Digitaler Adventskalender 2008
www.mathekalender.de

Aufgaben und Lösungen

DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

Inhaltsverzeichnis

1 Eine neue Strecke für das Rentierschlittenrennen 4

2 Lämpchen 8

3 Das schönste Rentier von allen! 12

4 Weihnachtsjagd 18

5 Das Rotwein–Paradoxon 25

6 Zuckerstangen 29

7 Eins! Zwei! Viele! 33

8 Der springende Ball 38

9 Lebkuchenessen 43

10 Die Weihnachtsgrippe 46

11 Weihnachts-Rekursion 51

12 Sizilianische Weihnacht 54

13 Das Kekskuchenspiel 60

14 Schlittentour 65

15 Diskrete Minimalfläche 77

16 Die Turboschlitten Rettung 80

17 Hüttenlauf 87

18 12 Tage 89

19 Roboter und Zuckerstangen 94

20 Geschenke 101

21 Südsee **105**

22 Weihnachtsbäckerei **110**

23 Haus vom Nikolaus **114**

24 Weihnachts-Sudoku **119**

A Lösungen im Überblick **122**

1 Eine neue Strecke für das Rentierschlittenrennen

Autor: Jochen Garcke

1.1 Aufgabe

In einem Dorf wohnen Elfen und Federwichtel zusammen. Die Federwichtel planen eine neue Rennstrecke für das traditionelle weihnachtliche Rentierschlittenrennen. Im Gegensatz zu anderen Jahren soll diese nun nicht mehr am Dorf vorbeigehen, sondern durch das Dorf hindurchführen.
Nun wohnen die Federwichtel getrennt von den Elfen, das mag mit den unterschiedlichen Gesangsvorstellungen von Federwichteln und Elfen zu tun haben. Beide Seiten haben sich schnell darauf verständigt, dass der neue Weg am besten gerade durch das Dorf verläuft und die beiden Dorfhälften trennt. So sind die Anhänger des Federwichtelgespanns auch von denen des Elfengespanns getrennt, da gab es in anderen Jahren doch ab und an „Missverständnisse“.
Damit auch die spannenden Überholmanöver auf der langen Geraden möglich sind, muss die Strecke natürlich möglichst breit sein. Die Häuser der Elfen und Federwichtel dürfen dabei von der Strecke berührt werden.

Die Häuser der Federwichtel stehen auf den Koordinaten
$(6, 18), (6, 31), (15, 24), (18, 21), (21, 30), (27, 36), (30, 28), (33, 33)$.

Die Häuser der Elfen stehen auf den Koordinaten
$(6, 7), (12, 12), (15, 6), (18, 12), (24, 18), (25, 10), (30, 18), (36, 21)$.
Eine Längeneinheit ist ein Meter. Wie breit ist die Strecke, die die Federwichtel idealerweise durch das Dorf führen ?

Antwortmöglichkeiten (auf Zentimeter gerundet):

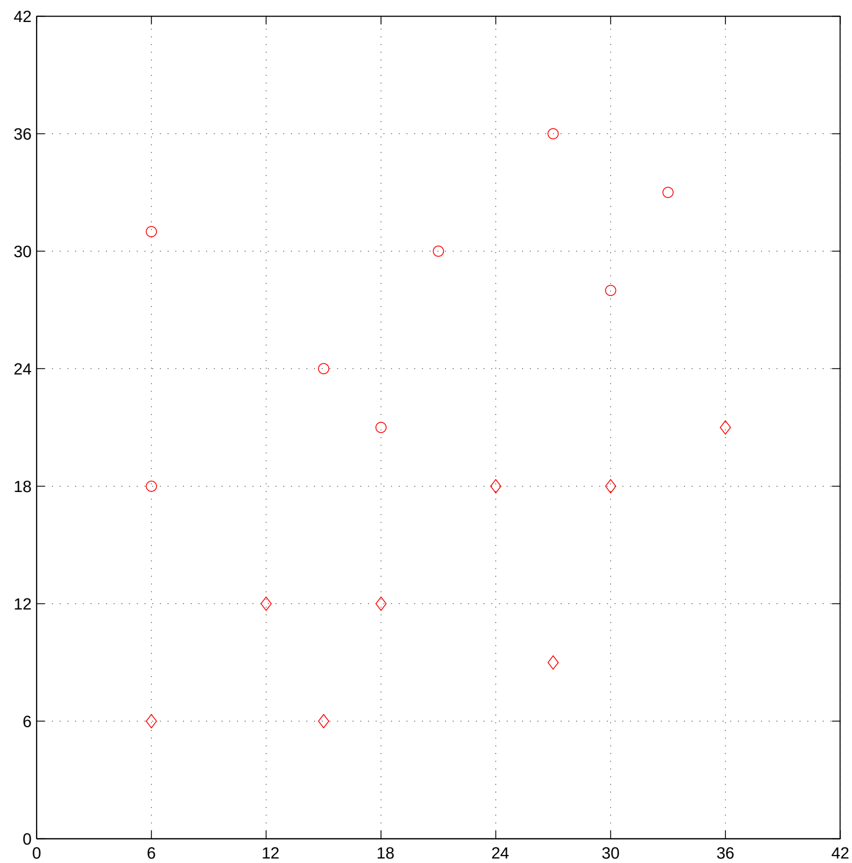
1. $4,75$
2. $5,00$
3. $5,37$

4. $5,61$
5. $5,72$
6. $5,90$
7. $6,19$
8. $6,32$
9. $7,23$
10. Es gibt keine Strecke die durch das Dorf führt und die Dorfhälften der Federwichtel und Elfen trennt.

Projektbezug:
Zwei Arten von Objekten auf Grundlage ihrer Eigenschaften automatisiert zu klassifizieren, ist eine typische Aufgabe im Maschinellen Lernen und Data Mining. In dieser Aufgabe geschieht die Trennung durch eine gewählte Gerade durch den Koordinatenraum, nämlich jene, die den breitesten Balken beschreibt. Mit anderen Methoden sind auch kompliziertere Trennflächen zur Klassifikation möglich. Mit der effizienten Berechnung von Klassifikatoren beschäftigen sich Forscher im Matheon.

1.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3
Zuerst zeichnen sich die Federwichtel die Koordinaten der Häuser auf.



Sie sehen dann schnell, dass auf der Federwichtelseite die Häuser mit den Koordinaten $(18, 21)$ und $(30, 28)$ eine Begrenzungsgerade bilden und auf der Elfenseite die Häuser mit den Koordinaten $(12, 12)$ und $(24, 18)$.

Der kleinste Abstand der Punkte auf der einen Seite von der Gerade auf der anderen Seite ist nun die maximal mögliche Breite. Die Federwichtel sehen, beziehungsweise messen, in ihrer Zeichung, dass auf der Federwichtelseite der Punkt $(18, 21)$ den kleinsten Abstand zur „Elfengerade“ hat und umgekehrt

der Punkt $(12, 12)$ von der „Federwichtelgerade“.
Wiederum sehen einige Federwichtel, dass der Abstand des Hauses auf $(18, 21)$ von der Gerade auf der anderen Seite größer ist als der Abstand des Elfenhauses auf $(12, 12)$ von der Gerade auf der Federwichtelseite. Andere Federwichtel messen das aus, einige rechnen beide Abstände aus, um sich sicher zu sein.
Als Geradengleichung für die „Elfengerade“ ergibt sich

$$y = 6 + \frac{1}{2}x$$

als Hesse'sche Normalform dafür ergibt sich

$$\frac{6 + \frac{1}{2}x - y}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}}.$$

Der Abstand des Punktes $(18, 21)$ kann nun durch Einsetzen in die Hessesche Normalform bestimmt werden:

$$\frac{6 + \frac{18}{2} - 21}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{-6}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{-12}{\sqrt{5}} \approx -5,37.$$

Das $-$ entsteht bekanntlich, da der Punkt auf der dem Nullpunkt gegenüberliegenden Seite liegt.

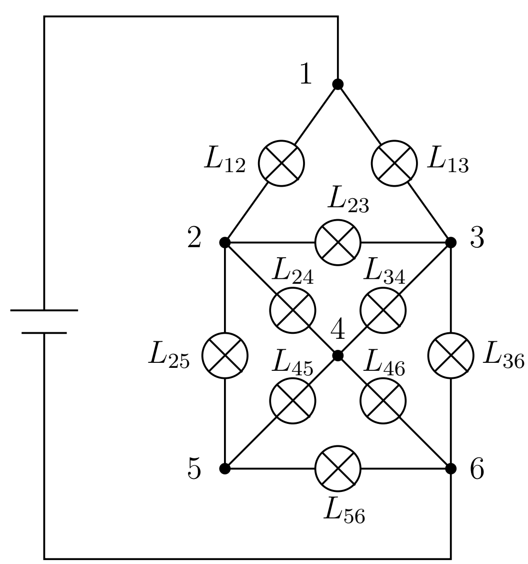
Diese Aufgabe beschreibt auch ein Grundprinzip der Support Vektor Maschine, einem Klassifizierungsverfahren. Es gibt viele Geraden, genau genommen unendlich viele, die die beiden Seiten trennen können. Man wählt nun die Gerade, die durch den breitesten Balken, der zwischen den Punkten liegen kann, charakterisiert wird. Dies liefert eine eindeutige Wahl der Trennungslinie, die zudem stabiler in ihren Eigenschaften ist. Die Lösung einer Support Vektor Maschine im allgemeinen Fall wird mit einem geeigneten nichtlinearen Optimierungsverfahren bestimmt.

2 Lämpchen

Autor: Boris Springborn
Projekt: F1

2.1 Aufgabe

Der Nikolaus möchte, dem allgemeinen Trend folgend, sein Haus mit Lämpchen illuminieren. Als der beauftragte Elektrowichtel das Ergebnis seiner Arbeit vorstellt, ist der Nikolaus unzufrieden, da nicht alle Lämpchen gleich hell leuchten. Der Assistent der Hilfselfe des Elektrowichtels hatte sich die unten abgebildete elektrische Schaltung mit einer Batterie und zehn Lämpchen ausgedacht. Dabei verwendete er Lämpchen, die alle gleich sind und die sich wie Ohm'sche Widerstände verhalten.
Welches leuchtete am hellsten und welches am wenigsten hell?



Antwortmöglichkeiten:

1. L_{12} leuchtet am hellsten und L_{23} leuchtet am wenigsten hell.
2. L_{12} leuchtet am hellsten und L_{34} leuchtet am wenigsten hell.
3. L_{12} leuchtet am hellsten und L_{45} leuchtet am wenigsten hell.
4. L_{13} leuchtet am hellsten und L_{23} leuchtet am wenigsten hell.
5. L_{13} leuchtet am hellsten und L_{34} leuchtet am wenigsten hell.
6. L_{13} leuchtet am hellsten und L_{45} leuchtet am wenigsten hell.
7. L_{36} leuchtet am hellsten und L_{23} leuchtet am wenigsten hell.
8. L_{36} leuchtet am hellsten und L_{34} leuchtet am wenigsten hell.
9. L_{36} leuchtet am hellsten und L_{45} leuchtet am wenigsten hell.
10. Alle Lämpchen leuchten gleich hell.

Projektbezug:
Im MATHEON-Projekt F1 beschäftigen wir uns mit Fragestellungen, die bei der computergraphischen Darstellung von gekrümmten Flächen im Raum auftreten. In diesem Zusammenhang spielt dieselbe Art von Gleichungen eine große Rolle, die auch bei der Berechnung von elektrischen Netzwerken aus Widerständen, wie in dieser Aufgabe, vorkommt.

2.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6

Je stärker der Strom ist, der durch ein Lämpchen fließt, desto heller leuchtet es. Wir müssen also die Stärken der Ströme durch die einzelnen Lämpchen berechnen. Wir bezeichnen jeweils mit I_{ij} die Stärke des Stroms, der durch Lämpchen L_{ij} von Knoten i nach Knoten j fließt. Wenn der Strom von j nach i fließt, sei I_{ij} negativ. Es gilt also immer$I_{ij} = -I_{ji}$. Bezeichnen wir ferner mit U_i das elektrische Potenzial, das an Knoten i anliegt. Weil die Knoten 1 und 6 direkt mit dem Plus- und Minuspol der Batterie verbunden sind, ist $U_1 = U_B$ (die Batteriespannung) und $U_6 = 0$. Die Potenziale U_2, U_3, U_4, U_5 an den übrigen Knoten werden wir berechnen.Nach dem Ohm'schen Gesetz ist

für jedes der Lämpchen L_{ij} der Strom I_{ij} proportional zum Spannungsabfall $U_i - U_j$,

$$U_i - U_j = R \cdot I_{ij},$$

wobei R der Widerstand eines Lämpchens ist. Nach dem ersten Kirchhoff'schen Gesetz ist an jedem Knoten die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme. Für Knoten 2 zum Beispiel bedeutet das

$$0 = I_{21} + I_{23} + I_{24} + I_{25}$$

(beachte die Vorzeichenkonvention für die I_{ij}). Für die anderen drei Knoten, die nicht direkt mit der Batterie verbunden sind (Knoten 3, 4 und 5), erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= I_{31} + I_{32} + I_{34} + I_{36}, \\
0 &= I_{42} + I_{43} + I_{45} + I_{46}, \\
0 &= I_{52} + I_{54} + I_{56}.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun diese vier Gleichungen mit R multiplizieren und jeweils $U_i - U_j$ für RI_{ij} substituieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= -U_1 + 4U_2 - U_3 - U_4 - U_5, \\
0 &= -U_1 - U_2 + 4U_3 - U_4 - U_6, \\
0 &= -U_2 - U_3 + 4U_4 - U_5 - U_6, \\
0 &= -U_2 - U_4 + 3U_5 - U_6.
\end{aligned}$$

Mit $U_1 = U_B$ und $U_6 = 0$ ergibt sich dann das folgende lineare Gleichungssystem für die unbekannten Potenziale U_2, U_3, U_4, U_5:

$$\begin{aligned}
U_B &= 4U_2 - U_3 - U_4 - U_5\\
U_B &= -U_2 + 4U_3 - U_4\\
0 &= -U_2 - U_3 + 4U_4 - U_5\\
0 &= -U_2 - U_4 + 3U_5.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem müssen wir lösen (z. B. mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren). Das Ergebnis ist

$$U_2 = \frac{28}{55}U_B, \qquad U_3 = \frac{5}{11}U_B, \qquad U_4 = \frac{17}{55}U_B, \qquad U_5 = \frac{3}{11}U_B.$$

Wiederum mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes können wir nun endlich den Strom durch die zehn Lämpchen berechnen:

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \frac{27}{55}\cdot\frac{U_B}{R}, & I_{13} &= \frac{6}{11}\cdot\frac{U_B}{R} = \frac{30}{55}\cdot\frac{U_B}{R},\\
I_{23} &= \frac{3}{55}\cdot\frac{U_B}{R}, & I_{24} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{U_B}{R} = \frac{11}{55}\cdot\frac{U_B}{R},\\
I_{25} &= \frac{13}{55}\cdot\frac{U_B}{R}, & I_{34} &= \frac{8}{55}\cdot\frac{U_B}{R},\\
I_{36} &= \frac{5}{11}\cdot\frac{U_B}{R} = \frac{25}{55}\cdot\frac{U_B}{R}, & I_{45} &= \frac{2}{55}\cdot\frac{U_B}{R},\\
I_{46} &= \frac{17}{55}\cdot\frac{U_B}{R}, & I_{56} &= \frac{3}{11}\cdot\frac{U_B}{R} = \frac{15}{55}\cdot\frac{U_B}{R}.
\end{aligned}$$

3 Das schönste Rentier von allen!

Autor: Dirk Becherer
Projekt: E8 und E9

3.1 Aufgabe

Wie jedes Jahr zu Weihnachten müssen sich der Weihnachtsmann und sein Engelchen im Weihnachtsmagazin ein Rentier aussuchen. Und natürlich wollen sie zu gern das schönste Rentier bekommen.

