MATHE KALENDER

LÖSUNGSHEFT 2012

Deutsche Mathematiker-Vereinigung

www.mathekalender.de

DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

1 Verpackung

Autor: Martin Weiser

1.1 Aufgabe

Beim Einpacken von Weinflaschen in viereckige Geschenkkartons fällt dem Weihnachtsmann auf, dass er jedesmal eine Menge Luft mit einpackt. Und außerdem verbrauchen diese Ecken sicher viel zu viel vom teuren Karton.

„Wenn ich die Ecken abschneide und durch eine gerade Verbindung ersetze, kann ich die Verpackung aus weniger Karton falten“, überlegt er. Flugs macht er sich ans Werk und umhüllt die nääachste Flasche mit einem achteckigen Karton. Zufrieden packt er weiter, bis ihm nach einer Weile auffällt, dass immer noch zu viel Karton verbraucht wird. „Wenn ich die Ecken wieder abschneide, sollte ich noch weniger Karton nehmen können“, sagt er sich und falzt eine sechzehneckige Verpackung. Nun packt ihn der Ehrgeiz. Schnell ist ihm klar, dass kreisförmige (zylindrische) Verpackungen optimal wären, nur leider lässt sich der Karton nicht gut biegen. Aber immerhin kann er mehr und mehr Ecken falzen. Er hört mit der Eckenverdoppelung erst auf, als sein Verpackungsumfang um nicht mehr als ein Tausendstel länger ist als bei einer zylindrischen Umhüllung. Wie viele Ecken hat seine Verpackung dann?

Antwortmöglichkeiten:

1. 16
2. 24
3. 32
4. 42
5. 64
6. 95
7. 128
8. 256
9. 512
10. Er hört niemals auf.

Projektbezug:

In vielen praktisch relevanten Problemen treten „gekrümmte“ Lösungen auf, die sich (anders als hier der Kreis) nicht direkt beschreiben lassen. Sie werden dann durch einfachere Strukturen, etwa stückweise lineare Funktionen, angenähert (Diskretisierung). Dabei ist die Frage nach dem dadurch entstehenden Fehler und der Anzahl der benötigten einfachen Strukturen von zentraler Bedeutung.

1.2 Lösung

Lösungsmöglichkeit 5 ist richtig.

Der Durchmesser der zu verpackenden Flasche spielt keine Rolle – es kommt nur auf die relative Abweichung an. Wir betrachten also den Einheitskreis mit Umfang 2π. Die viereckige Verpackung mit einer halben Seitenlänge von $s_4 = 1$ hat dagegen einen Umfang von 8, ist mithin ein gutes Viertel zu groß. Bei dem Abschneiden der Ecken verringert sich die Seitenlänge. Aus der folgenden Abbildung lässt sich durch zweimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras sowie das Lösen einer quadratischen Gleichung eine Formel gewinnen, mit welcher aus der halben Seitenlänge s_n für ein betrachtetes n-Eck die halbe Seitenlänge s_{2n} für ein $2n$-Eck berechnet werden kann.

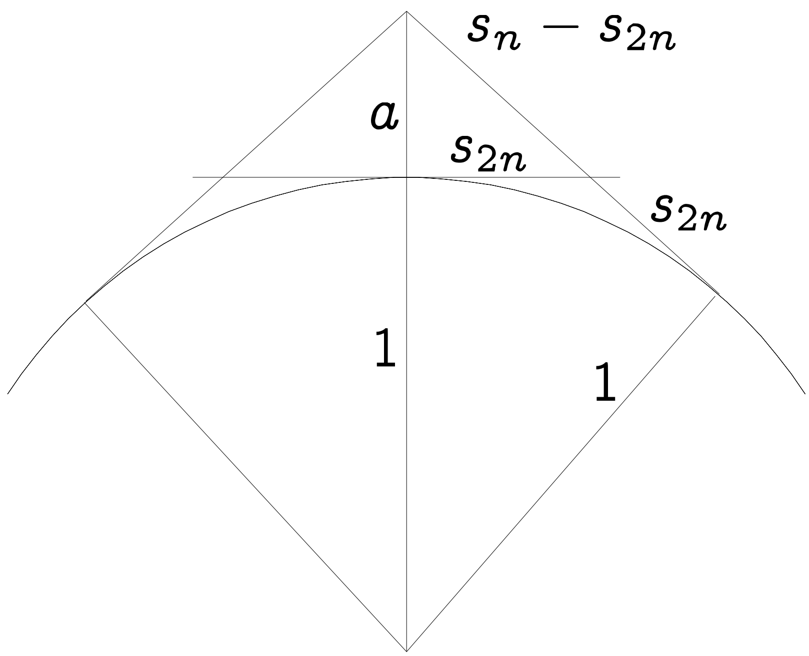


Abbildung 1: Seitenlängen bei Eckenverdoppelung.

Zunächst gilt im großen Dreieck

$$(1+a)^2 = 1^2 + s_n^2 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{1+s_n^2} - 1.$$

Im kleinen Dreieck erhalten wir dann

$$a^2 + s_{2n}^2 = (s_n - s_{2n})^2 = s_n^2 - 2s_n s_{2n} + s_{2n}^2 \;\Rightarrow\; 2s_n s_{2n} = s_n^2 - a^2.$$

Einsetzen von a führt dann auf

$$s_{2n} = \frac{\sqrt{1+s_n^2} - 1}{s_n}.$$

Für den Umfang erhalten wir dann $U_n = 2ns_n$ und für die Abweichung vom Kreisumfang

$$E_n = \frac{U_n - 2\pi}{2\pi}.$$

Nun können wir leicht nachrechnen, dass $E_{32} \approx 3.2 \cdot 10^{-3}$ und $E_{64} \approx 8.0 \cdot 10^{-4}$. Der Weihnachtsmann beendet seine Faltarbeit also mit einer 64-eckigen Verpackung.

2 Der Weihnachtsplanet

Autoren: Judith Keijsper und Gerhard Woeginger

2.1 Aufgabe

Nur wenige Menschen wissen vom Weihnachtsplaneten in unserem Sonnensystem, der auf derselben Bahn wie die Erde um die Sonne läuft. Weihnachtsplanet und Erde befinden sich allerdings immer in diametralen Positionen der gemeinsamen Umlaufbahn, sodass die Sicht der Erdmenschen auf den Weihnachtsplaneten von der Sonne blockiert wird. Der Weihnachtsplanet ist ein wenig kleiner als die Erde; er hat eine perfekte Kugelform und seine Drehachse (durch Nordpol und Südpol) steht normal auf seine Umlaufbahn. Entfernungen werden auf dem Weihnachtsplaneten in Weihnachtsmetern (w) und Kiloweihnachtsmetern (kw) gemessen, und natürlich gilt $1kw = 1000w$.

Auf der Nordhalbkugel des Weihnachtsplaneten befinden sich zwei Punkte A und B, wobei A genau $820kw$ nördlich von B liegt. In beiden Punkten steht ein Fahnenmast der Höhe $10w$. Am 43. Tag des Monats Quatember um 26:00 nachmittags werfen beide Fahnenmasten ihren Schatten exakt nach Norden. Der Schatten des Masts in A hat zu diesem Zeitpunkt die Länge $10w$ und der Schatten des Masts in B hat die Länge $7w$.

Wie groß ist der Umfang des Weihnachtsplaneten (plus/minus $500kw$)?

Antwortmöglichkeiten:

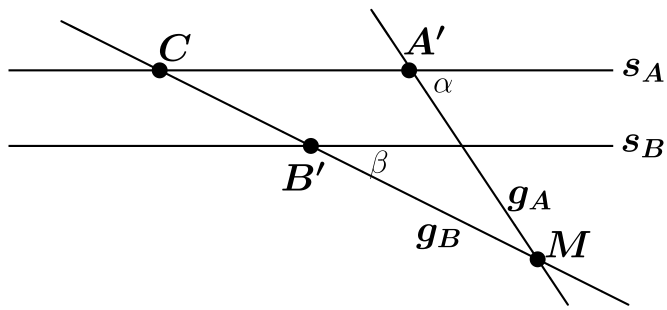
1. $20\,500\,kw$
2. $21\,500\,kw$
3. $22\,500\,kw$
4. $23\,500\,kw$
5. $24\,500\,kw$
6. $25\,500\,kw$
7. $26\,500\,kw$
8. $27\,500\,kw$
9. $28\,500\,kw$
10. $29\,500\,kw$

2.2 Lösung

Antwort 10 ist richtig

Wir folgen im Wesentlichen den Ideen des griechischen Mathematikers Eratosthenes von Kyrene (276–194 v.Chr), der als einer der ersten Menschen den Erdumfang berechnet hat. Wir betrachten zunächst das rechtwinklige Dreieck in A, das durch den Fußpunkt A des Mastes, die Spitze A' des Mastes und den Endpunkt X des Schattens gebildet wird [Anm1]. Beide Katheten haben die Länge $10w$ und die Hypothenuse läuft einem Sonnenstrahl s_A entlang. In diesem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ist der Winkel zwischen Mast und Sonnenstrahl dann $\alpha = 45°$. Analog betrachten wir das rechtwinklige Dreieck in B, das durch den Fußpunkt B des Mastes, die Spitze B' des Mastes und den Endpunkt Y des Schattens gebildet wird. Der Sonnenstrahl s_B durch B' und Y und der Mast schließen einen Winkel β ein. Aus der Tangensformel (Gegenkathete durch Ankathete) berechnen wir $\tan(\beta) = BY/BB' = 0,7$ und weiterhin $\beta \approx 34,992°$. Wir machen die vereinfachende Annahme, dass alle auf dem Weihnachtsplaneten auftreffenden Sonnenstrahlen – und insbesondere die beiden Strahlen s_A und s_B – parallel zu einander sind [Anm2].

Im nächsten Schritt betrachten wir die Ebene e, die durch die beiden Punkte A' und B' und durch den Mittelpunkt M des Planeten aufgespannt wird. Die Gerade g_A durch M, A und A' durchläuft den einen Fahnenmast, und die Gerade g_B durch M, B und B' durchläuft den anderen Fahnenmast. Man sieht leicht, dass die Ebene e sowohl die Geraden g_A und g_B als auch die beiden Sonnenstrahlen s_A und s_B enthält. Die Gerade g_B und der Sonnenstrahl s_A schneiden einander im Punkt C. Der gesuchte Planetenumfang U ist dann die Länge der Kreislinie mit Mittelpunk M, die sowohl durch Punkt A als auch durch Punkt B geht. Die folgende Abbildung zeigt den für uns relevanten Teil der Ebene e.



Nun wenden wir uns dem Dreieck $\Delta MCA'$ zu. Es gilt $\angle MCA' = \beta$, da die Seite CA' ein Teil von s_A und somit parallel zu s_B ist. Weiterhin gilt $\angle CA'M = 180° - \alpha$. Für den dritten Winkel in diesem Dreieck erhalten wir $\angle A'MC = \alpha - \beta \approx 10,008°$. Vom Erdmittelpunkt M aus gesehen deckt dieser dritte Winkel zwischen A und B einen Anteil von $10,008°$ des Gesamtkreises mit $360°$ ab. Folglich muss der Abstand $820kw$ zwischen A und B einen dazu proportionalen Anteil des Gesamtumfangs U des Weihnachtsplaneten abdecken:

$$360 \ : \ 10,008 \ = \ U \ : \ 820.$$

Daher gilt $U = 360 \cdot 820\,kw/10,008 \approx 29\,496\,kw$, und Antwort #10 ist richtig [Anm3].

Anmerkung [Anm1]: Die Kathete AX schmiegt sich an die Planetenoberfläche an und ist daher leicht gekrümmt. Diese Krümmung ist aber vernachlässigbar klein: Da der Umfang des Weihnachtsplaneten um ein Vielfaches größer als der Abstand zwischen A und B ist, liegt der Radius des Weihnachtsplaneten im Bereich von hunderten oder gar tausenden Kiloweihnachtsmetern. Die Schattenlänge hingegen liegt nur im Weihnachtsmeterbereich. Daher wird sich die winzige Krümmung von AX in unseren Rechnungen nicht weiter bemerkbar machen.

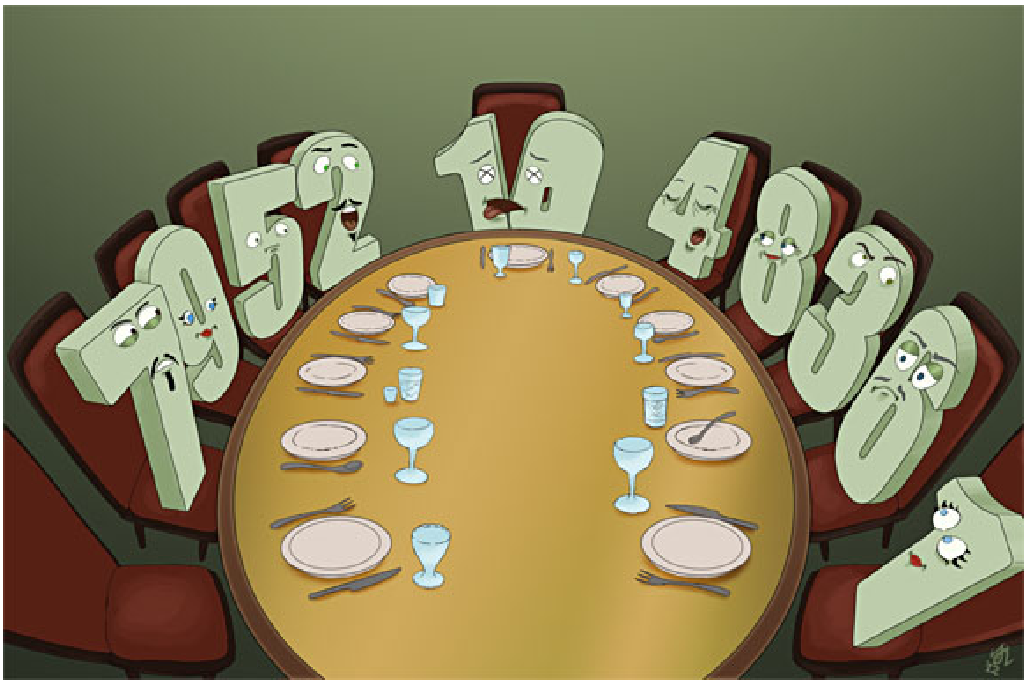
Anmerkung [Anm2]: Da die Sonne ihre Lichtstrahlen radial nach aussen abstrahlt, sind diese Strahlen *keineswegs* parallel zu einander. Der Sonnendurchmesser beträgt allerdings nur 1,4 Millionen Kilometer, während der

Abstand von der Sonne zu Erde und Weihnachtsplaneten 150 Millionen Kilometer beträgt. Durchmesser und Abstand sind also rund einen Faktor 100 von einander entfernt, was ungefähr der Situation entspricht, dass ein Stecknadelkopf von einer 1 Meter entfernten und 1 Zentimeter grossen Glühbirne angeleuchtet wird. Die auftreffenden Strahlen sind daher *beinahe* parallel, und unsere vereinfachende Annahme führt nur zu einem harmlosen Rechenfehler weit hinter dem Komma.

Anmerkung [Anm3]: Falls man $\theta \approx 10,008^\circ$ zum glatten Wert $\theta = 10^\circ$ rundet (was die meisten Rätsellöser wohl tun), so ergibt dieselbe Rechnung den Wert $U = 29\,520\,kw$.

3 Nur eine

Autor: Falk Ebert



3.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat beim Zusammenstellen der Aufgaben für den Weihnachtskalender bei einer Aufgabe den Aufgabentext verloren. Aber da nur eine Lösung pro Aufgabe richtig sein kann, weiß er, dass auch diese Aufgabe lösbar ist.

1. Nr. 6 ist richtig.
2. Die richtige Lösungsnummer ist geradzahlig.
3. Entweder Nr. 5 oder Nr. 6 ist richtig.
4. Die richtige Lösungsnummer ist eine Quadratzahl.

5. Nr. 3 oder Nr. 8 ist richtig.
6. Nr. 7 ist falsch.
7. Nr. 3 oder Nr. 8 ist falsch.
8. Die richtige Lösungsnummer ist keine Primzahl.
9. Nr. 4 bis Nr. 7 sind alle falsch.
10. Es ist nicht möglich, *eine* widerspruchsfreie Lösung mit einstelliger Lösungsnummer zu finden.

3.2 Lösung

Lösung 7 ist korrekt

Diese Aufgabe hatte bewusst keinen Aufgabentext bis auf die Lösungsmöglichkeiten gehabt. Wichtig ist allein das Wissen, dass stets nur *eine* Lösung pro Aufgabe richtig ist. Ausgehend von dieser Einschränkung lassen sich alle Lösungsmöglichkeiten bis auf eine ausschließen.
Die Vorgehensweise dabei kann sehr verschieden sein. Mit Sicherheit kann man mit wenigen Schritten genug Spitzfindigkeiten entdecken, die fast alle falschen Möglichkeiten ausschließen. In der Lösung soll versucht werden, strukturiert an die Aufgabe heranzugehen. Dazu fertigen wir eine Tabelle an, in der in Zeile i angegeben ist, welche Aussagen alle wahr sind, wenn Aussage i wahr ist.

		... was ist mit den anderen Aussagen?									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wenn diese Aussage richtig ist, ...	1	+	-	-	+	-	+	+	+	+	-
	2	-	+	-	-	-	+	+	-	+	-
	3	-	-	+	-	+	+	-	-	+	-
	4	-	+	-	+	-	+	+	+	-	-
	5	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-
	6	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-
	7	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-
	8	-	+	-	-	+	+	-	+	+	-
	9	-	-	-	+	-	+	+	+	+	-
	10	-	+	-	-	-	+	+	+	+	+

Hier bedeutet ein +, dass, wenn die Aussage dieser Zeile als einzige richtig ist (alle anderen falsch), die Aussage in der entsprechenden Spalte auch wahr sein muss. Beispielsweise ist, wenn Antwort 1 als richtig angenommen wird, auch automatisch Antwort 4 („Die richtige Lösung ist eine Quadratzahl.“) richtig. Analog heißt ein $-$, dass die Aussage in der Spalte falsch ist. Logischerweise ist die Diagonale in dieser Tabelle immer mit einem + besetzt, weil diese Aussage ja als wahr angenommen wird.
Widerspruchsfrei ist nur eine Aussage, die nur ein einziges + in ihrer Zeile aufweist. Und das ist allein in Zeile 7 der Fall.

Antwort 7: „Nr. 3 oder Nr. 8 ist falsch.“ ist also die einzige nach den Spielregeln zulässige Antwort.

4 Chocolate Chip Cookies

Autor: Gregor Heyne

4.1 Aufgabe

Der Bäcker des Weihnachtsmanns backt Chocolate Chip Cookies. Er gibt N Chips zufällig verteilt zum Teig und teilt den Teig in 100 Kekse auf. Wieviele Chips braucht er, das heißt wie groß muss N sein, damit er sicher ist, dass jeder Keks mit 90% Sicherheit einen Chip enthält? Nehmen Sie an, dass verschiedene Chips unabhängig voneinander in den Keksen auftauchen.

Antwortmöglichkeiten:

1. 50
2. 100
3. 276
4. 355
5. 492
6. 537
7. 683
8. 705
9. 846
10. 976

4.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der erste Chip im ersten Keks befindet, beträgt $p = 1/100$. Weiterhin ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich k Chips im ersten Keks befinden, durch eine Binomialverteilung gegeben, das heißt

$$P(\text{Der erste Keks entält genau } k \text{ chips}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich keine Chips im ersten Keks befinden, beträgt also

$$\binom{N}{0} p^0 (1-p)^N = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^N = \left(\frac{99}{100}\right)^N.$$

Daher können wir schließen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens ein Chip im ersten Keks befindet, $1-\left(\frac{99}{100}\right)^N$ beträgt. Aufgrund der angenommenen Unabhängigkeit des Auftretens von Chips in Keksen können wir für die Frage nach mindestens einem Chip in jedem Keks mit 90% Wahrscheinlichkeit die Gleichung

$$\left[1-\left(\frac{99}{100}\right)^N\right]^{100}=0.9$$

lösen. Wir erhalten $N=\frac{\ln(1-0.9^{0.01})}{\ln(0.99)}=682.17$, also 683 Chips.

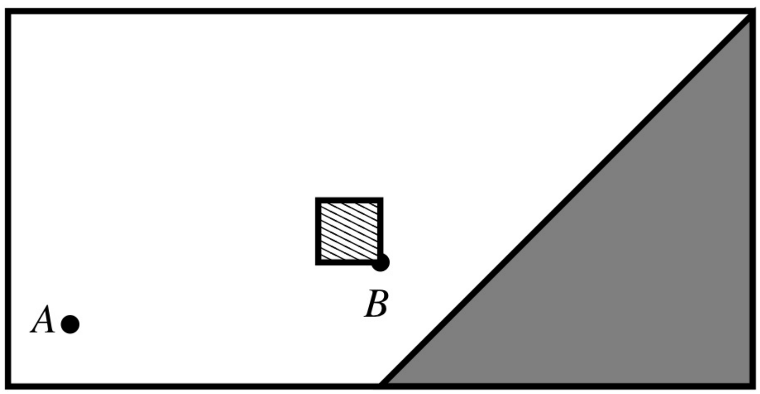
5 Backstube

Autoren: Cor Hurkens und Frits Spieksma

5.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann betreibt unzählige Backstuben. In der Backstube mit der Nummer 182-B72 werden Lebkuchen mit Schokolade überzogen. Die Backstube ist rechteckig und 24m lang und 12m breit; sie liegt tief unter der Erde und kann nur mit dem Lift erreicht werden. Der quadratische Liftschacht hat eine Seitenlänge von 2m, und seine nordöstliche Ecke liegt genau in der Mitte des Raumes; in der folgenden Skizze sehen wir den Liftschacht als kleines schraffiertes Quadrat im Grundriss der Backstube eingezeichnet.

In der südöstlichen Ecke des Raumes befindet sich ein riesiges dreieckiges Becken mit flüssiger Schokoladeglasur; Südseite und Ostseite des Beckens sind jeweils 12m lang. Der Punkt A ist 2m von der Südseite und 2m von der Westseite der Backstube entfernt. Der Punkt B ist 4m von der Südseite und 12m von der Westseite der Backstube entfernt (und fällt daher mit der Südostecke des Liftschachts zusammen). An den Wänden der Backstube befinden sich viele Reihen von Regalen, die mit Lebkuchen gefüllt sind.



Der Backwichtel Bastian steht im Punkt A der Backstube und liest sich seinen heutigen Arbeitsplan durch. Bastian hat der Reihe nach folgende Aufgaben zu erledigen:

- Zuerst muss Bastian zur Nordseite gehen und sich irgendeinen der Lebkuchen von irgendeinem der oberen Regale nehmen.
- Bastian muss diesen Lebkuchen zum Becken tragen und in die Glasur tauchen.
- Dann muss Bastian den Lebkuchen wieder zur Nordseite tragen und ihn dort an einer beliebigen Stelle in einem beliebigen der unteren Regale ablegen.
- Danach muss Bastian zur Westseite gehen und irgendeinen der dortigen Lebkuchen nehmen.
- Dieser Lebkuchen soll zur Südseite getragen und dort an einer beliebigen Stelle in einem beliebigen Regal abgelegt werden.
- Schließlich soll Bastian zum Punkt B gehen und in den Lift einsteigen.

Bastian erledigt seine Aufgaben und geht dabei den kürzest möglichen Weg von A (über Nordseite, Becken, Nordseite, Westseite, Südseite) nach B. Wir nehmen an, dass Bastian punktförmig ist und dass er auf seinem Weg weder durch den Liftschacht hindurchläuft noch ins Schokoladenbecken springt. Wie lange ist der kürzest mögliche Weg?

