Minuten und von Köln nach Frankfurt, dafür benötigten sie $9 + 2$ Minuten). Der Wichtel auf Strecke B brauchte 15 Minuten, der auf Strecke D 12 Minuten und die beiden, die die Strecke E nahmen waren jeweils 15 Minuten unterwegs. Keiner der Super-Wichtel konnte hier Zeit sparen, indem er sich für eine andere Reiseroute entschied, da sich bei solch einer Entscheidung die Reisezeit der entsprechenden Route durch die zusätzliche Belastung soweit erhöhen würde, dass der Wichtel mindestens genauso lange bräuchte wie auf seiner ursprünglichen Strecke. Solch eine Situation nennt man ein Nash-Gleichgewicht.
In der Tat existiert für das angegebene Flugnetz noch ein zweites Nash-Gleichgewicht, nämlich wenn einer der Super-Wichtel, die ursprünglich über Köln nach Frankfurt geflogen sind, stattdessen über Berlin fliegen würde. In diesem Fall bräuchte der auf Strecke A verbliebene Wichtel 14 Minuten, für den gewechselte Wichtel und den bereits auf Strecke B reisenden würde die Dauer dann 19 Minuten betragen. Die drei Wichtel, die von Berlin nach München unterwegs waren braüchten für die Strecken D und E jeweils 15 Minuten. Obwohl die durchschnittliche Reisedauer der Wichtel hier leicht höher läge ($16\frac{1}{6}$ Minuten), könnte keiner der Wichtel durch einen Streckenwechsel seine Reisedauer verkürzen.
Betrachten wir nun die Situation in diesem Jahr. Hier bietet sich den Wichteln eine weitere Möglichkeit um von Hamburg nach Frankfurt zu kommen, indem sie über Köln nach Berlin und weiter nach Frankfurt fliegen. Diese Strecke nennen wir Stecke C. Für dieses erweiterte Flugnetz ergibt sich nur ein mögliches Nash-Gleichgewicht. Dabei benutzt jeweils ein Super-Wichtel die Routen A, B, C und D und zwei Wichtel nehmen den Direktflug (Route E). Die Reisezeiten betragen hier 18 Minuten für die Strecken A, B und C und 15 Minuten für die Strecken D und E. Die durchschnittliche Reisezeit ist also 16,5 Minuten.
Eine Hilfe beim Finden des Nash-Gleichgewichts kann es sein, das Problem in den rationalen Zahlen zu betrachten. Dabei würde man zulassen, dass nicht nur komplette Wichtel einen Flug benutzen, sondern auch ein beliebiger Bruchteil eines Wichtels mit entsprechendem Anteil an Geschenken. Dann würde sich ein Nash-Gleichgewicht genau dann einstellen, wenn die

Reisezeiten für die Stecken A, B und C und die Strecken D und E jeweils übereinstimmen, da ansonsten immer ein beliebig kleiner Anteil eines Wichtels zu der jeweils kürzeren Strecke wechseln würde. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4(x_A + x_C) + 9 + x_A &= 4(x_A + x_C) + x_C + 3(x_B + x_C + x_D) \\ 4(x_A + x_C) + 9 + x_A &= 8 + x_B + 3(x_B + x_C + x_D) \\ 3(x_B + x_C + x_D) + 5 + x_D &= 13 + x_E, \end{aligned}$$

wobei x_A, x_B, x_C, x_D, x_E jeweils die Anzahl an Wichteln ist, die die jeweilige Strecke benutzen. Ausserdem hat man noch die folgenden zwei Gleichungen gegeben

$$\begin{aligned} x_A + x_B + x_C &= 3 \\ x_D + x_E &= 3. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Gleichungssystem aus 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten, dessen einzige Lösung die gesuchte Verteilung ist.
Kommen wir wieder zur ursprünglichen Aufgabe zurück, bei der ein Zerteilen der Wichtel (zu ihrem Glück) nicht zugelassen ist. Hier lässt sich die Einzigartigkeit der Lösung auch durch eine simple Fallunterscheidung herleiten. Dabei unterscheiden wir anhand der Anzahl der Wichtel, die die Stecke D benutzen (x_D).
Fall 1 ($x_D \geq 2$): Nehmen wir an, es benutzen mindestens zwei Wichtel den Weg D. Dann nimmt höchstens einer den Direktflug und braucht dafür maximal 14 Minuten. Die Reisedauer für Strecke D beträgt mindestens $13 + 3(x_B + x_C)$ Minuten. Es kann also kein weiterer Super-Wichtel von Berlin nach Frankfurt fliegen, da die Reisedauer für Strecke D dann 16 Minuten oder mehr betragen würde. Somit könnte mindestens ein Wichtel von Strecke D auf den Direktflug ausweichen und würde damit schneller in München sein (in 15 Minuten). Damit ergibt sich aber eine Reisezeit von 24 Minuten für die Strecke A, sodass natürlich jeder pfiffige Wichtel eher Strecke B oder C benutzen würde. Also kann in diesem Fall kein Nash-Gleichgewicht existieren.
Fall 2 ($x_D = 0$): Nehmen wir an, kein Wichtel benutzt Route D. Dann nehmen 3 Wichtel den Direktflug und brauchen somit 16 Minuten. Die Reisedauer für Strecke D hingegen würde $5 + 3(x_B + x_C)$ Minuten betragen. Es müssen also mindesten 3 Wichtel von Berlin nach Frankfurt fliegen, damit es

sich für die Direktflieger nicht lohnt, die Route zu wechseln. Analog zum ersten Fall lässt sich nun ein Widerspruch für die Wichtel, die eine der Strecken B oder C benutzen, herleiten.
Fall 3 ($x_D = 1$): Wenn nur ein Wichtel die Strecke D befliegt, erhalten wir das obige Nash-Gleichgewicht. Da die Reisezeit einer Strecke monoton von der Anzahl der Wichtel, die sie benutzen, abhängt, kann es in diesem Fall kein weiteres Nash-Gleichgewicht geben.
Folglich ist das gefundene Nash-Gleichgewicht das einzig mögliche und wird in jedem Fall angenommen. Die durchschnittliche Reisezeit beträgt 16,5 Minuten und ist somit $\frac{2}{3}$ Minuten länger als im Vorjahr, obwohl die Wichtel eigentlich sogar eine weitere Reisemöglichkeit hinzugewonnen haben. Dieses Paradoxon wird auch als Braess Paradoxon bezeichnet.

18 Bartverlust

Aufgabensteller: Max von Kleist (FU Berlin)

18.1 Aufgabe

Sieben Tage bis Weihnachten und der Weihnachtsmann hat plötzlichen Bartausfall bekommen. Von seinem prachtvollen Bart, bestehend aus 999 Bart-

haaren, ist bloß noch ein einziges Barthaar übrig. So kann der Weihnachtsmann nicht auftreten! Am Nordpol ist die Hölle los! –Was tun? Bei *normalem Bartwuchs* würden 3 Barthaare pro Tag neuwachsen, aber das wird nicht reichen, um am Weihnachtstag wieder 999 Barthaare zu haben.
Zum Glück hat einer der Weihnachtswichtel dubiose Kontakte und konnte ein bisher nicht-erprobtes Zaubermittel beschaffen. Laut Packungsbeilage unterdrückt das Zaubermittel zwar den *normalen Bartwuchs*, verdreifacht aber gleichzeitig die Anzahl der existierenden Barthaare bei jedem Einsatz. Es ist außerdem zu beachten, dass das Mittel nicht öfter als einmal pro Tag genommen werden darf, sonst besteht die Gefahr, sich in einen Osterhasen zu verwandeln! Es ist also wichtig, das Mittel präzise einzusetzen, damit der Weihnachtsmann nicht entstellt wird (zu wenige/zu viele Barthaare oder Osterhase). Damit Weihnachten wie gewohnt gefeiert werden kann, müssen die Wichtel nun den perfekten Behandlungsplan ausarbeiten: An welchen Tagen muss der Weihnachtsmann das Zaubermittel einsetzen, um an Weihnachten (in 7 Tagen) einen prachtvollen Bart mit genau 999 Haaren präsentieren zu können?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt keine Lösung. Der Weihnachtsmann sollte sich durch Überdosierung in einen Osterhasen verwandeln und Schokolade verstecken.
2. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel täglich einnehmen.
3. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel ab dem vierten Tag einnehmen.
4. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel ab dem dritten Tag einnehmen.
5. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel an allen Tagen einnehmen, außer dem Ersten und dem Letzten.
6. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel mit dem zweiten Tag beginnend an jedem zweiten Tag einnehmen.
7. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel mit dem ersten Tag beginnend an jedem zweiten Tag einnehmen.

8. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel am 1., 3., 5., 6. und 7. Tag einnehmen.

9. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel am 2., 3., 4., 6. und 7. Tag einnehmen.

10. Der Weihnachtsmann sollte das Zaubermittel am 2., 3., 4., 5., 6. und 7. Tag einnehmen.

Projektbezug:
Das Problem beschreibt ein Optimalsteuerungsproblem (optimal control problem), genauer gesagt ein geschaltetes System (switched system). Optimalsteuerungprobleme finden in allen Ingenieurwissenschaften Anwendung; zum Beispiel zum Steuern sogenannter autonomer Systeme, für Internetprotokolle, etc.... In der Arbeitsgruppe "Systems Pharmacology & Disease Control" entwickeln wir u.a. Methoden, um optimale Behandlungsstrategien berechnen zu können. Dabei sind die zu lösenden Systeme meist so groß, dass nicht mehr alle möglichen Lösungen berechnet werden können. Die numerischen Methoden helfen u.a. dabei den Suchraum der möglichen Lösungen zu beschränken. Ein Mittel gegen Haarausfall haben wir noch nicht gefunden, aber wir arbeiten daran :).