„Oje, was ist die Auswahlprozedur dieses Jahr kompliziert“, grummelt der Weihnachtsmann. „Aber wieso denn?“, fragt das Engelchen. Der Weihnachtsmann erklärt: „Die Wichtel im Magazin führen uns nacheinander verschiedene Rentiere vor, von denen wir uns eines aussuchen dürfen. Die Rentiere verlangen jedoch, dass wir uns gleich entscheiden, ob wir das jeweilige Rentier nehmen wollen oder es ablehnen, um eines der Folgenden zu nehmen. Ein einmal abgelehntes Rentier steht also später nicht mehr zur Verfügung. Und spätenstens das zehnte Rentier müssen wir nehmen, denn dann haben die Wichtel keine Lust mehr.“ „Klingt doch spannend. Wo ist das Problem?“, meint des Engelchen. „Nun ja“, brummt der Weihnachtsmann, „die Rentiere werden uns in zufälliger Reihenfolge vorgeführt, und ich habe kein Vorwissen über die Qualität des diesjährigen Rentierangebotes. Weil wir die Rentiere nicht alle vorher ansehen dürfen, können wir nicht wissen, ob das gerade angebotene Tier das Schönste ist oder ob vielleicht noch ein Besseres kommt. Entscheiden wir uns für das gerade angebotene Tier, könnte es doch sein, dass später ein noch Schöneres kommt. Entscheiden wir uns andererseits, noch weitere Tiere anzusehen, kann es uns passieren, dass wir das schönste Rentier verpassen.“

Sie überlegen nun, wie sie es am besten anstellen, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit, das Schönste der zehn Rentiere zu erhalten. „Mir fällt nichts Rechtes ein. Wenn wir nicht wissen, welches das Schönste sein wird, können wir genauso gut gleich das Erste nehmen“, sagt der Weihnachtsmann. „Nein, es geht besser“, ruft das Engelchen, „wenn wir uns erst ein paar Exemplare ansehen! Denn dabei lernen wir etwas über die Qualität der Tiere.“ „Und wie lange willst Du das machen?“, fragt der Weihnachtsmann,

„Wenn wir bis zum letzten Tier warten, lernen wir wohl am meisten, oder?“ „Schon“, schmunzelt das Engelchen, „aber dann hätten wir nicht mehr viel davon, weil wir uns ja nur noch für das letzte Tier entscheiden können.“ „Mmmh. Die Antwort liegt also wohl in der goldenen Mitte?“, überlegt der Weihnachtsmann. „Vielleicht nicht ganz.“, erklärt das Engelchen, „Lass uns erst X Rentiere nur ansehen und danach unter den verbleibenden $10-X$ Tieren das Nächstfolgende auswählen, welches besser ist als das Beste aus den ersten X Tieren (oder das Letzte, falls kein Besseres mehr kommt).“ „Und du weisst schon, für welches X die Wahrscheinlichkeit am größten wird, dass wir so das schönste Rentier auswählen?“, fragt der Weihnachtsmann hoffnungsvoll. „Ja“, lacht das Engelchen, „wir haben sogar eine Chance von fast 40 Prozent, wenn wir uns erst die optimale Anzahl X^* von Tieren ansehen. Das optimale X^* ist ... “

Antwortmöglichkeiten:

1. $X^* = 0$ (d. h. das erste Rentier wird genommen.)
2. $X^* = 1$ (d. h. nachdem ein Rentier begutachtet wurde, wird das Nächstfolgende genommen, welches besser als das Erste ist.)
3. $X^* = 2$
4. $X^* = 3$
5. $X^* = 4$
6. $X^* = 5$
7. $X^* = 6$
8. $X^* = 7$
9. $X^* = 8$
10. $X^* = 9$ (d. h., das letzte Rentier wird genommen.)

Projektbezug:
Das Problem ist ein Beipiel für ein stochastisches Optimierungsproblem aus der Familie von Problemen des optimalen Stoppens. Stochastische Optimierungsprobleme treten im Matheon für Anwendungsbereich E (Finance) in vielfältiger Form bei der Absicherung und Quantifikation von Finanzrisiken und der Portfoliooptimierung auf. Für eine Bewertung und Absicherung von sogenannten amerikanischen Optionen, bei denen ein Ausübungsrecht zu einem optimalen Zeitpunkt ausgeübt werden soll, müssen dabei zum Beispiel optimale Stopprobleme gelöst werden.

3.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4
In einer etwas anderen Formulierung wurde dieses Problem bekannt als '*the secretary problem*'. Wir diskutieren drei verschiedene mögliche Lösungswege.

1. Wir bezeichnen mit $\xi(X)$ die Wahrscheinlichkeit, das schönste Rentier aus den $n = 10$ auszuwählen, wenn man erst X Exemplare ansieht. Dann ist

   $$\xi(X) = \sum_{k=X+1}^{n} P\big[{\scriptstyle k\text{-tes Tier ist das Schönste}}\big] \cdot P\big[{\scriptstyle k\text{-tes Tier gewählt, wenn } k\text{-tes das Schönste ist}}\big]. \tag{1}$$

   Hierbei bezeichnet P die Wahrscheinlichkeit (**P**robability) eines Ereignisses, und der zweite Faktor in den Summanden ist eine sogenannte bedingte Wahrscheinlichkeit. Da jede der n Positionen für das schönste Tier gleichwahrscheinlich ist, gilt

   $$P[k\text{-tes Tier ist das Schönste}] = \frac{1}{n}.$$

   Gegeben, dass das insgesamt schönste Tier in k-ter Position ist, so wird es genau dann ausgewählt, falls das schönste Tier aus den ersten $k-1$ Exemplaren an einer Position unter den ersten X Tieren kommt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{X}{k-1}$. Also ist

   $$\xi(X) = \frac{X}{n} \sum_{k=X+1}^{n} \frac{1}{k-1}.$$

   Durch Ausrechnen folgt, dass $\xi(X)$ bei $n = 10$ für $X = 3$ maximal ist.

2. Wir könnten auch mit dem Computer durch sogenannte Monte-Carlo Simulationen die Wahrscheinlichkeiten $\xi(X)$ approximativ berechnen lassen, um anschließend zu vergleichen, welches X die höchste Erfolgswahrscheinlichkeit liefert. Bei genügend vielen Simulationen sind die Approximationsfehler klein, und das Simulationsverfahren liefert recht zuverlässig die richtige Antwort.

3. Wie können wir aber sehen, dass die optimale Lösung des Stoppproblemes in der Tat die obige Struktur 'X Tiere ansehen und dann das

Nächstbessere nehmen' haben sollte, und es nicht eine irgendwie anders geartete noch bessere Strategie gibt?

Bezeichne $p(y, k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir mit der optimalen Strategie noch das schönste Tier auswählen, wenn wir schon beim k-ten Tier sind, und dieses Tier das bislang Schönste ($y = 1$) bzw. nicht das bislang Schönste ($y = 0$) ist. Unser Ziel ist es nun, $p(1, 1)$ auszurechnen und die Strategie zu bestimmen, welche die optimale Erfolgswahrscheinlichkeit erreicht. Die Methode, die wir hierzu benutzen werden, ist bekannt als *dynamische Programmierung*. Sie basiert auf der Idee, dass eine Strategie dann optimal ist, wenn sie eine optimale Entscheidung für den jeweils aktuellen Schritt (das aktuelle Tier zu nehmen oder abzulehnen) trifft, und zudem für die zukünftigen Schritte optimal ist.

Zunächst einige Vorüberlegungen: Wenn das $k-te$ Exemplar das Schönste unter den ersten k Tieren ist, so ist $\frac{k}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, dass es auch das insgesamt Schönste ist. Falls es nicht das bislang Schönste ist, ist klar, dass es nicht das insgesamt Schönste sein kann. Also ist es nur sinnvoll, ein Tier zu wählen, das zumindest das bislang Schönste ist. Es ist auch leicht zu sehen, dass $\frac{1}{k+1}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass das $k + 1$-te Tier schöner ist als alle Vorigen. Die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht schöner ist, beträgt $\frac{k}{k+1}$.

Für $k = n$ ist klar, dass $p(y, k)$ gleich Eins ist für $y = 1$, und Null für $y = 0$. Kennen wir schon $p(y, k + 1)$ für $y = 0, 1$, so bestimmen sich daraus die $p(y, k)$ für $k < n$ wie folgt:

$$p(1, k) = \max\left\{\frac{k}{n}, \frac{1}{k+1}p(1, k+1) + \frac{k}{k+1}p(0, k+1)\right\}, \qquad (2)$$

$$p(0, k) = \frac{1}{k+1}p(1, k+1) + \frac{k}{k+1}p(0, k+1). \qquad (3)$$

Das Maximum entspricht dabei der Entscheidung in Position k zwischen den zwei möglichen Alternativen, das gegenwärtige bislang schönste Tier zu nehmen oder weiterzugehen. Diese Entscheidung wird optimal gerade so getroffen, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit maximiert wird. Mit obigem Algorithmus erhalten wir nicht nur $p(1, 1) = 0.3987$, sondern auch die optimale Strategie. Der optimale Zeitpunkt für die Entscheidung für ein bislang schönstes ($y = 1$) Rentier ist gerade das erste k, für welches das Maximum gleich $\frac{k}{n}$ ist. Wenn wir alle $p(y,k)$ berechnet haben, stellt sich durch Vergleichen von $p(1,k)$ mit $\frac{k}{n}$ heraus, dass die Strategie aus der 4. Antwortmöglichkeit optimal ist.

4 Weihnachtsjagd

Autor: Torsten Bosse

4.1 Aufgabe

Schöne Bescherung ...denkt sich der Weihnachtsmann, als er die Nachricht liest. Ausgerechnet jetzt zu den Festtagen, an denen er schon genug mit Personalsorgen und der allgemeinen Aufregung zu kämpfen hat, erreicht ihn die Nachricht, dass der Osterhase in Berlin Ferien macht. Im Grunde wäre dies kein Problem, hätte dieser nicht den unbändigen Drang alles zu verstecken. Schon letztes Jahr drohte das Fest, aufgrund des resultierenden Chaos, zu scheitern.
Doch dank guter Vorsorge, hofft der Weihnachtsmann ihn diesmal über die Feiertage festsetzen zu können. Nach Informationen eines Insiders ist bekannt, dass der „Bösewicht" sich mit Hilfe von S- und U-Bahn durch die Stadt bewegt. Mit einem kleinen Seufzer lehnt sich der Weihnachtsmann in seinem Sessel zurück und beginnt darüber zu grübeln, wie er es am Geschicktesten anstellen könnte, den Hasen zu fassen, ohne zu viele seiner Elfenhelfer für die Jagd abzuziehen. Vielleicht greifst Du dem überforderten Mann etwas unter die Arme!
Doch nicht nur das Weihnachtsdorf hat sich vorbereitet und herausgefunden, welche Strecken der Osterhase benutzen will. Auch im Osternest wurden die Hausaufgaben gemacht. Mithilfe eines ergaunerten Funkgerätes, kann der Hase hören, wo sich seine Jäger aufhalten und was sie als nächstes vorhaben.
Wie viele Elfen sind mindestens nötig, um den cleveren Osterhasen zu stellen?
Die Elfenhelfer dürfen sich mit ihren Rentierschlitten außerhalb des Gleissystems zu *jeder* Station bewegen. Außerdem wissen sie mittels Überwachungskameras, an welcher Haltestelle sich der Hase im Moment aufhält. In einem ersten Schritt besetzen Sie beliebige Stationen.
Danach sucht sich der Osterhase seine Anfangsstation. Er kann sich von seiner aktuellen Position zu einer neuen *beliebigen* Station nur auf den eingezeichneten Bahnlinien bewegen. Er kann jedoch nicht durch eine blockierte, also besetzte Station fahren. Er gilt als gefasst, wenn eine Elfe auf derselben Haltestelle ist.
Für die Jagd gelte folgendes Ritual:

WIEDERHOLE

1. die Elfen, die ihre Station wechseln wollen, verlassen diese mit ihrem Schlitten,
2. der Hase erhält die Information, wo die Elfen hin wollen,
3. der Hase reagiert und bewegt sich dementsprechend,
4. die Elfen beziehen ihre angestrebten Stationen,

BIS Hase gestellt (falls möglich).

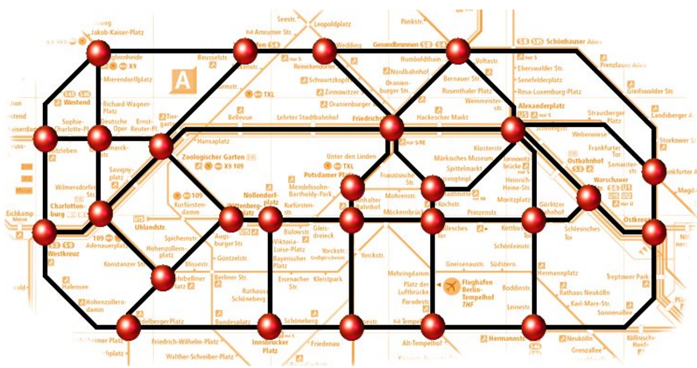


Abbildung 1: Fluchtplan des Osterhasen

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt keine Lösung, der Hase entkommt immer.
2. 2 Elfen,
3. 3 Elfen,
4. 4 Elfen,
5. 5 Elfen,
6. 6 Elfen,
7. 7 Elfen,

8. 8 Elfen,
9. 9 Elfen,
10. 10 Elfen.

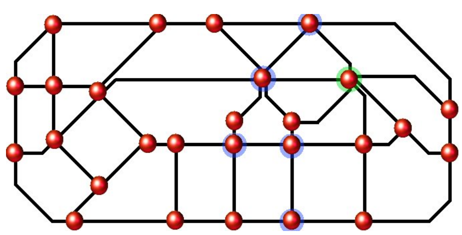
4.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5
Zum Nachweis der Behauptung betrachten wir zwei Ansätze. Zuerst überlegen wir, dass es eine Möglichkeit gibt den Osterhasen mit 5 Elfen zufangen. Danach überlegen wir uns, dass es nicht weniger sein können.

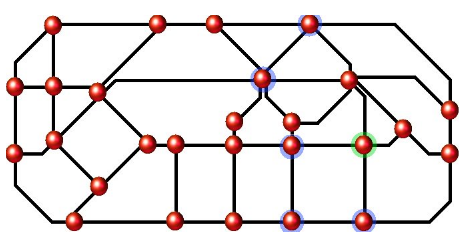
4.2.1 „Anzahl der Elfen 5“:

Idee: verkleinere den möglichen Fluchtraum des Osterhasen sukzessiv. Rücke danach Schritt für Schritt vor, so dass dem Hasen keine Fluchtmöglichkeit in den restlichen Graphen bleibt. Beispiel für eine Gewinnstrategie (Elfen=blau, Hase=grün, gefangen=pink):

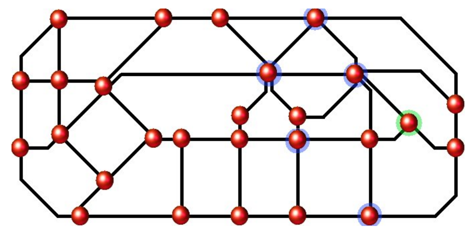
1. Teile zunächst den Graphen in zwei Teile ...



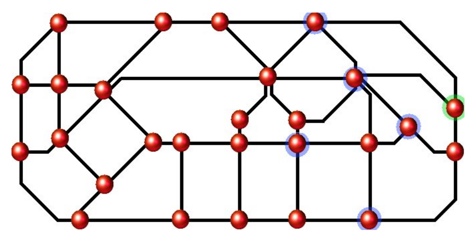
2. Ziehe danach den nicht benötigten Elf ...



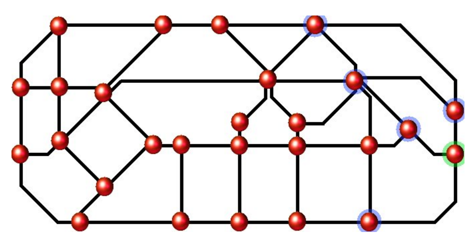
3. . . . eine Station weiter und wiederhole.



4. Sperre dem Hasen mit den 4 anderen . . .

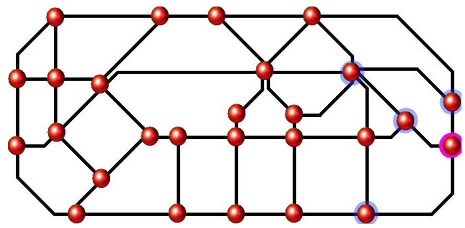


5. . . . Elfen den Rückweg ab.

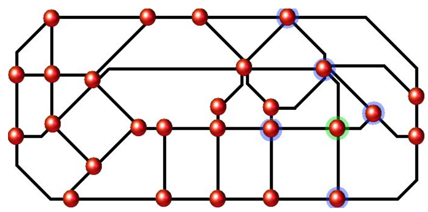


6. Stoppe, wenn er gestellt ist.

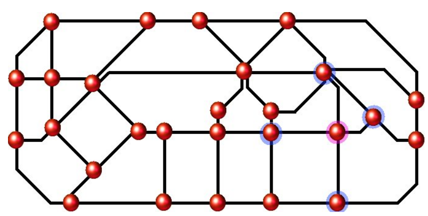
Der Hase kann jederzeit frei entscheiden, wo er sich in seiner Zusammenhangskomponente hin bewegen will. Dadurch entstehen evtl. mehrere Varianten, wie das Bild nach jedem Zug aussieht. Diese können jedoch analog abgehandelt werden. Ebenso funktioniert dies für die linke Hälfte des Graphen.



1. Andere Variante, aber ...



2. ... der Hase wird trotzdem geschnappt.



4.2.2 „Anzahl der Elfen ≥ 5 “:

Diese Abschätzung beinhaltet zwei Gedanken:

1. Zuerst überlege man sich, dass auf einem sogenannten $n \times n$ Gitter genau $n+1$ Elfen gebraucht werden. Dies kann man über einen Induktionsbeweis für $n \geq 2$ zeigen. Ausserdem benutze man noch, dass der Hase durch die unbewachte Station (eine wird mindestens frei, sobald sich ein Elf bewegt) entwischen kann.