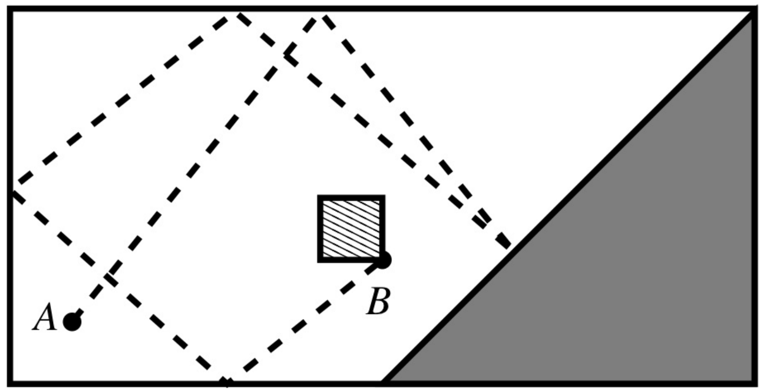
Antwortmöglichkeiten:

1. $59,60$m oder weniger
2. zwischen $59,60$ und $59,70$ Meter
3. zwischen $59,70$ und $59,80$ Meter
4. zwischen $59,80$ und $59,90$ Meter
5. zwischen $59,90$ und $60,00$ Meter
6. zwischen $60,00$ und $60,10$ Meter
7. zwischen $60,10$ und $60,20$ Meter
8. zwischen $60,20$ und $60,30$ Meter
9. zwischen $60,30$ und $60,40$ Meter
10. $60,40$m oder mehr

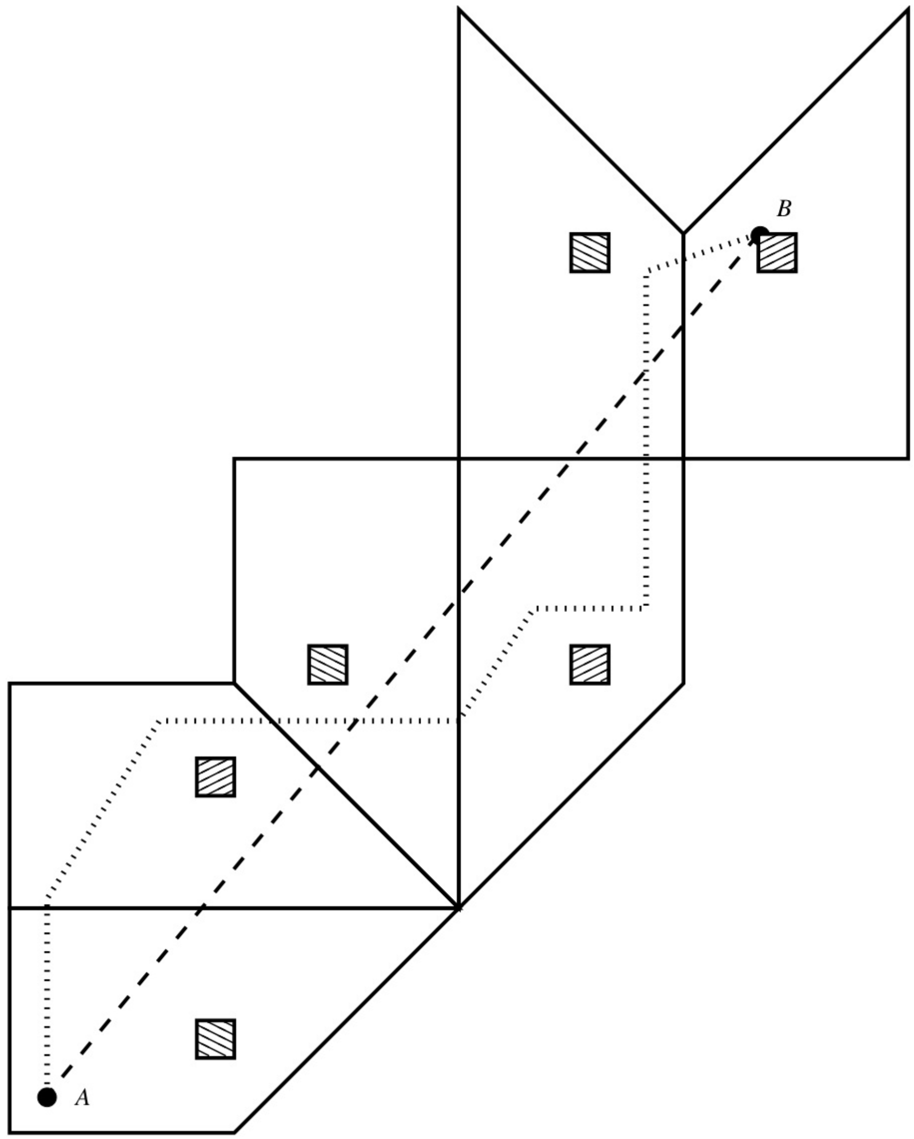
5.2 Lösung

Antwort 2 ist die korrekte Antwort.

Der kürzeste Weg von A (über Nordseite, Becken, Nordseite, Westseite, Südseite) nach B ist in Abbildung 1 gestrichelt eingezeichnet. Dieser Weg gehorcht natürlich dem Gesetz von Snellius: „Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel“.



Wie findet man diesen kürzesten Weg? Man könnte zum Beispiel die Backstube als Billiardtisch modellieren und dann versuchen, einen Billiardball von A nach B zu stoßen. Oder man könnte die Wände der Backstube und den Beckenrand verspiegeln und dann einen Lichtstrahl von A nach B senden. Der Punkt P, in dem der Weg das erste Mal auf die Nordseite trifft, legt (mit dem Gesetz von Snellius) bereits den gesamten Weg von A bis B fest. Mathematisch gesehen könnte man nun die x-Koordinate von P als Variable wählen, alle sechs Wegstücke mit Hilfe dieser x-Koordinate ausdrücken, und letztendlich die Summe der entsprechenden sechs Weglängen minimieren. Das kostet viel Zeit und viel Schweiß, und führt außerdem zu furchtbar komplizierten mathematischen Gleichungen.



Hier ist ein einfacherer Lösungsweg. Abbildung 2 zeigt uns sechs geeignet gespiegelte und verschobene Kopien der Backstube, die der Reihe nach jeweils eines der sechs Wegstücke enthalten müssen. Der punktierte Weg von A in der ersten Kopie nach B in der sechsten Kopie stellt einen möglichen Weg für den Backwichtel dar. Der kürzeste Weg von A in der ersten Kopie nach B in der sechsten Kopie ist aber natürlich die gestrichelte Gerade. Wenn man die sechs Kopien zusammenklappt und über einander legt, bildet die gestrichelte

Gerade genau unseren gestrichelten kürzesten Weg in Abbildung 1.

Und wie rechnet man die Länge dieses kürzesten Weges aus? Wir führen ein Koordinatensystem ein, das der linken unteren Ecke in Abbildung 2 die Koordinaten $(0, 0)$ zuweist und das 1 Meter als Einheitslänge hat. Die rechte obere Ecke liegt dann in $(48, 60)$, der Punkt A in der ersten Kopie liegt in $(2, 2)$, und der Punkt B in der sechsten Kopie liegt in $(40, 48)$. Die Länge des kürzesten Weges ist daher $\sqrt{38^2 + 46^2} = \sqrt{3560} \approx 59,67$, womit Antwort 2 die korrekte Antwort ist.

6 Chiffre

Autor: Bensi N.

6.1 Aufgabe

Seit einigen Monaten rumort es kräftig im Reich des Weihnachtsmannes. Die Gewerkschaft der Wichtel fordert mehr Mitbestimmungsrechte im Produktionsablauf und eine Abschaffung des 20-Stunden-Tages. Der Weihnachtsmann ist nicht bereit auf die Forderungen einzugehen, woraufhin es zu einem Generalstreik im ganzen Weihnachtsreich gekommen ist. Die Produktion steht dadurch seit mehreren Wochen still, weshalb der Weihnachtsmann gezwungen ist zu handeln.

Er überlegt lange, wie am besten vorzugehen ist und kommt am Ende auf eine gute Idee. Diese verschickt er verschlüsselt an alle Mitglieder des ihm treuen

Ältestenrates des Weihnachtsreiches. Eine dieser Botschaften wird aber von den Wichteln abgefangen. Sie enthält folgenden chiffrierten Text:

```
ISDESKITIEENAHNCIHRCVMTOEHWIAHN
CSATMNDN.EIISTISEEANNHICRHVCTMR
OEIDFNREEDRESASLTE.USEEARRTEESA
SLUAEDUSLROBLLEHTONEDWRNIE.HACH
ENBIELBRNIIEEZNNTEETVRLETCSETAK
.FIUDSNEEETZTLAEHECBIENHIAGLNSO
ECEODWTERGCRSHEEIB.INDESEREETPS
NRODE,IIDMREEISCDSOWREONNTETBN,
KMEOTOM5UOERUEZGCISHK.CTEADTLFI
SNEIDIRTHUWAFCTIHLTESEKRIWR.OPE
DRSCS.MAO.HDC,EIIRHICTENGAWRTOI
TTSERUBGNIEDESIISMTM.OA
```

Die Wichtel versuchen natürlich, den chiffrierten Text zu entschlüsseln. Erst tappen sie im Dunkeln. Aber dann erinnert sich ein Wichtel, dass er mal ein Mitglied des Ältestenrates hatte sagen hören, dass der Weihnachtsmann mal erzählt hatte, dass er sich vor einiger Zeit hobbymäßig mit Kryptographie beschäftigt und in einem alten Lehrbuch über Weihnachtsmann-Kryptographie einen von Vorahnen des Weihnachtsmanns überlieferten Verschlüsselungsalgorithmus kennengelernt hatte, von dem der Weihnachtsmann ganz begeistert war und der irgendwie mit Unterteilungen des Textes in gleich große Blöcke zu tun hatte.

Mit diesem Hinweis können die Wichtel mit einigem Probieren den chiffrierten Text nun doch entschlüsseln.

Welche Antwortmöglichkeit würden die schlauen Wichtel anklicken?

Antwortmöglichkeiten:

1. Den Streik gewaltsam zu brechen und die Wichtel zur Produktion zu zwingen.

2. Die gesamte Produktion dauerhaft in Niedriglohnländer auszulagern.
3. Weihnachten ausfallen zu lassen und in den Urlaub zu fahren.
4. Die blauen Katzen um Rat zu fragen.
5. Die Arbeitsbedingungen zu verbessern und auf weitere Forderungen der Gewerkschaft einzugehen.
6. Den Streikenden zwangsweise Soma zu verabreichen.
7. Sämtliche Mathematiklehrer an deutschen Gymnasien werden anstatt der Wichtel zur Geschenkproduktion gezwungen.
8. Er wird mit den drei ältesten Robben Helgolands zu Abend speisen und über das weitere Vorgehen beraten.
9. Der Weihnachtsmann fragt seine Omas um Rat.
10. Der Weihnachtsmann verschenkt statt der Geschenke einfach die Wichtel und stellt später neue ein.

6.2 Lösung

Richtige Lösung: 6

Die Lösung ist „Den Streikenden zwangsweise Soma zu verabreichen“. Der Chiffretext wird nicht verraten, ist ja schließlich geheim!

7 Rudi, das laktoseintolerante Rentier

Autor: Simon Rösel

7.1 Aufgabe

Dieses Jahr ist Rudi, das treue rotnasige Rentier und bester Helfer des Weihnachtsmanns, in schlechter Laune: Er erinnert sich nur ungern an letztes

Jahr, als er vom Weihnachtsmann wie jedes Jahr einen wunderschönen Adventskalender als Vorauszahlung für seine weihnachtlichen Verdienste bekommen hatte. Der Adventskalender enthielt hinter jedem Türchen ein leckeres Stück Milchschokolade, die Rentier Rudi doch so sehr mag. Doch pünktlich zu Weihnachten bekam Rudi starke Bauchschmerzen, worauf ihm der örtliche Rentierarzt Dr. med. Izin eine akute Laktoseintoleranz bescheinigte. Der Arzt riet ihm außerdem, an höchstens zwei Tagen nacheinander laktosehaltige Produkte zu verzehren, da er sonst pünktlich zum ersten Weihnachtsfeiertag wieder heftige Verdauungsprobleme bekäme.

Zum Glück hatte der Weihnachtsmann dieses Jahr einen alternativen Adventskalender in Auftrag gegeben, doch leider haben seine Elfen mal wieder geschludert! Statt, wie gefordert, überall laktosefreie Schokolade zu verwenden, haben die Elfen hin und wieder Stücke aus (echter) Milchschokolade hinter den Türchen versteckt, die zu allem Überfluss sowohl vom Geschmack als auch vom Aussehen nicht von ihrer laktosefreien Alternative zu unterscheiden sind.

Auf ungeduldige Nachfrage des Weihnachtsmanns gaben die Elfen an, dass sie nicht genau wüssten, wieviel Milchschokolade sie verwendet hatten, sie könnten nur versichern, dass sie hinter jedem Türchen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 50% laktosefreie oder laktosehaltige Schokolade versteckt hatten, unabhängig davon, welche Sorten sich hinter den anderen Türchen befanden. Und einen neuen Kalender zu basteln sei in dieser wirtschaftlichen Krise „praktisch unmöglich“.

Traurig nimmt Rudi den diesjährigen Kalender entgegen. Da fällt ihm plötzlich ein, dass er ja zumindest sicher sein kann, den Inhalt der ersten beiden Türchen gefahrlos verspeisen zu können. Mutig verkündet er: „Ich esse täglich vom Adventskalender, solange die Wahrscheinlichkeit zu erkranken unter 50% bleibt - das sollte bis kurz vor Weihnachten dauern!“ Zwischendurch einen Tag auszusetzen, kommt für Rudi natürlich nicht in Frage und an dem Tag, wo die Wahrscheinlichkeit zu erkranken, bei gleich oder mehr als 50% liegt, wird Rudi auch garantiert nicht mehr von der Schokolade naschen - verspricht er zumindest dem besorgten Weihnachtsmann.
Bis zu einschließlich welchem Tag kann Rudi den Adventskalender öffnen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 4. Dezember
2. 5. Dezember
3. Nikolaus-Tag
4. 7. Dezember
5. 9. Dezember
6. 11. Dezember
7. 13. Dezember
8. 15. Dezember
9. 17. Dezember
10. Heiligabend

7.2 Lösung

Lösung 5 ist richtig.

Nach der Aussage des Arztes, erkrankt unser Rudi, sobald er an drei Tagen nacheinander laktosehaltige Schokolade isst. Betrachtet man das Essen des Adventskalender-Inhaltes bis einschließlich des k-ten Tages ($k = 1, \ldots, 24$) als Zufallsexperiment, wobei für jeden Tag mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/2$ die zwei Ereignisse

- L: „Das Kalendertürchen enthält laktosehaltige Schokolade.“
- F: „Das Kalendertürchen enthält laktosefreie Schokolade.“

auftreten, können wir alle möglichen Ausgänge, insgesamt 2^k an der Zahl, in einem Vektor

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in \{L, F\},$$

mit $i \in \{1, \ldots, k\}$, zusammenfassen.

Zunächst betrachten wir das (für Rudi wünschenswerte) Gegenereignis zum gesuchten Ereignis und definieren:

$E(k) =$„Bis einschließlich des k-ten Tages enthält der Adventskalender keine 3 laktosehaltigen Schokostückchen nacheinander."

Wir berechnen nun $e(k)$, die Anzahl der für dieses Ereignis positiven Ausgänge.

Wie Rudi es bereits angedeutet hat, ist

$$e(1) = 2, E(1) = \{(L), (F)\}$$
$$e(2) = 4, E(2) = \{(F, F), (L, L), (L, F), (F, L)\},$$

die ersten beiden Tage sind also gefahrlos. Allerdings ist

$$E(3) = \{(F, F, F), (L, F, F), (F, L, F), (F, F, L), (L, L, F), (L, F, L), (F, L, L)\},$$

also e(3) $= 7$, denn das Ereignis (L, L, L) würde Rudi Bauchschmerzen bereiten. Für $k > 3$ zerlegen wir das Ereignis $E(k)$ in folgende disjunkte Teilereignisse:

$$E(k) = E_F(k) \,\dot{\cup}\, E_L(k)$$

wobei $E_F(k)$ alle Ausgänge ($e_F(k)$ an der Zahl) für $E(k)$ enthält, deren k-tes Stückchen laktosefrei ist. $E_L(k)$ enthält demzufolge alle Ausgänge für $E(k)$, deren k-tes Stückchen laktosehaltig ist ($e_L(k)$ an der Zahl). Es gilt also $e(k) = e_F(k) + e_L(k)$.

$e_F(k)$ ist leicht zu bestimmen, denn da wir den k-ten Eintrag als laktosefrei fixieren, gilt einfach $e_F(k) = e(k-1)$.

Um $e_L(k)$ zu bestimmen, zerlegen wir es in weitere Untereereignisse: Mit Bezeichnungen wie oben haben wir $E_L(k) = E_{FL}(k) \,\dot{\cup}\, E_{LL}(k)$.

Für $E_{FL}(k)$ gilt mit der gleichen Begründung wie oben

$$e_{FL}(k) = e(k-2).$$

Da $E_{LL}(k)$ ein Teilereignis von $E(k)$ ist, muss das $(k-2)$-te Türchen ein laktosefreies Schokostück enthalten:

$$E_{LL}(k) = \{(x_1, \dots, x_{k-3}, F, L, L) : x_i \in \{L, F\} \text{ für } i = 1, ..., k-3\}.$$

Es gilt also

$$e_{LL}(k) = e(k-3).$$

Fassen wir zusammen, erhalten wir für $k > 3$

$$\begin{aligned} e(k) &= e_F(k) + e_L(k) \\ &= e_F(k) + e_{FL}(k) + e_{LL}(k) \\ &= e(k-1) + e(k-2) + e(k-3), \end{aligned}$$

die Bildungsvorschrift der **3-Schritt-Fibonacci-** oder auch **Tribonacci-Folge**

$$Fib_3 = 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \dots$$

Berücksichtigt man die Startwerte, gilt $e(k) = Fib_3(k+2)$ für k=1,...,24. Für die Wahrscheinlichkeit $P(E(k))$ haben wir

$$P(E(k)) = \tfrac{Fib_3(k+2)}{2^k},$$

demzufolge gilt für das Gegenereignis

$$P(E(k)^c) = 1 - \tfrac{Fib_3(k+2)}{2^k}.$$

Ein bisschen Rechnerei zeigt nun

$$\begin{aligned} P(E(9)^c) &= \tfrac{238}{512} \\ P(E(10)^c) &= \tfrac{520}{1024} \end{aligned}$$

Da $P(E(k)^c)$ monoton steigend in der Anzahl der Tage ist, ist Antwort 5 richtig, d.h. bis einschließlich zum 9.Dezember kann Rudi nach seiner Taktik die Adventskalendertürchen öffnen.

8 Winterreise

Autor: Cor Hurkens

8.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht plant eine Winterreise entlang der malerisch gelegenen Nordpolarpiste. Diese Piste ist 2000 km lang und wird in Kilometerabständen von Kilometersteinen unterteilt; der erste dieser Kilometersteine hat die Nummer 0, und der letzte Kilometerstein hat die Nummer 2000. Knecht Ruprecht fährt mit seinem alten Motorschlitten, der mit Holz angetrieben und beheizt wird. Auf dem Motorschlitten hat eine Ladung Holz Platz, mit der Knecht Ruprecht genau 420 Kilometer zurücklegen kann. Von seinen früheren Winterreisen lagern entlang der Piste noch einige alte Holzvorräte:

- Am Anfang der Piste (beim Kilometerstein 0) liegen 4 Holzladungen;
- beim Kilometerstein 249 liegen 7/4 Holzladungen;
- beim Kilometerstein 894 liegen 8/5 Holzladungen;
- beim Kilometerstein 978 liegen 3 Holzladungen.

Knecht Ruprecht beginnt beim Kilometerstein 0 mit einem zunächst unbeladenen und völlig leeren Schlitten. Er möchte einen Kilometerstein mit möglichst großer Nummer erreichen, indem er die bereits vorhandenen Holzvorräte geschickt ausnutzt und einige Zwischenlager einrichtet.

(Zum Beispiel könnte Ruprecht mit einer vollen Ladung bis zum Kilometerstein 140 fahren, dort eine Drittelladung abladen, wieder zurück zum Kilometerstein 0 fahren und das soeben errichtete Zwischenlager dann bei einer späteren Fahrt ausnutzen.)

Die bestmögliche Ausnutzung der Holzvorräte bringt Knecht Ruprecht bis zum Kilometerstein mit der Nummer x. Welche der folgenden Aussagen trifft auf x zu?

Antwortmöglichkeiten:

1. $x \leq 632$
2. $633 \leq x \leq 847$
3. $848 \leq x \leq 891$
4. $x = 892$
5. $x = 893$
6. $894 \leq x \leq 977$
7. $978 \leq x \leq 1681$
8. $x = 1682$

9. $x = 1683$
10. $1684 \leq x \leq 2000$

8.2 Lösung

Die korrekte Antwort ist 5.

Wir diskutieren der Reihe nach sechs kritische Punkte entlang der Piste, und wir analysieren wieviel Holz Knecht Ruprecht zu diesen Punkten transportieren kann.

(1) Der erste kritische Punkt A liegt bei Kilometerstein 60. Wir nehmen zunächst zwecks Widerspruchs an, Ruprecht könnte strikt mehr als 3 der 4 Holzladungen vom Pistenanfang bis A bringen. Wir betrachten einen beliebigen Punkt P zwischen dem Pistenanfang und A. Da Ruprecht mehr als 3 Holzladungen nach A tranportiert, muss er diesen Punkt P mindestens viermal auf einer Vorwärtsfahrt überqueren, und natürlich muss er dazwischen auch mindestens drei Rückfahrten machen. Das bedeutet, dass Ruprecht jeden Punkt zwischen Pistenanfang und A mindestens siebenmal überquert; er legt in diesem Intervall also mindestens $7 \cdot 60 = 420$ Kilometer zurück und braucht dazu eine volle Holzladung. Dann bleiben aber höchstens 3 der Holzladungen vom Pistenanfang für Punkt A übrig. Widerspruch.

Man kann auch leicht sehen, dass Ruprecht tatsächlich 3 volle Ladungen nach A bringen kann: Er fährt dreimal vollgeladen nach A, legt eine 5/7-Ladung ab, und kehrt mit der restlichen 1/7-Ladung zum Pistenanfang zurück. Mit der vierten Ladung fährt er bis A und legt die restliche 6/7-Ladung ab. Dann liegen in A genau $5/7+5/7+5/7+6/7 = 3$ Ladungen, und dies ist das bestmögliche Resultat für Ruprecht. Wir nehmen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass Ruprecht zunächst einmal 3 Ladungen vom Pistenanfang nach A bringt.

(2) Der zweite kritische Punkt B liegt bei Kilometerstein 144. Wir betrachten das 84 km lange Intervall zwischen A und B nachdem Ruprecht 3 Ladungen

nach A gebracht hat. Wenn wir annehmen, dass Ruprecht mehr als 2 dieser 3 Holzladungen von A nach B bringen kann, so erhalten wir einen ähnlichen Widerspruch wie unter (1): Ruprecht müsste nämlich zwischen A und B mindestens $5 \cdot 84 = 420$ Kilometer zurücklegen. Weiterhin ist leicht zu sehen, dass Ruprecht mit drei Teilreisen $3/5 + 3/5 + 4/5 = 2$ Ladungen nach B bringen kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir daher an, dass Ruprecht 2 Ladungen von A nach B bringt.

(3) Der dritte kritische Punkt C liegt bei Kilometerstein 249 (bei dem auch schon ein Vorrat von 7/4 Holzladungen wartet). Wir betrachten das 105 km lange Intervall zwischen B und C nachdem Ruprecht 2 Ladungen nach B gebracht hat. Wir halten fest, dass der Motorschlitten für diese 105 Kilometer genau eine Viertelladung benötigt.