18.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 9.

Der Weihnachtsmann muss das Mittel an Tag 2, 3, 4, 6 & 7 nehmen. Einfaches Ausrechnen genügt. Folgende Vorschriften gelten:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + 3 & \text{, wenn kein Mittel genommen wird} \\ x_k \cdot 3 & \text{, wenn das Mittel genommen wird} \end{cases} \tag{13}$$

wobei x_k die Anzahl der Barthaare zum Zeitpunkt k beschreibt, mit der Anfangsbedingung $x_0 = 1$ für $k = 0$.
In dem Beispiel gibt es theoretisch $2^7 = 128$ mögliche Lösungen. Man könnte alle möglichen Lösungen bestimmen und die Richtige auswählen . Bei einem (erheblich) größeren Suchraum könnte man Verfahren verwenden, die den Suchraum eingrenzen. Dabei fängt man für gewöhnlich bei der zweiten

Randbedingung an, nämlich dem Endzustand $x_N = 999$ (wobei $N = 7$). Mit den Übergangsregeln

$$x_{k-1} = \begin{cases} x_k - 3 & \text{, wenn kein Mittel genommen wird} \\ x_k/3 & \text{, wenn das Mittel genommen wird} \end{cases} \tag{14}$$

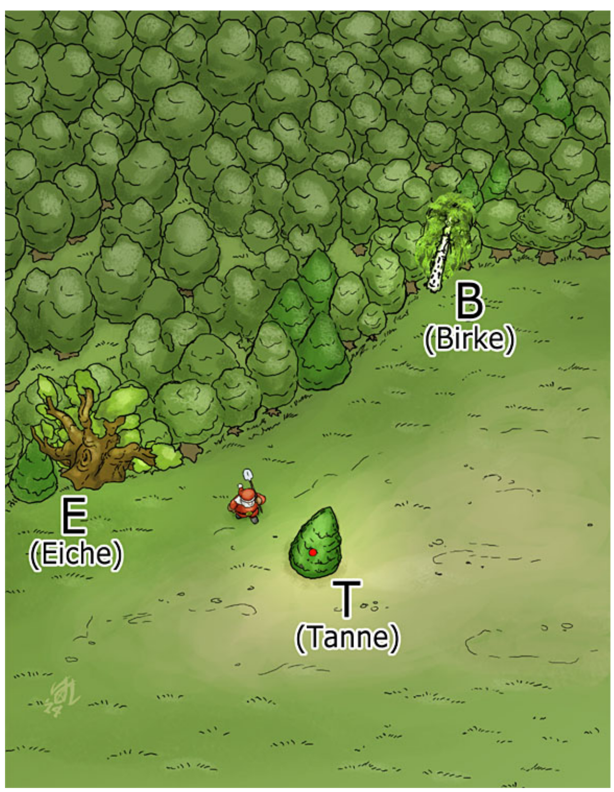
ist dies in unserem Fall:

$$999\mathbf{/3} \Rightarrow 333\mathbf{/3} \Rightarrow 111\mathbf{-3} \Rightarrow 108\mathbf{/3} \Rightarrow 36\mathbf{/3} \Rightarrow 12\mathbf{/3} \Rightarrow 4\mathbf{-3} \Rightarrow 1. \tag{15}$$

Allgemein löst man das Problem für $N - 1$, indem man mittels eines linearen Programs überprüft, ob die letzte Entscheidung, z.B. kein Zaubermittel zu nehmen, zu einer optimalen Lösung gehören kann. Das Ganze iteriert man (am Computer) durch, für jede mögliche Steuerung (Einnahme/nicht-Einnahme), bis man zum Anfangszustand kommt.

19 Die Suche nach den versteckten Geschenken

Aufgabensteller: Andreas Filler (HU Berlin)



19.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann muss die vielen Geschenke, die er zu Weihnachten verteilen will, über das gesamte Jahr zusammentragen. Aber wohin damit bis Weihnachten? Er muss Geschenke an vielen Orten verstecken; vor Weihnachten braucht er dann die Hilfe der Wichtel, welche die Geschenke ausgraben und zusammentragen müssen.

Eine Kiste mit Geschenken vergräbt der Weihnachtsmann, wie in der Zeichnung zur Aufgabe dargestellt, in einem Waldstück, das an eine Lichtung grenzt. Am Waldrand stehen gut sichtbar eine mächtige Eiche und eine hoch gewachsene Birke. Damit Wanderer die Geschenkekiste nicht zufällig im Wald finden, darf der Weihnachtsmann die Stelle, an der er die Kiste vergräbt, nicht markieren. Er merkt sich sorgfältig die Stelle, läuft aus dem Wald auf die Lichtung und pflanzt einen Tannenbaum, auf dem er außerdem noch eine schöne rote Weihnachtsbaumkugel befestigt. Er notiert eine Wegbeschreibung vom Tannenbaum zur Schatzkiste:

Laufe vom Tannenbaum zur Eiche, zähle deine Schritte. Drehe dich um 90° *nach rechts und laufe so viele Schritte, wie du vom Tannenbaum bis zur Eiche gelaufen bist. Stecke einen Stock in den Boden.*

Geh zurück zum Tannenbaum und laufe zur Birke, zähle wiederum die Schritte. Drehe dich um 90° *nach links und laufe so viele Schritte, wie du vom Tannenbaum zur Birke gelaufen bist. Stecke einen Stock in den Boden.*

Die Kiste mit Weihnachtsgeschenken befindet sich genau in der Mitte zwischen den beiden Stöcken.

Drei Tage vor Weihnachten gibt der Weihnachtsmann den Wichteln die Wegbeschreibung, sie sollen die Kiste finden und dem Weihnachtsmann bringen.

Die Wichtel kommen auf die Lichtung und sehen sofort die Eiche und die Birke am Waldrand. Aber soviel sie sich auch bemühen, sie können den Tannenbaum auf der Lichtung nicht finden. Wahrscheinlich haben die Rehe ihn gefressen.

Können die Wichtel, ohne die Postion der Tanne zu kennen, mithilfe der Wegbeschreibung des Weihnachtsmannes die Kiste mit den Weihnachtsgeschenken finden? Wenn ja: wo befindet sich die Kiste?

Antwortmöglichkeiten:

1. Ja, sie können die Kiste finden. Die Kiste liegt auf dem dritten Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen andere Eckpunkte E (Eiche) und B (Birke) sind. (Es gibt zwei solcher gleichseitiger Dreiecke, aber nur eines davon liegt im Wald, das andere auf der Lichtung.)

2. Ja, die Wichtel können die Kiste finden. Sie laufen von der Eiche ausgehend senkrecht zu der Geraden EB durch das Waldstück bis zur nächsten Lichtung und markieren den Punkt, in dem sie das Waldstück verlassen mit E'. Ebenso laufen sie von der Birke ausgehend senkrecht zu der Geraden EB bis zum Ende des Waldstücks und markieren den erreichten Punkt mit B'. Nun zeichnen sie die Diagonalen in das Viereck $EBB'E'$. Unter dem Schnittpunkt der beiden Diagonalen liegt die Kiste begraben.

3. Ja, die Wichtel können die Kiste finden. Dazu bestimmen sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{EB}$ und laufen davon ausgehend senkrecht zu dieser Strecke in den Wald. Sobald sie von M aus eine Strecke zurückgelegt haben, die genauso lang ist wie $\overline{EB}$, sind sie bei der Kiste.

4. Ja, die Wichtel können die Kiste finden. Dazu bestimmen sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{EB}$ und laufen davon ausgehend senkrecht zu dieser Strecke in den Wald. Sobald sie von M aus eine Strecke zurückgelegt haben, die halb so lang ist wie $\overline{EB}$, sind sie bei der Kiste.

5. Ja, die Wichtel können die Kiste finden, müssen dazu aber eine Wurzel ziehen. Vom Mittelpunkt M der Strecke $\overline{EB}$ ausgehend laufen sie senkrecht zu dieser Strecke in den Wald. Sobald sie von M aus eine Strecke zurückgelegt haben, die $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mal so lang ist wie $\overline{EB}$, sind sie bei der Kiste.

6. Ja, die Wichtel können die Kiste finden, aber es ist nicht einfach. Mithilfe des Satzes des Thales und des Höhensatzes bestimmen sie konstruktiv die Wurzel aus der Länge der Strecke $\overline{EB}$. Dann zeichnen sie mit einem Seil Kreise um E und B deren Radien gleich der zuvor konstruierten Wurzel sind. An demjenigen der Schnittpunkte der beiden Kreise, der im nicht Wald liegt, ist die Kiste vergraben.

7. Die Kiste kann nicht mehr gefunden werden. Sie kann überall im Wald vergraben sein.

8. Die Kiste kann nicht mehr gefunden werden. Man weiß zwar, dass sie auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{EB}$ liegt (genauer: auf dem Teil dieser Mittelsenkrechten, der im Wald liegt), aber genauer kann ihre Position nicht ermittelt werden.

9. Ja, die Wichtel können die Kiste finden. Sie zeichnen dazu eine Ellipse mit den Brennpunkten E und B, deren Hauptachse doppelt so lang ist wie die Strecke $\overline{EB}$. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{EB}$ schneidet die Ellipse in zwei Punkten, von denen einer im Waldstück liegt. Unter diesem Schnittpunkt liegt die Kiste begraben.