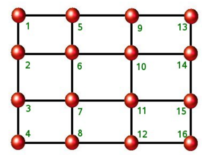


Abbildung 2: Reihenfolge zum Besetzen der Knoten. Ziehe immer mit dem Elfen auf der Pos. mit der kleinsten Nummer.

2. Danach betrachte man den Graphen und stelle fest, dass in ihm ein 4×4 Gitter enthalten ist. Vergleiche dazu unten angeführte Skizze, in der das 4×4 Gitter blau markiert ist.

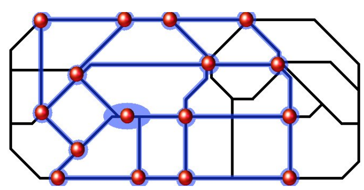


Abbildung 3: 4×4 Gitter

Die anderen Knoten können dabei vernachlässigt werden, da diese nur einen weiteren Vorteil für den Hasen bieten würden. D. h. wir zeigen, dass der Hase in einem schwereren Fall flüchten kann, somit gelingt ihm dies auch sicher in einem „leichteren“ Fall. Somit werden mindestens 5 Elfen benötigt - ansonsten hätte der Hase immer eine Gewinnstrategie: Er bewegt sich auf den markierten Knoten genauso, wie er es bei dem 4×4 Gitter machen würde (natürlich so, dass er gewinnt!).

5 Das Rotwein–Paradoxon

Autor: Matthias Ehrhardt
Projekt: WIAS Berlin

5.1 Aufgabe

Uff! Endlich ist das letzte Geschenk in der geheimen Geschenkekammer verstaut und der Weihnachtsmann hat Feierabend. Morgen ist Heiligabend. Der müde Weihnachtsmann sitzt mit seinem Freund Mathis, einem Mathematiker, zusammen und blickt bei einem Glas Rotwein in seine geheime Geschenkekarte, die es ihm ermöglicht, alle Kinder der Welt an einem Tag zu beschenken.
Aber er kann nicht die ganze Karte überblicken, weil sein dicker Bauch im Weg ist und fragt (wie immer wenn er Probleme hat) seinen Freund Mathis:

„Sollte ich nicht etwas für meine Gesundheit tun?“

Mathis überlegt: „Na klar, am besten trinkst Du dazu noch ein Glas Rotwein!“ Der Weihnachtsmann versteht nur Bahnhof und daher muss Mathis seine Behauptung mathematisch erklären.

Im Rotwein ist *Resveratrol* enthalten, ein lösliches Antioxidans, dass sich positiv auf Herz-Kreislauf–Erkrankungen auswirkt. Die Funktion $p(x)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, eine Herz-Kreislauf–Erkrankung zu bekommen, wenn man x Liter Rotwein pro Tag trinkt. Sie fällt exponentiell mit der Formel

$$p(x) = p_0\, e^{-\frac{x}{x_p}}, \quad x \geq 0, \tag{4}$$

wobei p_0 die konstante Wahrscheinlichkeit ist, dass die Krankheitsgefahr für einen Abstinenzler steigt. x_p ist ein Parameter der jeweiligen Weinsorte.

(Hierbei ist $f(x) = e^x$ die Exponentialfunktion mit der eulerschen Zahl $e \approx 2{,}718\,281\,828\,459$)

Andererseits, darf man natürlich auch nicht so viel von dem Alkohol trinken, damit man nicht die Wahrscheinlichkeit $q(x)$ an einer Leberkrankheit zu sterben unnötig erhöht. Analog gilt nämlich

$$q(x) = q_0\, e^{\frac{x}{x_q}}, \quad x \geq 0, \tag{5}$$

mit q_0 als konstanter Wahrscheinlichkeit, dass ein Abstinenzler eine Lebererkrankung bekommt. x_q ist auch ein Parameter der jeweiligen Weinsorte.

Mathis erklärt weiter: „Nun muss man einen Kompromiss zwischen diesen beiden unabhängigen Effekten finden, um die optimale Rotwein–Aufnahme zu bestimmen“ und möchte sich sogleich ans Werk machen. „Das kann ich selber!“ ruft der Weihnachtsmann . Er wählt nun $x_p = 1$ und $x_q = 3$ für seinen Lieblingsrotwein. Während der Wert für x_p ein Standard ist, bezieht sich der Wert von x_q auf die Geschichte des Wächters Perkeo des großen Fasses des Heidelberger Schlosses. Weiterhin sei $p_0 = 0.2$ und $q_0 = 0.25$.

Wie viel Milliliter Rotwein (x^*) seiner Lieblingssorte sollte der Weihnachtsmann täglich trinken, damit er noch viele Jahre bei guter Gesundheit bleibt.

Antwortmöglichkeiten:

1. $x^* \approx 344$
2. $x^* \approx 345$
3. $x^* \approx 354$
4. $x^* \approx 456$
5. $x^* \approx 465$
6. $x^* \approx 567$
7. $x^* \approx 576$
8. $x^* \approx 657$
9. $x^* \approx 675$
10. $x^* \approx 765$

Projektbezug:
Mit der Formulierung und der exakten oder numerischen Lösung sehr viel komplexerer Differentialgleichungen, die bei der Modellierung physikalischer Vorgänge, wie z.B. Schaltvorgängen in Halbleiterbauelementen, auftreten, beschäftigen sich Wissenschaftler am DFG–Forschungszentrum MATHEON *Mathematik für Schlüsseltechnologien* in Berlin.

Bemerkung 1: Bei den Funktionen p und q handelt es sich nicht um eine Verteilungsfunktion einer Zufallsveränderlichen X: Für eine solche Funktion $F(x) = P(X < x)$ müsste (u.a.) gelten:
a)$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$
b) $F(x)$ ist eine nicht fallende Funktion von x.

Leider hat das Wort „Wahrscheinlichkeit" im Aufgabentext in einigen Fällen zu Irritationen geführt, was wir sehr bedauern. Allerdings beschreibt dieses Wort die betrachtete Grösse unserer Meinung nach am besten.

Bemerkung 2:
Neben dem Resveratrol, enthält Rotwein noch ca. 600 andere relevante Bestandteile, so dass die obige Betrachtung stark vereinfacht ist. Das Problem ist als *Französisches Paradoxon* bekannt.

5.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8
Um die richtige Stelle x^* zu bestimmen, summiert der Weihnachtsmann als erstes beide Funktionen (1), (2):

$$\boxed{r(x) = p_0\, e^{-\frac{x}{x_p}} + q_0\, e^{\frac{x}{x_q}}, \quad x \geq 0}$$

und bestimmt die Extremstellen (d.h. die Nullstellen der Ableitung) von $r(x)$. Die Ableitung von $r(x)$ ist

$$\boxed{r'(x) = -\frac{p_0}{x_p}\, e^{-\frac{x}{x_p}} + \frac{q_0}{x_q}\, e^{\frac{x}{x_q}}, \quad x \geq 0.}$$

Somit gilt für eine Nullstelle x^* von $r'(x)$

$$\frac{p_0}{x_p}\, e^{-\frac{x^*}{x_p}} = \frac{q_0}{x_q}\, e^{\frac{x^*}{x_q}},$$

d.h.

$$\begin{aligned} \frac{x_q}{x_p}\frac{p_0}{q_0} &= e^{\frac{x^*}{x_q}+\frac{x^*}{x_p}} \\ &= e^{x^*\frac{x_p+x_q}{x_p x_q}} \end{aligned}$$

und logarithmieren ergibt schließlich

$$\boxed{x^* = \frac{x_p x_q}{x_p + x_q}\left[\ln\left(\frac{x_q}{x_p}\right) + \ln\left(\frac{p_0}{q_0}\right)\right].}$$

Nun ist $r(0) = p_0 + q_0 > 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = \infty$.
Weiterhin gilt: die Steigung $r'(x)$ ist negativ für $0 \leq x < x^*$ und positiv für $x > x^*$. Damit ist x^* die *einzige* Stelle, an der $r(x)$ einen minimalen Wert annimmt; daher ist $r(x^*)$ das **globale Minimum**.
Für die gegebenen Parameter erhält man $x^* \approx 0.657$, d.h. **657 Milliliter Rotwein**. Dieser Wert suggeriert, daß fast eine Flasche Rotwein (während der Mahlzeiten) die optimale Menge ist.

6 Zuckerstangen

Autor: Alexander Mielke

6.1 Aufgabe

Die schwedischen Weihnachtswichtel müssen jährlich Millionen der rotweißen Zuckerstangen herstellen. Ein aufwändiges Verfahren garantiert dabei den gleichbleibend guten Geschmack. In jedem Schritt werden aus 14 Zuckerstangen 15 hergestellt. Dazu werden jeweils 14 Stangen in eine Zauberform aus drei Teilen gelegt (Abbildung 1). Danach werden die oberen beiden Teile vertauscht und es entstehen 15 Zuckerstangen (Abbildung 2). Auftretende Verkürzungen und die Schnittstelle werden durch Erwärmen und Bestäuben mit Feenpulver mit Formgedächtniseffekt wieder geheilt.

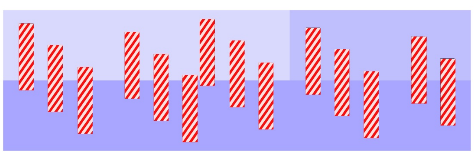


Abbildung 1

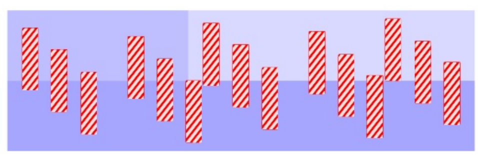


Abbildung 2

Leider hat sich die Apparatur im vergangenen Sommer total verzogen. Die 14 Halterungen für die Zuckerstangen sind noch intakt. Sie sind 2 Daumen breit und 15 Daumen hoch und müßen auf den drei entsprechend dimensionierten Holzbrettern exakt positioniert werden. Die Wichtel wissen nur noch folgendes:

- Das untere Brett muss 72 Daumen breit sein.

- Die Tiefen der Halterungen im unteren Brett haben von links nach rechts betrachtet diese Werte: $2, 7, 12, 4, 9, 14, 1, 6, 11, 3, 8, 13, 5, 10$ (in Daumen).

Mit $l_{\min}$ und $l_{\max}$ seien die minimale und maximale Länge in Daumen des linken oberen Brettes aus Abbildung 1 bezeichnet. Auf welche Antwort müssen die Wichtel zurückgreifen um die Form reparieren zu können?

Antwortmöglichkeiten:

1. $l_{\min} = l_{\max}$
2. $l_{\min} \geq 44\frac{2}{13}, \quad l_{\max} \leq 44\frac{2}{5}$
3. $l_{\min} \leq 42\frac{4}{5}, \quad l_{\max} \leq 44\frac{2}{15}$
4. $l_{\min} \geq 44\frac{2}{13}, \quad l_{\max} = 45\frac{2}{13}$
5. $l_{\min} \leq 42\frac{2}{13}, \quad l_{\max} = 44\frac{2}{13}$
6. $l_{\min} \geq 42\frac{2}{13}, \quad l_{\max} = 44\frac{2}{15}$
7. $l_{\max} - l_{\min} \geq 1$
8. $l_{\max} - l_{\min} \leq \frac{1}{3}$
9. $l_{\min} = 42\frac{2}{13}, \quad l_{\max} = 44\frac{2}{15}$
10. $l_{\min} \geq 43\frac{3}{5}, \quad l_{\max} \leq 44\frac{2}{13}$

Projektbezug:
Teilprojekt C18 beschäftigt sich mit Modellen für Formgedächtnislegierungen. Diese können relativ leicht verformt werden, nehmen aber nach einer Wärmebehandlung wieder die ursprüngliche Form an, wobei Dehnungen oder Schrumpfungen von bis zu 8% möglich sind.

6.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 10

Durch Vertauschen der oberen beiden Bretter ändern sich die Zuordnungen der oberen Teile O_n und der unteren Teile U_n wie folgt:

14er-Position

$O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7O_8O_9 \vert O_{10}O_{11}O_{12}O_{13}O_{14}$
$U_1U_2U_3U_4U_5U_6U_7U_8U_9\ U_{10}U_{11}U_{12}U_{13}U_{14}$

15er-Position

$O_{10}O_{11}O_{12}O_{13}O_{14} \vert \quad O_1O_2O_3\ O_4\ O_5\ O_6\ O_7\ O_8\ O_9$
$U_1\ U_2\ U_3\ U_4\ U_5\ U_6U_7U_8U_9U_{10}U_{11}U_{12} \quad U_{13}U_{14}$

Wir vernachlässigen zunächst die Breite der Zuckerstangenhalterungen und normieren die Länge von 72 Daumen auf 1. Bezeichnen wir die Positionen der Zuckerstangen auf dem unterem Brett mit x_1 bis x_{14} und ist t die Länge des linken oberen Bretts, so ergeben sich folgende 13 Gleichungen:

$$\begin{array}{llll}
x_1 = x_{10}-t & x_2 = x_{11}-t & x_3 = x_{12}-t & x_4 = x_{13}-t \\
x_5 = x_{14}-t & x_7 = x_1+1-t & x_8 = x_2+1-t & x_9 = x_3+1-t \\
x_{10} = x_4+1-t & x_{11} = x_5+1-t & x_{12} = x_6+1-t & x_{13} = x_8+1-t \\
x_{14} = x_9+1-t. & & &
\end{array}$$

Dieses System hat für jedes t eine einparametrige Schar von Lösungen. Setzen wir $x_1 = x$, so können wir aus der ersten Gleichung $x_{10} = x + t$ und aus der sechsten Gleichung $x_7 = x + 1 - t$ berechnen usw. Wir erhalten

$$\begin{array}{llll}
x_1 = x & x_2 = x+5t-3 & x_3 = x+10t-6 & x_4 = x+2t-1 \\
x_5 = x+7t-4 & x_6 = x+12t-7 & x_7 = x-t+1 & x_8 = x+4t-2 \\
x_9 = x+9t-5 & x_{10} = x+t & x_{11} = x+6t-3 & x_{12} = x+11t-6 \\
x_{13} = x+3t-1 & x_{14} = x+8t-4. & &
\end{array}$$

Es treten dabei drei verschiedene Abstände zwischen den Linien auf, nämlich

$$\begin{aligned}
d_1 &= 5t-3 > 0, \\
d_2 &= 2t - 1 - 10t + 6 = 5 - 8t > 0, \\
d_3 &= -t + 1 - 12t + 7 = 8 - 13t > 0.
\end{aligned}$$

Damit diese alle positiv sind, muss t im Intervall $]3/5, 8/13[$ gewählt werden. Eine einfache Diskussion der Geraden ergibt, dass d_2 auf diesem offenen

Intervall stets oberhalb von d_1 und d_3 liegt und am Rande jeweils eine der Geraden schneidet.
Damit genau die ersten 9 Halterungen auf dem ersten oberen Brett bleiben, muss noch $x_1 = x > 0$ und $x_9 = x + 9t - 5 < t$ gelten. Dies beschreibt ALLE möglichen Lösungen bei Dicke 0.

Soll nun die Breite b (im Problem $= 1/36 = 2\,\text{Daumen}/72\,\text{Daumen}$) der Zuckerstangenhalterungen berücksichtigt werden, so betrachten wir die obigen Positionen als die der Mittellinien der Halterungen. Es muss dann also gelten:

$$\begin{aligned} &x_1 \geq b/2, \quad x_9 \leq t-b/2, \quad x_{10} \geq t+b/2, \\ &x_{14} \leq b/2, \quad d_1 \geq b, \quad d_3 \geq b. \end{aligned} \tag{6}$$

(Im betrachteten Bereich gilt stets $d_2 \geq \min\{d_2, d_3\}$, also muss $d_2 \geq b$ nicht extra gefordert werden.)

Die letzten beiden Bedingungen in (1) ergeben

$$t \in [(3+b)/5, (8-b)/13] = \left[\frac{109}{180}, \frac{287}{468}\right] \approx [0.60555, 0.61325].$$

Also ist $l_{\min} = \frac{72\cdot 109}{180} = 43\frac{3}{5}$ und $l_{\max} = \frac{72\cdot 287}{468} = 44\frac{2}{13}$.

7 Eins! Zwei! Viele!

Autoren: Timo Berthold, Stefan Heinz
Projekte: B12, D17

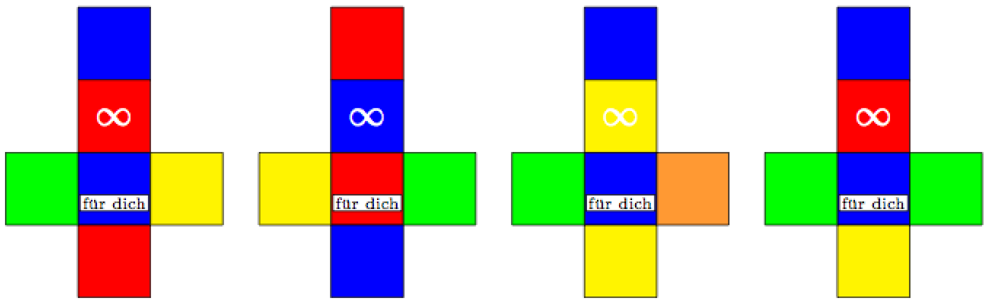
7.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann steckt tief in der Bredouille: Letztes Jahr hat er voller gutem Willen die Herzenswünsche aller Kinder erfüllt, nur die allerneuesten Computerspiele – und der Dank? Empörte Beschwerdeanrufe aufgebrachter Eltern auf der Servicehotline 0800-XMAS4U, man möge den lieben Kleinen doch bitte zukünftig wieder pädagogisch wertvolles Spielzeug zukommen lassen. Ach ja, und nach der Schornsteinnutzung bitte Schuhe abtreten, danke.