Wenn wir annehmen, dass Ruprecht mehr als 5/4 seiner 2 Holzladungen von B nach C bringen kann, so erhalten wir wieder einen Widerspruch: Ruprecht müsste zwischen B und C mindestens $3 \cdot 105 = 315$ Kilometer zurücklegen und dafür $315/420 = 3/4$ Holzladungen verbrauchen; dann kämen aber höchstens $2 - 3/4 = 5/4$ Ladungen bis nach C. Widerspruch. Und es ist auch wieder leicht zu sehen, dass Ruprecht mit zwei Teilreisen $2/4 + 3/4 = 5/4$ Ladungen nach C bringen kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass Ruprecht 5/4 Ladungen von B nach C bringt. Letztendlich liegen dann im Punkt C insgesamt $7/4 + 5/4 = 3$ Ladungen.

(4) Der vierte kritische Punkt D liegt bei Kilometerstein 333. Wir betrachten das 84 km lange Intervall zwischen C und D. Laut (3) stehen Ruprecht 3 Holzladungen in C zur Verfügung, und wir können völlig analog zu (2) argumentieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit bringt Ruprecht also durch drei Teilreisen genau 2 Ladungen von C nach D.

(5) Der fünfte kritische Punkt E liegt bei Kilometerstein 473. Wir betrachten das 140 km lange Intervall zwischen D und E nachdem Ruprecht 2 Ladungen nach D gebracht hat. Wenn wir annehmen, dass Ruprecht mehr als eine Ladung nach E bringt, so muss er zwischen D und E mindestens $3 \cdot 140 = 420$ Kilometer zurücklegen und dafür eine ganze Holzladung verbrauchen; dann käme aber höchstens eine Ladung bis nach E und wir hätten einen Widerspruch. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit bringt Ruprecht also (durch zwei Teilreisen) genau eine Ladung nach E.

(6) Der sechste kritische Punkt F liegt bei Kilometerstein 893. Wir betrachten das 420 km lange Intervall zwischen E und F. In (5) haben wir gesehen, dass Ruprecht nur eine einzige Ladung bis E bringen kann. Mit dieser Ladung kann er dann zwar noch die 420 Kilometer bis F fahren, aber den nächsten Holzstapel beim Kilometerstein 894 nicht mehr erreichen. Im Punkt F ist Ruprechts Reise also zu Ende.

(Und was macht Knecht Ruprecht, wenn er holzlos beim Kilometerstein 893 angekommen ist? Er ruft mit seinem Handy den Weihnachtsmann an und bittet darum, mit dem fliegenden Rentierschlitten abgeholt zu werden.)

9 Adventslotto

Autor: Hennie ter Morsche

9.1 Aufgabe

Wichtel Willi ist Ziehungsleiter beim Wichtelhausener Adventslotto. Die Anzahl der Ziehungen ist hier 24, da nur in der Adventszeit vom 1. bis 24. Dezember täglich eine Ziehung stattfindet. Außerdem werden nur drei Zahlen von 1 bis 20 gezogen. Es sind also 20*19*18/6=1140 verschiedene Ergebnisse möglich. Der Weihnachtsmann berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Ergebnis während einer Adventszeit wiederholt, und stellt fest, dass sie sehr klein ist. Er verspricht Willi eine Extrarunde im Rentierschlitten, falls das tatsächlich passieren sollte. Wichtel Willi wollte schon immer Rentierschlitten fahren. Er ahnt, dass seine Chancen auf die Extrarunde größer werden, wenn nicht alle Ziehungsergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Also manipuliert er die Lottomaschine so, dass die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$ und $\{3, 4, 5\}$ jeweils 5 % und die Wahrscheinlichkeit aller anderen 1137 Ergebnisse jeweils (85/1137)% $\approx$ 0.075% beträgt. Für diese manipulierte Maschine berechnet Willi nun nochmals die Wahrscheinlichkeit p für mindestens eine Wiederholung desselben Ergebnisses innerhalb von 24 Ziehungen.

Die Wahrscheinlichkeit p beträgt (gerundet auf ganze Prozente):

Antwortmöglichkeiten:

1. $p = 85\%$,
2. $p = 91\%$,
3. $p = 63\%$,
4. $p = 70\%$,
5. $p = 22\%$,
6. $p = 60\%$,
7. $p = 78\%$,
8. $p = 86\%$,
9. $p = 95\%$,
10. $p = 69\%$.

9.2 Lösung

Richtige Antwort: 7

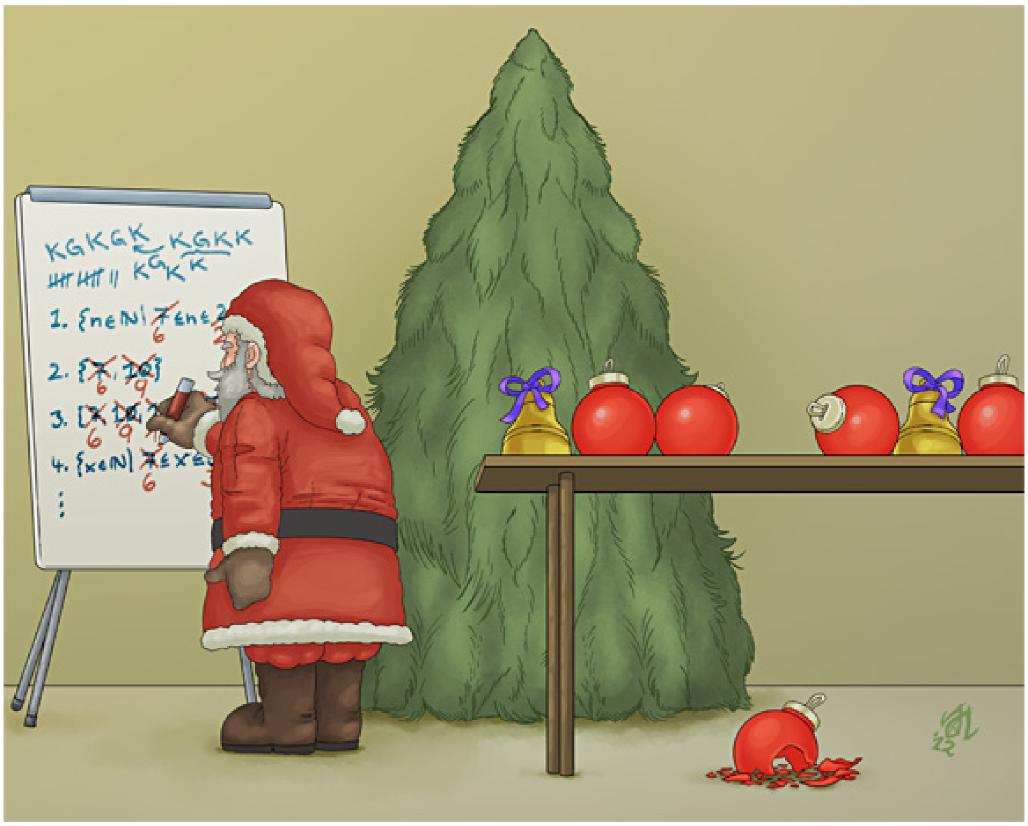
$N = 1140$, $N_1 = 3$, $N_2 = 1137$, $n = 24$, $p_1 = 0.05$, $p_2 = (85/1137)\%$.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $p = 1 - q$ mit

$$q = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k} p_1^k \, p_2^{n-k}.$$

10 Weihnachtsbaum schmücken

Autor: Hans Zantema



10.1 Aufgabe

Ein Weihnachtsbaum soll mit Glocken und Kugeln geschmückt werden. Es liegen zunächst fünf Kugeln (K) und vier Glocken (G) in einer Reihe, und zwar in der Reihenfolge KGKGKGKGK. Gemäß einem altem Weihnachtsbrauch wird diese Reihe entsprechend der folgenden Spielregel erweitert: Man sucht sich in der Reihe irgendeine Glocke, die zwischen zwei Kugeln liegt, vertauscht diese Glocke mit der Kugel links neben ihr und fügt rechts von der Glocke eine neue Kugel hinzu. Das betrachtete Muster KGK wird also durch GKKK ersetzt. Diese Regel wird so oft wie möglich angewendet, bis das Muster KGK in der Reihe nicht mehr vorkommt.

Welche Zahlenmenge beschreibt alle möglichen Anzahlen von Kugeln, die bei diesem alten Weihnachtsbrauch nach korrekter Anwendung der Spielregel letztendlich am Baum hängen könnten?

Antwortmöglichkeiten:

1. $\{n \in \mathbb{N} \mid 7 \leq n \leq 25\}$
2. $\{7, 10\}$
3. $\{7, 10, 13, 16, 17, 19, 22, 24, 25, 28, 31\}$
4. $\{n \in \mathbb{N} \mid 7 \leq n \leq 31$ und n ist ungerade$\}$
5. $\{7, 10, 13, 16, 17, 19, 22, 25, 28, 31\}$
6. $\{7, 10, 13, 15, 17, 19, 22, 24, 25, 31, 33\}$
7. $\{7, 10, 16, 17, 19, 22, 25, 28, 35\}$
8. $\{7, 13, 16, 17, 19, 22, 24, 25, 28, 31\}$
9. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10\}$
10. Keine dieser Möglichkeiten.

10.2 Lösung

Lösung 3 ist richtig.

Wieviel Kugeln werden schließlich am Baum hängen? Die möglichen Anzahlen der Kugeln am Baum sind $7, 10, 13, 16, 17, 19, 22, 24, 25, 28, 31$ mit den folgenden möglichen Verteilungen:

- 7 : $K\,G\,G\,K\,K\,K\,G\,G\;K\,K\,K = K\,G^2\,K^3\,G^2\,K^3$,
- 10: $G^2\,K^7\,G^2\,K^3$,
- 13: $G^2\,K^6\,G^2\,K^7$,
- 16: $G^2\,K^5\,G^2\,K^{11}$,
- 17: $G\,K^2\,G^3\,K^{15}$,
- 19: $G^2\,K^4\,G^2\,K^{15}$,
- 22: $G^2\,K^3\,G^2\,K^{19}$,
- 24: $G^4\,K^{24}$,
- 25: $G^2\,K^2\,G^2\,K^{23}$,
- 28: $G^2\,K\,G^2\,K^{27}$,
- 31: $G^4\,K^{31}$.

11 Chaos in der Weihnachtsmannwerkstatt

Autoren: Annegret Glitzky, Matthias Liero und Alexander Mielke

11.1 Aufgabe

In der Werkstatt des Weihnachtsmanns arbeiten zeitgleich zwei Elfenteams an der Herstellung der Spielzeuge – Team (A) und Team (B). Der Weihnachtsmann ist mit der Effizienz der beiden Teams überhaupt nicht zufrieden und studiert daher die Arbeitsgewohnheiten der beiden Teams: Er beobachtet, dass hin und wieder ein Elf aus Team (A) und ein Elf aus Team (B) zufällig aufeinander treffen und dann gemeinsam im Pausenraum der Werkstatt verschwinden und irgendwann wieder gemeinsam auftauchen. Darüberhinaus sind die Elfen aus Team (A) ziemlich müde Zeitgenossen; sie schlafen manchmal einfach am Arbeitsplatz ein (sie bedienen dabei glücklicherweise keine schweren Maschinen).

Da der Weihnachtsmann ein alter Fuchs in der Modellierung von Reaktionsprozessen ist, erkennt er, dass sich dieses Arbeitsverhalten mit (chemischen) Reaktionsgleichungen beschreiben lässt:

$$\text{arbeitender Elf}_A + \text{arbeitender Elf}_B \underset{\text{zurück}}{\overset{\text{vor}}{\rightleftharpoons}} \text{Pausenraum}$$

$$\text{arbeitender Elf}_A \underset{\text{zurück}}{\overset{\text{vor}}{\rightleftharpoons}} \text{schlafender Elf}_A.$$

Da sehr sehr viele Elfen in der Werkstatt arbeiten, kann der Weihnachtsmann annehmen, dass die Anzahl der arbeitenden Elfen aus den Teams (A) und (B) und die schlafenden Elfen aus Team (A) durch große reelle Zahlen E, L und S beschrieben werden können (insbesondere gibt $E+S$ also die Anzahl aller Elfen aus Team (A) an). In Wikipedia findet der Weihnachtsmann, dass sich E, L und S gemäß des Massenwirkungsgesetzes mit der Zeit verändern: Er kann folgende Gleichungen hinschreiben

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta E}{\Delta t}(t) &= \big(N^2 - E(t)\cdot L(t)\big) + \big(\alpha S(t) - \beta E(t)\big),\\
\frac{\Delta L}{\Delta t}(t) &= \big(N^2 - E(t)\cdot L(t)\big),\\
\frac{\Delta S}{\Delta t}(t) &= \qquad\qquad\qquad\quad + \big(\beta E(t) - \alpha S(t)\big).
\end{aligned} \tag{$\star$}$$

Hierbei bezeichnet $\frac{\Delta Y}{\Delta t}$ die zeitliche Änderung der Größe $Y = E, L, S$ in einem sehr kleinen Zeitintervall Δt (Zeitableitung). Ferner bezeichnen $\alpha = \frac{100}{21}\beta$ und $N = 3300$ gegebene positive Konstanten, die der Weihnachtsmann anhand seiner Beobachtungen bestimmt hat.

Zu Arbeitsbeginn befinden sich $E(t{=}0) = L(t{=}0) = 5000$ arbeitende Elfen aus beiden Teams und $S(t{=}0) = 0$ schlafende Elfen in der Werkstatt des Weihnachtsmanns. Nach längerer Zeit stellt sich in der Werkstatt ein Gleichgewicht ein, d.h. die Größen E, L und S werden zeitlich konstant. Dieser

Gleichgewichtszustand, der mit E_*, L_* und S_* bezeichnet wird, kann explizit in Abhängigkeit von den Parametern α, β und N aus dem Gleichungssystem $(\star)$ und den Werten bei Arbeitsbeginn berechnet werden.

Den Weihnachtsmann interessiert es nun brennend, wieviel Arbeit von den Elfen unter diesen Umständen mindestens geleistet werden kann. Der Assistent des Weihnachtsmanns, Harry Elmoltz, weiß, dass dafür die „Entropie“ (Maß für Chaos) maximiert werden muss. Dummerweise hat er vergessen, wie diese Funktion genau aussieht: Er kann sich bis auf drei Parameter $(X_1, X_2, X_3) = \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^3$ an alles erinnern und schreibt folgende Formel für die Entropie $\mathrm{Entr}_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ auf:

$$\mathrm{Entr}_{\boldsymbol{X}}(E, L, S) = X_1{\cdot}E + X_2{\cdot}L + X_3{\cdot}S - E{\cdot}\ln(E) - L{\cdot}\ln(L) - S{\cdot}\ln(S).$$

Hierbei bezeichnet $x \mapsto \ln(x)$ den natürlichen Logarithmus. Harry erinnert sich aber, dass die Gleichgewichtslösungen stets die Entropie maximieren, d.h.

$$\mathrm{Entr}_{\boldsymbol{X}}(E_*, L_*, S_*) = \max_{(E,L,S)\in\mathbb{R}^3_+} \mathrm{Entr}_{\boldsymbol{X}}(E, L, S).$$

Kannst Du Harry helfen und die fehlenden Parameter (X_1, X_2, X_3) bestimmen?

Tipp: Es gibt Konstanten c_1, c_2 und c_3, so dass $c_1{\cdot}E + c_2{\cdot}L + c_3{\cdot}S$ zeitlich konstant entlang von Lösungen von $(\star)$ ist.

Antwortmöglichkeiten:

1. $(X_1, X_2, X_3) = (3, 3.63, 0.63)$
2. $(X_1, X_2, X_3) \approx (9, 9.2, 7.4)$
3. $(X_1, X_2, X_3) \approx (15.4, 10.2, 14.7)$
4. $(X_1, X_2, X_3) = (3300, 3300, 3300)$
5. $(X_1, X_2, X_3) = (3000, 3630, 630)$
6. $(X_1, X_2, X_3) = (2{\cdot}\alpha, 4.5{\cdot}\alpha, 1.5{\cdot}\alpha)$

7. $(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 1)$
8. $(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 0)$
9. $(X_1, X_2, X_3) \approx (8, 8.2, 6.4)$
10. $(X_1, X_2, X_3) \approx (2.2, 6.7, 3.6)$

Projektbezug:
Der clevere Leser der Aufgabe hat natürlich sofort bemerkt, dass es sich bei den Elfen aus Team (A) und Team (B) um Elektronen und Löcher (Leerstellen für Elektronen im Kristallgitter) in einem Halbleitermaterial handelt. Der Weihnachtsmann übernimmt hierbei die Rolle des Physikers, der z.B. mit der Effizienz seiner Solarzelle unzufrieden ist. Das hier vorgestellte Modell ist eine starke Vereinfachung der Vorgänge in einem Halbleiter. Neben der in der Aufgabe vereinfacht dargestellten Rekombination und Generation von Elektron-Loch-Paaren und dem Einfangen von Elektronen in sog. tiefen Störstellen müssen hier noch die zufällige und die gerichtete Bewegung der Elektronen und Löcher (Diffusion und Drift) sowie andere komplizierte Effekte berücksichtigt werden. Um diese Effekte zu verstehen, leiten Mathematiker im Verbund mit Physikern Modelle her, die die Funktionsweise der Solarzelle besser beschreiben. Das Matheon widmet sich diesen Fragestellungen im Projekt D22 *Modellierung elektronischer Eigenschaften von Grenzschichten in Solarzellen.*

11.2 Lösung

Antwort 2 ist richtig.

Wir berechnen zunächst die Gleichgewichtszustände E_*, L_* und S_*. Diese erfüllen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E}{\Delta t}(t) &= \big(N^2 - E(t)\cdot L(t)\big) + \big(\alpha S(t) - \beta E(t)\big),\\ \frac{\Delta L}{\Delta t}(t) &= \big(N^2 - E(t)\cdot L(t)\big),\\ \frac{\Delta S}{\Delta t}(t) &= \qquad\qquad\qquad\quad + \big(\beta E(t) - \alpha S(t)\big).\end{aligned} \tag{$\star$}$$

($\star$) mit $\frac{\Delta E_*}{\Delta t} = \frac{\Delta L_*}{\Delta t} = \frac{\Delta S_*}{\Delta t} = 0$, sodass gelten muss

$$0 = N^2 - E_*\cdot L_*, \qquad 0 = \beta E_* - \alpha S_*.$$

Dies sind nur zwei Gleichungen für drei Unbekannte. Wir brauchen also noch eine dritte Beziehung zwischen den Größen E_*, L_* und S_*. Dazu bemerken wir, dass Subtrahieren der zweiten Gleichung in ($\star$) von der ersten Gleichung mit anschließender Addition der dritten Gleichung auf die folgende Beziehung führt

$$\frac{\Delta E}{\Delta t}(t) - \frac{\Delta L}{\Delta t}(t) + \frac{\Delta S}{\Delta t}(t) = \frac{\Delta\big(E(t) - L(t) + S(t)\big)}{\Delta t} = 0.$$

Dies bedeutet, dass sich die Größe $E(t) - L(t) + S(t)$ zeitlich nicht ändert - sie bleibt erhalten. Benutzen wir die gegebenen Anfangswerte $E(0) = L(0) = 5000$ und $S(0) = 0$, so erhalten wir das System

$$0 = N^2 - E_*\cdot L_*, \qquad 0 = \beta E_* - \alpha S_*, \qquad 0 = E_* - L_* + S_*.$$

Umstellen der Gleichungen nach E_* führt auf die quadratische Gleichung

$$\Big(1 + \frac{\beta}{\alpha}\Big) E_*^2 = N^2.$$

Setzen wir die gegebenen Werte $N = 3300$ und $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{21}{100}$ ein, erhalten wir die Lösung $E_* = 3000$ (natürlich ist $E_* = -3000$ auch Lösung, wir interessieren uns hier aber nur für „sinnvolle" Lösungen). Die Gleichgewichtszustände lauten also

$$E_* = 3000, \qquad L_* = 3630 \quad \text{und} \quad S_* = 630.$$

Um jetzt die Konstanten X_1, X_2 und X_3 zu bestimmen, müssen wir die Funktion $(E, L, S) \mapsto \mathrm{Entr}_{\boldsymbol{X}}(E, L, S)$ maximieren. Letztere setzt sich additiv aus Funktionen $E \mapsto f_{X_1}(E)$, $L \mapsto f_{X_2}(L)$ und $S \mapsto f_{X_3}(S)$ zusammen und ist maximal wenn die f_{X_i}'s jeweils maximal sind. Um das Maximum zu ermitteln, berechnen wir die ersten Ableitungen der Funktionen f_{X_i}. Im Maximum müssen diese gleich null sein, wir haben also

$$\begin{aligned}
0 &= f'_{X_1}(E_*) = X_1 - \ln(E_*) - 1,\\
0 &= f'_{X_2}(L_*) = X_2 - \ln(L_*) - 1,\\
0 &= f'_{X_3}(S_*) = X_3 - \ln(S_*) - 1.
\end{aligned}$$

Setzen wir die zuvor berechneten Werte für E_*, L_* und S_* ein, erhalten wir $X_1 = \ln(E_*){+}1 \approx 9$, $X_2 = \ln(L_*){+}1 \approx 9.2$ und $X_3 = \ln(S_*){+}1 \approx 7.4$.

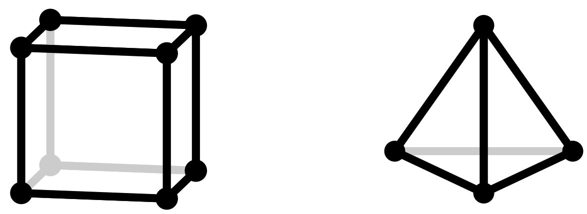
12 Weihnachtskekse

Autoren: Bensi N.

12.1 Aufgabe

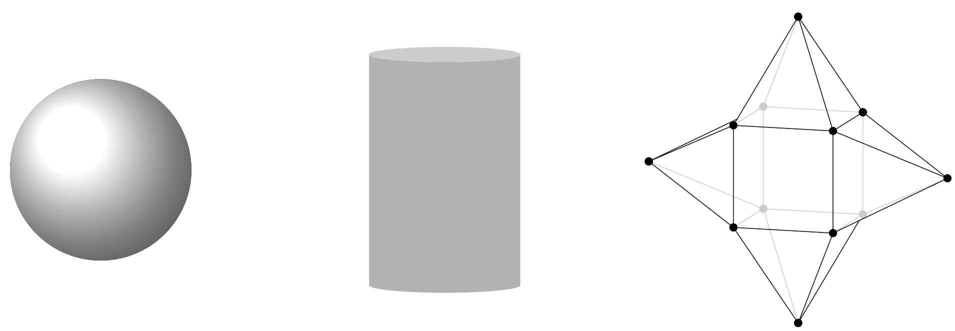
In der Weihnachtsbäckerei suchen sie jedes Jahr nach neuen ausgefallenen Ideen für Keksformen. Dieses Jahr wollen sie Kekse in Form von konvexen Polyedern backen. Ein Polyeder ist ein dreidimensionales geometrisches Objekt, wie zum Beispiel ein Würfel oder eine Pyramide; also ein Objekt, das durch Ecken, gerade Kanten und ebene Flächen begrenzt ist. Solch ein Polyeder heißt konvex, wenn es keine Dellen nach innen hat, d.h. für je zwei

Punkte des Polyeders ist das Segment, das die beiden Punkte verbindet, vollständig im Polyeder enthalten.



Der Würfel und das Tetraeder sind Beispiele für Polyeder.

Eine Kugel oder ein Zylinder sind also demnach keine Polyeder, ist die Kugel schließlich durch eine gekrümmte Fläche begrenzt und der Zylinder durch gekrümmte Flächen und Kanten.



Kugel und Zylinder sind keine Beispiele für Polyeder,
die Figur rechts ist ein nicht-konvexes Polyeder.

Die Vorgaben für Polyederformen wurden der Weihnachtsbäckerei vom Chefgeometer des Weihnachtsreiches dem Wichtelmädchen Ella mitgeteilt. Leider hat der Chefgeometer aber nie viel Zeit, weshalb Ella nicht in Ruhe Zeichnungen anfertigen konnte. Stattdessen hat sie einfach nur schnell für jede Polyederform die Anzahl e der Ecken, die Anzahl k der Kanten und die Anzahl f der Seitenflächen notiert. Für den obigen Würfel erhalten wir zum Beispiel die Zahlen $e = 8$, $k = 12$ und $f = 6$.