10. Ja, die Wichtel können die Kiste finden. Sie zeichnen dazu eine Ellipse mit den Brennpunkten E und B, deren Hauptachse eineinhalb mal so lang ist wie die Strecke $\overline{EB}$. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{EB}$ schneidet die Ellipse in zwei Punkten, von denen einer im Waldstück liegt. Unter diesem Schnittpunkt liegt die Kiste begraben.

19.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 4.

Lösung durch Experimentieren und Betrachtung von Spezialfällen

Überraschenderweise ist die Position der Kiste völlig unabhängig von der des Tannenbaumes und daher auch ohne Kenntnis des Tannenbaumes eindeutig bestimmt. Dies lässt sich z. B. durch Experimentieren mithilfe einer Dynamischen Geometriesoftware herausbekommen.

Dass die Kiste (falls ihre Position durch die Eiche E und die Birke B eindeutig bestimmt ist, wovon wir zunächst ohne Beweis ausgehen) auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{EB}$ liegen muss, ist aus Symmetriegründen einleuchtend.

Schließlich lässt sich die Entfernung der Kiste vom Mittelpunkt der Strecke $\overline{EB}$ z. B. durch das Betrachten von Spezialfällen ermitteln. So könnte der Tannenbaum mit der Eiche oder mit der Birke identische Positionen haben (siehe Abbildung 7). In diesen Fällen ist die Positionen eines Stockes mit der eines Baumes identisch, die Wichtel müssen also nur noch von der Birke zur Eiche laufen (bzw. umgekehrt), sich um 90° nach rechts (bzw. nach links) drehen, eine zu $\overline{BE}$ gleichlange Strecke zurücklegen und einen Stock in den Boden stecken. Der Mittelpunkt zwischen beiden Stöcken ist der Mittelpunkt der Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete $\overline{BE}$ ist. Diese Mittelpunkte sind in beiden Fällen identisch – es handelt sich um den Diagonalenschnittpunkt des (auf der richtigen Seite der Geraden BE) über der Strecke $\overline{BE}$ errichteten Quadrats. Da wir schon festgestellt haben, dass die Position der Kiste unabhängig von der des Tannenbaumes ist, gilt dies auch allgemein, egal wo der Tannenbaum gestanden hat. Somit liegt die Kiste auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{EB}$ und ihr Abstand von deren Mittelpunkt ist gleich der Hälfte der Länge von $\overline{EB}$ (siehe Abbildung 8) – Antwort 4 ist also richtig.

Beweis

Der oben beschriebene Weg durch experimentelle Feststellung der Unabhängigkeit der Position der Schatzkiste von der des Tannenbaumes und die Verallgemeinerung von Spezialfällen reicht zwar aus, um die richtige Lösung zu finden; trotzdem wollen wir jetzt exakt nachweisen, dass die gefundene Lösung zutrifft.

Wir gehen von einer beliebigen Position des Tannenbaumes (T) aus (von

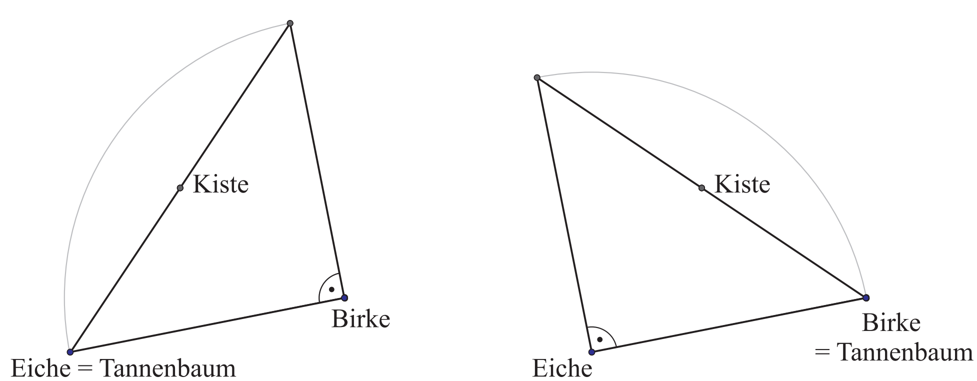


Abbildung 7: Position der Schatzkiste für zwei spezielle Tannenbaumpositionen

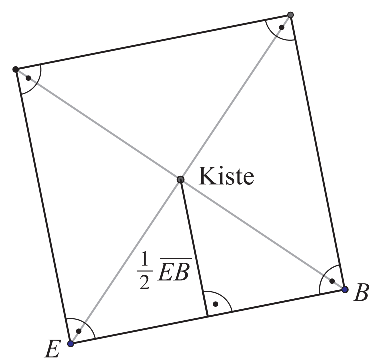


Abbildung 8: Position der Schatzkiste

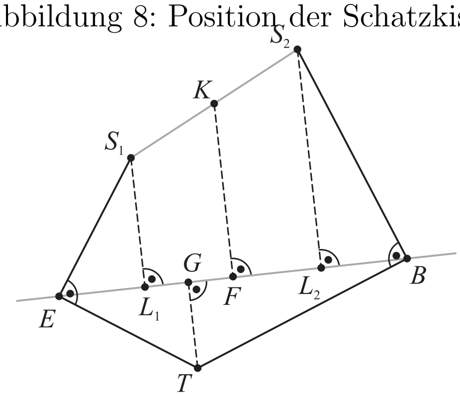


Abbildung 9: Unabhängigkeit der Position der Schatzkiste von der Tanne

der wir annehmen, sie sei uns bekannt) und finden nach der in der Aufgabe gegebenen Wegbeschreibung die Kiste K; die beiden Stöcke bezeichnen wir mit S_1 und S_2. Weiterhin seien L_1 und L_2 die Fußpunkte der Lote von den beiden Stöcken auf die durch die Eiche und die Birke verlaufende Gerade EB sowie F der Fußpunkt des Lotes von der Kiste K auf EB und G der Fußpunkt des Lotes von T auf diese Gerade. Wir zeigen, dass (unabhängig von T) F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EB}$ ist und $|KF| = \frac{1}{2}|EB|$ gilt.

Wir beschränken uns auf den (in der Abbildung 9 dargestellten) Fall, dass die Punkte G, L_1 und L_2 innerhalb der Strecke $\overline{EB}$ liegen. Es können auch andere Konstellationen auftreten; der im Folgenden geführte Beweis lässt sich dafür leicht variieren.

(1) Die Dreiecke EGT und S_1L_1E sind kongruent (Kongruenzsatz „wsw“).

(2) Die Dreiecke BGT und S_2L_2B sind kongruent (Kongruenzsatz „wsw“).

(3) Aus (1) und (2) folgt $|GT| = |L_1E|$ und $|GT| = |L_2B|$, also:

$$|L_1E| = |L_2B|$$

(4) Aus (1) und (2) folgt weiterhin $|EG| = |S_1L_1|$ sowie $|BG| = |S_2L_2|$.

(5) Da die Geraden S_1L_1 und S_2L_2 parallel sind, ist das Viereck $L_1L_2S_2S_1$ ein Trapez.

(6) Da die Gerade KF parallel zu S_1L_1 und S_2L_2 ist und K der Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_1S_2}$, ist KF Mittellinie des Trapezes $L_1L_2S_2S_1$ und somit F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{L_1L_2}$, also gilt:

$$|L_1F| = |L_2F|$$

(7) Aus (3) und (6) folgt:

$$|EF| = |BF| = \frac{|EB|}{2}$$

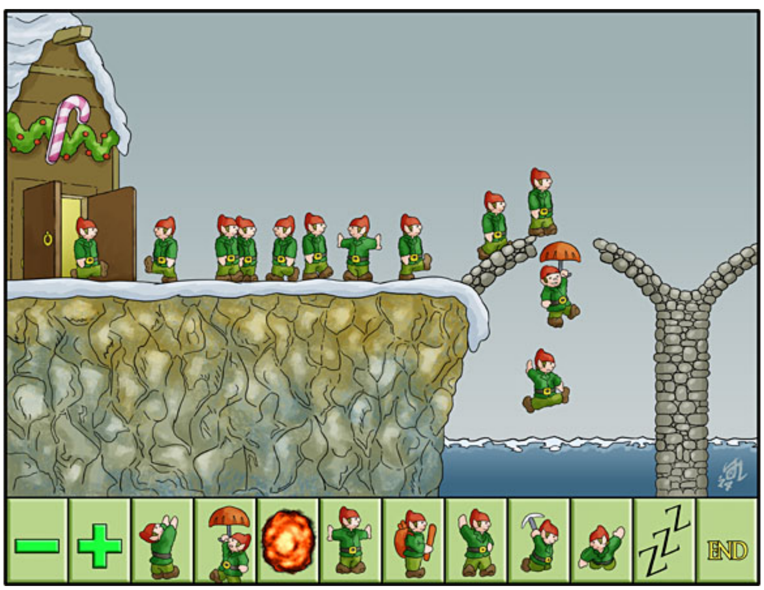
(8) Außerdem gilt (da KF Mittellinie des Trapezes $L_1L_2S_2S_1$ ist) unter Nutzung von (4):

$$|KF| = \frac{|S_1L_1| + |S_2L_2|}{2} = \frac{|EG| + |BG|}{2} = \frac{|EB|}{2}$$

Mit (7) und (8) haben wir gezeigt, dass F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EB}$ ist und dass $|KF| = \frac{1}{2}|EB|$ gilt. Die Wichtel finden also – wie in Antwort 4 angegeben und ohne die Position des Tannenbaumes T zu kennen – die Kiste, indem sie den Mittelpunkt der Strecke $\overline{EB}$ bestimmen und davon ausgehend senkrecht zu EB in den Wald laufen und dabei eine Strecke zurücklegen, die halb so lang ist wie $\overline{EB}$.