Nun gut, die isländische Wichtelwerkstatt muss dieses Jahr eh den Gürtel etwas enger schnallen, also bekommen die Kinder halt ein mathematisches Rätsel- und Geduldsspiel, welches das räumliche Denkvermögen schult. Rubik's Magic Cube scheint dem Weihnachtsmann geradezu prädestiniert zu sein. Da das Geschenkte voraussichtlich nicht dem Gewünschten entspricht, will der Weihnachtsmann sich wenigstens etwas besonderes bei der Verpackung überlegen. Frau Weihnachtsmann hat eine reizende Idee: Dieses Jahr werden für die Geschenke Themenverpackungen verwendet, jede Verpackung soll mit ihrem Inhalt im Zusammenhang stehen.

Bei dem Würfel-Geschenk liegt folgende Idee nahe: Es wird jede Seite der Verpackung in einer der sechs Farben des Zauberwürfels eingefärbt. Dabei müssen nicht zwingend alle Farben verwendet werden, aber aneinander grenzende Seiten dürfen nicht die gleiche Farbe erhalten. Abschließend noch eine Möbiusschleife oben drauf und einen kleinen Weihnachtsaufkleber „für dich“ auf die Vorderseite: fertig!

Fertig? Nicht ganz. Der Weihnachtsmann will natürlich auch gerne jedem Geschenk eine individuelle Note verpassen – jedes Geschenk soll anders aussehen. Dafür können zum Beispiel unterschiedliche der sechs Farben verwendet, oder die Farben anders auf die Seitenflächen der Verpackung verteilt werden. Unten seht ihr vier Möglichkeiten, das Geschenk mit jeweils vier der sechs Farben zu verschönern. Die Würfel sind hier aufgeklappt dargestellt. Übrigens, das Anbringen der Schleife und des Aufklebers bestimmen eindeutig die Ober- und die Vorderseite des Geschenkes.



Wenn der Weihnachtsmann jede der erlaubten Kombinationen genau ein einziges Mal verwendet, wie viele Kinder werden sich dieses Jahr mit einem 3D-Knobel- anstelle eines 3D-Computerspiels begnügen müssen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 42
2. 120
3. 600
4. 720
5. 870
6. 1080
7. 1440
8. 2520
9. 2880
10. 4080

Projektbezug:
Im Projekt D17 „Chip Design Verification“ untersuchen wir Methoden, die

nachweisen, dass ein Computerchip für alle denkbaren Eingabemuster immer die erwartete Ausgabe liefert. Wir stellen dafür eine Art „Gleichungssystem“ auf, für das jede Lösung einen Fehler des Chips darstellt. Die Anzahl der Lösungen gibt einen Anhaltspunkt, wie weit man noch davon entfernt ist, den Mikrochip vollständig korrekt beschrieben zu haben.

Das Zählen von Lösungen ist nur ein Beispiel dafür, dass eine Ähnlichkeit von Strukturen einen Algorithmus ausbremsen kann. Das Projekt B12 „Symmetries in Integer Programming“ beschäftigt sich mit Methoden, die es uns erlauben, eine Menge von strukturell äquivalenten – symmetrischen – Lösungen so zu behandeln, als würde es sich nur um eine einzelne handeln.

7.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 10
Zuerst einmal kann man sich überlegen, dass die Anforderung „aneinander grenzende Seiten dürfen nicht die gleiche Farbe erhalten“ nur erfüllt werden kann, wenn man mindestens drei Farben verwendet. Würde man zwei (oder sogar nur eine) Farbe verwenden wollen, müsste man mindestens drei Seiten des Würfels gleich färben. Es gibt aber auf einem Würfel immer nur Zweierpaare nicht aneinander grenzender Seiten.
Also suchen wir nach der Anzahl an Möglichkeiten, einen Würfel mit je drei, vier, fünf oder sechs von sechs vorgegebenen Farben zu färben. Dies können wir unabhängig berechnen:

- **Anzahl 6-Färbungen:** Der einfachste Fall sind die 6-Färbungen (Färbungen, die genau sechs Farben verwenden). Man muss jede der sechs vorgegebenen Farben verwenden und man muss jede Seite unterschiedlich färben, man hat keine Wahl. Nun gibt es für die erste, sagen wir die vordere, Seite, sechs Möglichkeiten eine Farbe zu wählen. Egal, wie man sich entschieden hat, es bleiben immer fünf Farben übrig. Man hat also immer fünf Auswahlmöglichkeiten für die zweite, sagen wir die Oberseite, insgesamt also schon $5 \cdot 6 = 30$ Möglichkeiten für die ersten beiden Seiten. Fährt man so fort, erhält man $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Möglichkeiten, den Würfel mit genau sechs Farben zu färben.

- **Anzahl 3-Färbungen:** Wenn man einen Würfel mit drei Farben färben will, gibt es im Prinzip wieder nur eine Möglichkeit: Die drei Paare gegenüberliegender Seiten müssen je eine der Farben erhalten. Nun können wir analog zum ersten Fall vorgehen: 3 Möglichkeiten für das erste Seitenpaar, zwei für das zweite, eine für's letzte ergibt $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ unterschiedliche Varianten, den Würfel mit drei unterschiedlichen, vorgegebenen Farben zu färben.

  Allerdings hat man diesmal eine Wahl bei den Farben, man kann sich beliebig drei aus den sechs Farben auswählen. Dafür gibt es $\binom{6}{3} = 20$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $\binom{6}{3} \cdot 3! = 120$ verschiedene Färbungen mit drei aus sechs Farben.

- **Anzahl 4-Färbungen:** Wiederum muss man vier der sechs Farben auswählen, wofür es $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten gibt. Bei einer 4-Färbung des Würfels wird ein Paar gegenüberliegender Seiten mit zwei verschiedenen Farben gefärbt, die anderen beiden Paare werden mit je einer einheitlichen Farbe gefärbt. Es gibt also drei verschiedene Lösungen: Entweder Ober- und Unterseite verschieden oder Vorder- und Rückseite verschieden oder linke und rechte Seite verschieden.

Für jede dieser drei Varianten gibt es wieder 4! Möglichkeiten, die Farben zu verteilen, sodass man insgesamt auf $3 \cdot \binom{6}{4} \cdot 4! = 1080$ Möglichkeiten für die 4-Färbungen kommt.

- **Anzahl 5-Färbungen:** Die Argumentation für die 5-Färbungen ist analog zu der für die 4-Färbungen. Es werden zwei Paare gegenüberliegender Seiten unterschiedlich, eins einheitlich gefärbt. Für das einheitliche Paar gibt es wiederum drei Möglichkeiten. Weiterhin gibt das in jedem der drei Fälle 5! Möglichkeiten, die Farben zu verteilen und vorab $\binom{6}{5}$ Auswahlmöglichkeiten. Insgesamt ergibt das $3 \cdot \binom{6}{5} \cdot 5! = 2160$ verschiedene 5-Färbungen.

Die Lösung der ursprünglichen Aufgabe ergibt sich nun aus der Summe der vier Einzelergebnisse. Es gibt genau $120 + 720 + 1080 + 2160 = 4080$ verschiedene Möglichkeiten, den Würfel mit höchstens sechs Farben derart zu färben, dass aneinander grenzende Flächen unterschiedlich gefärbt sind.

Anmerkung: Die Illustration zur Aufgabe gibt ein Beispiel für jeden der drei Schritte zum Berechnen der Anzahl der 4-Färbungen. Der zweite Würfel benutzt die gleiche Farbmenge wie der erste, die Farben sind aber anders verteilt. Das Schema „links und rechts unterschiedlich, oben-unten und vorne-hinten gleich“ ist allerdings bei beiden gleich. Der dritte Würfel benutzt eine andere Farbmenge als der erste, wiederum mit dem gleichen Schema. Der vierte Würfel hat zwar genau die gleiche Farbemenge wie der erste, das Schema ist hier aber „oben und unten unterschiedlich, links-rechts und vorne-hinten gleich“.

8 Der springende Ball

Autor: Lena Wunderlich
Projekt: D1

8.1 Aufgabe

Der Wichtel für Qualitätsmanagement der zu verschenkenden Basketbälle prüft die Sprungfähigkeit der Bälle. Er läßt den Ball aus einer Höhe von $h = 3m$ fallen (mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 0\frac{m}{s}$). Der Ball springt in vertikaler Richtung auf und ab, wobei er nach jedem Aufprall seine Geschwindigkeit umkehrt und diese sich um den Faktor $a = 0.7$ verringert. In den Prüfvorschriften ist festgelegt, dass mit diesem Faktor die Energieverluste abgegolten sind und eine Fallbeschleunigung von $g = 9.81\frac{m}{s^2}$ zu herrschen hat.
Nach wie vielen Aufprallvorgängen ist die erreichte Höhe erstmals kleiner als die Dicke eines Engelhaars, d.h. kleiner als $10^{-6}m$?

Antwortmöglichkeiten:

1. 14
2. 15
3. 16
4. 17
5. 18
6. 19
7. 20
8. 21
9. 22
10. 23

Projektbezug:
Es handelt sich bei diesem Problem um eine *schaltende Differentialgleichung*. Die Bewegung des Balls kann durch eine Differentialgleichung beschrieben werden, die zu den Zeitpunkten an denen der Ball auf dem Boden auftrifft (die sogenannten *Schaltpunkte*) eine ihrer Zustandsgrößen (hier die Geschwindigkeit) abrupt ändert. In dem MATHEON Projekt D1 beschäftigen wir uns mit der Simulation und Steuerung von *schaltenden differentiell-algebraischen Gleichungen* (d. h. Differentialgleichungen mit zusätzlichen Zwangsbedingungen), die in vielen technischen Anwendungen, wie der Simulation von elektrischen Schaltkreisen oder mechanischen Mehrkörpersystemen, auftreten.

8.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8
Der Ball fällt im freien Fall zu Boden. Die Höhe des Balls h sowie seine Geschwindigkeit v zum Zeitpunkt t werden durch die Gleichungen

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0, \tag{7}$$
$$v(t) = -gt + v_0, \tag{8}$$

beschrieben, mit Ausgangshöhe $h_0 = 3$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$. Die Zeit, zu der der Ball das erste Mal den Boden erreicht, ist dann als eine Nullstelle der Gleichung (1) gegeben, d. h. als Lösung der quadratischen Gleichung

$$t^2 - \frac{2v_0}{g}t - \frac{2h_0}{g} = 0.$$

Mit $v_0 = 0$ ergibt sich damit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

(eine negative Zeit macht hier keinen Sinn). Die Geschwindigkeit des Balls zum Zeitpunkt t_1 wird bei dem Aufprall am Boden umgekehrt und um den Faktor $a = 0.7$ verringert, d. h. die Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung nach dem Aufprall ist gegeben durch

$$v_1 = -av(t_1) = -a(-gt_1 + v_0) = a\sqrt{2h_0 g}.$$

Wieder wird die Bewegung nach dem ersten Aufprall durch Gleichungen der Art (1) und (2) beschrieben, nun jedoch mit Anfangsgeschwindigkeit v_1 und Ausgangshöhe $h_1 = 0$ sowie um die Zeit t_1 verschoben, d. h.

$$h(t) = -\frac{1}{2}g(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1),$$
$$v(t) = -g(t - t_1) + v_1.$$

Die Nullstellen der Funktion $h(t)$ ergeben sich nun aus

$$h(t_2) = -\frac{1}{2}g(t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) = \left(-\frac{1}{2}g(t_2 - t_1) + v_1\right)(t_2 - t_1) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad t_2 = t_1 \quad \text{oder} \quad t_2 = \frac{2v_1}{g} + t_1.$$

Damit ist der Zeitpunkt t_2 des zweiten Aufpralls des Balls auf dem Boden gegeben durch

$$t_2 = t_1 + \frac{2v_1}{g} = t_1 + \frac{2a}{g}\sqrt{2h_0 g} = (1+2a)\sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Wieder wird die Geschwindigkeit des Balls zum Zeitpunkt t_2 beim Aufprall umgekehrt und um den Faktor a verringert, d. h. die neue Anfangsgeschwindigkeit nach dem zweiten Aufprall ist

$$v_2 = -av(t_2) = -a(-g(t_2 - t_1) + v_1) = ag(t_1 + \frac{2v_1}{g} - t_1) - av_1 = av_1.$$

Das Fortführen dieser Vorgehensweise liefert

$$\begin{aligned} h(t_{i+1}) &= \left(-\frac{1}{2}g(t_{i+1} - t_i) + v_i\right)(t_{i+1} - t_i) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & t_{i+1} = t_i \quad \text{oder} \quad t_{i+1} = \frac{2v_i}{g} + t_i, \end{aligned}$$

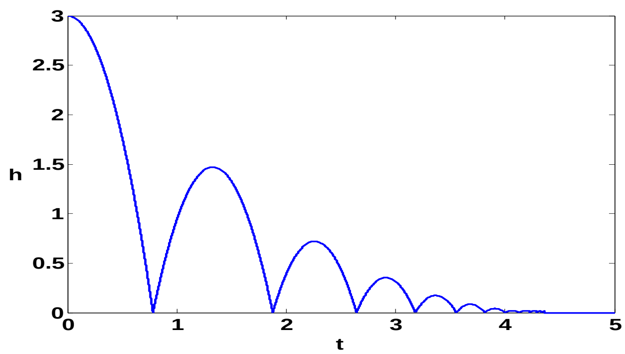
d.h. der Zeitpunkt des $(i+1)$-ten Auftreffens auf dem Boden ist gegeben durch

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2v_i}{g}$$

und die Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung nach dem $(i+1)$-ten Aufprall ist gegeben durch

$$v_{i+1} = -av(t_{i+1}) = -a(-g(t_{i+1} - t_i) + v_i) = ag(t_i + \frac{2v_i}{g} - t_i) - av_i = av_i.$$

Mit einem Energieansatz folgt: $h_i = \frac{v_i^2}{2g}$, wobei h_i die Höhe nach dem i-ten Aufprall ist.



Nach dem 21. Aufprall ergibt sich eine Höhe von ca. $9,36 \cdot 10^{-7}m$.

9 Lebkuchenessen

Autor: Caroline Lasser
Projekt: A11/F7

9.1 Aufgabe

Wir haben eine Dose mit unendlich vielen Lebkuchen, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind, d. h. mit $1, 2, 3, \ldots$. Du isst zunächst zwei Lebkuchen deiner Wahl, deren Nummern teilerfremd sind. Dann wird das Lebkuchenessen wie folgt fortgesetzt: Egal, welche Lebkuchen der Nummern m und n du gegessen hast, du musst dann auch immer die mit den Nummern $2m$, $2n$ und $m + n$ essen. Nun kann man sich fragen, ob es eine Zahl N gibt, so dass alle Lebkuchen mit Nummern größer oder gleich diesem N gegessen werden. Welche der gegebenen Antworten ist in diesem Zusammenhang richtig?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt so ein N, und das größte ist $N = 314159$.
2. Es gibt solche N, und alle sind durch 4 teilbar.
3. Es gibt genau 4 solche N.
4. Es gibt so ein N, und zwar mehrere.
5. So ein N gibt es mit weniger als 50 Prozent Wahrscheinlichkeit.
6. Es läßt sich nicht feststellen, ob es ein solches N gibt.
7. Es gibt kein solches N, weil sonst $2N$ ungerade wäre.
8. Es gibt kein solches N, weil N sonst die größte Primzahl wäre.
9. Es gibt kein solches N, weil es sonst nur $2N$ Lebkuchen gäbe.
10. Es gibt kein solches N, weil sonst N und $N + 1$ Primzahlen wären.

Projektbezug:
Die Projekte A11 und F7 beschäftigen sich mit Quanteneffekten in der Moleküldynamik und arbeiten an numerischen Simulationsverfahren für Gleichungen mit vielen Freiheitsgraden. Hierfür kann man stochastische Prozesse verwenden. Die Aufgabe stellt eine Frage aus der elementaren Zahlentheorie, mit deren Antwort man bestimmte Markov-Prozesse genauer beschreibt.