In Ellas Notizen hat sich aber ein Fehler eingeschlichen. Zu welcher der folgenden Zahlenkombinationen kann man kein konvexes Polyeder konstruieren?

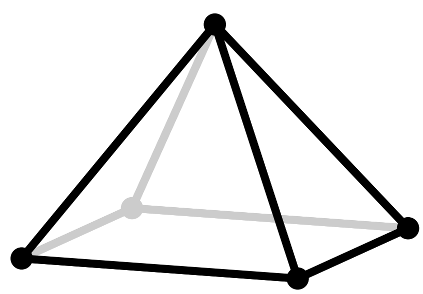
Antwortmöglichkeiten:

1. $e = 5$, $k = 8$, $f = 5$
2. $e = 6$, $k = 12$, $f = 8$
3. $e = 10$, $k = 15$, $f = 7$
4. $e = 7$, $k = 13$, $f = 8$
5. $e = 1025$, $k = 3069$, $f = 2046$
6. $e = 60$, $k = 90$, $f = 32$
7. $e = 6$, $k = 14$, $f = 8$
8. $e = 20$, $k = 30$, $f = 12$
9. $e = 8$, $k = 18$, $f = 12$
10. $e = 24$, $k = 36$, $f = 14$

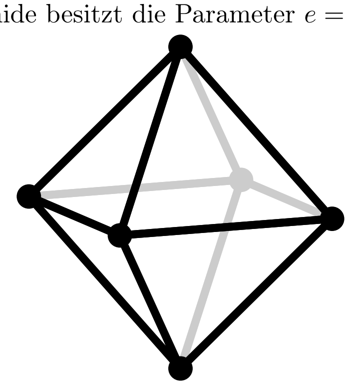
12.2 Lösung

Die Lösung Nummer 7 ist richtig.

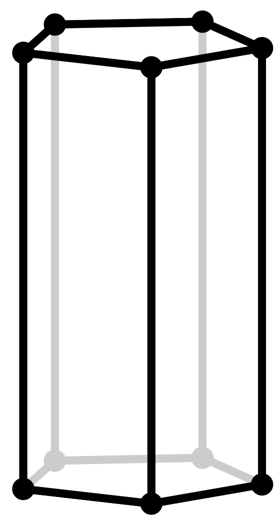
Zu dieser Antwort gelangt man entweder, indem man Eulers Formel kennt: Nach der muss für jedes dreidimensionale Polyeder $e - k + f = 2$ gelten, was in 7. nicht gilt. Oder man geht nach dem Ausschlussprinzip vor und versucht für jede Antwortmöglichkeit ein Polyeder mit den vorgegebenen Parametern zu konstruieren. Nachfolgend eine Liste von Polyedern, die zu den entsprechenden Antwortmöglichkeiten passen:



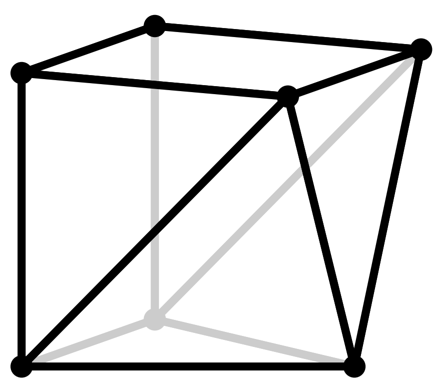
Die Ägyptische Pyramide besitzt die Parameter $e = 5$, $k = 8$, $f = 5$.



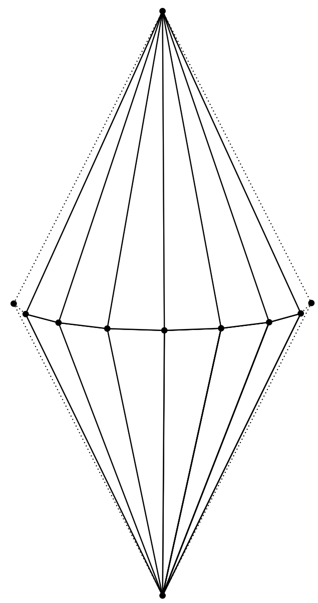
Das Oktaeder besitzt die Parameter $e = 6$, $k = 12$, $f = 8$.



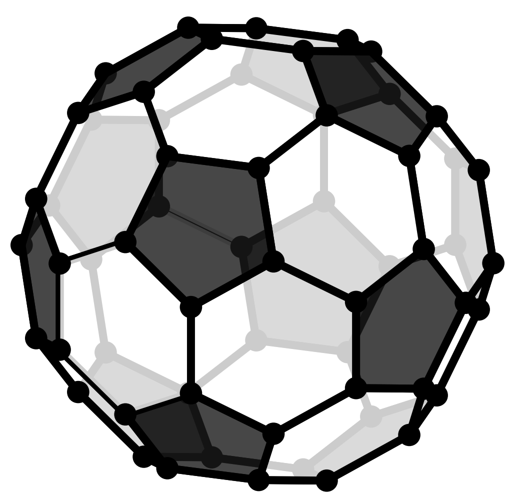
Das Prisma über einem Fünfeck besitzt die Parameter $e = 10$, $k = 15$, $f = 7$.



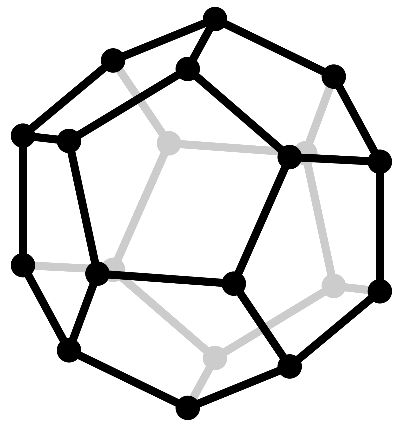
Dieses Polyeder besitzt die Parameter $e = 7$, $k = 13$, $f = 8$.



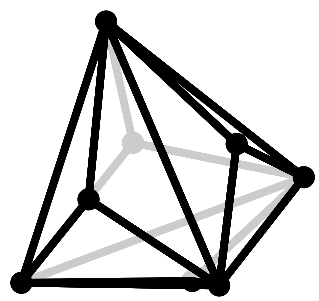
Diese Bipyramide über einem 1023-Eck – in der Zeichnung nur angedeutet – besitzt die Parameter $e = 1025$, $k = 3069$, $f = 2046$.



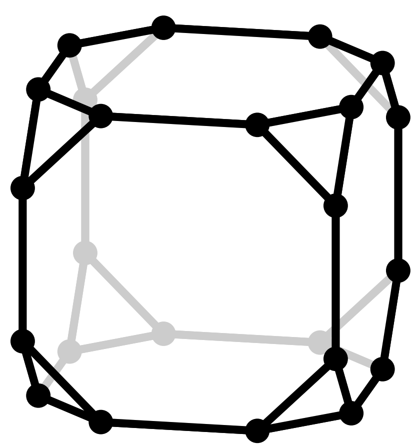
Der „Fußball“ hat die Paramter $e = 60$, $k = 90$, $f = 32$.



Das Dodekaeder hat die Parameter $e = 20$, $k = 30$, $f = 12$.



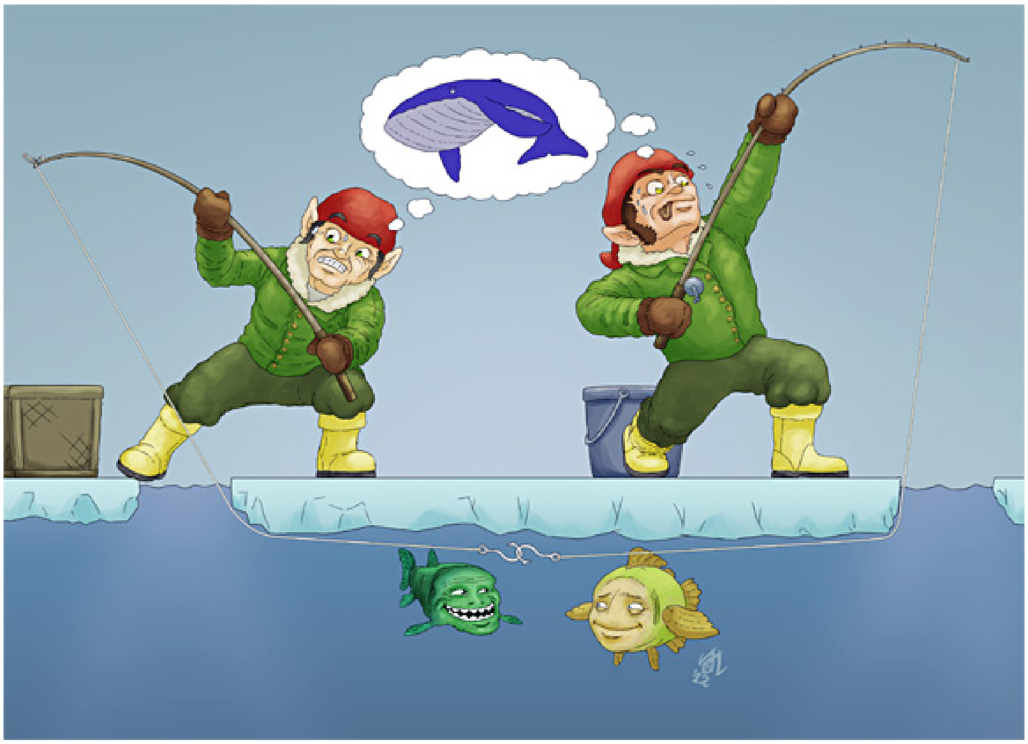
Ein Tetraeder mit auf den Seiten aufgesetzen kleineren Tetraedern hat die Parameter $e = 8$, $k = 18$, $f = 12$.



Der abgestumpfte Würfel hat die Paramter $e = 24$, $k = 36$, $f = 14$.

13 Eisangeln

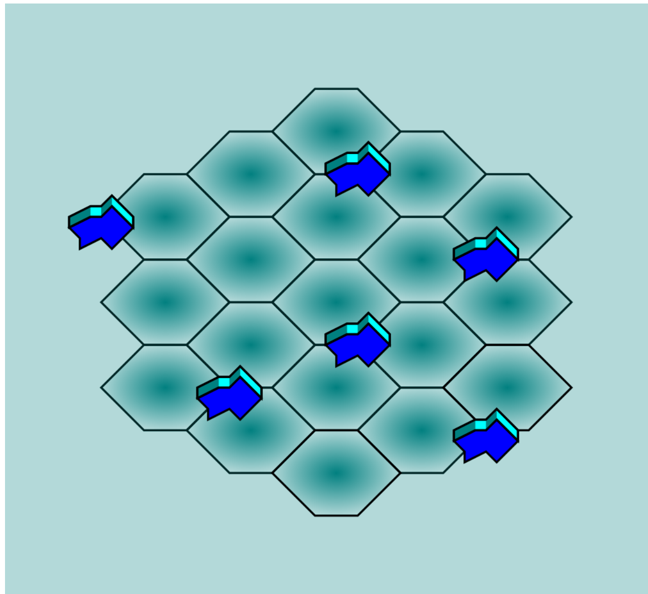
Autor: Falk Ebert



13.1 Aufgabe

Es ist eine uralte Tradition unter den nördlichen Wichteln: Eisangeln.

Weil es so beliebt ist, gibt es direkt vorgesehene Plätze, an denen die Wichtel dieser beruhigenden Tätigkeit nachgehen können. Silas, der Statiker, hat wieder einen solchen Bereich abgesteckt und wunderschön in Parzellen unterteilt. Theoretisch ist jede Ecke eines der Sechsecke eine zulässige Angelstelle. Ein Wichtel darf also jeweils nur für sich ein kleines Loch ins Eis hacken und dann Stunden in wohliger Kälte verbringen und darauf hoffen, dass ein Fisch anbeißt. Um eine dauerhafte Stabilität des Eises zu gewährleisten, hat Silas aber angeordnet, dass keine zwei Eislöcher sich direkt nebeneinander



befinden dürfen. (Also: Kein Eisloch darf durch nur eine Kante mit einem anderen Eisloch verbunden sein.) Einige Frühaufsteher haben sich bereits eingefunden und ihre Angelplätze besetzt. Sie alle haben sich den Anweisungen entsprechend auf dem Eis verteilt. Silas fragt sich, wieviele Angler bei dieser Ausgangslage denn insgesamt auf dem Eis Platz haben.

Antwortmöglichkeiten:

1. 19
2. 20
3. 21
4. 22
5. 23
6. 24
7. 25

8. 26
9. 27
10. 32

Projektbezug:
Da ein konkreter Projektbezug vielleicht eine Hilfestellung sein könnte, wird der in die Lösung verschoben. Die Idee entstand aber bei einem gemütlichen Spieleabend.

13.2 Lösung

Die richtige Lösung lautet: 6
Die Aufgabenstellung sagt sinngemäß, dass zwei Eislöcher nicht benachbart sein dürfen, sondern dass jeweils eine Ecke dazwischen frei bleiben soll. Das bedeutet, dass im Idealfall alle roten oder alle grünen Punkte in Abb. 2 Eislöcher sein können.

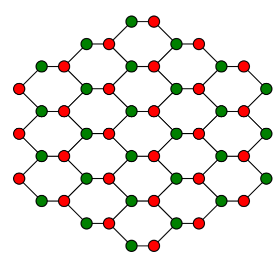


Abbildung 2: Zwei Farbraster

Damit ist unabhängig von der Ausgangssituation eine Höchstzahl von 27 Eislöchern möglich. Damit zerfällt das große Sechseckraster eigentlich in zwei Einzelraster - rot und grün. Setzt man ein Eisloch auf einen roten Rasterpunkt, so müssen alle weiteren auch auf roten Punkten sitzen, andernfalls ist die Höchstzahl nicht erreichbar. Durch die Vorgabe einiger Eislöcher in beiden Rastern (Abb. 3) wird klar, dass die Maximalzahl von 27 hier nicht mehr schaffbar ist.

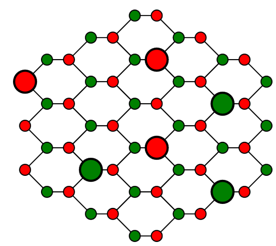


Abbildung 3: Vorgaben im Farbraster

Wir tragen in Abb. 3 ein, welche Felder aufgrund der Nachbarschaftsregelungen verboten sind. Es fällt dann auf, dass das Gesamtraster in nicht zusammenhängende Komponenten zerfällt (Abb. 4).

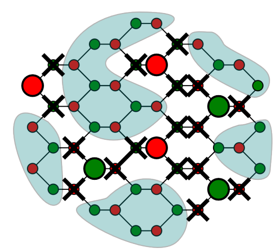


Abbildung 4: Zerlegung in Komponenten

Wenn man in einer dieser Komponenten ein Feld einer Farbe belegt, dann sollten idealerweise auch die anderen Felder der gleichen Farbe belegt werden. Die Belegung der anderen Komponenten bleibt davon aber unbeeinflusst. Also gilt es, in jeder Komponente zu prüfen, in welchem Farbraster in dieser Komponente mehr freie Plätze sind (Abb. 5).

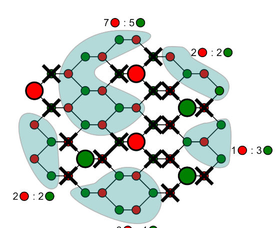


Abbildung 5: Vergleich der Punkte jedes Rasters in den Komponenten

Wir besetzen in jeder Komponente dasjenige Raster, welches mehr Punkte hat, voll. Bei Gleichstand ist die Wahl des Rasters egal - in dieser Musterlösung wurde jeweils rot gewählt. Das maximal besetzte Gesamtraster sieht dann aus wie in Abb. 6 und die Maximalzahl an Eislöchern lässt sich zu 24 abzählen.

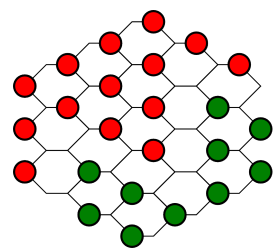


Abbildung 6: Maximalbelegung

13.3 Projektbezug

Jetzt aber wirklich: Der Zusammenhang dieser Problemstellung mit Anwendungsproblemen findet sich in der Halbleiterphysik. Computerchips werden üblicherweise auf Silizium-Einkristalle aufgebracht. Diese Kristalle haben eine absolut regelmäßige Struktur. Bei Verunreinigungen kommt es zu Verwerfungen in der Kristallstruktur. Dabei lagern sich die Kristallatome so an, dass die Verwerfungen möglichst klein sind und Spannungen zwischen verschiedenen Gitterstrukturen minimiert werden. Projekte des Matheon, die sich mit Kristallzüchtung befassen sind zum Beispiel C9 und D22. Dass das Ganze dem Problem der optimalen Platzierung von Siedlungen bei einem Brettspiel entspricht, ist ein netter Zufall und eine schöne Gelegenheit, beim nächsten Spieleabend mal über Mathematik zu sprechen.

14 Probleme beim Flughafen Eis-BER „Wichtel Willy“

Autor: Felix Günther

14.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist außer sich: Schon wieder muss die Eröffnung des neuen Flughafens Eis-BER „Wichtel Willy“ am Nordpol verschoben werden! Er zitiert den neuen technischen Leiter des Flughafens, Wichtel Anton, zu sich, und will wissen, wieso die Eröffnung nicht wie geplant stattfinden kann. Wichtel Anton erklärt dem Weihnachtsmann, wohl wissend, dass der Chef Mathematik studiert hat:

„Unser Hauptproblem ist die Befeuerung auf den Start- und Landebahnen. Wie Sie wissen, sind unsere drei Start- und Landebahnen in der Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet. Die Taxiways sind nun zwischen diesen Bahnen wie folgt angeordnet:

Die drei wichtigsten Taxiways verbinden die Mittelpunkte von je zwei Start- und Landebahnen, sodass das gleichseitige Dreieck in vier kleinere, zueinander kongruente gleichseitige Dreiecke unterteilt wird. Die zwölf zweitwichtigsten Taxiways unterteilen diese vier Dreiecke auf dieselbe Weise in sechzehn kleinere, zueinander kongruente gleichseitige Dreiecke. Dies setzt sich bis auf die Taxiways der Wichtigkeit 2012 fort. Weitere Taxiways gibt es nicht.

Für unsere ausgeklügelte Lichtanlage brauchen wir nun genauso viele Lampen, wie man Dreiecke entlang von Bahnen (seien es Teile der Start- und Landebahn oder Abschnitte der Taxiways) sehen kann. Die Lampen gibt es nur in festgelegten Stückzahlen, nämlich Zehnerpotenzen, das heißt 1, 10, 100, 1000, und so weiter. Je größer die Packung, desto günstiger ist eine einzelne Lampe, allerdings sind eine Zehnerpackung Lampen teurer als 9 Einzellampen, eine Hunderterpackung ist teurer als 9 Zehnerpackungen und 9 Einzellampen, und so weiter. Das Planungsbüro hatte letztes Jahr bestimmt, wie viel Packungen zu je 1 bzw. 10 bzw. 100 bzw. ... Lampen wir kaufen sollten. Dummerweise hat Wichtel Wowi bei der letzten Aufsichtsratsitzung seinen Kaffee über die Pläne geschüttet, sodass wir nicht mehr sehen können, wie viele Zehnerpackungen wir kaufen müssen. Und die Planungsgesellschaft können wir ja auch schlecht fragen, nachdem wir ihr im Frühjahr gekündigt hatten und sie nun verklagen. Bis wir die genaue Zahl an Zehnerpackungen herausgefunden haben, werden sicher noch einige Monate vergehen.“

Der Weihnachtsmann beschließt, sich der Sache anzunehmen. „Das kann doch nicht so schwer sein! Die Start- und Landebahnen bilden nur ein einziges Dreieck. Mit den wichtigstens Taxiways sind es dann fünf Dreiecke, nämlich vier kleine und das große. Wenn man die zweitwichtigsten Taxiways auch berücksichtigt, sind es siebenundzwanzig Dreiecke, nämlich sechzehn kleine; sieben, die aus je vier kleinen Dreicken bestehen; drei, die aus je neun kleinen Dreicken bestehen; und das große Dreieck. Warten Sie kurz, ich rechne das mal eben schnell aus.“

Hilf dem Weihnachtsmann und finde heraus, wie viele Zehnerpackungen Lampen gekauft werden müssen!

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

14.2 Lösung

Antwort 6 ist richtig.
Die Gesamtzahl $2^{3\cdot 2012-2} + 5 \cdot 2^{2\cdot 2012-3} + 2^{\cdot 2012-2}$ lässt bei Division durch 100 den Rest 68, welches man mit Hilfe von $2^{22} \equiv 2^2 \mod 100$ schnell per Hand nachrechnen kann.

Wir betrachten im Folgenden Taxiways bis zur Wichtigkeit $n > 0$ und setzen erst am Ende $n = 2012$. Das Dreieck der Lande- und Startbahnen bezeichnen wir mit $\triangle ABC$ und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Kanten von $\triangle ABC$ die Länge 2^n haben. Durch die Taxiway-Rekursionsvorschrift erhalten wir ein Dreiecksgitter und gesucht ist die Anzahl der Dreiecke, deren Ecken Eckpunkte des Gitters sind und deren Kanten sämtlich innerhalb von $\triangle ABC$ und parallel zu dessen Kanten liegen. Dann enthält die Kante $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ beziehungsweise $\overline{AC}$ jeweils $2^n + 1$ Gitterpunkte (Randpunkte werden mitgezählt).

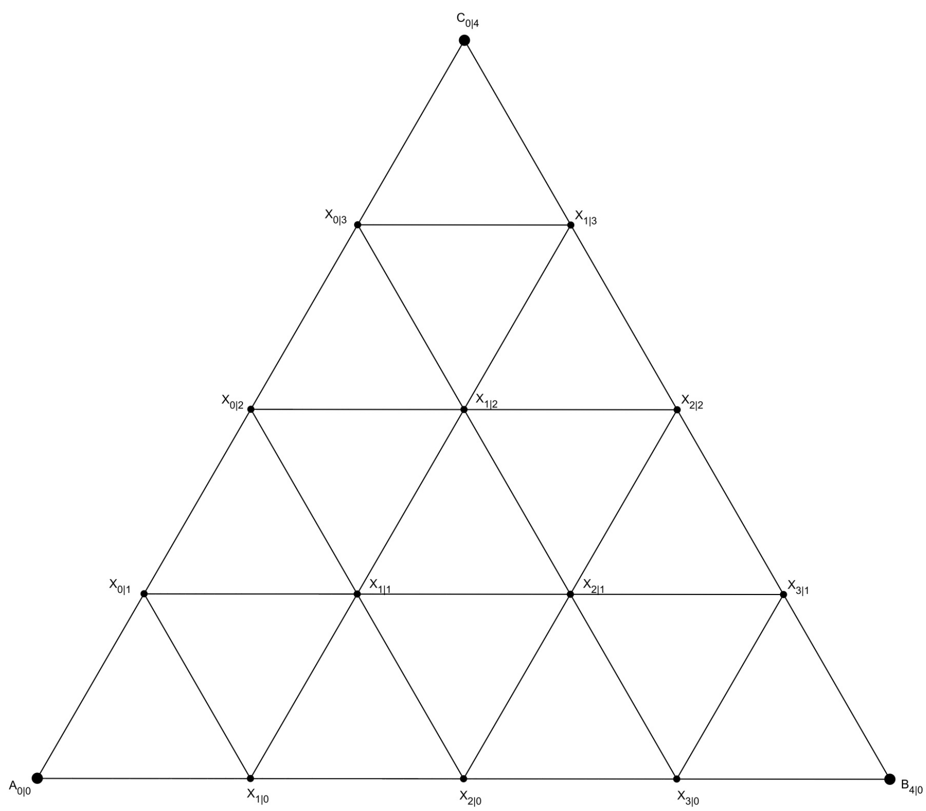


Abbildung 7: Dreieck ABC mit Gitter und Koordinaten im Fall $n = 2$

Wir führen Dreieckskoordinaten wie folgt ein: Der Punkt A habe die Koordinaten $(0|0)$, die x-Achse sei auf AB und die y-Achse auf AC. Da die Kantenlänge 2^n beträgt und eine Seite von $\triangle ABC$ jeweils $2^n + 1$ Punkte enthält, soll B die Koordinaten $(2^n|0)$ und C die Koordinaten $(0|2^n)$ haben. Gitterpunkte, die auf $\overline{AB}$ oder $\overline{AC}$ liegen, haben somit die Koordinaten $(i|0)$ beziehungsweise $(0|i)$, $i \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq 2^n$. Gitterpunkte, die auf einer Parallelen zur x-Achse beziehungsweise zur y-Achse liegen, sollen die gleichen y- beziehungsweise x-Koordinaten haben. Dann haben alle Gitterpunkte innerhalb des Dreiecks offensichtlich die Koordinaten $(i|j)$, wobei $i, j \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i, j \leq 2^n$ sowie $i + j \leq 2^n$ gilt.