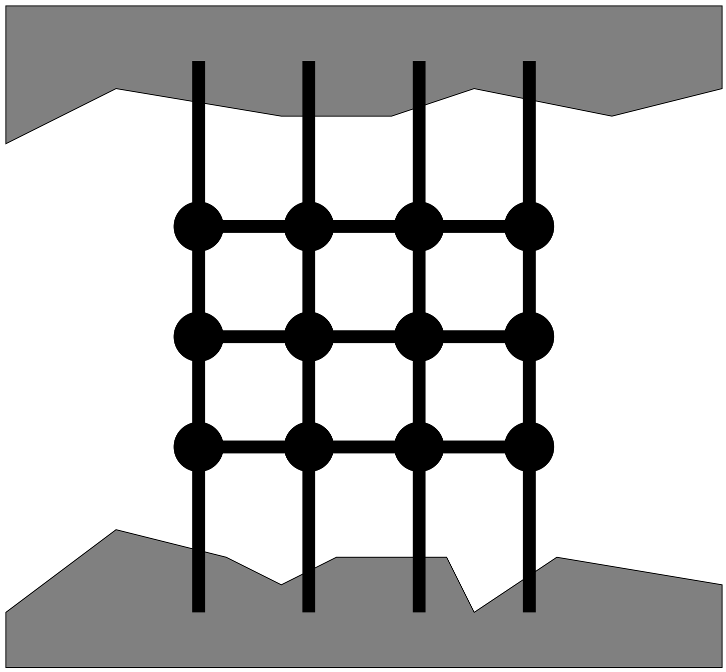
20 Brücken am Fluss

Aufgabensteller: Onno Boxma (TU Eindhoven)



20.1 Aufgabe

Am Nordufer des Flusses befinden sich die Werkstätten des Weihnachtsmanns und am Südufer seine Lagerhallen. Die beiden Ufer sind mit einander durch ein System von 25 Brücken und 12 Brückenpfeilern verbunden.



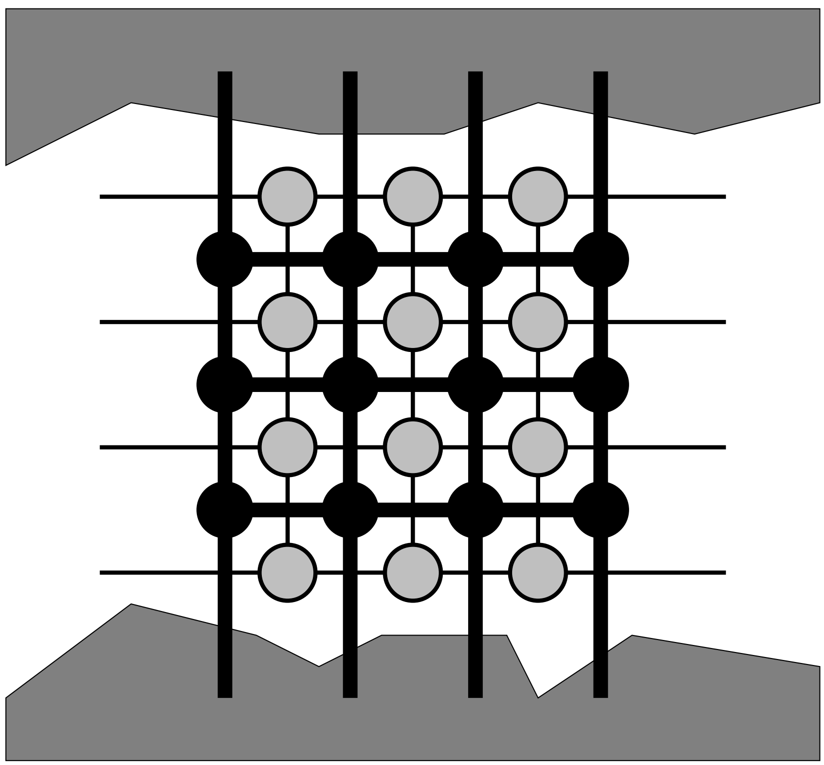
Heute Nacht wütet ein schwerer Wintersturm. Die Brückenpfeiler sind unzerstörbar, aber jede Brücke übersteht den Sturm nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass es morgen noch einen Verbindungsweg zwischen den beiden Ufern gibt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gilt $0.0 \leq p < 0.1$
2. Es gilt $0.1 \leq p < 0.2$
3. Es gilt $0.2 \leq p < 0.3$
4. Es gilt $0.3 \leq p < 0.4$
5. Es gilt $0.4 \leq p < 0.5$
6. Es gilt $0.5 \leq p < 0.6$
7. Es gilt $0.6 \leq p < 0.7$
8. Es gilt $0.7 \leq p < 0.8$
9. Es gilt $0.8 \leq p < 0.9$
10. Es gilt $0.9 \leq p < 1.0$

20.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 6.
Die folgende Abbildung zeigt zusätzlich zum alten Brückensystem ein neues System mit 12 grauen Brückenpfeilern und 25 Geisterbrücken, das aus dem alten System durch eine Drehung um 90 Grad hervorgeht. Das neue Brückensystem verbindet die Ostseite des alten Systems mit der Westseite des alten Systems. Jede Geisterbrücke kreuzt genau eine alte Brücke, und jede alte Brücke wird von genau einer Geisterbrücke gekreuzt.



Für jede vom Wintersturm zerstörte alte Brücke werden wir morgen stattdessen ihre kreuzende Geisterbrücke aufbauen; die Wahrscheinlichkeit für den Aufbau jeder einzelnen Geisterbrücke beträgt daher 1/2. Man kann sich überlegen, dass es dann morgen <u>entweder</u> einen Verbindungsweg von Süd nach Nord im alten System <u>oder</u> einen Verbindungsweg von Ost nach West im neuen Geistersystem gibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass es im neuen System einen Ost-West Verbindungsweg gibt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass es im alten System <u>keinen</u> Nord-Süd Verbindungsweg gibt. Bei einer

Wahrscheinlichkeit von 1/2, dass einzelne Brücken zerstört werden, ist die Wahrscheinlichkeit, dass entsprechende Geisterbrücken gebaut werden auch 1/2. Für diesen Fall folgt, dass die Wahrscheinlichkeit p, dass es am Morgen einen Verbindungsweg zwischen Nord und Südufer geben wird gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass dies nicht der Fall ist $(1-p)$. Aus $p = 1-p$ folgt $p = 1/2$. Somit ist Antwort #6 richtig.

21 Funkverkehr

Aufgabensteller: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)

21.1 Aufgabe

Vier Hilfsweihnachtsmänner sind heute mit ihren vier schwer beladenen Schlitten die Nordpolarpiste entlang gefahren. Jeder Schlitten fuhr den ganzen Weg mit konstanter Geschwindigkeit. Die vier Schlitten fuhren mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Die Hilfsweihnachtsmänner Arthur, Benny und Clemens starteten zu verschiedenen Zeitpunkten am westlichen Endpunkt der Piste und Hilfsweihnachtsmann Daniel begann seine Reise an ihrem östlichen Endpunkt. Wir haben im Laufe des Tages die folgenden fünf Funksprüche von ihnen erhalten:

11:00 Arthur: Zentrale, bitte kommen. Hier spricht Arthur. Ich überhole soeben Benny. Bin schon an ihm vorbei. Over.

12:00 Arthur: Zentrale, jetzt überhole ich auch den Clemens. Huiiiii! Over!

13:00 Daniel: Zentrale, hier Daniel. Mir kommt gerade Arthur entgegen gerast. Mann, hat der vielleicht eine Affengeschwindigkeit drauf! Over.

15:00 Benny: Zentrale, bitte melden. Hier spricht Benny. Ich habe soeben Daniel getroffen. Over.

17:00 Clemens: Hier Clemens. Zentrale, mir ist gerade Daniel entgegen gekommen. Er hat mir äußerst fröhlich zugewinkt. Over.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Antwortmöglichkeiten:

1. Benny hat Clemens um 13:30 überholt.
2. Benny hat Clemens um 13:35 überholt.
3. Benny hat Clemens um 13:40 überholt.
4. Benny hat Clemens um 13:45 überholt.
5. Benny hat Clemens um 13:50 überholt.
6. Benny hat Clemens um 13:55 überholt.
7. Benny hat Clemens um 14:00 überholt.
8. Benny hat Clemens um 14:05 überholt.
9. Benny hat Clemens um 14:10 überholt.
10. Benny hat Clemens um 14:15 überholt.

21.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 3.

Die Nordpolarpiste sei ein Intervall auf der reellen Zahlengeraden. Die Geschwindigkeiten von Arthur, Benny, Clemens, Daniel bezeichnen wir mit a, b, c, d. Wenn sich Arthur, Benny, Clemens, Daniel um 11:00 in den vier Punkten A, B, C, D befinden, dann sind sie zum Zeitpunkt $11 + t$ in den vier Punkten $A + at$, $B + bt$, $C + ct$, $D - dt$. Die fünf Funksprüche um $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 4$ und $t = 6$ liefern die folgenden fünf Gleichungen:

$$A + 0 \cdot a = B + 0 \cdot b \tag{16}$$
$$A + 1 \cdot a = C + 1 \cdot c \tag{17}$$
$$A + 2 \cdot a = D - 2 \cdot d \tag{18}$$
$$B + 4 \cdot b = D - 4 \cdot d \tag{19}$$
$$C + 6 \cdot c = D - 6 \cdot d \tag{20}$$

Wenn Benny Clemens um $11 + x$ Uhr überholt, so muss $B + bx = C + cx$ und $x = (C - B)/(b - c)$ gelten. Wir versuchen daher, aus den Gleichungen (16)–(20) die Variablen A, a, D und d zu eliminieren. Dazu multiplizieren wir die beiden Gleichungen (17) und (19) jeweils mit -2 und addieren dann die beiden zur Summe der anderen drei Gleichungen. Das ergibt zunächst

$$-2(B + 4 \cdot b) + (C + 6 \cdot c) = (B + 0 \cdot b) - 2(C + 1 \cdot c),$$

und weiter: $3(C-B) = 8(b-c)$. Daraus folgern wir: $x = (C-B)/(b-c) = 8/3$. Benny überholt Clemens um $11 + x = 11 + 8/3 = 13 + 2/3$, also hat Benny Clemens um 13:40 überholt. Somit ist Antwort #3 richtig.