9.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4
Sei A die Menge aller Zahlen n, für die du den n-ten Lebkuchen isst, a und b die beiden teilerfremden Zahlen, mit denen du das Lebkuchenessen beginnst. Im Allgemeinen gibt es zu zwei natürlichen Zahlen p und q zwei ganze Zahlen x und y mit $px + qy = \text{ggT}(p, q)$. Da a und b teilerfremd sind, gilt $ax + by = 1$. Der eine Summand ist positiv, der andere negativ. O. B. d. A. sei ax der positive Summand, sein Betrag sei p_*. Da $a \in A$ und $2a \in A$, ist auch $a + 2a = 3a, a + 3a = 4a, ...$, d. h. jedes natürliche Vielfache a in A, d. h. $p_* \in A$.
Ist n_* der Betrag des negativen Summanden, d. h. $-n_* = by$, gilt auf analoge Weise $n_* \in A$. Damit gilt $p_* - n_* = 1$.

Dann leistet $N = n_*^2 + 2n_*$ das Gewünschte: Sei $n \geq N$. Wir schreiben n als Vielfaches von n_* mit Rest, $n = zn_* + r$ für eine positive Zahl z und $0 \leq r < n_*$. Dann gilt $z > n_*$, denn wäre $z \leq n_*$, so hätten wir auch $n = zn_* + r < (n_* + 1)n_* + n_* = N$, was nicht sein kann. Deswegen gilt

$$n = zn_* + r(-n_* + p_*) = (z - r)n_* + rp_* \in A,$$

weil $z > n_* > r$ und damit $z - r > 0$ ist.

10 Die Weihnachtsgrippe

Autor: Falk Ebert

10.1 Aufgabe

Es ist so wie in jedem Winter.
Die Grippewelle kommt und legt
darnieder Eltern und auch Kinder,
die man dann zeitaufwändig pflegt.

Und auch am Nordpol streckt sie nieder
die Wichtel alt und Wichtel jung,
seit ein paar Jahren immer wieder –
liegt an der Klimaerwärmung.

Nun will der Weihnachtsmann sie gar
nicht kränkeln lassen seine
Geschenkeproduzentenschar
für Gaben große, wie auch kleine.

Erst werden sie rot und später heiß,
dann werden sie immer blasser.
Und Weihnachten, das Fest im Eis,
fiele dieses Jahr ins Wasser.

Ist erst ein Wichtel angesteckt,
gibt er die Grippe weiter,
die dann bettlägrig niederstreckt
des Wichtels Mitarbeiter.

Die Arbeitsordnung, die ist leicht
erkennbar an der Wichtel Namen.
Ein gemeinsamer Buchstabe reicht,
dann arbeiten zwei zusammen.

So sehen sich Eddy und die Gryt

in Werkstatt Ypsilon.
Doch macht da Bino niemals mit,
genauso wenig Non.

Die beiden aber arbeiten halt
gemeinsam in Raum O.
Jedoch der Pavel und der Falk
die arbeiten anderswo.

So kann es sein, dass einer baut
an vielen verschiedenen Gaben.
Man sieht es, wenn man genau schaut,
an des Namens Buchstaben.

Gesine, Pavel, Eddy, Gryt,
Bismo, Pallu, Falk,
bauen an Geschenken mit,
und Trygve auch, der Schalk.

Dazu kommen Alla und Bino der Zwerg,
und auch Chub, Mimi, Non.
Weihnachtsfroh gehen sie ans Werk.
Das wären alle schon.

Ein Apfel hält die Grippe fern,
sagen Mimi und Gesine,
isst man ihn mit Schale und mit Kern,
wegen all der Vitamine.

Doch Äpfel sind nur drei im Schrank,
bemerken diese beiden.
Dass irgendjemand doch wird krank
lässt sich dann nicht vermeiden.

Jedoch, wer soll das Obst bekommen,
wenn doch mal irgend einer
von draussen die Grippe hat mitgenommen?
Denn wer es ist, weiß keiner.

Verteil die Äpfel so besonnen,
dass wenn es einen doch erwischt,
möglichst wenige die Grippe bekommen,
und möglichst viele nicht.

Antwortmöglichkeiten:

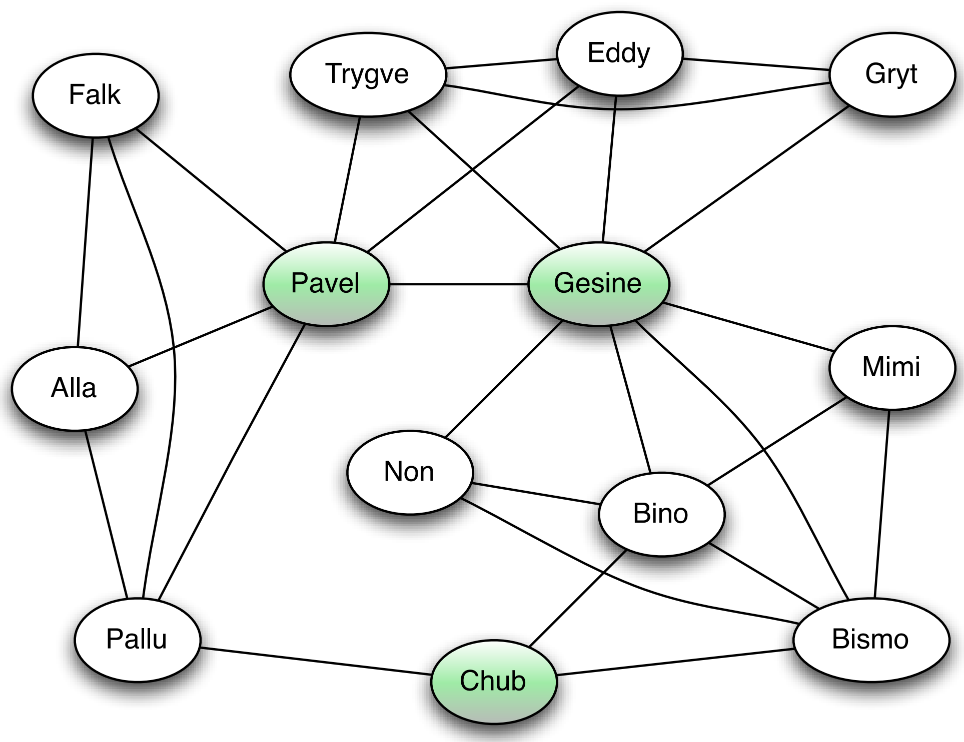
1. Trygve, Gesine, Gryt
2. Bino, Falk, Chub
3. Alla, Trygve, Bino
4. Bismo, Gesine, Pavel
5. Falk, Bismo, Eddy
6. Pallu, Mimi, Gryt
7. Pavel, Pallu, Gesine
8. Gesine, Pallu, Eddy
9. Bino, Pavel, Trygve
10. Gesine, Chub, Pavel

Mathematik ist so 'ne Sache -
tut sich mit Versen schwer.
Da reimt sich was mit Ach und Krache
und taugt zur Prosa mehr.

Und weil doch aber Weihnacht ist
der Mathematiker sich quält
und doch den Vers nicht richtig misst -
der Wille ist's der zählt.

10.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 10



Der erste Schritt zur Lösung sollte sein, die Aufgabe richtig zu verstehen und zu erkennen, dass die Arbeitsordnung der Wichtel einen Graphen darstellt. Diesen kann man dann so lange verschieben, bis man in etwa eine Form wie auf dem Bild bekommt.
Der Virus bewegt sich entlang der Kanten, wenn er von Wichtel zu Wichtel springt. Und nun wird folgendes klar: Die Wichtel bilden gewisse Gruppen - oder Blöcke, wie man in der Graphentheorie sagt. Das heißt, wenn man einen Knoten (Wichtel) entfernt, dann gibt es mindestens einen weiteren Weg zu jedem anderen Wichtel. Wenn man aber zwei Wichtel entfernt, dann kann man diese Struktur aufbrechen. Die Gruppe Y (Eddy, Gryt, Trygve) ist mit der Gruppe OI (Bino, Non, Bismo, Mimi) über Gesine verbunden und mit der Gruppe A (Alla, Pallu, Falk) über Pavel. Die Verbindung zwischen OI und A stellt Chub dar. Entfernt (immunisiert) man also Gesine, Pavel und

Chub, dann sind die Gruppen Y, OI und A nicht mehr verbunden und eine Infektion in einer der Gruppen führt zu maximal 4 Infizierten (bei OI).
Man kann theoretisch Chub zur Gruppe OI dazuzählen (ÔI) und Pallu aus A entfernen (Â). Dann stellt Pallu die Verbindung zwischen Â und ÔI dar. Dann ist ÔI aber noch größer und es kann 5 Infizierte geben.
Antwort 10 ist also richtig.

11 Weihnachts-Rekursion

Autoren: Serhiy Yanchuk, Leonhard Lücken
Projekt: D21

11.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat im Jahr 1 $a_1 = 7$ Tonnen Geschenke vorbereitet. Im nächsten Jahr bereitete er $a_2 = 15$ Tonnen Geschenke vor. Im dritten Jahr war die Zahl der Geschenke $a_3 = a_2/a_1$ Tonnen. Diese Iterationsformel gelte ganz allgemein:

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{a_{k-1}}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Wie viele Tonnen Geschenke wird der Weihnachtsmann nun im Jahr $k = 10^{2009} = 100 \cdots 000$ (eine Zahl mit 2009 Nullen) vorbereiten?

Antwortmöglichkeiten:

1. 2009 Tonnen
2. 15 Tonnen
3. $\frac{15}{7}$ Tonnen
4. $\sqrt{2}$ Tonnen
5. $\frac{1}{7}$ Tonnen
6. $\frac{7}{15}$ Tonnen
7. 7 Tonnen
8. 10^{2009} Tonnen
9. $\frac{1}{15}$ Tonnen
10. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Tonnen

Projektbezug:

Die Aufgabe ist ein Beispiel eines dynamischen Systems. Dynamische Systeme finden vielfältige Anwendungen auf Prozesse im Alltag und erlauben Einblicke in viele Bereiche der Mathematik, Physik, Biologie usw.
Das Projekt D21 des MATHEON beschäftigt sich mit dem dynamischen Verhalten komplexer Systeme, die bei den Anwendungen in der Optoelektronik auftauchen. Dynamische Systeme sind primäre Untersuchungsobjekte, die bei der mathematischen Modellierung des dynamischen Verhaltens von Halbleiterlasern auftreten.

11.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5
Die ersten 8 Jahre sind einfach zu berechnen. Es ergibt sich:

$$a_1 = 7,\ a_2 = 15,\ a_3 = \frac{15}{7},\ a_4 = \frac{1}{7},\ a_5 = \frac{1}{15},\ a_6 = \frac{7}{15},\ a_7 = 7,\ a_8 = 15.$$

Wir bemerken, dass die zwei Größen $a_1 = 7$ und $a_2 = 15$ sich nach 6 Schritten wiederholen. Die Iterationsformel $a_{k+1} = a_k/a_{k-1}$ zeigt, dass die Zahl der Geschenke a_{k+1} nur von der Zahl der Geschenke in den zwei vorangegangenen Jahren abhängt. Deshalb wird sich die Folge unendlich oft mit Periode 6 wiederholen (man sagt, dass die Zeitreihe „periodisch“ ist). Die Anzahl der Geschenke kann deshalb nur a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 oder a_6 sein. Um festzustellen, wieviel Tonnen Geschenke im Jahr 10^{2009} vorbereitet werden, müssen wir alle Perioden von der Zahl 10^{2009} subtrahieren. D.h.

$$Y = 10^{2009} - X,$$

wobei X die größte Zahl unter 10^{2009} ist, die durch 6 teilbar ist, ohne dass ein Restwert bleibt. Y ist dann der Restwert, der sich nach der Teilung von 10^{2009} durch 6 ergibt (man sagt, Y ist gleich 10^{2009} „modulo“ 6). Diese Aufspaltung können wir folgendermaßen machen:

$$4 = 10^{2009} - 9 \cdots 99996.$$

In der Tat, die Zahl $9 \cdots 99996$ ist sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar. Deshalb ist $9 \cdots 99996$ durch 6 teilbar.
Deshalb wird die Zahl der Geschenke im Jahr 10^{2009} dieselbe sein, wie im Jahr 4:

$$a_{10^{2009}} = a_4 = 1/7.$$

12 Sizilianische Weihnacht

Autoren: Katharina & Martin Skutella
Projekt: B18

12.1 Aufgabe

Weihnachtsmann Adriano kriegt die Krise. Bei der diesjährigen Vergabe der Weihnachtsmannbezirke wurde ihm ein Bezirk in Sizilien zugewiesen. Adriano weiß, dass das sizilianische Weihnachtsgeschäft ganz eigenen Spielregeln gehorcht.

Adriano soll per Bahn in vierzehn Ortschaften der italienischen Insel Geschenke ausliefern. Eine ziemlich kostspielige Angelegenheit, wie Adriano weiß. Denn immer, wenn in dieser Region ein Zug eine Ortschaft passiert, erwartet der dortige Patrone ein Schutzgeld vom Zugführer; selbst wenn der Zugführer der Weihnachtsmann ist und Geschenke ausliefern kommt. Vom letzten Weihnachtsmann, der sich nicht an die landestypischen Gepflogenheiten hielt, fehlt noch immer jede Spur.

Leider hat das regionale Schienennetz seine Tücken. Adriano weiß, dass man einige Orte mehrfach passieren muss, um sämtliche vierzehn Orte zu erreichen. Immerhin steht ihm auf seiner Tour sein altes Gefährt, *der Rasende Rudolfo*, zur Verfügung. Der Zug ist noch immer in tadellosem Zustand, wenn man einmal davon absieht, dass der Rückwärtsgang klemmt und er daher nur noch vorwärts fahren kann.

Adriano versucht, trotz seiner misslichen Lage, einen kühlen Kopf zu behalten. Sein Plan ist es, so selten wie möglich Schutzgeld zu zahlen. Er studiert das Schienennetz (siehe Abbildung 4). Auf der Karte sind Zugstrecken und Ortschaften eingezeichnet. Adrianos Ausgangspunkt und -richtung sind durch eine Lokomotive gekennzeichnet. Hierhin muss er, nachdem er alle vierzehn Ortschaften mindestens einmal besucht hat, zurückkehren.

Hilf dem armen Adriano, eine Route zu finden, auf der er so selten wie möglich Schutzgeld bezahlen muss. Wie oft muss er auf dieser Route bezahlen?

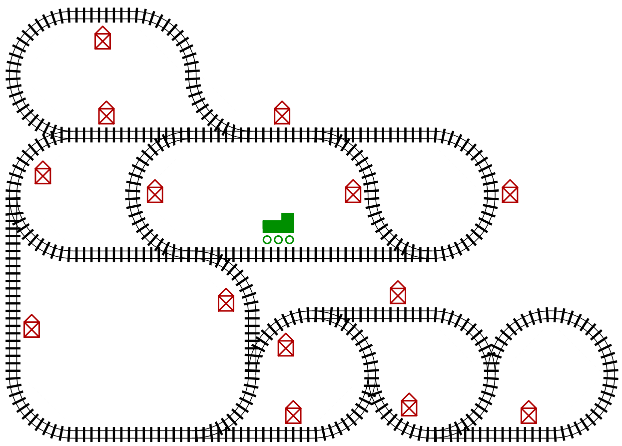


Abbildung 4: Das Schienennetz von Adrianos Bezirk. Die Häuser kennzeichnen die Ortschaften, die mindestens einmal angefahren werden müssen. Die Lokomotive kennzeichnet Adrianos Ausgangspunkt und -richtung.

Antwortmöglichkeiten:

1. 50 mal
2. 51 mal
3. 52 mal
4. 54 mal
5. 56 mal
6. 57 mal
7. 58 mal
8. 59 mal
9. 60 mal
10. 64 mal

Projektbezug:
Das zu lösende Problem ist eine neue Variante des Chinesische-Postboten-Problems, das zu den klassischen Netzwerkoptimierungs-Problemen der Kombinatorischen Optimierung gehört.

12.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8

Wir bezeichnen die 14 Ortschaften mit den Buchstaben A bis N. Die Zahlen an den Gleisabschnitten geben an, wie oft Adriano die Gleisabschnitte in einer optimalen Route besucht.