Im Folgenden untersuchen wir Dreiecke $D_1D_2D_3$, die die genannten Voraussetzungen erfüllen. Da die Seiten von $\triangle D_1D_2D_3$ parallel zu denen von $\triangle ABC$ sein sollen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $D_1D_2||AC$, $D_1D_3||AB$ und $D_2D_3||BC$ gilt. Die Koordinaten von D_i, $i = 1, 2, 3$, seien $(x_i|y_i)$. Wegen $D_1D_2||AC$ gilt $x_1 = x_2 =: a$, wegen $D_1D_3||AB$ $y_1 = y_3 =: b$ und wegen $D_2D_3||BC$ gilt, da die Summe der x- und y-Koordinaten auf Parallelen zu BC konstant bleibt, $x_2 + y_2 = x_3 + y_3 =: c$. Daraus folgt nun, dass D_1 die Koordinaten $(a|b)$, D_2 die Koordinaten $(a|c-a)$ und D_3 die Koordinaten $(c - b|b)$ hat.

Jedes den Voraussetzungen entsprechende Dreieck bestimmt nun eindeutig ein solches Tripel (a, b, c), wobei $0 \leq a, b, c \leq 2^n$ ($c \leq 2^n$ wegen $c = x_2 + y_2 \leq 2^n$), $c \geq \max(a, b)$ und $c \neq a + b$ (ansonsten wäre $\triangle D_1D_2D_3$ entartet, da alle Eckpunkte dieselben Koordinaten hätten) gilt. Ebenso bestimmt ein Tripel (a, b, c) mit den genannten Einschränkungen ein solches Dreieck, sodass die Abbildung zwischen Dreiecken und Tripeln bijektiv ist. Demnach ist die Anzahl der Dreiecke gleich der Anzahl der Tripel, sodass es genügt, lediglich die Anzahl der Tripel zu bestimmen.

Zu einer Zahl a gibt es $2^n - a + 1$ zulässige b, nämlich $0, 1, \ldots, 2^n - a$, sodass es in der Summe $\sum_{i=0}^{2^n}(2^n - i + 1) = \sum_{i=1}^{2^n+1} i = \frac{1}{2} \cdot (2^n + 1) \cdot (2^n + 2)$ Gitterpunkte gibt. Zu einem Paar (a, b) gibt es wiederum $2^n - \max(a, b)$ zulässige c, nämlich $\max(a, b), \max(a, b) + 1, \ldots, 2^n$ bis auf $a + b$, welches in der Aufzählung enthalten ist. Wenn wir die Anzahl der Dreiecke, die gleich der Anzahl der

Tripel ist, mit S bezeichnen, dann erhalten wir mit obigem Ergebnis zunächst:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{0\le i,j;\ i+j\le 2^n} (2^n - \max(i,j)) \\ &= \sum_{0\le i,j;\ i+j\le 2^n} 2^n - \sum_{0\le i,j;\ i+j\le 2^n} \max(i,j) \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2} \cdot (2^n+1)\cdot(2^n+2) - \sum_{0\le i,j;\ i+j\le 2^n} \max(i,j). \end{aligned}$$

Zu jedem Gitterpunkt $(x|y)$ existiert auch $(y|x)$ als Gitterpunkt. Deshalb können wir weiter wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} S &= 2^{n-1}\cdot(2^n+1)\cdot(2^n+2) - \sum_{0\le i,j;\ i+j\le 2^n} \max(i,j) \\ &= (2^{3n-1}+2^{2n}+2^{2n-1}+2^n) - 2\cdot \sum_{0\le j<i;\ i+j\le 2^n} \max(i,j) - \sum_{0\le j=i;\ i+j\le 2^n} \max(i,j) \\ &= (2^{3n-1}+2^{2n}+2^{2n-1}+2^n) - 2\cdot \sum_{0\le j<i\le 2^n-j} i - \sum_{0\le i\le 2^{n-1}} i \\ &= (2^{3n-1}+2^{2n}+2^{2n-1}+2^n) - 2\cdot \sum_{0\le j<i\le 2^n-j} i - \sum_{i=0}^{2^{n-1}} i \\ &= (2^{3n-1}+2^{2n}+2^{2n-1}+2^n) - 2\cdot \sum_{0\le j<i\le 2^n-j} i - 2^{n-2}\cdot(2^{n-1}+1) \\ &= (2^{3n-1}+2^{2n}+2^{2n-1}+2^n-2^{2n-3}-2^{n-2}) - 2\cdot \sum_{0\le j<i\le 2^n-j} i \\ &= (2\cdot 2^{3n-2}+11\cdot 2^{2n-3}+3\cdot 2^{n-2}) - 2\cdot \sum_{0\le j<i\le 2^n-j} i. \end{aligned}$$

Den Term $2 \cdot \sum\limits_{0 \le j < i \le 2^n - j} i$ betrachten wir jetzt separat:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sum_{0 \le j < i \le 2^n - j} i &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{i-1} i + 2 \cdot \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} \sum_{j=0}^{2^n - i} i \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{n-1}} i^2 + 2 \cdot \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} ((2^n - i + 1) \cdot i) \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{n-1}} i^2 + 2 \cdot \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} ((2^n + 1) \cdot i - i^2) \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{n-1}} i^2 + 2 \cdot \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} ((2^n + 1) \cdot i) - 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^n} i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{n-1}} i^2 \\
&= 4 \cdot \sum_{i=1}^{2^{n-1}} i^2 + (2^n + 1) \cdot 2 \cdot \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} i - 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^n} i^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2^{n-1} \cdot (2^{n-1} + 1) \cdot (2^n + 1) \\
&\quad + (2^n + 1) \cdot (2^n \cdot (2^n + 1) - 2^{n-1} \cdot (2^{n-1} + 1)) - \frac{1}{3} \cdot 2^n \cdot (2^n + 1) \cdot (2^{n+1} + 1) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (2^{3n-1} + 2^{2n-1} + 2^{2n} + 2^n - 2^{3n+1} - 2^{2n+1} - 2^{2n} - 2^n) \\
&\quad + (2^n + 1) \cdot (2^{2n} + 2^n - 2^{2n-2} - 2^{n-1}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (-6 \cdot 2^{3n-2} - 12 \cdot 2^{2n-3}) + (2^{3n} + 2 \cdot 2^{2n} + 2^n - 2^{3n-2} - 2^{2n-2} - 2^{2n-1} - 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sum_{0 \le j < i \le 2^n - j} &= (-2 \cdot 2^{3n-2} - 4 \cdot 2^{2n-3}) + (3 \cdot 2^{3n-2} + 10 \cdot 2^{2n-3} + 2 \cdot 2^{n-2}) \\
&= 2^{3n-2} + 6 \cdot 2^{2n-3} + 2 \cdot 2^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Oben eingesetzt ergibt dies:

$S = (2 \cdot 2^{3n-2} + 11 \cdot 2^{2n-3} + 3 \cdot 2^{n-2}) - (2^{3n-2} + 6 \cdot 2^{2n-3} + 2 \cdot 2^{n-2}) = 2^{3n-2} + 5 \cdot 2^{2n-3} + 2^{n-2}$.

Damit ist die gesuchte Anzahl der Dreiecke gleich $2^{3n-2} + 5 \cdot 2^{2n-3} + 2^{n-2}$.

Setzen wir nun $n = 2012$. Die Gesamtzahl $2^{3\cdot 2012-2} + 5 \cdot 2^{2\cdot 2012-3} + 2^{\cdot 2012-2}$ lässt bei Division durch 100 den Rest 68, welches man mit Hilfe von $2^{22} \equiv 2^2 \mod 100$ schnell per Hand nachrechnen kann. Also ist Lösung 6 die richtige Antwort.

15 Frosch auf dem Achteck

Autor: Michael Zaks

15.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hatte folgenden Traum: Ein Achteck liegt am Ufer von einem Wasserteich unter einer Uhr. Seine Eckpunkte sind durch die Buchstaben $A, B, C, \ldots, H$ gekennzeichnet, wobei der Punkt E im Wasser liegt. Ein Frosch sitzt im Punkt A. Am Mittag schlägt die Uhr 12 mal, und mit jedem Schlag macht der Frosch einen Sprung zu einem der zwei unmittelbaren Nachbareckpunkte. Beim letzten Schlag landet er zum ersten Mal am Eckpunkt E, taucht unter und ist weg. Finden Sie die Anzahl der unterschiedlichen Wege ($ABC \ldots E$, $AHA \ldots E$ usw.), auf denen der Frosch den

Teich erreicht.

Antwortmöglichkeiten:

1. 37
2. 38
3. 123
4. 124
5. 328
6. 329
7. 1017
8. 1018
9. 1278
10. 3246

Projektbezug:
Der springende Frosch ist ein lustiges Beispiel für sogenannte *Dynamische Systeme*, die im Mittelpunkt unseres Projekts stehen.

15.2 Lösung

Wir bezeichnen durch a_n, b_n,..., h_n die Anzahl der Wege aus n Sprüngen, die von A (zurück) nach A, von A nach B, ..., von A nach H führen. Uns interessiert e_{12}.

Wenn man die Eckpunkte abwechselnd mit rot und blau markiert, merkt man sofort, dass die Farbe bei jedem Sprung wechselt. Da A und E dieselbe rote Farbe haben, braucht man für den Weg dazwischen eine gerade Anzahl von Sprüngen. Somit entfallen schon mehrere Antwortvarianten.

Um mit zwei Sprüngen auf einem gegebenen roten Punkt zu landen, gibt es folgende Möglichkeiten: entweder man springt aus diesem Punkt zu einem seiner zwei blauen Nachbarn und zurück, oder man springt aus seinen übernächsten Nachbarpunkten, es sei denn einer dieser roten Nachbarn ist der „nasse" Punkt E. Damit ergibt sich für die roten Eckpunkte A, C, E, G eine Evolutionsregel:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_n + c_n + g_n \\ c_{n+2} &= 2c_n + a_n \\ e_{n+2} &= c_n + g_n \\ g_{n+2} &= 2g_n + a_n \end{aligned}$$

mit (offensichtlich!) $a_0{=}1$ und $c_0 = e_0 = g_0 = 0$. Dies ist ein Beispiel von einem *Dynamischen System*: eine feste Regel schreibt eindeutig vor, wie sich der gegebene Zustand (Satz $\{a_n, c_n, e_n, g_n\}$) zum nächsten Zeitpunkt transformiert. In unserem Problem ist die Zeit diskret (man „misst" sie in Sprüngen); diskrete Transformationsregeln werden *Abbildungen* genannt.

Die Symmetrie zwischen „rechten" und „linken" Wegen sichert $c_n = g_n$ für alle n. Dadurch vereinfacht sich das dynamische System:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_n + 2c_n \\ c_{n+2} &= 2c_n + a_n \\ e_{n+2} &= 2c_n \end{aligned}$$

Wir merken noch, dass die Evolution von a und c unabhängig von e verläuft.

Jetzt können wir einfach n nach und nach vergrößern (man nennt dieses Verfahren *„iterieren"*):

$$\begin{aligned} a_2 = 2 &\qquad c_2 = 1, \\ a_4 = 6 &\qquad c_4 = 4, \\ a_6 = 20 &\qquad c_6 = 14, \\ &\ldots \end{aligned}$$

bis wir schließlich bei c_{10}=164 und damit $e_{12} = 2c_{10}$=328 landen.

Es ist interessant auch eine allgemeine Formel zu entwickeln. Diese Aufgabe ist schwieriger: hier geben wir nur die Antwort: e_{2n-1}=0 und

$$e_{2n} = \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}} \quad .$$

Projektbezug:
Die Anzahl der unterschiedlichen Wege des Froschs lässt sich rekurrent beschreiben (siehe vorgeschlagene Lösung). Solche rekurrenten Zahlenfolgen sind einfache Möglichkeiten zur Modellierung von *Dynamischen Systemen*, die im Mittelpunkt unseres Forschungsprojekts stehen.

16 Brummbär

Autor: Agnes Cseh

16.1 Aufgabe

Der Schlitten ist vorbereitet, Rudolf steht da und der Weihnachtsmann ist bereit loszufliegen, aber ... ein zerstreuter Wichtel hat vergessen, das letzte Geschenk zu verpacken. Dieses Geschenk ist ein Teddybär, der „Brumm“ sagt, wenn ihm die Hand gedrückt wird. Dies tut er aber nur, wenn er mit vollen Batterien läuft. Der kleine Wichtel merkt im letzten Moment, dass der arme Teddy keine Batterie hat und er rennt in die Werkstatt, um Batterien zu holen. Dort liegen neue und gebrauchte Batterien herum. Er greift eine Handvoll davon und rennt zum Schlitten zurück. Er ist aber so nervös, dass er die vollen und die leeren Batterien ganz durcheinander bringt.

Wenn er ankommt, weiß er nur das Folgende: Er hat vier volle und vier leere Batterien in der Hand, die alle gleich aussehen. Der Bär braucht zwei Batterien. Beide müssen voll sein, um ihn freundlich brummen zu hören. Alles, was der Wichtel tun kann, ist ein beliebiges Paar von Batterien auszuprobieren. Wenn der Teddy „Brumm" sagt, dann kann der Weihnachtsmann sofort losfliegen. Wenn er schweigt, dann war mindestens eine von den zwei Batterien leer und der Wichtel muss andere Kombinationen ausprobieren. Die Zeit ist knapp und der Weihnachtsmann ist skeptisch. Er will den Teddy brummen hören. Wie viele Versuche braucht der Wichtel um sicherzustellen, dass das Bärchen mindestens einmal brummt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 4
2. 5
3. 6
4. 7
5. 8
6. 9
7. 12
8. 15
9. 23
10. 28

16.2 Lösung

Die Lösung ist 7.

Wir müssen zeigen, dass

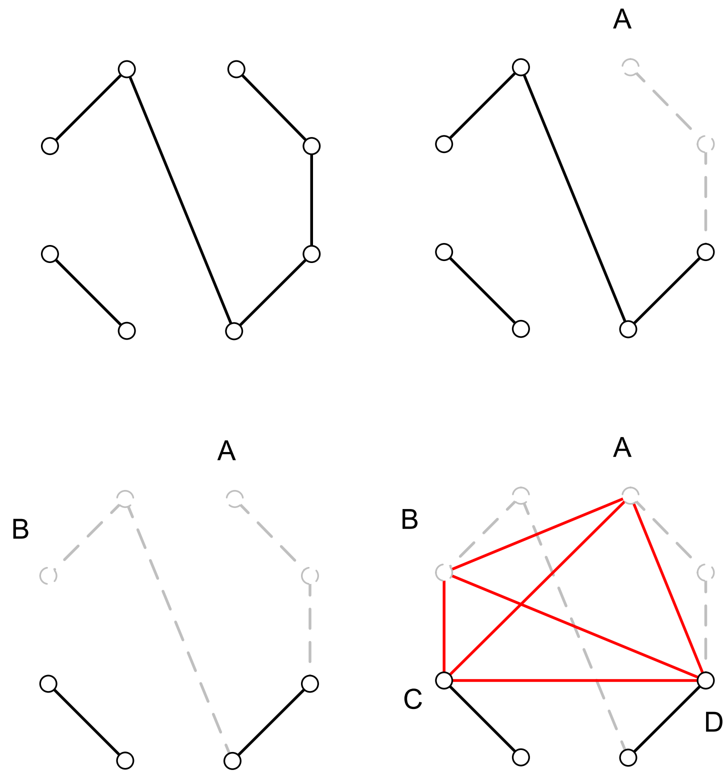
1. 7 Versuche genug sind,
2. 6 Versuche noch nicht reichen.

Wir teilen die 8 Batterien in drei Gruppen ein: Die erste Gruppe hat 3, die zweite 3, die dritte die restlichen 2 Batterien. Von diesen drei Gruppen enthält mindestens eine zwei volle Batterien. Wenn wir also alle möglichen Paare innerhalb der Gruppen ausprobieren, finden wir ein gutes Paar. Zuerst werden alle Batterien in der ersten Gruppe paarweise ausprobiert. Das sind 3 Versuche. Wenn das Bärchen brummt, sind wir fertig, wenn nicht, dann wissen wir, dass mindestens zwei von den drei Batterien leer waren. Das gleiche machen wir mit den drei Batterien in der zweiten Gruppe. Wenn keiner von den sechs Versuchen erfolgreich war, dann müssen die vier leeren Batterien in den ersten zwei Gruppen sein. Deshalb gelingt der siebte Versuch.

Jetzt zeigen wir, dass weniger Versuche nicht ausreichend sind. Unsere Behauptung ist, dass nach sechs Versuchen immer vier Batterien existieren, von welchen kein Paar ausprobiert wurde. Wenn diese vier Batterien die Vollen sind, dann waren alle sechs Versuche Misserfolge.

Die acht Batterien können als Knoten eines Graphen veranschaulicht werden. Wenn ein Paar ausprobiert wurde, dann verbinden wir die zwei Knoten mit einer Kante. Ziel ist es zu zeigen, dass es in einem Graphen mit 8 Knoten und 6 Kanten immer vier Knoten gibt, die paarweise nicht verbunden sind.

Wir wählen immer den Knoten mit der geringsten Kantenanzahl aus und löschen ihn und alle Knoten, mit denen er verbunden ist. Am Anfang gibt es sicherlich einen Knoten A mit höchstens einer Kante, weil die acht Knoten insgesamt sechs Kanten teilen. Wenn A und seine Nachbarkante gelöscht werden, ist sicher, dass A keine Kante zu den restlichen Knoten hat. In der zweiten Runde haben wir mindestens 6 Knoten und höchstens 5 Kanten.



Es gibt immer noch einen Knoten B, der maximal einen Nachbar hat. Wir löschen beide. B ist mit dem Rest des Graphen und mit A nicht verbunden. Es bleiben mindestens 4 Knoten und höchstens 4 Kanten. Davon wählen wir das Paar C, D aus, so dass C und D keine Kante teilen. Die vier Knoten A, B, C und D sind paarweise nicht mit Kanten verbunden.

16.3 Hintergrund

In dem Beweis betrachteten wir einen Graphen mit 8 Knoten und 6 Kanten und wir suchten einen leeren Subgraphen auf 4 Knoten. Dies ist ein Spezialfall des Satzes von Turán, auf den Komplementärgraphen angewendet. Der Satz sagt das Folgende: Wenn ein Graph auf n Knoten keinen vollständigen Teilgraphen auf $k+1$ Knoten enthält, dann ist die Anzahl von Kanten höchstens $\lfloor \frac{k-1}{2k} n^2 \rfloor$. In unserem Fall ist $n = 8$ und $k = 3$, die Schranke liegt bei 21.

Das heißt, dass wir mindestens $28 - 21 = 7$ Versuche brauchen um das zu verhindern, dass ein leerer vollständiger Teilgraph auf 4 Knoten vorkommt.

In dem verallgemeinerten Fall, wenn wir n volle und n leere Batterien haben, sind $n + 3$ Versuche nötig.

17 Weihnachtskalender

Autoren: Samuel Drapeau, Martin Karliczek, Michael Kupper

17.1 Aufgabe

Die Mutter von Mia und Ben hat dieses Jahr nur einen Weihnachtskalender gekauft. Sie hat sich entschieden, sich nicht einzumischen und beide jeden Tag darum Karten spielen zu lassen, wer den Inhalt bekommt. Damit wenigstens jeder einmal Schokolade essen kann, entscheidet sich die Mutter, dass Mia das erste Türchen aufmachen darf und Ben das letzte.

Sie weiß, dass es einen höllischen Lärm geben wird, sollte einer der beiden an zwei Tagen hintereinander die Schokolade essen dürfen. Dann wird sie Dinge hören wie „Mia war aber schon gestern dran“ oder „Ben darf schon wieder naschen“. Sollte an zwei Tagen hintereinander jeweils ein anderer gewinnnen, wird es ruhig bleiben.

Die Mutter kennt die Spielfähigkeiten ihrer Kinder und schätzt, dass beide ungefähr gleich gut sind und somit die Chancen beim Kartenspielen jeden Tag bei 50 zu 50 liegen werden. Jetzt versucht sie herauszubekommen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass es an genau 12 Tagen ruhig ist (Ihr ist klar, dass am ersten Tag Ben protestiert, dass Mia dran ist, da hat sie keine Ruhe zu erwarten). Die Mutter überlegt außerdem, sich ganz herauszuhalten und die Schokolade am 1. und 24. Tag auch ausspielen zu lassen. Wie würde sich die Wahrscheinlichkeit von genau 12 Tagen Ruhe ändern?

Mögliche Herangehensweise: Die Mutter könnte wie folgt vorgehen. Sie schreibt jeden Tag auf, ob Ben naschen darf oder nicht. Das stellt sie mit 1 und 0 dar. Wenn sie sich einmischt, ist die erste Zahl somit eine 0 und die 24. eine 1. Dazwischen werden 22 Zahlen stehen, die entweder 0 oder 1 sind. Folgen zwei Nullen oder zwei Einsen aufeinander, gibt es Streit. Die Mutter muss infolgedessen zählen, wie oft eine 0 direkt nach einer 1 steht oder eine 1 direkt hinter einer 0. An jedem Tag ist die Wahrscheinlichkeit für eine 0 gleich 0.5. Jetzt gilt es, auszurechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass in der Reihe von 24 Nullen und Einsen genau zwölf Mal eine 0 direkt neben einer 1 steht. Hält sie sich raus, dann hätte sie 24 Nullen und Einsen auf dem Blatt und wüsste nicht, wie die erste und die letzte Zahl aussehen. Wiederum zählt sie, wie oft eine 0 direkt neben einer 1 steht.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es an genau 12 Tagen ruhig bleibt (das heißt, dass genau 12 mal eine 0 neben einer 1 steht), wenn die Mutter die Schokolade am 1. und 24. Tag festlegt? Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit p_1. Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit, dass es an genau 12 Tagen ruhig bleibt, wenn die Mutter sich nicht einmischt. Diese Wahrscheinlichkeit halten wir mit p_2 fest.

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass Ben an einem Tag Schokolade bekommt, ist dieselbe wie diejenige, dass Mia sie bekommt. Daher ist alles gleich-

wahrscheinlich. Ist es an 12 Tagen ruhig, dann ist es an 12 Tagen laut. Beides hat Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Daran ändert sich auch nichts, wenn die Mutter sich raushält. Also: $p_1 = 0.5$ und $p_1 = p_2$.

2. Wie in Antwort 1 argumentiert, ist $p_1 = 0.5$. Allerdings steigt die Wahrscheinlichkeit, wenn die Mutter sich raushält. Also: $p_1 = 0.5$ und $p_2 > p_1$.

3. Es ist wie immer im Leben. Es tritt nie ein, was man denkt. Daher ist die Antwort eine ganz klare 0 Prozent. Sowohl, wenn die Mutter sich einmischt als auch, wenn sie sich raushält. Also: $p_1 = 0$ und $p_1 = p_2$.

4. Ein Paradebeispiel der Pädagogik. Mischt die Mutter sich ein, ist die Wahrscheinlichkeit 0. Hält sie sich raus, dann steigt die Wahrscheinlichkeit auf Ruhe. Also: $p_1 = 0$ und $p_2 > p_1$.