Eine weiterer Lösungsweg ist es, die Bewegungen der Wichtel in einem Weg-Zeit-Diagramm darzustellen. Da sich die Wichtel mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, erhält man Geraden. Man findet heraus: Der Schnittpunkt der Geraden, die die Bewegung von Benny und Clemens beschreiben befindet sich immer zum Zeitpunkt 13:40 Uhr.

22 Hände hoch!

Aufgabensteller: Cor Hurkens (TU Eindhoven) und Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

22.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann sagt zu den vier Intelligenzwichteln Atto, Bilbo, Chico und Dondo: *"Meine lieben Intelligenzwichtel! Auch dieses Jahr soll es im mathematischen Adventskalender wieder eine Denkaufgabe mit Mützen auf Wichtelköpfen geben. Zu diesem Zwecke lade ich euch morgen zu einem gemütlichen Nachmittag mit Kaffee und Kuchen ein."* — *"Fein, wir kommen gerne!"*, rufen Atto, Bilbo, Chico und Dondo.

Der Weihnachtsmann fährt fort: *"Heute Abend werde ich einige rote und blaue Wichtelmützen vorbereiten. Morgen setze ich dann jedem von euch hinterrücks und blitzschnell eine dieser Mützen auf den Kopf, sodass keiner die eigene Mütze zu sehen bekommt. Ihr könnt die Mützen der anderen drei Wichtel sehen, dürft aber keinerlei Informationen untereinander austauschen. Dann werden euch die Augen verbunden, und jeder darf Finger in die Höhe strecken. Ich berechne die Gesamtzahl R aller hochgestreckten Finger von Wichteln mit roten Mützen und die Gesamtzahl B aller hochgestreckten Finger von Wichteln mit blauen Mützen. Ihr gewinnt das Spiel, falls R grösser als B ist. Gibt es Fragen?"*
Atto fragt: *"Es gibt sechzehn Möglichkeiten, rote und blaue Mützen auf unsere Köpfe zu setzen. Sind die alle gleich wahrscheinlich?"* — *"Ja"*, antwortet der Weihnachtsmann. *"Alle diese sechzehn Möglichkeiten sind exakt gleich wahrscheinlich."* — Bilbo sagt: *"Dürfen wir auch beide Hände in die Höhe strecken?"* — *"Ja"*, antwortet der Weihnachtsmann. *"Jeder von euch darf* $0, 1, 2, \ldots, 9$ *oder* 10 *Finger in die Höhe strecken."* — Chico fragt: *"Was passiert denn, wenn R gleich B ist?"* — *"Na, dann habt ihr das Spiel verloren. Ihr gewinnt nur, wenn $R > B$ gilt!"*, antwortet der Weihnachtsmann.
Die Wichtel beginnen zu überlegen. Sie diskutieren und sie denken nach. Sie denken nach und sie diskutieren. Dann diskutieren sie noch mehr und denken noch länger nach. Sie arbeiten schließlich eine wirklich geniale Strategie aus, die ihre Gewinnwahrscheinlichkeit (unter allen möglichen Strategien!) maximiert. Unsere Frage lautet: Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit mit dieser wirklich genialen Strategie?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 7/16.
2. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 8/16.
3. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 9/16.
4. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 10/16.
5. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 11/16.
6. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 12/16.
7. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 13/16.
8. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 14/16.

9. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 15/16.
10. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 16/16.

22.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 9.
Die vier Intelligenzwichtel können einen Sieg in 15 von 16 möglichen Fällen erzwingen.

Wie die Wichtel in 15 von 16 Fällen gewinnen können. Alle Wichtel verwenden die folgende einfache Strategie, die nur von der Anzahl roter und blauer Mützen auf den anderen drei Wichtelköpfen abhängt:
Wenn ein Wichtel 3 rote und 0 blaue Mützen sieht, so hält er 1 Finger hoch.
Wenn ein Wichtel 2 rote und 1 blaue Mützen sieht, so hält er 1 Finger hoch.
Wenn ein Wichtel 1 rote und 2 blaue Mützen sieht, so hält er 2 Finger hoch.
Wenn ein Wichtel 0 rote und 3 blaue Mützen sieht, so hält er 7 Finger hoch.

In den 16 möglichen Fällen passiert nun folgendes (wir schreiben **b** für einen Wichtel mit blauer Mütze und **r** für einen Wichtel mit roter Mütze):
Im Fall **rrrr** ist $R = 4$ und $B = 0$.
In den Fällen **rrrb, rrbr, rbrr, brrr** ist $R = 3$ und $B = 1$.
In den Fällen **rrbb, rbrb, rbbr, brrb, brbr, bbrr** ist $R = 4$ und $B = 2$.
In den Fällen **rbbb, brbb, bbrb, bbbr** ist $R = 7$ und $B = 6$.
Im Fall **bbbb** ist $R = 0$ und $B = 28$.
Zusammenfassend sehen wir, dass die Wichtel das Spiel in den ersten 15 Fällen gewinnen und nur in einem einzigen Fall (**bbbb**) verlieren.

Warum die Wichtel nicht alle 16 Fälle gewinnen können. Da im Fall **bbbb** mit vier blauen Mützen immer $R = 0$ und $B \geq 0$ gilt, können die Wichtel diesen Fall unmöglich gewinnen. Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt daher höchstens 15/16.

23 Kunterbunte Kugeln

Aufgabensteller: Dirk Klindworth (TU Berlin)

23.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat genug von schnöden, einfarbigen Christbaumkugeln. Dieses Jahr soll es überall schön bunt zugehen. Deswegen möchte er für alle Weihnachtsbäume kunterbunte Kugeln herstellen, die in den verschiedensten Farben funkeln. Dafür fehlt ihm allerdings die nötige Menge an Farbe. Doch als alter Hobbyzoologe kommt ihm sofort eine super Idee: Die farbenfrohen Flügel der Schmetterlinge sind nicht deshalb so farbenfroh, weil sich darauf viele unterschiedliche Farbpigmente gruppieren, sondern, da

sie aus einem deletedperiodischen Material hergestellt sind, das nur Licht bestimmter Frequenzen (also Farben) reflektiert. Und da Knecht Photon mit der Massenproduktion von solchen sogenannten photonischen Kristallen schon viel Erfahrung gesammelt hat, scheint das Problem gelöst.
Nun muss der Weihnachtsmann sich nur noch um die Farbgestaltung der Christbaumkugeln kümmern. Um vorherzusagen, welche Farben reflektiert werden, müssen sogenannte Dispersionskurven betrachtet werden. Dabei handelt es sich um Funktionen einer Veränderlichen, nennen wir sie beispielsweise $d(x)$. Für diese Dispersionskurven gibt es leider keine geschlossene Formel, also zum Beispiel $d(x) = x^2$, die der Weihnachtsmann verwenden könnte. Stattdessen ruft er seine Kumpel vom Matheon an, die mit der näherungsweisen Berechnung solcher Funktionen Erfahrung haben. Diese liefern ihm für das ihn interessierende Intervall von 0 bis 2 allerdings nur drei Werte:

$$d(0) = 0, \qquad d(1) = 1, \qquad d(2) = 3.$$

Doch der Weihnachtsmann benötigt die Werte der Dispersionskurve für das gesamte Intervall $[0, 2]$. Da kommt glücklicherweise der Wichtel Lin Ear um die Ecke, der dem Weihnachtsmann vorschlägt, die drei Werte einfach stückweise linear, d.h. durch zwei Geraden, miteinander zu verbinden. Der Weihnachtsmann hat aber in Mathe aufgepasst und denkt sich, was Lin Ear linear kann, kann ich quadratisch, und berechnet ein quadratisches Polynom also eine Funktion der Form $q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$, deren Werte in den Punkten $x = 0$, $x = 1$ und $x = 2$ denen von der Dispersionskurve $d(x)$ entsprechen. Als er daraufhin die beiden Lösungen an Knecht Photon gibt, schlägt der nur die Hände über dem Kopf zusammen: “Mensch, Weihnachtsmann. Wir wissen doch auch, dass die Steigung der Dispersionsfunktion bei $x = 0$ gleich 0 ist!” und er berechnet ganz fix ein Polynom dritter Ordnung, also eine Funktion der Form $k(x) = k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0$, die die von ihm erwähnte Bedingung erfüllt und deren Werte in den Punkten $x = 0$, $x = 1$ und $x = 2$ denen von der Dispersionskurve $d(x)$ entsprechen.
Wie groß ist der maximale, absolute Fehler im Intervall $[0, 2]$, den Wichtel Lin Ear bzw. der Weihnachtsmann gemacht haben, wenn man annimmt, dass die Lösung von Knecht Photon korrekt ist?