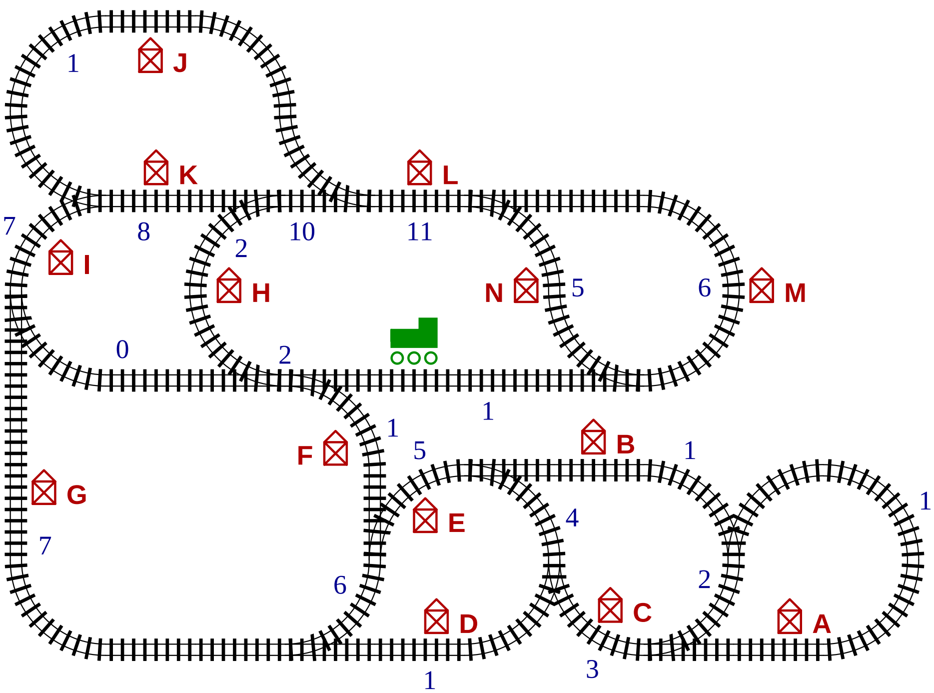


Abbildung 5: Lösung

Auf einer optimalen Route besucht Adriano genau 59 mal eine Ortschaft. Eine mögliche optimale Route (es gibt mehrere) ergibt sich zum Beispiel aus der folgenden Abfolge von 59 Ortschaften (wir verwenden die Ortsnamen A bis N aus Abbildung 5):

HLMNLJKLMNLHFGIKLMNLKIGEDGIKLMNLKIGECBEGIKLMNLKIGECACEGIKLM

Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Folge eine Route beschreibt, die jede Ortschaft mindestens einmal besucht. Wir erklären im Folgenden noch, warum Adriano auf dieser Route so selten wie möglich Schutzgeld bezahlt, die Route also optimal ist. Dazu haben wir in Abbildung 5 an jeden

Gleisabschnitt zwischen zwei Weichen eine Zahl geschrieben, die angibt, wie oft Adriano diesen Gleisabschnitt in einer optimalen Lösung befahren muss. Die Zahlen an den speziellen Gleisabschnitten, die zu einer Ortschaft gehören, stimmen mit der Anzahl der Besuche von Adriano in der oben angegebenen Route überein. Insbesondere ist die Summe dieser Zahlen gleich 59.
Um sich von der Optimalität der angegebenen Route zu überzeugen, genügt es also zu argumentieren, dass es keine Route gibt, die einen Gleisabschnitt weniger oft als in Abbildung 5 angegeben besucht. Dazu verwenden wir die folgende Einsicht.

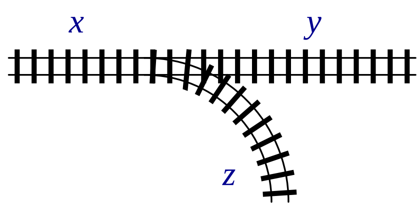


Abbildung 6: An eine Weiche grenzen immer drei Gleisabschnitte. Besitzen diese die Häufigkeiten x, y und z wie in der Abbildung angegeben, so muss $x = y + z$ gelten.

Betrachten wir eine Weiche wie in Abbildung 6 mit drei angrenzenden Gleisabschnitten, so muss für die Zahlen an den Gleisabschnitten offenbar die Gleichung $x = y + z$ gelten.
Daraus folgt nun: Der mit 2 bezifferte Gleisabschnitt in der rechten unteren Ecke von Abbildung 5 muss mindestens 2mal besucht werden, da sowohl Ortschaft A als auch Ortschaft B mindestens einmal besucht werden müssen. Aus dieser Einsicht folgt wiederum, dass der Gleisabschnitt bei Ortschaft C mindestens 3mal besucht werden muss. Zusammen mit der 1 bei Ortschaft D folgt daraus die 4. Diese 4 ergibt wiederum zusammen mit der 1 bei Ortschaft B die 5 bei Ortschaft E. Fährt man mit dieser Argumentationskette fort, erhält man fast alle in Abbildung 5 angegebenen Zahlen.
Eine kleine Ausnahme bildet die 2 bei Ortschaft H. Hier kann man wie folgt argumentieren: Zwischen Ortschaft H und dem Lok-Symbol liegt eine Kreuzung, in die vier Gleisabschnitte münden. Diese Kreuzung muss mindestens 2mal besucht werden, einmal zu Beginn der Route und einmal beim Besuch der Ortschaft F. Eine Route, die Ortschaft H nur einmal besucht, muss demnach als Ausgleich den mit 0 bezeichneten Gleisabschnitt (mindestens)

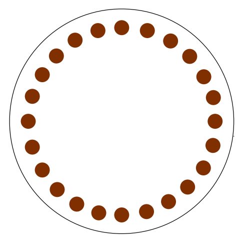
einmal besuchen. Daraus folgt, dass sich die Zahlen bei Ortschaft I und K um je 1 erhöhen. Besucht man also Ortschaft H einmal weniger, muss man dafür die Ortschaften I und K einmal mehr besuchen, was offensichtlich nicht optimal ist.

13 Das Kekskuchenspiel

Autor: Torsten Ueckerdt

13.1 Aufgabe

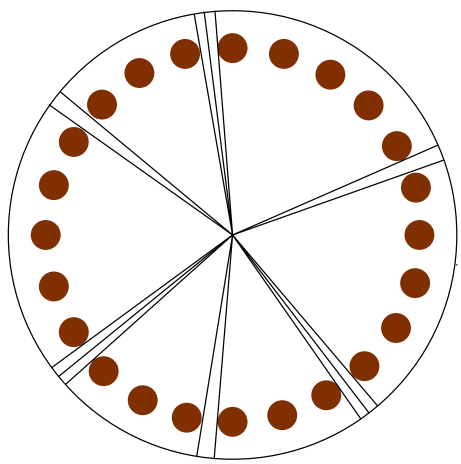
Dieses Weihnachten hat der Weihnachtsmann seinen beiden besten Rentieren **Alice** und **Bob** einen großen Kuchen gebacken. Da er weiß, wie sehr die beiden Kekse mögen, hat er ringsum den Kuchen mit **24 Keksen** belegt.



Alice und Bob freuen sich riesig über das Geschenk, wollen aber beide nicht gerne teilen. Vor allem möchte jeder von Ihnen so viele Kekse wie möglich bekommen. Sie einigen sich, den Kuchen in einem Spiel aufzuteilen. Zuerst darf Bob den Kuchen vollständig aufschneiden. Dann darf sich jeder abwechselnd ein Stück aussuchen und essen. Da Bob bereits schneiden durfte, fängt Alice mit dem Auswählen und Essen an. Jedes weitere Stück darf allerdings nur rechts oder links von der entstandenen Lücke genommen werden. Es ist also für beide verboten, eine zweite Lücke im Kuchen entstehen zu lassen.
Auch Bob muss einige Regeln beim anfänglichen Schneiden beachten. So dürfen nur Kuchenstücke in der üblichen Form entstehen, das heißt Bobs Schnitte müssen in der Mitte beginnen und sich geradlinig zum Rand erstrecken. Außerdem sollten alle Kekse unversehrt bleiben, da Alice und Bob keine zerbrochenen Kekse mögen. Bob darf allerdings so viele Stücke schneiden, wie er mag und kann durch seine Schnitte zu jedem Stück des Kuchens gesondert entscheiden, wie viele Kekse auf ihm liegen. Insbesondere dürfen Stücke entstehen, auf denen gar kein Keks liegt.
Alice und Bob sind mit den Regeln zufrieden, da jeder von beiden denkt, dadurch einen Vorteil zu erhalten. Doch nur zwei der folgenden Aussagen sind richtig. Welche?

Aussage 1 Wenn Bob den Kuchen in eine gerade Anzahl von Stücken schneidet, dann kann Alice sich mindestens die Hälfte der Kekse garantieren.

Aussage 2 Bei folgendem Schnittmuster kann sich Alice 12 Kekse garantieren:



$$(0-5-0-5-0-0-3-0-3-0-0-5-0-3-0)$$

0 bedeutet ein Stück Kuchen ohne Keks,

3 ein Stück mit genau drei Keksen,

5 ein Stück mit genau fünf Keksen.

Aussage 3 Alice sollte immer mit dem Stück des Kuchens anfangen, auf dem die meisten Kekse liegen.

Aussage 4 Egal, wie Bob den Kuchen schneidet, Alice kann sich mindestens acht Kekse garantieren.

Aussage 5 Die *Folge-Bob-Methode* ist das Beste was Alice tun kann. Diese besteht darin, dass Alice mit einem Stück ihrer Wahl beginnt und ab der zweiten Runde stets das Stück isst, das gerade durch Bobs Zug frei wurde.

Antwortmöglichkeiten:

1. **Aussage 1** und **Aussage 2** sind richtig.
2. **Aussage 2** und **Aussage 3** sind richtig.
3. **Aussage 3** und **Aussage 4** sind richtig.
4. **Aussage 4** und **Aussage 5** sind richtig.
5. **Aussage 5** und **Aussage 1** sind richtig.
6. **Aussage 1** und **Aussage 3** sind richtig.
7. **Aussage 3** und **Aussage 5** sind richtig.
8. **Aussage 5** und **Aussage 2** sind richtig.
9. **Aussage 2** und **Aussage 4** sind richtig.
10. **Aussage 4** und **Aussage 1** sind richtig.

13.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 10
Aussage 1 und **Aussage 4** können mit der *Folge-Bob-Methode* erzielt werden.

Für **Aussage 1** sei der Kuchen in gerade viele Stücke geschnitten. Da Alice die *Folge-Bob-Methode* spielt, kann Bob nie zwei aneinander grenzende Stücke essen. Da die Anzahl der Stücke gerade ist, kann Alice dies auch nicht und somit werden sowohl Alice als auch Bob jedes zweite Stück des Kuchens essen – egal wie Bob sich verhält. Alice kann den Kuchen also vorher in Gedanken in abwechselnde Stückmengen aufteilen und sich die größere Menge aussuchen. Diese muss, da auf beiden zusammen 24 Kekse liegen, mindestens 12 Kekse tragen. Alice muss also nur mit einem Stück der größeren Menge starten und die *Folge-Bob-Methode* anwenden.

Für **Aussage 4** brauchen wir nur noch untersuchen, was bei der *Folge-Bob-Methode* mit ungerade vielen Stücken passiert. Noch immer kann Bob keine zwei aneinander grenzenden Stücke essen. Dies gilt auch für Alice, jedoch bis auf das letzte Stück. Da Alice nun ein Stück mehr als Bob isst (Die Anzahl der Stücke ist ungerade und Alice fängt an), wird das letzte Stück an ein bereits von Alice gegessenes angrenzen. Wo diese benachbarten Alice-Stücke liegen, kann Bob durch sein Essverhalten beeinflussen.

Sei nun angenommen, dass Alice *weniger als acht* Kekse erhalten hat – Bob hat also mindestens 17 Kekse. Dann gibt es ein „mittleres“ Stück von Bob, das heißt ein Stück, so dass angefangen mit diesem Stück, *sowohl* im Uhrzeigersinn, *als auch* gegen den Uhrzeigersinn bis zum letzten Alice-Stück mindestens acht Kekse auf Bobs Stücken liegen.

Beginnt Alice mit diesem „mittleren“ Stück und spielt sie die *Folge-Bob-Methode*, so wird sie in einer der beiden Richtungen jedes zweite Stück essen und somit mindestens acht Kekse erhalten. Natürlich wird der Kuchen hier nicht zweimal gegessen. Vielmehr sucht sich Alice zu Anfang ein Stück aus und überlegt im Kopf wie Bob schlimmsten Falls auf ihre *Folge-Bob-Methode* mit diesem Startstück reagieren kann. Erhält sie so acht Kekse, ist sie froh und fängt mit diesem Stück an. Wenn nicht, sucht sich sich aus dieser imaginären Aufteilung in Alice- und Bob-Stücke ein „mittleres“ Bob-Stück aus und fängt mit diesem an.

Die Aufgabe könnte auch durch das Ausschlußprinzip gelöst werden, das heißt wenn drei Aussagen widerlegt sind, müssen die übrigen beiden richtig

sein.
Aussage 2 kann durch geduldiges und koordiniertes Ausprobieren als falsch entlarvt werden. Dabei beobachtet man, dass Alice höchstens 11 Kekse bekommt; spielt sie die *Folge-Bob-Methode*, so sind es allerdings maximal 10 Kekse. Somit ist auch **Aussage 5** falsch. Sie kann allerdings auch mit kleineren Beispielen widerlegt werden. Das kleinste Beispiel ist:

$$(0 - 8 - 0 - 0 - 8 - 0 - 0 - 8 - 0)$$

In diesem erhält Alice mit der *Folge-Bob-Methode* höchstens 8 Kekse, obwohl sie sogar 16 Kekse erspielen kann. Für **Aussage 3** lässt sich schnell ein Gegenbeispiel konstruieren. Wenn Bob den Kuchen wie folgt aufteilt

$$(0 - 9 - 8 - 0 - 7)$$

bekommt Alice gegen einen cleveren Bob nur 9 Kekse, wenn sie gierig mit dem 9-Kekse-Stück beginnt. Nur wenn sie mit dem Stück mit sieben Keksen anfängt, kann Bob maximal 9 Kekse bekommen und Alice somit mindestens 15 Kekse.

14 Schlittentour

Autoren: Martin Skutella, Roland Koch, Daniel Dressler

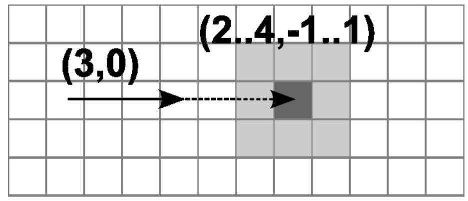
14.1 Aufgabe

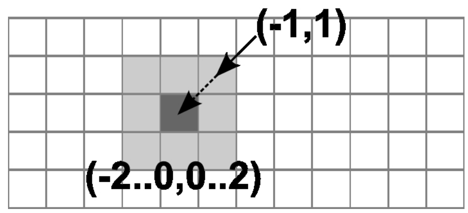
Der Weihnachtsmann bekam feuchte Augen, als er den Wunsch las. Da hatte sich doch tatsächlich eine nette Seele etwas für ihn, den Weihnachtsmann, gewünscht: einen neuen Schlitten! Ein Blick in die Geschenkwerkstatt offenbarte schon die Karosserie. Warum war ihm die nicht früher aufgefallen? Da lag sogar schon die fertige Betriebsanleitung, noch druckfrisch! Etwas darin schmökern wäre bestimmt die ideale Vorbereitung auf die große Weihnachtstour.

„Ihr Schlitten und Sie: Erfahren Sie Freundschaft!“, hieß das erste Kapitel. Schnell überblätterte er den kaum hilfreichen Anfang des Buches und kam endlich zum Kapitel ”Praktische Hinweise zur Nutzung Ihres Schlittens in der luftfahrtbasierten Warenauslieferung”. Der Weihnachtsmann las sich das Kapitel gründlich durch und fand schließlich folgende Lenkregeln. Diese müssten unbedingt eingehalten werden, sonst könnten die Rentiere stolpern und sich verletzen.

- Der Schlitten bewegt sich mit den Sprüngen der Rentiere. Am besten veranschaulicht man sich einen Sprung durch seine Nord/Süd- und West/Ost-Komponenten!

- Jeder Sprung muss dem vorhergehenden in folgender Weise ähneln: Der neue Sprung darf vom letzten Sprung in jeder Komponente nur um 0, +1 oder -1 abweichen. Zu jedem Sprung gibt es also neun Möglichkeiten für den nächsten Sprung! (Bilder im Handbuch zeigten noch einen Sprung und die neun möglichen Ziele des folgenden Sprungs.)



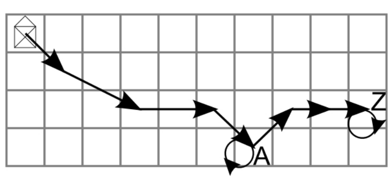


- Unter Einhaltung dieser Regeln können beliebig große Sprünge gemacht werden.

Darunter stand noch „der freundliche Hinweis für den noch lernenden Auslieferer“:

- Sie sollten Waren vorsichtshalber immer nur stehend ausliefern, also während eines „Sprungs“ (0,0).

Ein kleines Beispiel im Handbuch verdeutlichte noch den Bewegungsablauf. Man startete an Position (1,1), besuchte ein Auslieferungsziel A auf (7,4) und dann das Ziel auf (10,3).