5. Mischt die Mutter sich ein, gibt es genau eine Möglichkeit, dass an 12 Tagen Ruhe herrscht. Daher ist die Wahrscheinlichkeit $p_1 = (0.5)^{22}$. Hält die Mutter sich raus, gibt es ebenfalls nur eine Möglichkeit. In diesem Fall gilt somit $p_2 = (0.5)^{24}$, da nun an 24 Tagen etwas passieren kann. Also: $p_1 = (0.5)^{22}$ und $p_1 > p_2$.

6. Es gibt genau eine Möglichkeit, dass es beim Einmischen der Mutter an genau 12 Tagen ruhig ist. Also $p_1 = (0.5)^{22}$. Wenn aber auch am 1. und 24. Unterschiedliches passieren kann, gibt es mehr Möglichkeiten. Also: $p_1 = (0.5)^{22}$ und $p_2 > p_1$.

7. Es gibt genau eine Möglichkeit, dass es beim Einmischen der Mutter an genau 12 Tagen ruhig ist. Für die Tage 1 und 24 gibt es vier Kombinationen für deren Resultate. Deshalb gibt es vier Varianten für 12 Tage Ruhe im zweiten Fall und somit ist $p_1 = (0.5)^{22}$ und $p_2 = 4 * (0.5)^{24} = p_1$. Also: $p_1 = (0.5)^{22}$ und $p_1 = p_2$.

8. Ohne Kombinatorik kommt man nicht weiter. Man hat 24 Tage und an 12 Tagen soll es ruhig sein. Dafür gibt es $\binom{24}{12}$ Möglichkeiten (das macht 2704156 Stück). Multipliziert man diese mit der Einzelwahrscheinlichkeit $(0.5)^{22}$, kommt man auf $p_1 = 0.6448$. Schaut man nun 24 Tage an, dann sinkt die Einzelwahrscheinlichkeit auf $(0.5)^{24}$, mehr Möglichkeiten gibt es jedoch trotzdem nicht. Daher ist $p_2 = 0.1612$ und somit kleiner. Also: $p_1 = 0.6448$ und $p_1 > p_2$.

9. Wie eben argumentiert ist $p_1 = 0.6448$. Natürlich sinkt die Einzelwahrscheinlichkeit, dafür gibt es aber auch das Vierfache an Möglichkeiten. Also: $p_1 = 0.6448$ und $p_1 = p_2$.

10. Die Aufgabe wurde mal wieder angelegt, um uns zu beschäftigen und uns etwas beizubringen. Wie immer ist die letzte Antwort richtig. An 23 Tagen kann es ruhig sein (am Ersten ja bereits nicht). An 12 soll es ruhig sein. Alles ist gleichwahrscheinlich. Daher nehmen wir $\binom{23}{12}$ (was 135278 ist) mal $(0.5)^{22}$ und erhalten $p_1 = 0.3224$. Hält die Mutter sich heraus, kann es an 24 Tagen ruhig sein und wir bekommen $p_2 = \binom{24}{12} * (0.5)^{24} = 0.1612$. p_1 ist somit genau das Doppelte von p_1. Also: $p_1 = 0.3224$ und $p_1 > p_2$.

Projektbezug:
Die Aufgabe spielt mit einem wiederholten Laplace-Experiment. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Durchgänge – Ben gewinnt oder nicht – stochastisch unabhängig sind. Daher ist die Reihe der 24 aufeinanderfolgenden Nullen und Einsen eine so genannte Irrfahrt. Irrfahrten sind Grundobjekte der stochastischen Analysis, die viele in der Realität eintretende Ereignisse modellieren. Beispiele dafür sind die Wege von ins Wasser fallenden Pollenpartikeln, die Gewinne eines Spielers beim Münzwurf, die Temperaturentwicklung der Erde oder einfache Verläufe von Aktienkursen an der Börse. Dabei werden Wahrscheinlichkeiten, dass eine Untermenge von Pfaden dieser Irrfahrt eine gewisse Eigenschaft erfüllt, berechnet. Diese Aufgabe liegt im Kern unseres Forschungsprojektes. Es ist beispielsweise von Interesse, um Bankenaufsichten Instrumente zu geben, Banken vorzuschreiben, welche Risiken sie auf Aktienmärkten eingehen dürfen.
Darüberhinaus ist die Aufgabe der eindimensionale Fall des Lemmas von Sperner, der benutzt werden kann, den Brouwer'schen Fixpunktsatz zu beweisen. Dieser wird in der Optimierung benutzt. Da wir gerade die konditionierte Version dessen beweisen, ist die Aufgabe auch von dieser Seite betrachtet interessant.

17.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4

Zunächst sei bemerkt, dass die Lösung für jede gerade Zahl (die kleiner als 22 ist) so gelautet hätte. Ob wir statt der Wahrscheinlichkeit von 12 Wechseln nach 6 oder 14 gefragt hätten, hätte daher nichts geändert. Es kann nie eine gerade Zahl von direkt benachbarten Nullen und Einsen geben, wenn man mit 0 anfängt und 1 aufhört. Beginnt man mit einer 0 und hat eine gerade Anzahl von Wechseln von 0 und 1 gemacht, dann ist man wieder bei 0. Dies kann man sich so vor Augen führen, dass man sich eine Irrfahrt konstruiert. Man startet bei 0. Kommt eine 01 in der Zahlenfolge geht man einen Schritt nach oben, kommt eine 10 einen Schritt nach unten. Bei 00 oder 11 bleibt man auf der Stelle. Gibt es eine gerade Zahl von Wechseln, dann geht man genauso viele Schritte nach oben, wie nach unten. Somit ist man wieder bei dem Ausgangswert, welcher die 0 war. Wenn man mit 1 endet, kann daher nie eine gerade Anzahl von Wechseln vorliegen.
Ist die 1. und 24. Stelle frei, dann geht es natürlich. Man startet zum Beispiel mit 0 und macht direkt 12 Wechsel. Am 13. Tag hat man diese erreicht und man setzt an die Stelle 14 bis 24 immer eine 0. Das ist eine Sequenz von 24 Nullen und Einsen mit 12 Wechseln. Die Wahrscheinlichkeit davon ist $(0.5)^{24}$ und p_2 noch größer. Antwort 4 ist daher die richtige.

(Genauso wäre also die Antwort ausgefallen, wenn wir nach 0,2,4,6,...,20 oder 22 Wechseln gefragt hätten. Bei 24,26,... Wechseln, wäre natürlich die Antwort 3 richtig gewesen, denn 24 Stellen sind zu wenig um so viele Wechsel zu bekommen. Außerdem kann es von 24 Tagen ja maximal 23 mal ruhig sein.)

18 Der effektvolle Weihnachtsmann

Autor: Aljoscha Palinkas

18.1 Aufgabe

Für meine Weihnachtsdekoration hat mir dieses Jahr mein Freund Erwin einen selbstgebastelten, lebensgroßen Weihnachtsmann geschenkt. Er ist aus allem möglichen Holz und Plastik zusammengeklebt und mit einer komplizierten Elektronik versehen. An seiner Mütze und seinen Ärmeln sind rote Lampen, die blinken können. Er kann mit dem linken Arm winken und in der rechten Hand hält er eine Pfeife. Außerdem kann er zwei verschiedene Weihnachtslieder singen: *Schneeflöckchen* und *O Tannenbaum*, dabei wird er sogar von einer Blaskapelle begleitet. Gleichzeitig kann er die beiden Weihnachtslieder jedoch nicht singen. Dafür hat Erwin gesorgt, obwohl man damit sicherlich – in der gleichen Tonart gesungen – meinen Nachbarn hätte sehr beeindrucken können. Damit das Schauspiel auch abwechslungsreich ist, hat Erwin diese drei Effekte miteinander verschaltet. Alle zwanzig Minuten wird umgeschaltet: Das bedeutet, abhängig davon, welche Effekte in den letzten zwanzig Minuten angeschaltet waren, wird ein Effekt eingeschaltet (bzw. angelassen) oder ausgeschaltet, je nachdem, ob die für einen Effekt festgelegte Bedingung erfüllt ist oder nicht:

Das Blinken wird angestellt, wenn vorher *Schneeflöckchen* gesungen wurde. Andernfalls blinken die Lampen nicht. Das Winken schaltet sich ein, wenn zuvor kein Lied gespielt wurde, aber die Lampen geblinkt haben, in jedem anderen Fall ist das Winken abgeschaltet. *O Tannenbaum* wird nur gesungen, wenn das Blinken vorher an war. *Schneeflöckchen* wird nur gesungen, wenn zuvor das Blinken zwar aus war, aber gewunken wurde. In allen anderen Fällen wird gar kein Lied gesungen.

Zu Beginn kann man für jede Funktion den Anfangszustand an einem Schalter einstellen, bevor man den Strom anschließt. Als ich das Gerät nun ausprobierte, war ich begeistert; tatsächlich änderte sich alle 20 Minuten irgendetwas. Allerdings hörte es irgendwann auf. Wenn ich dann manuell wieder die Funktionen neu einstellte, ging es wieder los. Einige Male stoppte es auch später wieder, aber manchmal lief es auch den ganzen Tag. Als ich Erwin anrief, sagte er mir, das hänge von dem Anfangszustand ab, den ich ja selbst einstelle. Aber wieso stoppt es manchmal komplett, fragte ich.

Er überlegte etwas und fragte mich dann, ob ich die Pfeife denn angestellt hätte. Wie, die Pfeife?!? Tatsächlich hatte auch die Pfeife eine Funktion, wie Erwin mich aufklärte: Sie war nämlich an eine kleine Kunstnebelmaschine angeschlossen. Einmal eingestellt – der Schalter war am linken Fuß versteckt – ließ sie fortwährend Rauch aufsteigen, sie konnte auch nur manuell wieder abgeschaltet werden. Sie hatte aber auch noch einen wichtigen zusätzlichen Effekt auf die Verschaltung des winkenden Arms: Wenn einmal

Blinken und Winken ausgeschaltet ist, das Lied *O Tannenbaum* gesungen wird und außerdem die Pfeife am Schmauchen ist, dann wird beim nächsten Umschalten der Winkearm aktiv. Mit dieser weiteren Wirkung, versprach mir Erwin, würde der Weihnachtsmann nie mehr aufhören, seine Lieder zu singen und zu winken und zu blinken. Obwohl mir bei diesen Worten etwas mulmig wurde, probierte ich es sofort aus; die rauchende Pfeife angeschaltet - und tatsächlich, wie ich ihn auch zu Beginn einstellte, und ich probierte es oft, der Weihnachtsmann führte seine Darbietung ohne Ende immer weiter vor, alle 20 Minuten wechselte er das Lied, sang auch mal gar nicht und auch das Blinken und Winken war immer mal unterbrochen ...

Frage:
Nach all dem Testen hatte ich nun den Weihnachtsmann zum 1. Advent im Vorgarten aufgestellt. Nach drei Tagen wurde der Weihnachtsmann durch einen Stein leicht beschädigt, vermutlich war es mein neidischer Nachbar, der mit seinem Plastikrentier klarer Verlierer ist. Nun gut, es wurde zum Glück die Schaltung nur leicht beschädigt, so dass das Blinklicht nun auch dann immer angeschaltet wird, wenn vorher gewunken wurde (außerdem nach wie vor, wenn *Schneeflöckchen* gesungen wurde). Welche Aussage zu den möglichen Vorstellungen meines Weihnachtsmannes mit oder ohne rauchender Pfeife, wobei nach dem Start die gewählte Einstellung für die Pfeife nicht mehr geändert werden soll, ist korrekt? Am schönsten ist es, wenn er – ohne zu winken – *O Tannenbaum* singt und dazu noch blinkt, ich nenne es einfach das Duett.

Antwortmöglichkeiten:

1. Entweder ist schon vor der Steinattacke die Vorstellung vorbei (kein Lied, kein Winken, kein Blinken) oder das Duett kommt immer wieder vor.

2. Wenn es die Steinattacke nicht gegeben hätte, würde das Duett auf jeden Fall immer wieder vorkommen, solange die Vorstellung nicht vorbei ist.

3. Wenn günstig gestartet wurde, wird nach der Steinattacke das Duett zu jeder vollen Stunde gespielt.

4. Wenn das Duett mehr als zweimal vorkommt, dann kam es schon vor der Steinattacke mehr als zweimal vor.

5. Nur wenn die Pfeife raucht, kann *O Tannenbaum* mehr als dreimal gesungen werden.

6. Wenn das Duett anderthalb Stunden lang nicht vorkam, dann wird es gar nicht mehr kommen und die Pfeife ist aus.

7. Wenn in der Starteinstellung gewunken wird, dann ist die Vorstellung auch nach einer Stunde noch im Gange.

8. Wenn das Duett vor der Steinattacke nicht vorkam, dann kommt es auch nachher nicht mehr.

9. Wenn die Pfeife aus ist, kommt das Duett nach Steinwurf nicht mehr vor.

10. Wenn die Vorstellung irgendwann aufhört, aber erst nach dem Steinwurf, also frühestens nach drei Tagen, dann kam das Duett genau einmal vor.

Projektbezug:

In der Systembiologie werden u.a. Netzwerke von vielen Genen, die gegenseitig ihre Aktivität regulieren, mathematisch modelliert.

Gene enthalten den Bauplan für Proteine. Ob so ein Bauplan aber gelesen wird und die Proteine danach gebaut werden, hängt von vielen anderen Stoffen in der Zelle ab, auch von anderen Genprodukten. So kann man sagen, dass die Aktivität eines Gens, also wieviel von seinem Protein produziert wird, von einem anderen Gen gehemmt wird oder aktiviert wird.

Wenn solche Beziehungen unter vielen Genen in einer Zelle bekannt sind, dann hat man ein kompliziertes Netzwerk gegeben und benötigt mathematische Modelle, um theoretisch zu untersuchen, welches Verhalten der ganzen

Gruppe von Genen von der Vielzahl der einzelnen Regulationen hervorgerufen werden kann.

Ein solches Modell sind logische Netzwerke, in denen für jedes Gen logische Bedingungen an die Aktivität anderer Gene gegeben sind, die angegeben, wann das Gen aktiviert wird, sie sagen z.B., dass ein Gen A genau dann aktiv wird, wenn ein gewisses Gen B aktiv ist und ein anderes Gen C inaktiv.

18.2 Lösung

Die richtige Lösung ist Antwort 10.

Die möglichen Vorstellungen des Weihnachtsmannes kann man sich an Hand des folgenden Graphen klarmachen:

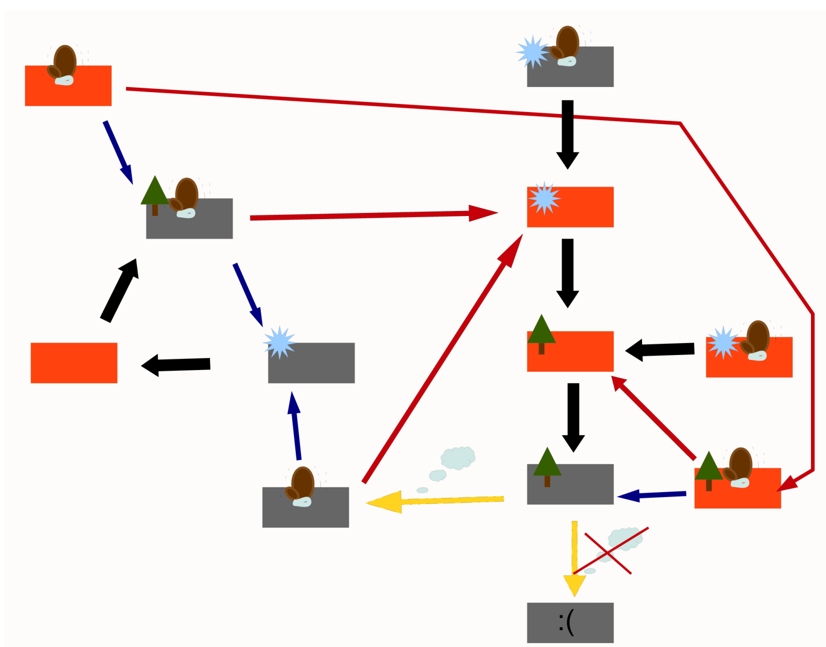


Abbildung 8: Weihnachtsdeko

:Blinken	:immer
:O Tannenbaum wird gesungen	:nur vor dem Steinwurf
:Schneeflöckchen wird gesungen	:nur nach dem Steinwurf
:Winken	:nur mit/ohne rauchender Pfeife

Alle 20 Minuten findet ein Umschalten statt, so dass Funktionen an- oder ausgeschaltet werden können. Dieses Umschalten führt zu Übergängen von einem Zustand in den nächsten, die hier durch Pfeile zwischen Zuständen dargestellt werden, dabei ändern sich durch den Steinwurf einige Übergänge. In genau einem Zustand hängt der Nachfolgezustand davon ab, ob die Pfeife raucht oder nicht.

Wenn nun in einem der fünf Zustände auf der linken Seite gestartet wird und die Pfeife nicht raucht, dann wird die Abfolge der Zustände zunächst bis zum Steinwurf den geschlossenen Zustandskreis links entlanggehen, nach dem Steinwurf nach rechts wechseln und dann nach unten führen, dabei das Duett darbieten, und schließlich die Vorstellung beenden. :(Dieses Beispiel zeigt, dass (1), (2), (5), (6) ,(8) und (9) falsch sind.

Wenn die Pfeife raucht, gibt es auch nach der Steinattacke einen geschlossenen Kreis und zwar aus vier Zuständen, in diesem Kreis kommt das Duett vor. Wenn links gestartet wird, sieht man, dass (4) falsch ist.

Außerdem ist (3) falsch, da der geschlossene Kreis mit dem Duett vier Zustände hat und sich das Duett also nur jede 80 Minuten wiederholt.

Ein Start im Zustand "Winken, Blinken, O Tannenbaum" (unten rechts) und ohne rauchende Pfeife zeigt, dass auch (7) falsch ist.

(10) ist richtig, denn nur, wenn die Pfeife aus ist, stoppt die Vorstellung überhaupt. Und nur, wenn auf der linken Seite gestartet wird, ist es nicht schon vor dem Steinwurf vorbei. In dieser Konstellation aber ist der Ablauf oben beschrieben und führt genau einmal zum Duett.

19 Hyperangebote in Schokoladenkreisläufen

Autoren: Ralf Borndörfer, Olga Heismann

19.1 Aufgabe

Aus Gründen, die der strengen Geheimhaltung unterliegen, betreibt der Weihnachtsmann an vielen Orten der Erde sogenannte **Schokoladenkreisläufe**. Hierbei fließt Schokolade mit konstanter Geschwindigkeit durch spezielle Rohrsysteme. Es geht dabei nicht darum, Schokolade von einem Ort zu einem anderen Ort zu transportieren, sondern um die Gewährleistung einer ständigen Zirkulation in dem System. Jedes solche Rohrsystem besteht aus einigen Knoten. In jeden Knoten eines Rohrsystems muss pro Sekunde genau ein Liter geschmolzener Schokolade hinein fließen und genau ein Liter geschmolzener Schokolade wieder heraus fließen. In einem Rohrsystem kann es mehrere nicht zusammenhängende Schokoladenkreisläufe geben, der Weihnachtsmann bezeichnet hierbei eine Kombination nicht zusammenhängender Schokoladenkreisläufe für ein Rohrsystem (wie im mittleren Bild des unten angegebenen Beispiels) auch einfach als Schokoladenkreislauf.

Die Knoten sind durch Rohre verbunden. Auf Grund der Bauart darf die Schokolade durch jedes Rohr in nur eine vorgegebene Richtung fließen. Zwischen je zwei Knoten kann es gar kein Rohr, ein Rohr in eine Richtung oder zwei Rohre für beide Richtungen geben. Für die Benutzung der Rohre fallen dem Weihnachtsmann Kosten an, die in Euro pro Liter geschmolzener Schokolade, der pro Sekunde in ein Rohr hinein- (und damit auch heraus-) fließt, angegeben sind. Die Rohre sind alle ausreichend dick, sodass es im Prinzip keine Mengenbeschränkung für die Menge der dort pro Sekunde hinein fließenden Schokolade gibt.

Weiterhin bietet der Betreiber für manche Rohrkombinationen **Hyperangebote** an. Dabei wird die Benutzung von zwei Rohren mit unterschiedlichen Start- und Endknoten zu einem günstigeren Preis angeboten. Dann werden, wie bei allen anderen Rohren auch, für die in zwei Rohre a und b hinein fließende Schokolade einzelne Benutzungskosten c_a und c_b in Euro pro Liter angegeben. Zusätzlich gibt es als Hyperangebot aber noch einen Sonderpreis $c_{ab} < c_a + c_b$ für die Menge an Schokolade, die pro Sekunde durch beide Rohre fließt. Dies ist so gemeint, dass bei solch einem Hyperangebot das Rohr, durch dessen Querschnitt die kleinere Menge pro Sekunde fließen soll, die Menge bestimmt, für die der Sonderpreis c_{ab} genommen wird. Für die Differenzmenge, die durch das Rohr mit der höheren Menge pro Sekunde fließt, wird der eigentlich für dieses Rohr geltende Preis genommen. Möchte der Weihnachtsmann also pro Sekunde z.B. 0,2 Liter Schokolade in Rohr a und 0,9 Liter in Rohr b fließen lassen, zahlt er bei Benutzung des Hyperangebots für die Benutzung der zwei Rohre $0{,}2 \cdot c_{ab} + 0{,}7 \cdot c_b$ anstatt des Normalpreises von $0{,}2 \cdot c_a + 0{,}9 \cdot c_b$.

Irgendwann waren auch mal Hyperangebote für Kombinationen aus mehr als zwei Rohren im Gespräch, wurden jedoch zunächst verworfen. Es ist nichts darüber bekannt, nach welchen Kriterien die Kosten für die einzelnen Rohre oder die Hyperangebote festgelegt werden.

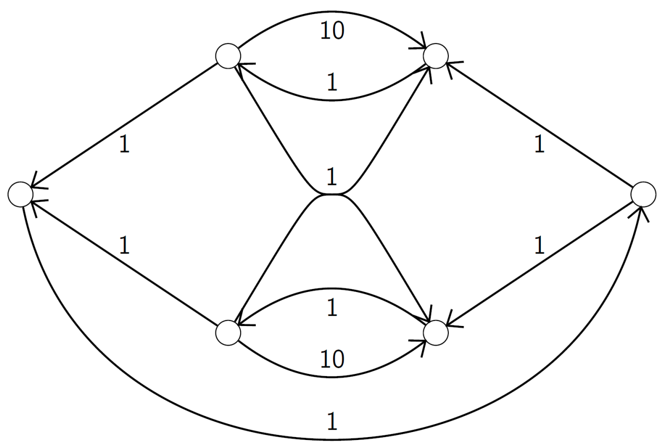
Natürlich möchte der Weihnachtsmann so wenig wie möglich zahlen. Der darauf spezialisierte Wichtel Hyperschock hat für alle Rohrsysteme deshalb optimale, d. h. kostenminimale, Schokoladenkreisläufe berechnet. Gab es mehrere kostenminimale Kreisläufe mit oder ohne Benutzung von Hyperangeboten, hat sich Hyperschock einfach für einen davon entschieden und nur diesen dem Weihnachtsmann mitgeteilt.