Hinweise

- Die Bedingung, die Knecht Photon erwähnt, ist gleichbedeutend damit, dass die Ableitung der Funktion k an der Stelle $x = 0$ gleich 0 ist. Wer mit dem Begriff der Ableitung einer Funktion nichts anfangen kann, dem sei gesagt, dass die Ableitung von k

$$k'(x) = 3k_3x^2 + 2k_2x + k_1$$

lautet.

Antwortmöglichkeiten:

1. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{35-7\sqrt{13}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.

2. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{31-17\sqrt{13}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{8\sqrt{3}}$.

3. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{35-13\sqrt{13}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.

4. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{35-\sqrt{13}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{6\sqrt{5}}$.

5. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{31-7\sqrt{13}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.

6. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{35-13\sqrt{13}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{8\sqrt{5}}$.

7. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{35-13\sqrt{13}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{6\sqrt{5}}$.

8. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{37-19\sqrt{11}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{6\sqrt{5}}$.

9. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{31-13\sqrt{13}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.

10. maximaler Fehler des Wichtels Lin Ear: $\frac{37-13\sqrt{13}}{54}$, maximaler Fehler des Weihnachtsmanns: $\frac{1}{5\sqrt{8}}$.

Projektbezug:
Am Matheon beschäftigen sich Mathematikerinnen und Mathematiker intensiv mit photonischen Kristallen und deren optischen Eigenschaften. Photonische Kristalle sind transparente Festkörper, deren Brechungsindex periodisch variiert. Dieser periodische Brechungsindex hat zur Folge, dass sich das Licht abhängig von seiner Frequenz unterschiedlich ausbreitet bzw. reflektiert wird. In der Natur treten solche photonischen Kristalle wie in der Aufgabe beschrieben bei Schmetterlingsflügeln auf. Zudem sind das farbenfrohe Federkleid eines Pfaus und die schillernde Oberfläche eines Opals auf photonische Kristalle zurückzuführen. Von Menschenhand produzierte photonische Kristalle finden insbesondere in der Telekommunikation Anwendung, da mit ihrer Hilfe sehr effektive Lichtleiter hergestellt werden können. Vor allen Dingen werden hierbei zwei-dimensionale photonische Kristalle verwendet. Das sind Bauteile, die durch Ätzen von periodisch in der Ebene angeordneten Löchern die gewünschten optischen Eigenschaften erhalten. Um diese optischen Eigenschaften beschreiben zu können, werden die in der Aufgabe erwähnten Dispersionskurven herangezogen. Mathematisch gesprochen liegt jedem Punkt auf einer solchen Dispersionskurve ein Eigenwertproblem mit partiellen Differentialgleichungen zugrunde. Für sehr einfache photonische Kristalle lassen sich die Punkte der Dispersionskurve recht schnell berechnen, so dass die einzelnen Auswertungspunkte hinreichend nahe gewählt werden können. Doch häufig ist diese Herangehensweise sehr zeitaufwendig. Neueste Forschungsergebnisse des Matheons legen nun nahe, dass für eine hinreichend genaue Beschreibung der Dispersionskurve viel weniger Auswertungspunkte nötig sind, wenn man zusätzliche Informationen, wie die Ableitung der Dispersionskurve, hinzunimmt. An dieser Stelle kommt neben anderen Techniken die sogenannte Interpolation ins Spiel, also die Suche nach einem Polynom, das bzw. deren Ableitung an vorgeschriebenen Punkten bestimmte Werte annimmt. Aber die Interpolation spielt noch in vielen weiteren Anwendungsgebieten eine Rolle: immer wenn diskrete Werte (z.B. Messwerte) zu einer stetigen und ableitbaren Funktion zusammengefasst werden sollen, ist Interpolation die Methode der Wahl.

23.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 3.
Fangen wir mit dem Lösungsvorschlag des Wichtels Lin Ear an. Er schlägt

vor, die angegebenen Werte einfach linear, also mit Geraden, zu verbinden. Es ergeben sich somit zwei Lösungen: $\ell_1(x)$ im Intervall $[0,1]$ und $\ell_2(x)$ im Intervall $[1,2]$. Für diese Funktionen wählen wir den Ansatz $\ell_1(x) = \ell_{11}x+\ell_{10}$ und $\ell_2(x) = \ell_{21}x+\ell_{20}$, deren Koeffizienten ℓ_{11}, ℓ_{10}, ℓ_{21} und ℓ_{20} wir bestimmen können, indem wir $\ell_1(0) = d(0) = 0$, $\ell_1(1) = d(1) = 1$, $\ell_2(1) = d(1) = 1$ und $\ell_2(2) = d(2) = 3$ setzen. Wir erhalten für das Intervall $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
\ell_1(0) &= \ell_{11} \cdot 0 + \ell_{10} = \ell_{10} = 0,\\
\ell_1(1) &= \ell_{11} \cdot 1 + \ell_{10} = \ell_{11} = 1
\end{aligned}$$

und für das Intervall $[1,2]$:

$$\begin{aligned}
\ell_2(1) &= \ell_{21} \cdot 1 + \ell_{20} = \ell_{21} + \ell_{20} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ell_{20} = 1 - \ell_{21},\\
\ell_2(2) &= \ell_{21} \cdot 2 + \ell_{20} = 2\ell_{21} + (1 - \ell_{21}) = \ell_{21} + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \ell_{21} = 2
\end{aligned}$$

und somit

$$\ell_1(x) = x \qquad \text{sowie} \qquad \ell_2(x) = 2x - 1.$$

Widmen wir uns nun der Lösung des Weihnachtsmanns. Er möchte ein quadratisches Polynom, also eine Parabel, finden, das die angegebenen Werte annimmt. Er sucht somit die Koeffizienten q_2, q_1 und q_0 der Funktion $q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$, die die drei Bedingungen $q(0) = d(0) = 0$, $q(1) = d(1) = 1$ und $q(2) = d(2) = 3$ erfüllt. Wir erhalten die folgenden drei Beziehungen:

$$\begin{aligned}
q(0) &= q_2 \cdot 0^2 + q_1 \cdot 0 + q_0 = q_0 = 0,\\
q(1) &= q_2 \cdot 1^2 + q_1 \cdot 1 + q_0 = q_2 + q_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 1 - q_2,\\
q(2) &= q_2 \cdot 2^2 + q_1 \cdot 2 + q_0 = 4q_2 + 2q_1\\
&= 4q_2 + 2\,(1 - q_2) = 2q_2 + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und daher

$$q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Betrachten wir den Lösungsvorschlag von Knecht Photon: ein kubisches Polynom der Form $k(x) = k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0$, das die drei Bedingungen $k(0) = d(0) = 0$, $k(1) = d(1) = 1$ und $k(2) = d(2) = 3$ erfüllt und dessen

Ableitung $k'(x) = 3k_3x^2 + 2k_2x + k_1$ an der Stelle $x = 0$ gleich 0 ist. Fangen wir mit der Bedingung für die Ableitung an. Wir erhalten

$$k'(0) = 3k_3 \cdot 0^2 + 2k_2 \cdot 0 + k_1 = k_1 = 0.$$

Nun widmen wir uns der Bedingung $k(0) = 0$, die uns wiederum

$$k(0) = k_3 \cdot 0^3 + k_2 \cdot 0^2 + k_1 \cdot 0 + k_0 = k_0 = 0$$

liefert. Mit Hilfe der letzten beiden Bedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} k(1) &= k_3 \cdot 1^3 + k_2 \cdot 1^2 + k_1 \cdot 1 + k_0 = k_3 + k_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 1 - k_3, \\ k(2) &= k_3 \cdot 2^3 + k_2 \cdot 2^2 + k_1 \cdot 2 + k_0 = 8k_3 + 4k_2 \\ &= 8k_3 + 4\,(1 - k_3) = 4k_3 + 4 = 3 \quad \Rightarrow \quad k_3 = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

und schließlich

$$k(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2.$$

Wir wollen den maximalen Fehler der Lösungen des Wichtels Lin Ear und des Weihnachtsmanns im Vergleich zur Lösung $k(x)$ des Knechtes Photon bestimmen. Nehmen wir an, dass die Lösung $k(x)$ von Knecht Photon korrekt ist. Um die maximalen Abweichungen der Lösungen von der korrekten Lösung zu bestimmen, suchen wir das Maximum der Differenz zwischen den Funktionen von Lin ear bzw. des Weihnachtsmanns und der Lösung des Knechtes Photon. Wir suchen also die Maxima der Betragsfunktionen

$$b_{\ell_1}(x) = |k(x) - \ell_1(x)|$$

im Intervall $[0, 1]$ bzw.

$$b_{\ell_2}(x) = |k(x) - \ell_2(x)|$$

im Intervall $[1, 2]$ einerseits und

$$b_q(x) = |k(x) - q(x)|$$

im Intervall $[0, 2]$ andererseits.