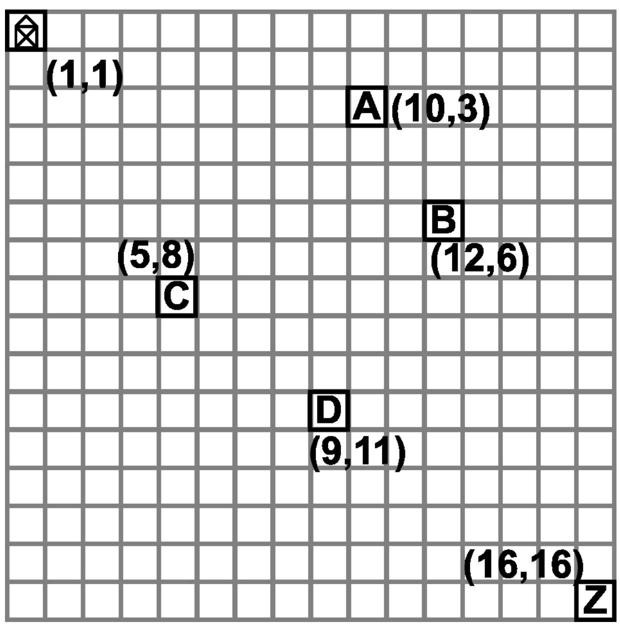


von Position	zu Position	mit Sprung
(1,1)	(2,2)	(1,1)
(2,2)	(4,3)	(2,1)
(4,3)	(6,3)	(2,0)
(6,3)	(7,4)	(1,1)
(7,4)	(7,4)	(0,0)
(7,4)	(8,3)	(1,-1)
(8,3)	(9,3)	(1,0)
(9,3)	(10,3)	(1,0)
(10,3)	(10,3)	(0,0)

Insgesamt waren es neun Sprünge, zwei davon zum Ausliefern bzw. Aussteigen. Ohne das Stehenbleiben in A wäre diese Fahrt übrigens nicht möglich gewesen, da der Sprung (1,-1) nicht auf (1,1) folgen darf.

Der Weihnachtsmann seufzte. Die Regeln klangen schon kompliziert. Aber ein eigenes kleines Beispiel würde ihm bestimmt das Gefühl für diesen Schlitten geben. Ein Startpunkt, ein Zielpunkt und vier Häuser. Wie schwer könnte es schon sein, dafür eine Tour zu planen?

Den Startpunkt setzte er auf die Koordinate (1,1), das Ziel auf (16,16). Dazwischen ein paar Häuser: Haus A bei (10,3), B bei (12,6), C bei (5,8) und D bei (9,11). Aus dem Bereich mit Koordinaten zwischen 1 und 16 wollte er nicht hinaus fahren. Auf seinem Karopapier ergab sich folgendes Bild.



Teilaufgabe 1)

Nun suchte er einen Weg vom Start zum Ziel, der unterwegs alle Häuser besucht, und dabei möglichst wenig Sprünge benötigt. Auf jedem Haus (zum Abwerfen der Geschenke) und auch am Ziel (zum Aussteigen) wollte er einen „Sprung“ lang stehen. Nach etwas Überlegen fiel ihm auf, dass das Problem ja gar nicht so schwer war, weil es sich auf viele einzelne kleine Probleme zurückführen ließ ...

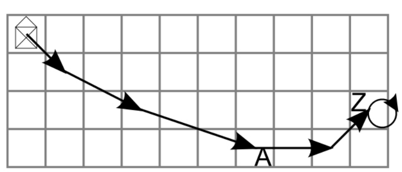
Er überlegte, malte sich eine kleine Tabelle, malte zwischendurch ein paar mal sein Haus, dann noch eine Tabelle und schließlich hatte er heraus, wie viele Sprünge (inklusive fünf Aussetzern) er brauchen würde.

Teilaufgabe 2)

Doch das Ergebnis überzeugte ihn wenig. So viele Sprünge? Das musste doch schneller gehen. An den Lenkregeln konnte er nichts ändern, aber an jedem Haus anhalten? Das entsprach nun wirklich nicht seinem Fahrstil! Er, der erfahrenste Weihnachtsmann der Welt, würde sicherlich die Geschenke auch abwerfen können, wenn die Rentiere gerade gelandet sind, egal wie weit sie dann wieder springen. In der Tat, auch im Handbuch fand er dazu einen Abschnitt:

- Als erfahrener Auslieferer können Sie Waren getrost auch zwischen großen Sprüngen zustellen, sofern Sie dies machen, wenn Sie gerade am Auslieferungsort gelandet sind. Zum Aussteigen an Ihrem Zielort Z müssen Sie in Ihrem eigenen Interesse aber immer noch einen Sprung (0,0) aussetzen.

Das Handbuch wiederholte das Beispiel von oben, diesmal ohne zwischendurch anzuhalten.



von Position	zu Position	mit Sprung
(1,1)	(2,2)	(1,1)
(2,2)	(4,3)	(2,1)
(4,3)	(7,4)	(3,1)
(7,4)	(9,4)	(2,0)
(9,4)	(10,3)	(1,-1)
(10,3)	(10,3)	(0,0)

Das ergab sechs Sprünge.

Der Weihnachtsmann beschloss, dass dies genau sein Fall war. Auf den Häusern nur aufsetzen und erst am Schluss wieder richtig stehen. Das klang schon besser. Er nahm sich wieder sein eigenes Beispiel vor und suchte eine neue Tour. Lange saß er da und grübelte. Bis endlich eine Elfe, die den Schlitten mitkonstruierte, Mitleid mit dem Weihnachtsmann bekam und ihm die folgenden Tipps gab:

- „Hier ist es sicherlich am besten, mit Haus C anzufangen. Und Haus D ist das letzte Haus, dass du besuchen solltest.“ Beim Rausgehen rief sie noch: „Denk daran, am Ziel erst stehenzubleiben, dann auszusteigen!“

Dank des Tipps der Elfe gab es nur noch zwei Touren, die der Weihnachtsmann ausprobieren musste. Irgendwann hatte er das auch geschafft und lehnte sich erschöpft auf seinem Schreibtischstuhl zurück. Immerhin sah die Tour interessant aus. Dann fiel sein Blick auf die Weltkarte und die Unzahl der Häuser, die er besuchen muss! Wieder bekam er feuchte Augen.

Wenn der Weihnachtsmann an jedem Haus und am Ziel anhält, braucht er X Sprünge. Wenn er nur am Ziel stehen bleibt, braucht er Y Sprünge.
Welche der Antworten gibt minimale Anzahl der jeweilig notwendigen Sprünge X und Y an.

Antwortenmöglichkeiten:

1. X = 24, Y = 19
2. X = 24, Y = 20
3. X = 24, Y = 21
4. X = 25, Y = 19
5. X = 25, Y = 20
6. X = 25, Y = 21
7. X = 26, Y = 19
8. X = 26, Y = 20
9. X = 26, Y = 21
10. Die Lösung ist nicht interessant. Ich möchte gar keine Weihnachtsgeschenke.

Richtige Lösung: Antwort 8

Teilaufgabe 1 Bei der Lösung von Aufgabe 1) ist folgende Erkenntnis von entscheidender Bedeutung: Jeder Abschnitt zwischen den Häusern kann einzeln geplant werden, da durch das vollständige Anhalten sich keine Teilstrecke auf die nächste auswirkt.

Man benötigt jetzt die minimale Anzahl Sprünge, die der Weihnachtsmann braucht, um "aus dem Stand in den Stand" von einem zum anderen Haus zu gelangen. Dafür überlegt man sich, wie weit man mit k Sprüngen in eine Richtung kommen kann. Recht leicht ersichtlich beschleunigt man maximal auf der ersten Hälfte der Strecke und bremst dann maximal ab. Für gerades k kommt man mit k Sprüngen also $1+2+\ldots+k/2+k/2-1+k/2-2+\ldots+2+1+0$ Felder weit. (Ähnlich für ungerades k.) Da man unterwegs etwas abbremsen oder sogar am Ziel warten kann, kann man mit k Sprüngen auch jede kleinere Entfernung überwinden. Es ergibt sich Tabelle 1. Diese Werte dreht man um und erhält, für welche Entfernung d man wie viele Sprünge benötigt (Tabelle 2).

k Sprünge	1	2	3	4	5	6	7
max. Entfernung	0	1	2	4	6	9	12

Tabelle 1: Wie weit man mit wie vielen Sprüngen kommt

Entfernung d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
min. Anzahl Sprünge	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7

Tabelle 2: Welche Entfernung wie viele Sprünge benötigt

Um von einem Haus auf (x_1, y_1) zu einem Haus auf (x_2, y_2) zu gelangen, betrachtet man den größten Koordinatenunterschied zwischen den zwei Häusern. Also sei $d = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. Wenn man diese Entfernung d schafft, kann man die Differenz der anderen Koordinate nebenbei erledigen. Nun kann man (ohne jedes Ausprobieren) für jedes Paar von Häusern die Entfernung d und die dafür nötige Anzahl Sprünge k (inkl. Null-Sprung) ermitteln. Es ergeben sich die Werte in Tabelle 3.
Hat man Tabelle 3, findet man durch Ausprobieren schnell eine Lösung mit 26 Schritten (z.B. $SABCDZ$). Nun gilt es, die Optimalität zu beweisen. Oder

Abschnitt	SA	SB	SC	SD	AB	AC	AD
Entfernung d	9	11	7	10	3	5	8
min. Sprünge	6	7	6	7	4	5	6
Abschnitt	AZ	BC	BD	BZ	CD	CZ	DZ
Entfernung d	13	7	5	10	4	11	7
min. Sprünge	8	6	5	7	4	7	6

Tabelle 3: Abschnitte und die minimale Anzahl Sprünge für jeden Abschnitt. Fehlende Einträge ergeben sich aus Symmetrie. (S = Start, Z = Ziel)

anders formuliert: Man will zeigen, dass es keine Tour mit 25 (oder sogar noch weniger) Sprüngen gibt. Nach den Vorüberlegungen reduziert sich das Problem auf die Reihenfolge, in der die Häuser A, B, C, D besucht werden, also auf die einzelnen Abschnitte der Tour.

Anhand der Werte für SA, SB, SC und SD sieht man, dass jede zulässige Weihnachts-Tour mindestens 6 Sprünge für den ersten Abschnitt SP, mit $P \in \{A, B, C, D\}$, benötigt. Und es werden mindestens 6 Sprünge im letzten Abschnitt QZ, $Q \in \{A, B, C, D\}$, benötigt. Die drei Abschnitte "in der Mitte" der Tour müssen zwischen den Knoten A, B, C, D verlaufen und dürfen zusammen nicht mehr als 13 Sprünge lang sein, wenn man mit maximal 25 Sprüngen auskommen will. Es bleibt damit kaum eine Wahl: Man muss die zwei kleinsten Abschnitte (mit 4 Sprüngen) und einen der beiden nächstkleineren (5 Sprünge) nehmen, denn das ergibt gerade noch 13. Zur Auswahl stehen also nur die Kombinationen $\{AB, CD, AC\}$ oder $\{AB, CD, BD\}$. Ausserdem benötigt man den kürzesten Abschnitt zum Ziel, DZ, und einen kürzesten Startabschnitt SA oder SC.

Aus diesen Bauteilen lässt sich aber keine Tour zusammensetzen: DZ am Ende schließt die Zwischenabschnitte $\{AB, CD, BD\}$ aus, da D bereits zweimal darin vorkommt. Eine 25er-Tour müsste also $\{AB, CD, AC, DZ\}$ enthalten. Aber sowohl A als auch C kommen bereits zweimal vor und damit sind SA und SC ausgeschlossen. Eine Tour mit höchstens 25 Sprüngen ist also unmöglich.

Teilaufgabe 2

Das Ausprobieren einer Tour ist hier anspruchsvoller, weil die Teilstrecken voneinander abhängig sind. Es sind aber nur 2 Touren ($SCBADZ$ und $SCABDZ$) zu überprüfen. Eine systematische Vorgehensweise zur Lösung dieses Problems wird weiter unten für eine der beiden Touren vollzogen. Mit etwas Geschick und Geduld kann man eine Strecke mit 20 Sprüngen vielleicht auch so finden. Im Gegensatz zum systematischen Ansatz findet man dadurch aber nur eine "vielversprechende" Lösung und kann nicht ausschließen, dass es eine Tour mit bloß 19 Sprüngen gibt.

Um zu beweisen, dass 19 Sprünge zu wenig sind, kann man den häufigen Richtungswechsel beider Touren ausnutzen. Im Detail konstruiert man eine untere Schranke für die Teiltour $SCAD$, wobei nur die vertikale Komponente betrachtet werden muss (und B ignoriert wird). Dies und die minimale Schrittanzahl von D nach Z ergibt offenbar eine untere Schranke für die Gesamttour, die für beide der erlaubten Touren gilt. (Sowohl $SCBADZ$ als auch $SCABDZ$ sind zulässige Lösungen für das vereinfachte Problem $SCADZ$.) Die minimale Anzahl Sprünge von D nach Z kann man rückwärts von Z aus suchen, auch wenn man nicht weiß, ob dies zum Rest der Tour passt. 5 Sprünge (inkl. Aussteigen) werden hier mindestens benötigt.

Es bleiben 14 Sprünge für die (eindimensionale) Tour von y-Koordinate 1 nach 8 nach 3 nach 11. Die zwei Richtungswechsel machen dies aber unmöglich, wie nun gezeigt werden soll. Es muss nämlich zwei Wendepunkte geben, an denen man (vertikale) Geschwindigkeit 0 hat. Der erste liegt bei $y \geq 8$ und der zweite bei $y \leq 3$. Aus Aufgabe 1 weiß man aber, dass bis zum ersten Wendepunkt mindestens 6 Schritte benötigt werden, bis zum zweiten mindestens 5. Von $y \leq 3$ zu $y = 11$, startend mit Geschwindigkeit 0 und mit beliebiger Ankunftsgeschwindigkeit, braucht man aber mindestens 4 Schritte. Damit sind es insgesamt mindestens $6 + 5 + 4 + 5 = 20$, also zu viele. Somit ist gezeigt, das 19 mit keiner dieser beiden Touren möglich ist und jede Lösung mit 20 Sprüngen ist deshalb optimal.

Nun soll der systematische Ansatz an der Tour $SCBADZ$ illustriert werden. Man listet der Reihe nach für alle Häuser der Tour immer alle möglichen (realistischen) Ankunftsgeschwindigkeiten und Anzahl Sprünge bis zum Haus auf. Darauf aufbauend kann man dann diese Werte für das nächste Haus finden (Stichwort "Dynamische Programmierung").

S ist offensichtlich nur mit 0 Sprüngen und Geschwindigkeit $(0,0)$ sinnvoll erreichbar. Davon ausgehend kann man zu C mit 4 Sprüngen und eine der Ankunftsgeschwindigkeiten $(0,2),(1,2),(2,2)$ oder 5 Sprüngen und einer Ankunftgeschwindigkeit von $(0..2,1),(0..2,3)$ gelangen. Zur Sicherheit kann man noch überprüfen, dass man mit 6 Sprüngen mit Geschwindigkeit $(0..2,0)$ ankommen kann. In der x-Richtung gibt es übrigens nichts mehr zu verbessern, da nicht mehr Platz zum Beschleunigen ist und nach links fahren ist offensichtlich falsch.

In Tabelle 4 ist die Zusammenfassung von allem, was man über C wissen muss. Zu jeder Ankunftsgeschwindigkeit (x,y) ist dort die geringste Sprungzahl angegeben, genau so anzukommen. Alles außerhalb der Tabelle kommt nicht in Frage und auch Geschwindigkeit $(0,0)$ ist uninteressant, da man damit nicht "ankommen" kann, sondern vorher schon da gewesen sein muss. (Es könnte aber trotzdem vorkommen, dass man auf einem Haus komplett zum Stillstand kommt. Dies wird aber dem nächsten Abschnitt angerechnet.)

$y \diagdown x$	0	1	2
0	–	6	6
1	5	5	5
2	4	4	4
3	4	4	4

Tabelle 4: Ankunft in C

$y \diagdown x$	-1	0	1	2
-2	10	9	8	8
-1	10	9	9	8

Tabelle 5: Ankunft in B

$y \diagdown x$	-2	-1	0
-1	12	11	11
0	12	11	–
1	13	13	13

Tabelle 6: Ankunft in A

$y \diagdown x$	0	1	2	3
2	15	15	17	19
3	15	15	17	19

Tabelle 7: Ankunft in D

Wenn man diese Tabelle hat, ist S aus dem Spiel. Als nächstes untersucht man die Strecke CB, bei der man 7 nach rechts und 2 nach oben muss. Wenig überraschend sind die Startgeschwindigkeiten mit etwas "Schwung" nach rechts gute Lösungen. Die vertikale Geschwindigkeit ist weniger wichtig, so-lange man noch bremsen und wenden kann.

Für B kann man sich noch überlegen, dass man von links unten kommt und nach links oben zu A will. Als Ankunftsgeschwindigkeiten sind also vertikale Geschwindigkeiten ≥ 0 (nach unten) nicht sinnvoll und zu starkes horizontales Bremsen vor B auch kaum machbar. Ankunftsgeschwindigkeiten im Bereich $(-1 \ldots 2, -2 \ldots -1)$ sollten aber untersucht werden.

Mit $(1..2, 0..2)$ kann man folgende 4 Sprünge machen, um auf B zu landen: $(2,1), (2,0), (1,-1), (1,-2)$. Man hat also mehrere Möglichkeiten, mit Geschwindigkeit $(1,-2)$ anzukommen. Tatsächlich benötigt die beste Möglichkeiten insgesamt 8 Schritte (was schon aus der vertikalen Geschwindigkeit folgt).