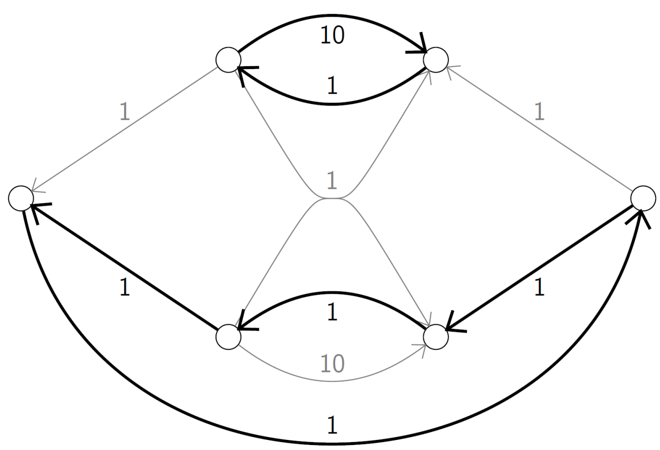
Soweit lief alles gut, doch heute flatterte Post des Betreibers der Rohrsysteme in den Briefschlitz des Weihnachtsmanns: „[...] können wir Ihnen ab Februar 2013 nur noch anbieten, pro Knoten genau ein Rohr, welches dort beginnt, und genau ein Rohr, welches dort endet, zu betreiben [...] “. Dann muss also der gesamte Liter, der pro Sekunde in jeden Knoten fließt, durch genau ein Rohr hinein fließen und auch durch genau ein Rohr wieder heraus fließen. Folglich fließt dann durch jedes Rohr immer entweder gar keine Schokolade oder ein ganzer Liter pro Sekunde. Solche Kreisläufe nennen wir **ganzzahlig**.

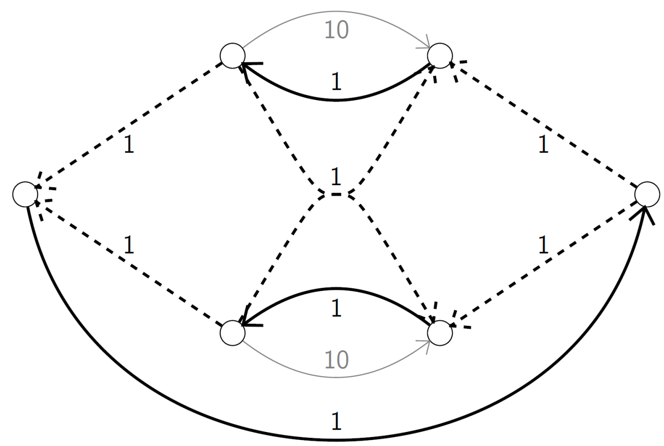
Für Hyperschock wäre die Umplanung wahrscheinlich kein Problem. Aber leider ist er gerade im Urlaub und der Weihnachtsmann wüsste gerne bevor Hyperschock wiederkommt, ob er demnächst höhere Ausgaben für die Schokoladenkreisläufe hat. Dann müsste er nämlich gegebenenfalls schon dieses Jahr etwas bei den Geschenken sparen. Jedes Rohrsystem einzeln zu betrachten würde zu lange dauern. Aber vielleicht kann man da ja eine allgemein gültige Aussage treffen. Früher, als es noch keine Hyperangebote gab, hat Hyperschock dem Weihnachtsmann mal erklärt, dass es für jedes Rohrsystem auch einen ganzzahligen Kreislauf gibt, der auch kostenminimal ist. Aber wie ist es jetzt: Werden die Kosten für den Weihnachtsmann steigen und wie hängt dies von den verfügbaren Hyperangeboten ab?

Tipp: Man kann solche Kreisläufe mit den Kosten für die Rohrbenutzung darstellen, indem man die Knoten als kleine Kreise malt, Rohre als Pfeile zwischen den Knoten darstellt und die Kosten in Euro für einen Liter Schokolade, der pro Sekunde durch dieses Rohr fließt, daneben schreibt. Hyperangebote kann man in dieser Darstellung durch verzweigte Pfeile, d. h. Pfeile mit zwei Anfängen und zwei Enden, darstellen. Ein kleines vom Weihnachtsmann benutztes Rohrsystem mit genau einem Hyperangebot (dargestellt durch den verzweigten Pfeil in der Mitte des Bildes, mit Kosten 1), welches bei der Lösungsfindung behilflich sein könnte, ist hier auf diese Art auf dem ersten

Bild dargestellt. Das zweite und dritte Bild zeigen einen ganzzahligen bzw. nicht ganzzahligen Schokokreislauf mit Gesamtkosten von 15 bzw. 5,5 Euro für das Rohrsystem. Fett markierte durchgezogene Pfeile sind dabei Rohre, durch die 1 Liter Schokolade pro Sekunde fließen, fett markierte gestrichelte Pfeile sind solche, durch die 0,5 Liter Schokolade pro Sekunde fließen, die dünnen grauen Pfeile zeigen im Rohrsystem nicht verwendete Rohre. Das einzige in dem Rohrsystem verfügbare Hyperangebot wird dabei nur in dem nicht ganzzahligen Schokokreislauf auf dem dritten Bild verwendet, es fließt dort durch jedes der beiden am Hyperangebot beteiligten Rohre ein halber Liter Schokolade pro Sekunde durch und verursacht damit Kosten von 0,5 Liter $\cdot$ 1 Euro pro Liter = 0,5 Euro.







Antwortmöglichkeiten:

1. Der Weihnachtsmann muss bestimmt nicht mehr zahlen. Für jedes Rohrsystem gibt es auch einen ganzzahligen Kreislauf, der kostenminimal ist. Das wäre übrigens auch so, wenn es Hyperangebote für Kombinationen aus mehr als zwei Rohren geben würde.

2. Der Weihnachtsmann muss bestimmt nicht mehr zahlen. Für jedes Rohrsystem gibt es auch einen ganzzahligen Kreislauf, der kostenminimal ist. Wenn es Hyperangebote für Kombinationen aus mehr als zwei Rohren geben würde, könnte das aber anders sein.

3. Der Weihnachtsmann muss bestimmt nicht mehr zahlen, denn nicht ganzzahlige Kreisläufe können gar nicht kostenminimal sein, sodass Hyperschock auch schon vorher so etwas nicht verwendet haben kann.

4. Es könnte passieren, dass der Weihnachtsmann mehr zahlen muss. Seine Kosten können jedoch maximal auf das Doppelte des alten Preises ansteigen, sogar dann, wenn es Hyperangebote für Kombinationen aus mehr als zwei Rohren geben würde.

5. Es könnte passieren, dass der Weihnachtsmann mehr zahlen muss. Seine Kosten können jedoch maximal auf das n-fache des alten Preises ansteigen, wenn es Hyperangebote für Kombinationen aus maximal n Rohren gibt.

6. Die Antwort auf diese Frage hängt davon ab, wie viele Hyperangebote es in den Systemen in Abhängigkeit von der Anzahl der Knoten gibt. Erst sobald die Anzahl der Hyperangebote ein bestimmtes positives ganzzahliges Vielfaches der Knotenananzahl übersteigt, könnte es für den Weihnachtsmann teurer werden.

7. Für Rohrsysteme, für die bisher keine Hyperangebote genutzt wurden, auch, wenn sie verfügbar waren, steigen die Kosten nicht. Dort, wo Hyperangebote genutzt wurden, könnten die Kosten ansteigen, maximal aber auf das Doppelte der bisherigen Kosten.

8. Für Rohrsysteme, für die bisher keine Hyperangebote genutzt wurden, auch, wenn sie verfügbar waren, steigen die Kosten nicht. Dort, wo Hyperangebote genutzt wurden, könnten die Kosten ansteigen, maximal aber auf das Zehnfache der bisherigen Kosten.

9. Für Rohrsysteme, für die bisher keine Hyperangebote genutzt wurden, auch, wenn sie verfügbar waren, steigen die Kosten nicht. Dort, wo Hyperangebote genutzt wurden, könnten die Kosten aber beliebig ansteigen.

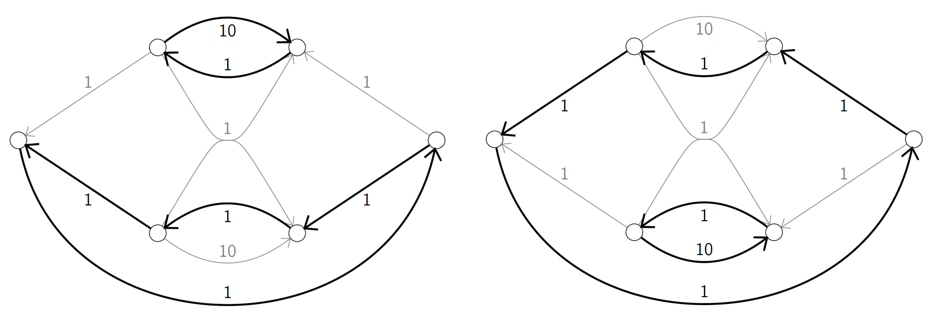
10. Leider kann man überhaupt nichts genaueres dazu sagen, ohne sich die konkreten Rohrsysteme anzugucken. Die Kosten des Weihnachtsmannes könnten beliebig ansteigen, wenn in einem Rohrsystem Hyperangebote auch nur verfügbar waren, aber in der bisherigen kostenminimalen Lösung von Hyperschock gar nicht genutzt wurden.

Projektbezug:
Im Matheon-Projekt B22 sind Knoten Fahrplanfahrten von IC- und ICE-Zügen. Die Kreisläufe entsprechen Umlaufplänen, die angeben, welches Fahrzeug welche Fahrplanfahrt ausführt. Hyperangebote entstehen durch unterschiedliche Arten sogenannter Gleichförmigkeitsbedingungen.

19.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9

Die Lösung kann dem Beispiel entnommen werden: Man sieht schnell, dass es dort nur die zwei folgenden ganzzahligen Schokokreisläufe gibt. Sie haben beide die Kosten 15.



Es gibt aber eine nicht ganzzahlige Lösung, die die Rohre mit den höheren Kosten nicht benutzt, wie in der Aufgabenstellung angegeben. Die Antworten 1–4 sind folglich falsch.

Die Antworten 5–8 sind auch falsch, da man die Kosten, die im Beispiel 10 sind, beliebig erhöhen kann und es im Beispiel nur ein einziges Hyperangebot gibt.

Antwort 10 ist falsch, weil Hyperangebote, die in der Optimallösung nicht benutzt werden, entfernt werden können, ohne dass sich diese ändert, und, wie in der Aufgabenstellung angegeben, es für jedes Rohrsystem ohne Hyperangebote auch einen ganzzahligen Kreislauf gibt, der kostenminimal ist.

Es bleibt die richtige Antwort 9.

20 Eisenwichtel-Marathon

Autoren: Rudi Pendavingh und Frits Spieksma

20.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht hat heuer zum ersten Mal am traditionellen Eisenwichtel-Wettkampf (Irongnome 2012) teilgenommen, dem vielleicht härtesten Sportwettstreit der Welt.

Beim Marathonlauf benötigte Knecht Ruprecht 3h 30min für die Strecke. Er musste viele Kilometer zurücklegen, durch Tiefschnee stapfen, vereiste Hänge bezwingen, Gletscherspalten und Schneebrücken überqueren und ab und zu über spiegelglatte Eisflächen schlittern. Der Marathon begann in Wichtelstedt, ging bis nach Schneehausen und führte dann denselben Weg wieder zurück nach Wichtelstedt.

Knecht Ruprecht hat seine Laufstrecke zwischen Wichtelstedt und Schneehausen in vier Teilstrecken unterteilt. Die genauen Längen dieser Teilstrecken sind uns nicht bekannt; wir wissen nur, dass jede von ihnen mindestens 5 km lang ist. Knecht Ruprecht hat die k-te Teilstrecke zweimal durchlaufen, und zwar einmal auf dem Hinweg nach Schneehausen mit der Geschwindigkeit a_k und einmal auf dem Rückweg von Schneehausen mit der Geschwindigkeit b_k. Da einige Teilstrecken bergauf und andere bergab führten, da sich bei Knecht Ruprecht Phasen von furchtbarer Müdigkeit mit Phasen von höchster Energie abwechselten und da Ruprecht sich ab und zu mit einem Schluck Rum aus dem Flachmann stärkte, können diese beiden Geschwindigkeiten a_k und b_k für dieselbe Teilstrecke stark von einander abweichen.

$a_1 = 18$ km/h	$a_2 = 12$ km/h	$a_3 = 8$ km/h	$a_4 = 15$ km/h
$b_1 = 9$ km/h	$b_2 = 12$ km/h	$b_3 = 24$ km/h	$b_4 = 10$ km/h

Die Gesamtlänge der Laufstrecke von Wichtelstedt nach Schneehausen und wieder zurück nach Wichtelstedt (in Kilometern) wird im Folgenden mit L bezeichnet, und Knecht Ruprechts Laufzeit von Wichtelstedt bis Schneehausen (in Stunden:Minuten:Sekunden) wird mit T bezeichnet.

Welche der folgenden zehn Aussagen ist wahr?

Antwortmöglichkeiten:

1. $L = 42{,}195$ (genau wie bei den Olympischen Spielen) und $T =$ 1:45:00.
2. $L = 42$ und $T =$ 1:43:10.
3. $L = 42$ und T liegt zwischen 1:41:20 und 1:45:50; den genauen Wert von T kann man aus den Angaben nicht bestimmen.

4. $L = 42$ und T liegt zwischen 1:42:30 und 1:46:40; den genauen Wert von T kann man aus den Angaben nicht bestimmen.

5. $40 \leq L \leq 44$ und $T =$ 1:43:10; den genauen Wert von L kann man aus den Angaben nicht bestimmen.

6. $40 \leq L \leq 44$ und T liegt zwischen 1:41:20 und 1:45:50; die genauen Werte von L und T kann man aus den Angaben nicht bestimmen.

7. $40 \leq L \leq 44$ und T liegt zwischen 1:42:30 und 1:46:40; die genauen Werte von L und T kann man aus den Angaben nicht bestimmen.

8. $41 \leq L \leq 45$ und $T =$ 1:43:10; den genauen Wert von L kann man aus den Angaben nicht bestimmen.

9. $41 \leq L \leq 45$ und T liegt zwischen 1:41:20 und 1:45:50; die genauen Werte von L und T kann man aus den Angaben nicht bestimmen.

10. $41 \leq L \leq 45$ und T liegt zwischen 1:42:30 und 1:46:40; die genauen Werte von L und T kann man aus den Angaben nicht bestimmen.

20.2 Lösung

Im Folgenden messen wir jede Länge in Kilometern (km) und jede Zeitdauer in Stunden (h). Wir bezeichnen die Länge der k-ten Teilstrecke mit ℓ_k. Die Gesamtlaufzeit von Knecht Ruprecht beträgt dann

$$\begin{aligned} &\ell_1/18 \;+\; \ell_2/12 \;+\; \ell_3/8 \;+\; \ell_4/15 \;+\; \ell_1/9 \;+\; \ell_2/12 \;+\; \ell_3/24 \;+\; \ell_4/10 \\ &= \;\ell_1/6 \;+\; \ell_2/6 \;+\; \ell_3/6 \;+\; \ell_4/6 \;=\; \frac{1}{6}\,(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4). \end{aligned}$$

Das impliziert $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = 21$ km, da Ruprecht den Marathon in 3h 30min zurücklegt. Wir erhalten $L = 2(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4) = 42$ km.

Ruprechts kürzestmögliche Laufzeit von Wichtelstedt bis Schneehausen hat eine möglichst lange erste Teilstrecke (mit $a_1 = 18$ km/h), und Ruprechts längstmögliche Laufzeit von Wichtelstedt bis Schneehausen hat eine möglichst lange dritte Teilstrecke (mit $a_3 = 8$ km/h). Da laut Angabe $\ell_k \geq 5$ km gilt, erhalten wir die untere Schranke

$$T \;\geq\; 6/18 \;+\; 5/12 \;+\; 5/8 \;+\; 5/15 \;=\; 41/24$$

mit $41/24 =$ 1:42:30 h, und die obere Schranke

$$T \;\leq\; 5/18 \;+\; 5/12 \;+\; 6/8 \;+\; 5/15 \;=\; 16/9$$

mit $16/9 =$ 1:46:40 h. Folglich ist Antwort #4 die korrekte Antwort.

Anmerkung. Die Geschwindigkeiten a_k und b_k wurden derart gewählt, dass die Summe $1/a_k + 1/b_k$ ihrer Kehrwerte von k unabhängig ist; dadurch wird dann die Länge L eindeutig festgelegt.

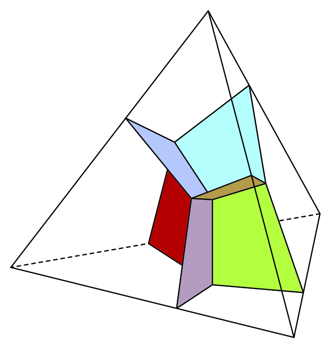
21 Optimale Viertelung eines Tetraeders

Autor: Jens A. Griepentrog

21.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann besucht am Heiligen Abend eine Familie mit vier Kindern; er hat auch Geschenke mitgebracht – unter anderem ein riesiges Stück Schokolade in Form eines regulären Tetraeders! Damit keiner zu kurz kommt, stehen die Eltern jetzt vor der Aufgabe, das Tetraeder in vier volumengleiche Stücke zu teilen. Da die Kinder sehr ungeduldig und gierig auf Ihre Schokolade warten, soll das gute Stück möglichst schnell aufgeteilt werden. Es entsteht eine Diskussion, wobei folgende Frage aufkommt: Wie groß ist eigentlich die minimale Schnittfläche, die benötigt wird, um ein reguläres Tetraeder in vier volumengleiche Stücke aufzuteilen?

Vater und Mutter grübeln eine ganze Weile, die Kinder fangen an zu quengeln und werden am Ende herausgeschickt, damit man in Ruhe überlegen kann – jedoch ohne Erfolg. Der Weihnachtsmann möchte den Schaden begrenzen und zeigt eine Abbildung mit bunt hervorgehobenen Schnittflächen:



„Ich werde Euch das Ergebnis nicht verraten, kann aber einige Hinweise zur Lösung des Rätsels geben: Es gibt im Inneren des Tetraeders einen Punkt, der zu allen vier Teilstücken gehört. Fällt man die Lote von diesem Punkt auf zwei benachbarte Seiten des Tetraeders und anschließend die Lote der so entstandenen Fußpunkte auf die gemeinsame Kante der benachbarten Seiten, so umranden diese vier Lote einen Teil der gesuchten Schnittfläche. Die gesamte Schnittfläche ist die Vereinigung all dieser (bunten) Flächenstücke, wenn man alle Kanten des Tetraeders durchläuft."

Wie groß ist die minimale Schnittfläche A, die benötigt wird, um ein reguläres Tetraeder der Kantenlänge 1 in vier volumengleiche Stücke aufzuteilen? Zur Auswahl stehen die folgenden Antwortmöglichkeiten:

1. $A = 1$
2. $A = \frac{3}{4}\sqrt{2}$
3. $A = \sqrt{3}$
4. $A = \sqrt{2}$

5. $A = \frac{1}{3}$
6. $A = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
7. $A = \frac{1}{4}$
8. $A = \frac{1}{6}\sqrt{3}$
9. $A = \frac{1}{6}\sqrt{6}$
10. $A = \frac{1}{2}$

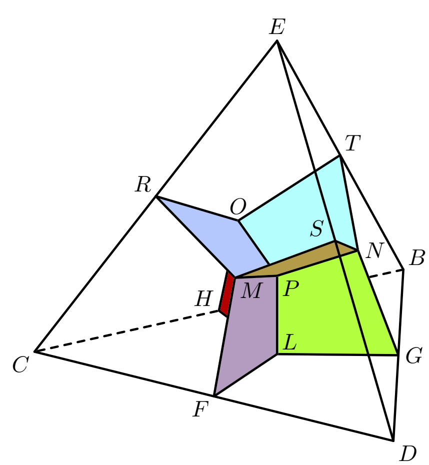
Projektbezug:
Die Aufgabe steht im Zusammenhang mit Separationsprozessen, welche man in quaternären Legierungen von Metallen beobachten kann. Betrachtet wird hierbei ein Gemisch von vier verschiedenen Teilchensorten, welche ein Tetraeder vollständig ausfüllen und miteinander wechselwirken. Stoßen sich je zwei verschiedene Sorten ab und ziehen sich gleichartige Teilchen an, so findet eine Phasenseparation statt, also eine Entmischung der Teilchen in nahezu reine Phasen. Während dieses Prozesses entstehen energetisch immer günstigere Teilchenkonfigurationen, wobei auch die Summe der Grenzflächen zwischen den Phasen kleiner wird. Sind von jeder Sorte gleichviele Teilchen vorhanden, finden die Wechselwirkungen mit jeweils gleicher Stärke statt und startet man mit einer geeigneten Anfangskonfiguration der Teilchen, dann repräsentiert die Lösung der Aufgabe das Endstadium des Entmischungsprozesses.

Desweiteren stimmt die Lösung mit der Zerlegung des Tetraeders in finite Volumen überein: Dabei wird jedem Eckpunkt die Menge all jener Punkte zugeordnet, deren Abstand zu diesem Eckpunkt nicht größer als zu allen anderen Eckpunkten ist. Diese Definition ist auf allgemeinere Zerlegungen des Raumes in disjunkte Tetraeder oder andere finite Elemente übertragbar und liefert die dazu duale Zerlegung in finite Volumen. Diese wird häufig bei der numerischen Behandlung von Transportproblemen zur Ortsdiskretisierung benutzt.

21.2 Lösung

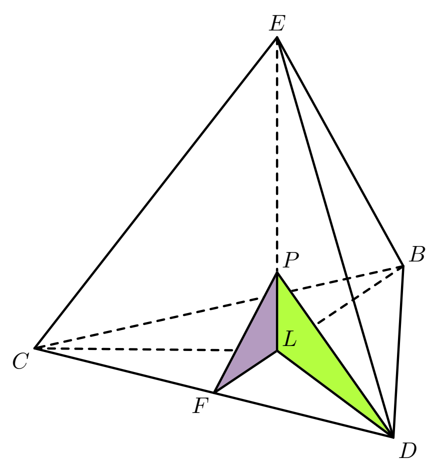
Richtige Lösung: Antwort 6

Wir betrachten ein reguläres Tetraeder der Kantenlänge 1 mit den vier Ecken B, C, D und E (siehe Abbildung). Seine sechs Kanten $\overline{CD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$, $\overline{EC}$, $\overline{ED}$ und $\overline{EB}$ haben die Mittelpunkte F, G, H, R, S und T. Die vier Seitenflächen dieses Tetraeders sind die gleichseitigen Dreiecke BCD, CDE, DBE und CBE. Die Schnittpunkte der Höhen dieser Dreiecke werden mit L, M, N und O bezeichnet. Da es sich um ein reguläres Tetraeder handelt, stellen die Strecken $\overline{BM}$, $\overline{CN}$, $\overline{DO}$ und $\overline{EL}$ gerade die Höhen des Tetraeders dar, welche alle die gleiche Länge besitzen und sich im Mittelpunkt P des Tetraeders schneiden. Wenn man – dem Lösungshinweis folgend – diesen Punkt P als inneren Punkt wählt, sind durch die Wahl der obigen Punkte alle Lote und somit die gesamte, bunt hervorgehobene Schnittfläche bestimmt. Dieser Punkt P ist *zulässig*, da die zugehörige Schnittfläche das Tetraeder in vier volumengleiche Stücke teilt.



Wir zeigen jetzt, dass P der *einzige* zulässige innere Punkt ist: Für jeden von P *verschiedenen* inneren Punkt P^* des Tetraeders kann man eines der von P erzeugten volumengleichen Stücke auswählen, welches P^* enthält. Würde man die lotrechte Konstruktion der Schnittfläche für den Punkt P^* gemäß des Lösungshinweises wiederholen, so bekäme man ein entsprechendes Volumenstück, das *echt* im soeben fixierten Volumenstück enthalten wäre und somit weniger als ein Viertel des Tetraedervolumens hätte. Daraus folgt, dass jeder von P verschiedene Punkt P^* als innerer Punkt für die Lotkonstruktion *unzulässig* ist.