Ohne Kurvendiskussion, also ohne die Berechnung von Ableitungen, ist die Aufgabe auch mit Hilfe von Ausschlusskriterien lösbar. Wir wissen, dass die obigen Betragsfunktionen an den Stellen $x = 0$, $x = 1$ und $x = 2$ gleich 0 sind. Die gesuchten Maxima müssen zwischen diesen Stellen liegen. Wir können also beispielsweise die Betragsfunktionen in den Mittelpunkten der Intervalle auswerten und erhalten dadurch eine sogenannte untere Schranke für die maximalen Fehler. Wir erhalten folgende Werte

$$
\begin{aligned}
b_{\ell_1}(0.5) &= |k(0.5) - \ell_1(0.5)| = \left| -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{2} \right| = \frac{7}{32}, \\
b_{\ell_2}(1.5) &= |k(1.5) - \ell_2(1.5)| = \left| -\frac{1}{4} \cdot \frac{27}{8} + \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 \right| = \frac{1}{32},
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
b_q(0.5) &= |k(0.5) - q(0.5)| = \left| -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{32}, \\
b_q(1.5) &= |k(1.5) - q(1.5)| = \left| -\frac{1}{4} \cdot \frac{27}{8} + \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{32}.
\end{aligned}
$$

Der maximale Fehler des Wichtels Lin Ear ist somit größer oder gleich $\frac{7}{32}$ und der maximale Fehler des Weihnachtsmanns ist größer oder gleich $\frac{3}{32}$. Ein Vergleich mit den Antwortmöglichkeiten zeigt, dass alle Antworten bis auf Antwort 3) entweder einen zu kleinen maximalen Fehler des Wichtels Lin Ear oder einen zu kleinen maximalen Fehler des Weihnachtsmanns angeben.
Mit Hilfe einer Kurvendiskussion können wir die Antwort hingegen direkt finden. Da Betragsfunktionen allerdings unter Umständen nicht in allen Punkten ableitbar sind, suchen wir anstelle der Maxima der Betragsfunktionen sowohl Maxima als auch Minima der Funktionen

$$f_{\ell_1}(x) = k(x) - \ell_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - x$$

im Intervall $[0, 1]$ bzw.

$$f_{\ell_2}(x) = k(x) - \ell_2(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 2x + 1$$

im Intervall $[1, 2]$ und

$$f_q(x) = k(x) - q(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

im Intervall $[0, 2]$.
Da wir wissen, dass diese Funktionen an den Rändern ihrer jeweiligen Definitionsbereiche den Wert 0 annehmen, und da wir sowohl Minima als auch Maxima dieser Funktionen bestimmen wollen, genügt es, lediglich die Nullstellen ihrer Ableitungen zu bestimmen und die Maxima der Betragsfunktionen an diesen Stellen zu ermitteln. Wir müssen die Maxima nicht dahingehend untersuchen, ob es sich um Minima, Maxima oder Wendepunkte handelt, das heißt, wir können auf die Berechnung der zweiten Ableitungen verzichten und wir müssen zudem nicht darauf achten, ob die ermittelten Maximalwerte der Betragsfunktionen kleiner sind als die Werte der Betragsfunktionen an den Rändern ihrer Definitionsbereiche, da die Funktionen dort gleich 0 sind, und sich diese Frage somit nicht stellt.
Die Ableitungen der Funktionen $f_{\ell_1}(x)$, $f_{\ell_2}(x)$ und $f_q(x)$ lauten

$$\begin{aligned} f'_{\ell_1}(x) &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 1, \\ f'_{\ell_2}(x) &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 2, \\ f'_q(x) &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bestimmen wir zunächst die Nullstellen s_{ℓ_1} von f'_{ℓ_1} im Intervall $[0, 1]$. Wir erhalten

$$f'_{\ell_1}(s_{\ell_1}) = -\frac{3}{4}s_{\ell_1}^2 + \frac{5}{2}s_{\ell_1} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{\ell_1}^2 - \frac{10}{3}s_{\ell_1} + \frac{4}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{\ell_1} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3},$$

wobei $\frac{5+\sqrt{13}}{3} > 1$. Somit betrachten wir nur die Nullstelle $s_{\ell_1} = \frac{5-\sqrt{13}}{3}$ betrachten. Der Betrag der Funktion f_{ℓ_1} an dieser Stelle berechnet sich wie folgt

$$\begin{aligned} |f_{\ell_1}(s_{\ell_1})| = b_{\ell_1}(s_{\ell_1}) &= \left| -\frac{1}{4}\left(\frac{5-\sqrt{13}}{3}\right)^3 + \frac{5}{4}\left(\frac{5-\sqrt{13}}{3}\right)^2 - \frac{5-\sqrt{13}}{3} \right| \\ &= \left| -\frac{320+88\sqrt{13}}{108} + \frac{190-50\sqrt{13}}{36} - \frac{5-\sqrt{13}}{3} \right| = \left| \frac{35-13\sqrt{13}}{54} \right|. \end{aligned}$$

Wir wiederholen diese Prozedur nun zur Bestimmung der Nullstellen s_{ℓ_2} von f'_{ℓ_2} im Intervall $[1, 2]$ und erhalten

$$f'_{\ell_2}(s_{\ell_2}) = -\frac{3}{4}s_{\ell_2}^2 + \frac{5}{2}s_{\ell_2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{\ell_2}^2 - \frac{10}{3}s_{\ell_1} + \frac{8}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{\ell_2} = \frac{5 \pm 1}{3},$$

wobei wir die Nullstelle bei $\frac{5+1}{3} = 2$ vernachlässigen können, da wir wissen, dass $|f_{\ell_2}(2)| = b_{\ell_2}(2) = 0$ gilt. Wir bestimmen nun also den Betrag der Funktion f_{ℓ_2} an der Nullstelle $s_{\ell_2} = \frac{4}{3}$. Es ergibt sich

$$|f_{\ell_2}(s_{\ell_2})| = b_{\ell_2}(s_{\ell_2}) = \left|-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \frac{5}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\frac{4}{3} + 1\right| = \left|-\frac{16}{27} + \frac{20}{9} - \frac{8}{3} + 1\right| = \frac{1}{27}$$

also ein kleinerer Wert als im Intervall $[0, 1]$, so dass der maximale Fehler des Wichtels Lin Ear

$$\max\left\{\max_{x\in[0,1]} |f_{\ell_1}(x)|, \max_{x\in[1,2]} |f_{\ell_2}(x)|\right\} = \left|\frac{35 - 13\sqrt{13}}{54}\right|$$

beträgt.
Widmen wir uns nun der Bestimmung der Nullstellen s_q von f'_q, also

$$f'_q(s_q) = -\frac{3}{4}s_q^2 + \frac{3}{2}s_q - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_q^2 - 2s_q + \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_q = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}},$$

wobei beide Nullstellen im Intervall $[0, 2]$ liegen und somit die Beträge der Funktion f_q an beiden Stellen untersucht werden müssen. Setzen wir beide Werte gleichzeitig ein, so erhalten wir für den maximalen Fehler des Weihnachtsmanns den Wert

$$\begin{aligned}|f_q(s_q)| = b_q(s_q) &= \left|-\frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right| \\ &= \left|-\frac{1}{4}\left(2 \pm \frac{10}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3} \pm 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right| = \frac{1}{6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Somit ist Antwortmöglichkeit 3) korrekt.

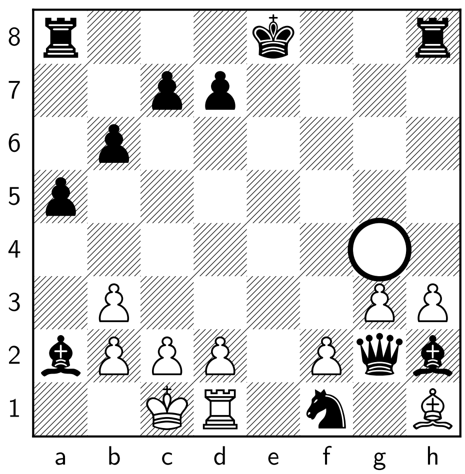
24 Schokoladenschach

Aufgabensteller: Erhard Zorn (TU Berlin)

24.1 Aufgabe

Die Schokoladenfigurenabteilung der Weihnachtsgeschenkefabrik möchte ihr Sortiment erweitern. Ein Schokoladenfigurenformenlieferant hat zur Probe

Schachfigurenformen bereitgestellt. Die Weihnachtswichtel haben damit Schachfiguren aus dunkler und weißer Schokolade hergestellt, die sie auf ein Schachbrett aus Schokoladenquadraten gestellt haben. Oin und Gloin testen dieses Schokoladenschachspiel auf seine Alltagstauglichkeit und spielen damit eine Partie Schach. Sie spielen nach den Regeln des Weltschachverbandes FIDE. Als einzige zusätzliche Regel darf man eine Schachfigur essen, wenn man sie schlägt. Als der Weihnachtsmann bei seiner täglichen Inspektion vorbeikommt, findet er folgende Spielsituation vor, wobei Schwarz am Zug ist.



Auf einem Feld liegt ein vergoldeter Schokoladentaler. Verwundert fragt er, was er zu bedeuten hat. „Bombur hat vor unserem Spiel eine Schachfigur genascht, daher haben wir sie durch den Schokoladentaler ersetzt,“ antwortet Oin. „Als später die Ersatzfiguren zum Umwandeln geliefert wurden, haben wir ihn nicht ausgetauscht, um nicht mit der Regel *berührt – geführt* in Konflikt zu geraten.“

Welche Figur stellt der goldene Schokoladentaler dar? Zu beachten ist, dass es sich bis auf die Könige um jede Figur handeln kann, da für die Umwandlung von jeder Schachfigur Ersatzexemplare bereitstanden.

Antwortmöglichkeiten:

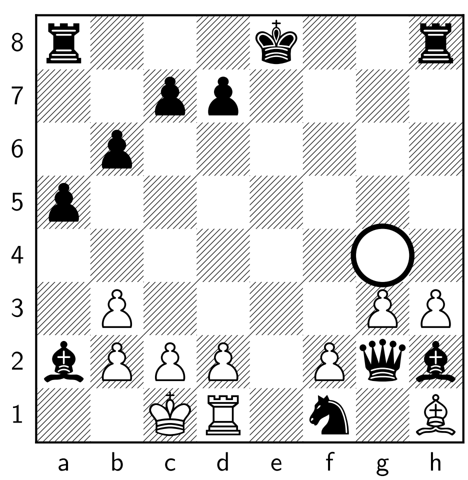
1. weiße Dame
2. schwarze Dame
3. weißer Turm

4. schwarzer Turm
5. weißer Läufer
6. schwarzer Läufer
7. weißer Springer
8. schwarzer Springer
9. weißer Bauer
10. schwarzer Bauer

1. Zusatzfrage: Welche Figur wurde auf b3 geschlagen?
2. Zusatzfrage: Kann Schwarz noch rochieren?

24.2 Lösung

Die richtige Lösung ist die Nummer 8.