Aus der letzten Überlegung und dem Lösungshinweis folgt, dass wir die gesuchte (minimale) Schnittfläche gefunden haben, welche das Tetraeder in vier volumengleiche Stücke teilt. Wir müssen jetzt nur noch deren Flächeninhalt A berechnen. Offenbar setzt sich die Schnittfläche aus sechs gleichartigen Sehnenvierecken vom Typ $FLPM$ zusammen. Dieses Sehnenviereck kann wiederum in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke vom Typ FLP zerlegt werden, dessen Flächeninhalt $A_0 = \frac{1}{2}|\overline{LF}| \cdot |\overline{PL}|$ es nun zu berechnen gilt:



1. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Höhe $|\overline{BF}|$ des rechtwinkligen Dreiecks BFD offenbar

$$|\overline{BD}|^2 = |\overline{BF}|^2 + |\overline{DF}|^2 = |\overline{BF}|^2 + \tfrac{1}{4}|\overline{BD}|^2 \text{ und somit } |\overline{BF}| = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Für die Länge der Strecke $\overline{LF}$ folgt daraus $|\overline{LF}| = \frac{1}{3}|\overline{BF}| = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

2. Wegen $|\overline{PL}| = \frac{1}{4}|\overline{EL}|$ und $|\overline{PD}| = |\overline{PE}| = \frac{3}{4}|\overline{EL}|$ liefert der Satz von Pythagoras für die Höhe $|\overline{PL}|$ des rechtwinkligen Dreiecks PLD auch

$$|\overline{PL}|^2 + |\overline{DL}|^2 = |\overline{PD}|^2 = 9|\overline{PL}|^2,$$

und mit $|\overline{DL}| = |\overline{BL}| = \frac{2}{3}|\overline{BF}| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ erhalten wir daraus $|\overline{PL}| = \frac{1}{12}\sqrt{6}$.

3. Für die Flächeninhalte der gesuchten Schnittfläche ergibt sich schließlich

$$A = 12A_0 = 6|\overline{LF}| \cdot |\overline{PL}| = \tfrac{1}{4}\sqrt{2},$$

was der Antwort 6 entspricht.

22 Wer war es?

Autor: Marika Karbstein

22.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist verärgert. Eine leckere Sahnetorte sollte auf ihn im Teehaus warten. Er hatte sich schon den ganzen Tag darauf gefreut, sie in seiner Pause am Nachmittag zu essen. Aber, was für eine Überraschung, neun Weihnachtswichtel hatten sich bereits im Teehaus versammelt, als er ankam. Und von einer Sahnetorte war weit und breit nichts zu sehen. Die Weihnachtswichtel, sonst immer gesprächig, schauten verdruckst auf den Boden. Niemand wollte etwas wissen oder gesehen haben. Der Weihnachtsmann schaute sie lange an und überlegte. Es blieb ja nicht viel geheim vor ihm. Der Besuch vom Osterhasen letztes Jahr war auch keine Überraschung. Und dieses Jahr war eine Theateraufführung geplant. Sollte wohl auch eine Überraschung werden, aber irgendwie hat der Weihnachtsmann schon einiges in Erfahrung bringen können. Er wusste, dass alle Wichtel den Tag über mit Vorbereitungen für das Theaterstück beschäftigt waren. Die Vorbereitungen beinhalten Einstudieren, Vorsprechen, Nase pudern, Dekorieren des Bühnenbildes und Anprobe. Jede Aktivität befindet sich in einem anderen Haus. Zwischen je zwei Häusern gibt es eine Verbindung, die mit dem Schlitten bewältigt werden kann. Entweder geht es auf dieser Verbindung bergauf oder bergab. Wenn es in eine Richtung bergauf geht, geht es natürlich in die Gegenrichtung bergab. An diesem Tag hat jeder der neun Wichtel drei der fünf Aktivitäten besucht. Die Wege dazwischen haben alle mit dem Schlitten zurückgelegt. Nach der letzten Aktivität sind alle mit ihrem Schlitten ins Teehaus gefahren. Auch diese Verbindungen verlaufen entweder bergauf oder bergab, je nachdem, von wo man kommt. Folgende weitere Informationen hat der Weihnachtsmann:

- Alle neun Wichtel haben die gleiche Anzahl an bergauf-Verbindungen gehabt. (Die Fahrt zum Teehaus ist dabei mitgezählt.)
- Idrin und Tol sind die Einzigen, die von ihrer letzten Aktivität bergab zum Teehaus rodeln konnten.
- Die erste Station von Idrin war die Anprobe, danach fuhr er hinauf zum Dekorieren.
- Anprobe und Dekorieren waren die 2. und 3. Station für Sharna und Rorrina.
- Zarna begann mit Dekorieren, fuhr danach zur Anprobe und als letztes zum Einstudieren.
- Miira begann mit der Anprobe. Ihre 2. Station war das Nase pudern.
- Tinder begann wie Sharna mit dem Einstudieren. Beide hatten die gleiche 2. Station.
- Erden begann wie Rorrina mit Nase pudern. Die 2. Station von Erden war Dekorieren, zu der er hinunterfuhr.
- Der einzige, der mit dem Vorsprechen begann, war Nor.
- Vom Vorsprechen geht es in alle Richtungen bergab.

Folgendes kann vorausgesetzt werden: Alle Wichtel haben gleichzeitig ihre erste Aktivität begonnen. Geht es von der ersten Aktivität zur zweiten bergauf, braucht jeder Wichtel 10 Minuten, geht es bergab, braucht jeder Wichtel 5 Minuten. Für die Verbindungen danach gilt: bergab braucht jeder Wichtel 2 Minuten weniger als für die letzte Verbindung davor, bergauf braucht jeder Wichtel doppelt so lange wie für die letzte Verbindung davor. Alle Wichtel brauchen bei jeder Aktivität im Haus die gleiche Zeit. Wer war unter diesen Voraussetzungen der/die erste, der/die im Teehaus ankam und damit die beste Möglichkeit hatte, unbemerkt die Sahnetorte zu verspeisen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Zarna
2. Idrin
3. Miira
4. Tinder
5. Sharna
6. Tol
7. Erden
8. Rorrina
9. Nor
10. Es kann keine eindeutige Aussage gemacht werden.

22.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3

Die Informationen, die der Weihnachtsmann kennt, ergeben folgendes Bild:

	Aktivitäten						
Name	1	2	3	Ende	1. Verb.	2.Verb.	3.Verb.
Zarna	D	A	E	T	bergab	bergauf	bergauf
Idrin	A	D		T	bergauf	bergauf	bergab
Miira	A	N		T	bergauf	bergab	bergauf
Tinder	E	A		T	bergab	bergauf	bergauf
Sharna	E	A	D	T	bergab	bergauf	bergauf
Tol				T	bergauf	bergauf	bergab
Erden	N	D		T	bergab	bergauf	bergauf
Rorrina	N	A	D	T	bergab	bergauf	bergauf
Nor	V			T	bergab	bergauf	bergauf

Die grün markierten Infos können aus den anderen hergeleitet werden, z.B. Sharna und Rorrina fahren als zweites bergauf, da Idrin von A nach D bergauf fährt. Da alle die gleiche Anzahl an Bergauf-Verbindungen haben, fahren Sharna und Rorrina als erstes bergab. Es folgt, dass Miira zuerst bergauf fährt, da sie die ersten beiden Aktivitäten in umgekehrter Reihenfolge besucht als Rorrina, als zweites also bergab, usw.

Es sind nur die Fahrzeiten auf den Verbindungen relevant. Es ergibt sich aus dem Text:

- bergauf, bergauf, bergab: $10 + 20 + 18 = 48$
- bergauf, bergab, bergauf: $10 + 8 + 16 = 34$

- bergab, bergauf, bergauf: $5 + 10 + 20 = 35$

Da Miira die Einzige ist, die bergauf, bergab, bergauf fährt, ist sie als erste im Teehaus.

23 Wichteldemokratie

Autor: Gerhard Woeginger

23.1 Aufgabe

Die 15 Wichtel Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo, Frodo, Gumbo, Harpo, Izzo, Jacco, Kuffo, Loco, Mirko, Nemmo und Onno wollen 100 Kekse untereinander aufteilen. Das führt sofort zu Problemen: Erstens darf (wegen der Krümel) keiner der Kekse zerteilt werden. Zweitens ist 100 nicht glatt durch 15 teilbar. Drittens gibt es Streit.

Die Wichtel einigen sich schließlich auf eine durch und durch demokratische Vorgehensweise. Der alphabetisch letzte Wichtel in der Gruppe wird zum Aufteilungsleiter (nicht zu verwechseln mit einem Abteilungsleiter) ernannt und schlägt eine Aufteilung der 100 Kekse an alle teilnehmenden Wichtel – ihn selbst eingeschlossen – vor. Dann wird über seinen Vorschlag abgestimmt.

- Falls es eine oder gar keine Gegenstimme gibt, so ist der Vorschlag angenommen. Die Kekse werden entsprechend aufgeteilt und es gibt keine weiteren Abstimmungen.

- Falls es aber zwei oder mehr Gegenstimmen gibt, so wird der Aufteilungsleiter abgesetzt und für seinen schlechten Vorschlag schwer bestraft. Er verliert jegliches Anrecht auf die Kekse, darf bei den weiteren Abstimmungen nicht mitmachen und muss stattdessen einen furchtbar sauren grünen Apfel aufessen. Dann wird die Prozedur mit einem neuen Aufteilungsleiter – und einem Wichtel weniger – wiederholt.

Die Wichtel nehmen ihre Demokratie sehr ernst; es wird immer ehrlich abgestimmt und es gibt weder Absprachen noch Geheimabsprachen und schon gar keine Verschwörungen. Die Ziele der 15 Wichtel bei den Abstimmungen sind einfach zu beschreiben: Oberstes Ziel jedes Wichtels ist es, nicht selbst in einen sauren Apfel beißen zu müssen. Ein fast genauso wichtiges Ziel ist es, möglichst viele Kekse zu erhalten. Und schließlich finden die Wichtel es ziemlich lustig, wenn ein anderer einen sauren Apfel essen muss. Hat ein Wichtel also zwischen zwei Situationen zu wählen, die ihm jeweils dieselbe Anzahl von Keksen bringen und in denen er selbst keinen sauren Apfel essen muss, so entscheidet er sich immer für die Situation, in der mehr grüne Äpfel gegessen werden.

Der äußerst kluge und bedächtige Onno wird als alphabetisch letzter Wichtel zum ersten Aufteilungsleiter ernannt. Onno denkt lange nach und macht dann den für ihn bestmöglichen Aufteilungsvorschlag.

Welche der folgenden Aussagen trifft für Onnos Aufteilungsvorschlag zu?

Antwortmöglichkeiten:

1. Onno kriegt 2 Kekse und jeder andere Wichtel kriegt 7 Kekse.
2. Onno kriegt 3 Kekse und Izzo kriegt 8 Kekse.
3. Onno kriegt 4 Kekse und Espo kriegt 11 Kekse.
4. Onno kriegt 5 Kekse und Loco kriegt 8 Kekse.

5. Onno kriegt 6 Kekse und Dondo kriegt 8 Kekse.
6. Onno kriegt 7 Kekse und Kuffo kriegt 7 Kekse.
7. Onno kriegt 8 Kekse und Frodo kriegt 3 Kekse.
8. Onno kriegt 9 Kekse und Atto kriegt 13 Kekse.
9. Onno kriegt 10 Kekse und Harpo kriegt 8 Kekse.
10. Onno kriegt kein Keks und muss auf jeden Fall in den sauren Apfel beißen.

23.2 Lösung

Antwort 8 ist richtig.

Diese Aufgabe denkt man sich am besten von hinten (nur noch 2 Wichtel übrig) nach vorne (alle 15 Wichtel vorhanden) durch. Für jede natürliche Zahl n mit $2 \leq n \leq 15$ werden wir zeigen, dass es für die Situation mit n Wichteln einen eindeutigen Aufteilungsvorschlag V_n gibt, der für den Aufteilungsleiter das bestmögliche Ergebnis liefert. Wenn also einer der anderen verbleibenden Wichtel einen konkreten Aufteilungsvorschlag X für sich beurteilen will, so braucht er X nur mit dem Vorschlag V_{n-1} zu vergleichen. Falls X für ihn besser als V_{n-1} ist, so stimmt er für X, und andernfalls stimmt er gegen X.

Wir beginnen mit dem Fall mit $n = 2$ verbleibenden Wichteln Atto und Bilbo. Da Aufteilungsleiter Bilbo jede Abstimmung mit höchstens einer Gegenstimme gewinnen kann, wird Bilbo sich alle 100 Kekse sichern und den für ihn bestmöglichen Aufteilungsvorschlag V_2 mit $A = 0$ und $B = 100$ machen.

Im Falle von $n = 3$ Wichteln (Atto, Bilbo, Chico) muss Aufteilungsleiter Chico sich die Stimme von Atto oder Bilbo sichern. Bilbo stimmt auf jeden Fall gegen Chicos Vorschlag V_3, da ihm der Vorschlag V_2 alle 100 Kekse zuweist. Atto zieht jeden Vorschlag mit $A = 1$ dem Vorschlag V_2 mit $A = 0$ vor. Atto wird gegen jeden Vorschlag mit $A = 0$ stimmen, da ihm der Vorschlag V_2 ebenfalls $A = 0$ Kekse garantiert und er Chico gerne in den sauren Apfel beißen sieht. Also macht Chico den Vorschlag V_3 mit $A = 1$, $B = 0$, $C = 99$ und gewinnt die Abstimmung.

Im Falle von vier Wichteln (Atto, Bilbo, Chico, Dondo) muss Aufteilungsleiter Dondo sich die Stimmen von zwei anderen Wichteln sichern, indem er ihnen ein besseres Angebot als Vorschlag V_3 macht. Attos Stimme kostet 2 Kekse, Bilbos Stimme kostet 1 Keks, und Chicos Stimme kostet 100 Kekse. Also macht Dondo den Vorschlag V_4 mit $A = 2$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 97$ und gewinnt die Abstimmung.

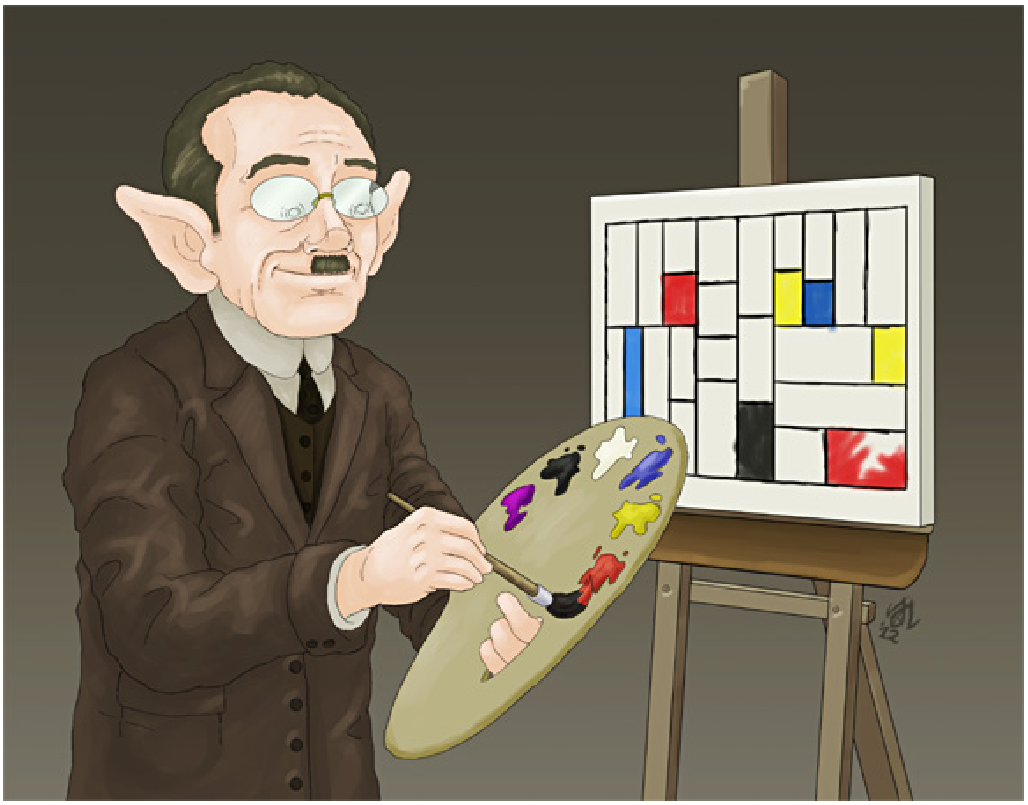
Im Falle von fünf Wichteln (Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo) muss Espo sich die Stimmen von drei anderen Wichteln sichern. Attos Stimme kostet 3 Kekse, Bilbos Stimme kostet 2 Kekse, Chicos Stimme kostet 1 Keks, und Dondos Stimme kostet 98 Kekse. Also macht Espo den Vorschlag V_5 mit $A = 3$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 0$, $E = 94$ und gewinnt die Abstimmung.

Und so weiter, und so fort. Die folgende Tabelle listet die bestmöglichen Vorschläge V_n für den Aufteilungsleiter auf. Die letzte Zeile zeigt, dass Onno sich mit Vorschlag V_{15} genau 9 Kekse sichern kann und dass V_{15} dem Atto 13 Kekse zuweist.

n	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
2	0	100													
3	1	0	99												
4	2	1	0	97											
5	3	2	1	0	94										
6	4	3	2	1	0	90									
7	5	4	3	2	1	0	85								
8	6	5	4	3	2	1	0	79							
9	7	6	5	4	3	2	1	0	72						
10	8	7	6	5	4	3	2	1	0	64					
11	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	55				
12	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	45			
13	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	34		
14	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	22	
15	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9

24 Mondrian

Autoren: Hajo Broersma und Cor Hurkens

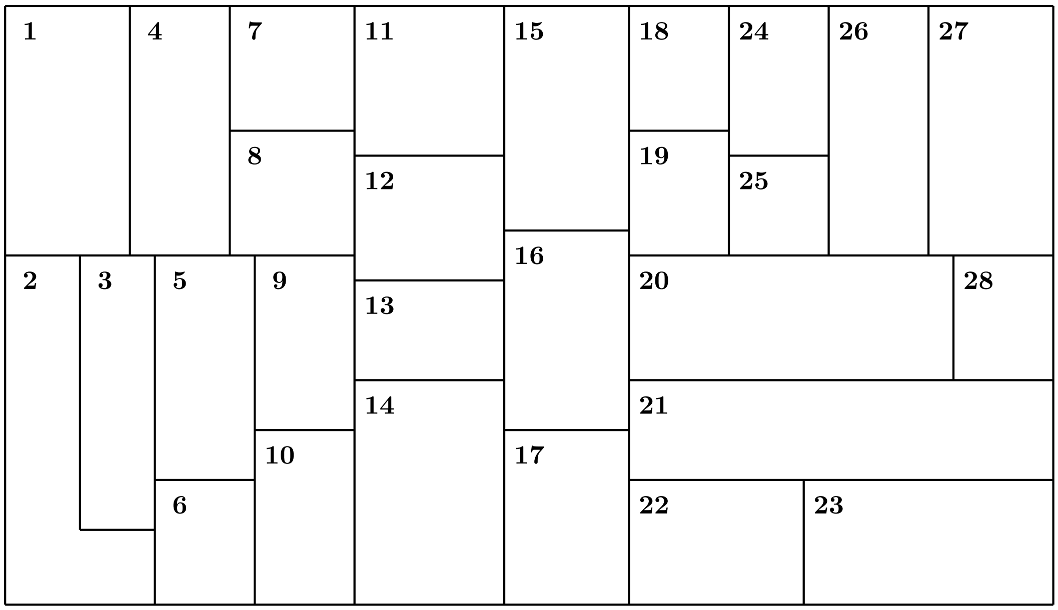


24.1 Aufgabe

Der Malwichtel Mondrian hat eine Weihnachtskarte entworfen und in 28 Gebiete unterteilt. Mondrian will nun jedes Gebiet mit einer der sechs Farben rot, gelb, blau, weiß, schwarz und violett ausmalen, sodass keine zwei benachbarte Gebiete die selbe Farbe erhalten. Eine Färbung mit r roten, g gelben, b blauen, w weißen, s schwarzen und v violetten Gebieten hat den sogenannten Mondrianwert

$$(r-9)^2 + 2\,(g-9)^2 + 3\,(b-8)^2 + 2w + 3s + 4v.$$

Mondrian findet eine Karte umso schöner, je kleiner ihr Mondrianwert ist.



Welchen Mondrianwert hat die schönste Färbung dieser Weihnachtskarte?

Antwortmöglichkeiten:

1. 2
2. 3
3. 4
4. 5
5. 6
6. 7
7. 8

8. 9
9. 10
10. 11

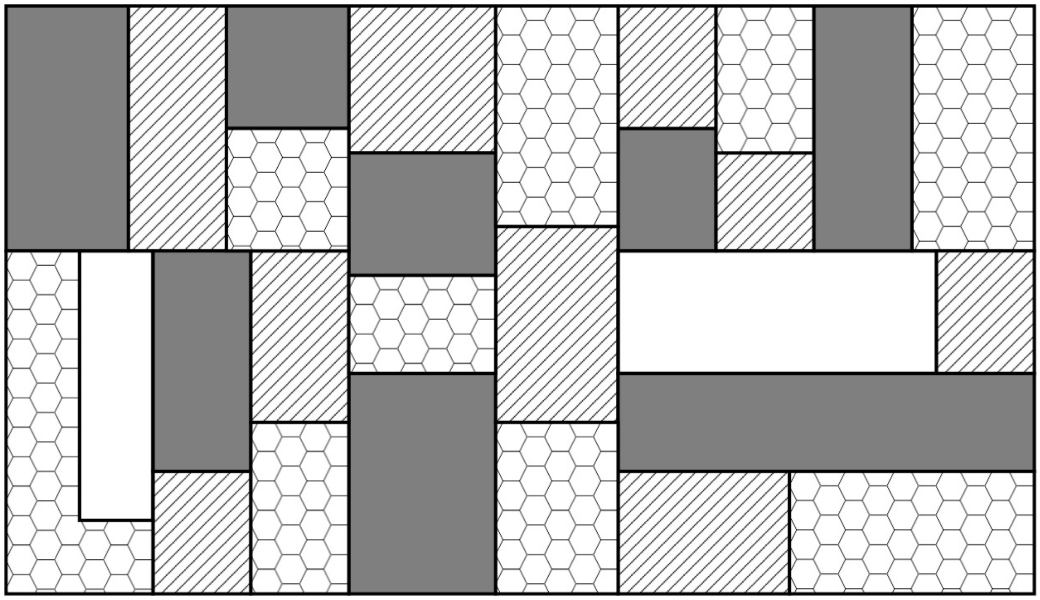
24.2 Lösung

Die korrekte Antwort ist 3.

Zuerst behaupten wir, dass nicht alle sechs Gebiete 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit den drei Farben rot, gelb, blau gefärbt werden können. Das Gebiet 3 liegt in ihrer Mitte und ist (oBdA) gelb gefärbt. Die anderen fünf Gebiete 1–2–6–5–4 bilden einen Ring um das gelbe Gebiet 3 und müssten deshalb abwechselnd rot und blau gefärbt sein; dies ist aber unmöglich, da fünf eine ungerade Zahl ist. Ein analoges Argument zeigt, dass nicht alle acht Gebiete 16, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28 mit den drei Farben rot, gelb, blau gefärbt werden können (da sieben dieser Gebiete einen Ring um Gebiet 20 bilden).

Folglich muss mindestens eines der sechs Gebiete 1, 2, 3, 4, 5, 6 und mindestens eines der acht Gebiete 16, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28 eine der Farben weiß, schwarz, violett erhalten. Dies impliziert $w + s + v \geq 2$ und weiterhin $2w + 3s + 4v \geq 2(w + s + v) \geq 4$. Da $(r - 9)^2 + 2\,(g - 9)^2 + 3\,(b - 8)^2 \geq 0$ gilt, hat jede Färbung einen Mondrianwert von 4 oder mehr.

Die folgende Abbildung zeigt eine Färbung mit $r = g = 9$, $b = 8$, $w = 2$ und $s = v = 0$ (wobei rot=schraffiert, gelb=bienenwaben-gemustert, blau=grau und weiß=weiß ist). Der Mondrianwert dieser Färbung ist 4.



Anmerkung. Es gibt $6^{28} \approx 10^{20}$ Möglichkeiten, diese 28 Gebiete mit 6 Farben zu färben. Einfache Enumerationsansätze mit dem Computer sind daher zum Scheitern verurteilt.