In der Stellung fallen ein paar Besonderheiten auf, die zur Lösung beitragen:

1. Zunächst eine sehr einfach zu beantwortende Frage: Wie ist der ursprünglich auf c1 stehende weiße Läufer verschwunden? Die weißen Bauern auf b2 und d2 verhindern, dass er jemals c1 verlassen konnte. Er muss also auf seinem Ursprungsfeld geschlagen worden sein!

2. Nun zu einer auch nicht sehr schwierigen Frage: Da Schwarz am Zug ist, hat zuletzt Weiß gezogen, aber welchen Zug kann er gemacht haben? Auf den ersten Blick denkt man vielleicht, dass die Stellung unmöglich ist, da sich von Weiß nur der Turm und der König bewegt haben können. Aber der König kann nicht von b1 gekommen sein, weil der schwarze Läufer auf a2 dann kein Feld gehabt hätte, von dem aus er gezogen und dem weißen König auf b1 Schach geboten haben könnte. Der weiße Turm auf d1 kann aber nur von e1 gekommen sein, wo er bereits dem schwarzen König Schach geboten hätte. Aber dann wäre nicht Weiß zuletzt gezogen. Diese scheinbaren Widersprüche lassen sich leicht auflösen: Zuletzt haben sich der weiße König *und* der weiße Turm bewegt, Weiß hat als letzten Zug lang rochiert! Wir sollten uns aber vergewissern, dass dies wirklich möglich war. Dazu darf der weiße König nicht um Schach gestanden haben (stimmt!), er darf kein Feld „überquert" haben, das von einer schwarzen Figur bedroht wurde (hier das Feld d1, das wird später wichtig), und König und Turm dürfen sich bisher im Spiel nicht bewegt haben (auch das wird später wichtig).

3. Weiter sollte auffallen, dass der schwarze Läufer auf a2 „eingesperrt" ist, er kann sich nur auf den Feldern a2 und b1 bewegen, aber vor allem: Wie kam er nach a2? In dieser Stellung ziehen übrigens die weißen Figuren wirklich von „unten" (1. Reihe) nach „oben" (8. Reihe), das Schachbrett wurde also nicht umgedreht. Es kann sich damit bei dem schwarzen Läufer auf a2 nur um einen auf b1 umgewandelten schwarzen Bauern handeln. Diese sogenannte Unterverwandlung ist erlaubt, ein Bauer muss also nicht immer in die Dame als stärkste Figur umgewandelt werden. Man unterverwandelt einen Bauern also, nicht weil man keine weitere Dame hat (die Wichtel hatten sogar genügend Ersatzfiguren!), sondern weil man es möchte; und in manchen Situationen kann das sehr sinnvoll sein. Nun sollten wir noch prüfen, wie der schwarze Bauer nach b1 gelangt sein kann, um sich in den Läufer zu verwandeln. Man erkennt leicht, dass er ursprünglich auf e7 gestanden hat, auf den Feldern d6, c5, b4, a3 eine weiße Figur geschlagen, nach a2 vorgerückt und auf b1 eine weitere weiße Figur geschlagen haben muss. Insgesamt hat der Bauer von e7 also fünf weiße Figuren geschlagen. Weiß fehlen außer dem Läufer, von dem wir aus 1. wissen, dass er auf seinem Ausgangsfeld c1 geschlagen wurde, die Dame, ein Turm, zwei

Springer und ein Bauer. Diese fünf Figuren muss der schwarze Bauer auf seinem Weg von e7 nach b1 geschlagen haben, die letzte davon auf b1. Damit haben wir die Abwesenheit aller fehlenden weißen Figuren erklärt, auf g4 steht also *keine weiße Figur!*

4. In 3. haben wir gesehen, dass der fehlende weiße Turm vom schwarzen e7-Bauern geschlagen worden sein muss. Nur wie konnte er von seinem Ursprungsfeld h1 auf ein Feld gelangen, auf dem er geschlagen wurde? Da zuletzt Weiß lang rochiert hat, kann er nicht am weißen König „vorbeigekommen“ sein. Die auf g3 und h3 stehenden weißen Bauern können daher nicht einfach vorgerückt sein, sondern müssen „über Kreuz“ geschlagen haben. Erst muss ein Bauer die g- oder h-Line freigemacht haben, über die der weiße Turm von h1 herauskam, dann hat der andere Bauer geschlagen. Auf g3 und h3 wurden also schwarze Figuren geschlagen.

5. Aus 4. wissen wir, dass der weiße Bauer auf g3 von h2 stammt, aber wie kommt dann der schwarze Läufer nach h2? Bevor der weiße Bauer von h2 nach g3 geschlagen hat, war der schwarze Läufer auf g1 „gefangen“. Wie bei 3. muss er durch eine Unterverwandlung auf g1 entstanden sein! Da wir bereits alle fehlenden weißen Figuren erklärt haben, muss der auf g1 umgewandelte Bauer *ohne zu schlagen* von g7 gekommen sein. Also muss zuerst der weiße Bauer von g2 nach h3 geschlagen haben. Dann ist der weiße Turm von h1 nach draußen gelangt, und dann gelangte der schwarze Bauer „geradeaus“ nach g2, später nach g1 und hat sich in den nun auf h2 stehenden schwarzen Läufer unterverwandelt. Der weiße Bauer von h2 hat nach g3 geschlagen, erst nachdem der schwarze Bauer nach g2 vorgerückt war. Damit wissen wir auch, dass kein weiterer schwarzer Bauer umgewandelt wurde: Der schwarze e7-Bauer ist der umgewandelte schwarze Läufer auf a2, der schwarze g7-Bauer ist der umgewandelte schwarze Läufer auf h2. Die schwarzen f7- und h7-Bauern konnten nie auf die 1. Reihe gelangen, weil sie immer versperrt waren durch weiße Bauern.

6. Die nicht sichtbaren schwarzen Figuren sind also ein schwarzer Springer, die beiden ursprünglich auf c8 und f8 stehenden schwarzen Läufer und die ursprünglichen f7- und h7-Bauern. Von dreien wissen wir, wo sie geschlagen wurden (b3, g3, h3), eine steht auf g4. Keiner der schwar-

zen f7- und h7-Bauern kann auf die g-Linie gelangt sein, weil er dazu eine weiße Figur hätte schlagen müssen, aber der Verbleib ist bereits geklärt. Also kann auf g4 nur ein schwarzer Springer oder Läufer stehen. In 2. haben wir gesehen, dass Weiß gerade lang rochiert hat, also kann auf g4 kein schwarzer Läufer stehen, da sonst der weiße König bei der langen Rochade das Feld d1 überquert hätte, das von dem Läufer bedroht gewesen wäre. Also steht auf g4 ein schwarzer Springer!

7. Nun können wir auch sagen, welche Figuren auf b3, g3 und h3 geschlagen wurden. Auf b3 wurde kein schwarzer Bauer geschlagen, weil er nur durch Schlagen dorthin gelangt wäre, aber alle fehlenden weißen Figuren sind bereits erklärt. Auf b3 muss also der ursprünglich von c8 stammende schwarze Läufer geschlagen worden sein. Das beantwortet die 1. Zusatzfrage. Da auf g3 kein schwarzer Bauer geschlagen worden sein kann, muss dort der ursprünglich von f8 stammende schwarze Läufer geschlagen worden sein. Und auf h3 muss der schwarze h7-Bauer geschlagen worden sein.

8. Etwas haben wir noch nicht geklärt: Wir wissen, dass der weiße e2-Bauer vom schwarzen e7-Bauern geschlagen worden sein muss, aber wie konnte er überhaupt die e-Linie verlassen, um geschlagen zu werden? Als einzige schwarze Figur ist das Schicksal des f7-Bauern bisher ungeklärt, aber ihn konnte der weiße e2-Bauer nicht schlagen, um auf die d-Linie zu gelagen. Haben wir also doch eine unmögliche Situation? Der weiße e2-Bauer muss (und kann) nicht in seiner Gestalt als Bauer vom schwarzen e7-Bauern geschlagen worden sein: Er hat sich umgewandelt und wurde anschließend geschlagen. Dazu kann er sich auf e8 ugewandelt haben, dann muss der schwarze König einmal nicht auf e8 gestanden haben. Oder der weiße e2-Bauer hat den schwarzen f7-Bauern auf der f-Linie geschlagen, ist dann über f7 gelangt und hätte damit einmal das Feld e8 bedroht. In beiden Fällen muss der schwarze König das Feld e8 verlassen haben. Damit kann Schwarz nicht mehr rochieren! Das beantwortet die 2. Zusatzfrage.

Bemerkung: Das Schachproblem stammt von dem Logiker Raymond Smullyan, veröffentlicht wurde es in seinem inzwischen vergriffenen Buch „The Chess Mysteries of the Arabian Knights“, 1981, Alfred A. Knopf; auch die deutsche Übersetzung „Schachgeheimnisse des Kalifen“, 1981, Ravensburger Verlag ist vergriffen.

Widmung: Diese Fassung ist Raymond Smullyan zum 95. Geburtstag gewidmet mit den besten Wünschen zu Weihnachten.