Insgesamt kann man Tabelle 5 für die sinnvollen Ankunftsgeschwindigkeiten für B aufstellen. Wichtig ist, dass es hier egal ist, wie genau man zu C kam oder von C weiter ist, sondern nur noch die Ankunftsgeschwindigkeit und die Gesamtanzahl der Sprünge für B wird benötigt. Dadurch fallen viele Lösungen wieder zusammen.
Und weiter zu A: Eine vertikale Geschwindigkeit ≤ -3 bedeutet, dass man kurz darauf das vorgegebene Gebiet verlässt, was verboten ist. Damit ist auch ausgeschlossen, dass man von B nach A in nur einem Schritt geht. Mit mindestens zwei Schritte, kann man aber auf vertikale Geschwindigkeit -1 abbremsen. Die horizontale Richtung wirkt relativ unkritisch für den Abschnitt AD da man bereits leicht nach links unterwegs ist. Die interessanten Ankunftsgeschwindigkeiten sind damit im Bereich $(-2 \ldots 0, -1 \ldots 1)$. Für A ergibt sich Tabelle 6.

Nun für D: Man kommt von oben und will nach rechts unten. Vertikale Geschwindigkeit ≥ 4 führt gegen die Wand, für ≤ 1 gibt es keinen Grund. Die horizontale Geschwindigkeit ist mit $0 \ldots 3$ noch recht offen. (-1 wäre nur dann interessant, wenn man mit einem Schritt von A nach D kommt, was aber nicht der Fall ist.) Es ergibt sich Tabelle 7.

Mit diesen Geschwindigkeiten zu Z und dort auf $(0,0)$ bremsen benötigt 4 Sprünge (ausgehend von einer Lösung mit Geschwindigkeit 1 nach rechts) und dann noch den einen “Sprung” zum Aussteigen. Das macht 20 Sprünge. Wenn man wirklich alle Tabellen groß genug gewählt und richtig ausgefüllt hat, weiß man nun auch mit Sicherheit, dass es mit $SCBADZ$ nicht besser geht. Das Ergebnis ist übrigens in Abbildung 7 abgebildet.

Wenn man sich die ganze Arbeit noch mit der anderen Tour $SCABDZ$ macht, kommt man dort auf 21 als beste Möglichkeit. Die andere Tour ist besser und damit ist man fertig.

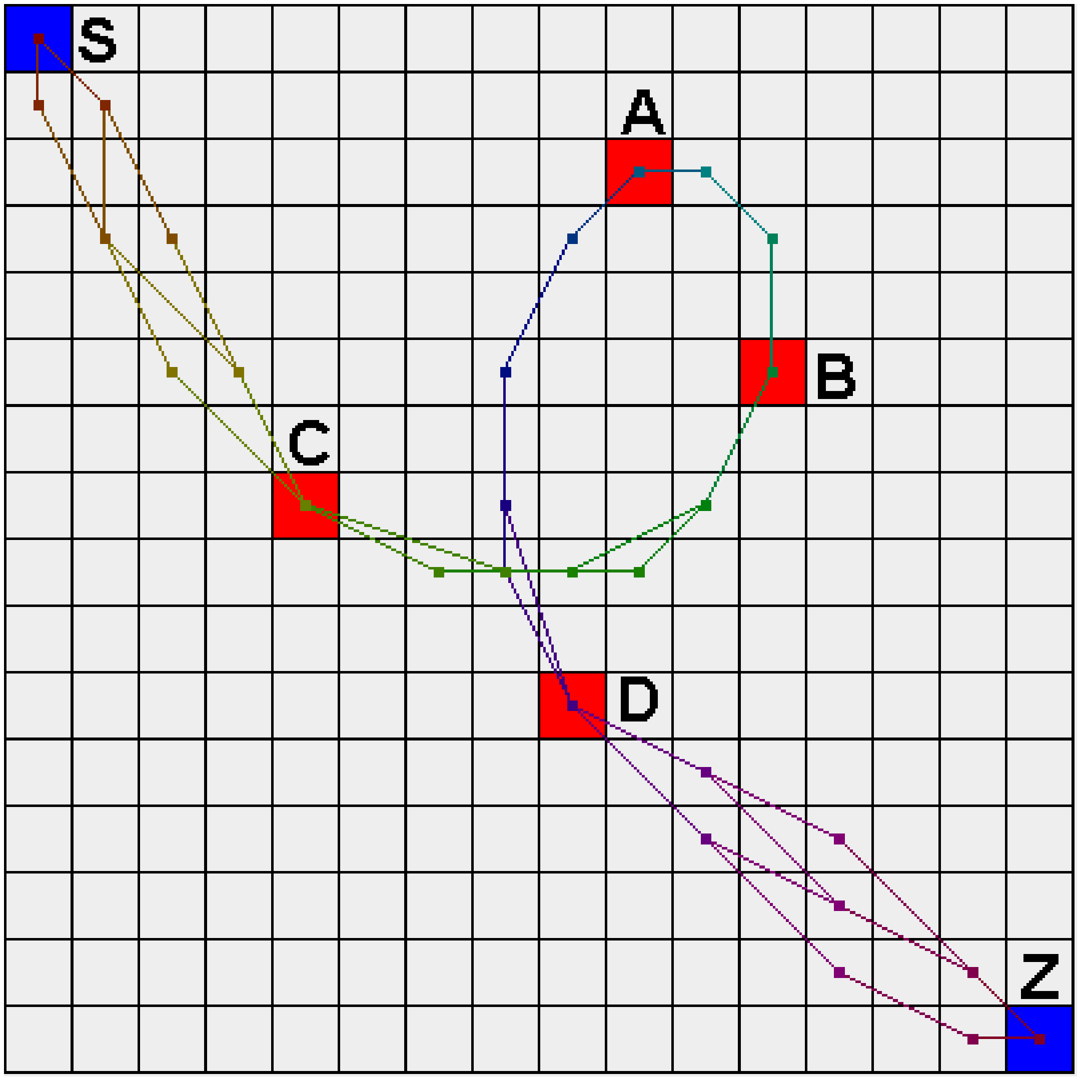


Abbildung 7: Die Optimallösungen zu Aufgabe 2 mit 20 Sprüngen. Der obere Teil des Loopings erfordert genau diese Zwischenschritte, ansonsten sind leichte Variationen möglich. In allen Optimallösungen erreicht man C nach 4 Sprüngen, B nach 8, A nach 11, D nach 15 und Z nach 19, plus 1 Sprung fürs Aussteigen.

15 Diskrete Minimalfläche

Autoren: Ulrich Reitebuch, Christian Schulz

15.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann braucht ein neues Dach für seinen Rentierstall. Nach Absprache mit dem Architekten hat er sich für das in Abb.8 dargestellte sternförmige Design entschieden. Beim Entwerfen hat der Weihnachtsmann mehrmals betont, dass die Positionen der roten und grünen Punkte feststehen. Aufgabe des Architekten ist es nun noch, die Höhe des blauen Punktes in der Mitte zu bestimmen. Der Weihnachtsmann möchte möglichst wenig Material zum Dachbau verwenden, d. h. der blaue Punkt soll so gewählt werden, dass die Gesamtfläche des Daches minimal wird.

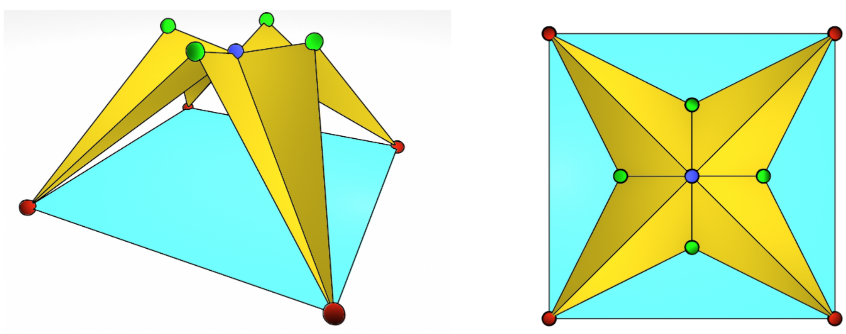


Abbildung 8: Entwurf des Daches **links:** perspektivische Ansicht **rechts:** Draufsicht

Die Koordinaten der Punkte sind folgendermaßen gegeben:

- rote Punkte $(\pm 1, \pm 1, 0)$
- grüne Punkte $(\pm\frac{1}{2}, 0, 1)$ und $(0, \pm\frac{1}{2}, 1)$
- blauer Punkt $(0, 0, z)$

Bestimme die minimale Fläche A des Daches.

Antwortmöglichkeiten:

1. $A = 1$
2. $A = 2\sqrt{2}$
3. $A = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
4. $A = \frac{6}{5}\sqrt{5}$
5. $A = \frac{11}{6}\sqrt{8}$
6. $A = 1,8$
7. $A = \sqrt{7}$
8. $A = \sqrt{17}$
9. $A = \frac{8}{7}\sqrt{6}$
10. $A = \frac{11}{9}\sqrt{10}$

15.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4
Die Fläche eines Dreiecks (begrenzt durch einen roten, grünen und blauen Punkt) sei gegeben durch $A_\triangle$. Es gilt also für die Gesamtfläche des Daches $A_{\text{Dach}}(z) = 8A_\triangle(z)$. Hier bezeichnet z die Höhe des mittleren Punktes. Die Fläche $A_\triangle(z)$ eines Dreiecks kann durch das Kreuzprodukt oder durch die Heronformel ermittelt werden. Dies liefert einen Wurzelausdruck mit quadratischem Term als Radikanden für $A_{\text{Dach}}(z)$.
Differenzieren und Nullsetzen der Ableitung liefert den Extremalwert für z. Nochmaliges Ableiten bestätigt dann den Minimalcharakter der Lösung.

- (blau zu grün) $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1-z \end{pmatrix}$
- (blau zu rot) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -z \end{pmatrix}$
- $n(z) = v \times w = \begin{pmatrix} z-1 \\ 1-\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $A_\triangle(z) = \frac{1}{2}\|n(z)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(z-1)^2 + (1-\frac{1}{2}z)^2 + (\frac{1}{2})^2}$
- $\frac{dA_{\text{Dach}}(z)}{dz} = 8\frac{dA_\triangle(z)}{dz} = \frac{10z-12}{\sqrt{5z^2-12z+9}} = 0$, für $z = \frac{6}{5}$
- $A_{\text{Dach}}(\frac{6}{5}) = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

Die Lösung ist auch ohne Differenzieren berechenbar. Der Ausdruck für $A_{\text{Dach}}(z)$ enthält einen Wurzelausdruck mit einem quadratischen Term als Radikanden. Dieser quadratische Term beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel. Das Minimum befindet sich im Scheitelpunkt der Parabel. Der Scheitelpunkt kann durch quadratische Ergänzung bestimmt werden.

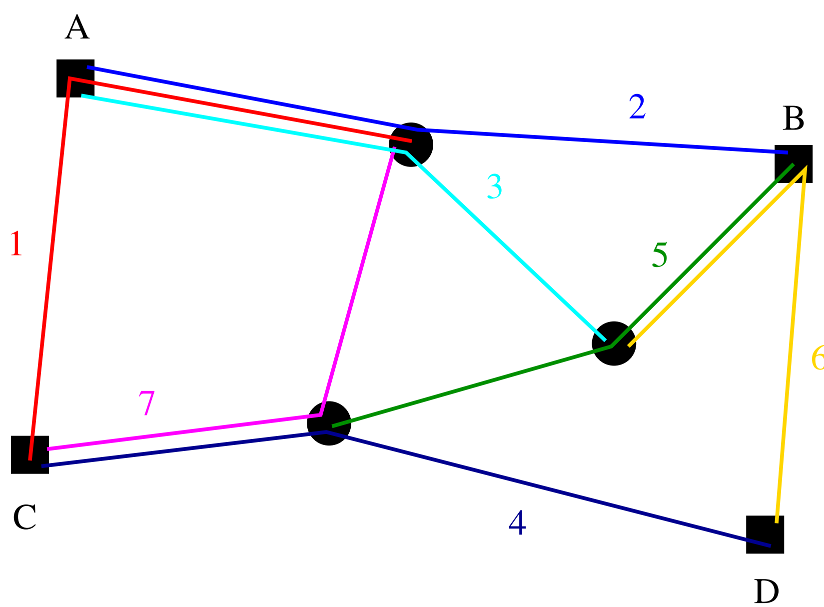
16 Die Turboschlitten Rettung

Autor: Marika Neumann
Projekt: B15

16.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann rauft sich die Haare. Dass aber auch jedes Jahr immer irgendetwas schief gehen muss! Diesmal sind aus irgendeinem Grund die Geschenke in den Depots durcheinander gekommen. Es gibt vier wichtige Depots, von denen die Geschenke am Weihnachtsabend in die ganze Welt verteilt werden. Die Verteilung der Geschenke ist bereits bis ins kleinste Detail geplant. Es gibt einen straffen Zeitplan, der eingehalten werden muss. Und erst jetzt, wenige Tage vor Weihnachten, fällt der pragmatischen Weihnachtswichtelin Linda auf, dass jemand geträumt haben muss und die Geschenke zum Teil in falsche Depots geliefert wurden. Seufzend schaut der Weihnachtsmann das immermüde Rentier Kalle an, das gerade aus Depot B kam. Aber es hilft ja nichts, die Geschenke müssen in ihre eigentlichen Depots gebracht werden. Der Weihnachtsmann beruft eine außerordentliche Versammlung mit allen weihnachtlichen Helfern ein und erklärt das Problem: „Ich habe im ersten Bild skizziert, zwischen welchen Depots Geschenke ausgetauscht werden müssen, und zwar sind es genau die Depots, die in dem Bild direkt miteinander verbunden sind. Zwischen A und B, A und C, B und D und zwischen C und D müssen also Geschenke ausgetauscht werden.“

„Um die Geschenke noch schnell vor Weihnachten in die richtigen Depots zu bringen, müssen wir wohl die Dienste der Turboschlittenfirma Schneeflocke in Anspruch nehmen. Sie haben sieben verschiedene Turboschlittenlinien, die verschiedene Stationen anfahren. Ich habe das Turboschlittenliniennetz im zweiten Bild skizziert. Wichtig sind für uns die rechteckig markierten Stationen. Da stehen unsere vier Geschenkedepots A, B, C und D.“



„Die Linien verkehren jeweils in Hin- und Rückrichtung. Außerdem ist die Kapazität jeder Linie groß genug, alle Geschenke zu transportieren. Wir können jede einzelne der sieben Linien mieten. Allerdings kostet jede Linie, die wir mieten, extra. Es ist vielleicht auch nötig, die Geschenke unterwegs von einer Linie auf eine andere umzuladen, wenn unser Budget nicht für eine umladefreie Verbindung ausreicht. Leider habe ich bei der Firma Schneeflocke bisher nur den Rätselkönig Andi erwischt. Er hat mir natürlich nicht die Kosten (in Euro) direkt verraten, sondern als Rätsel aufgegeben, welches ich auf diese dritte Tafel geschrieben habe.“

- Die Kosten der Linie 3 sind doppelt so groß wie die von Linie 5.
- Die Kosten der Linie 1 sind doppelt so groß wie die von Linie 7.
- Die Kosten der Linie 4 sind um 5 größer als die von Linie 3 und um 5 kleiner als die von Linie 1.
- Die Kosten von Linie 7 sind $\frac{2}{3}$ so groß wie die von Linie 3.

„Die Kosten von Linie 2 und 6 wollte mir Andi nicht verraten“, seufzt der Weihnachtsmann, „Er meinte, ich solle mir überlegen, wie viel ich bereit wäre zu zahlen. Wenn ich ihm meine Antwort stichhaltig begründen kann, dann bekommen wir 50% Rabatt auf alles.“
Sofort bricht ein allgemeines Gemurmel aus. Viele sind empört, dass so kurz vor Weihnachten der Rätselkönig Andi sein Spiel mit ihnen treibt. Dennoch beginnen viele über mögliche Verbindungen mit den Turboschlittenlinien zu diskutieren. Der Weihnachtsmann ist erstaunt, wie viele mehr oder weniger kluge Aussagen zusammen kommen. Er notiert sich einige Punkte, von denen er sicher ist, dass sie bei der Auswahl der Linien von Nutzen sein können bzw. helfen, den Rabatt zu erhalten. Auf eine Aussage sollte sich der Weihnachtsmann aber lieber nicht verlassen, wenn er bei seiner Entscheidung zur Linienwahl Kosten und/oder Bequemlichkeit berücksichtigen will. Welche?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die pragmatische Weihnachtswichtelin Linda meint: „Wenn wir Linie 4 nicht nehmen, müssen wir Linie 6 wählen.“
2. Das schlaue Rentier Karla sagt: „Es kann keine Lösung mit nur zwei Linien geben.“
3. Der träge Weihnachtself Olaf brummelt: „Keine der Linien ist so wichtig, dass wir sie unbedingt wählen müssen, um alle Geschenke transportieren zu können.“
4. Die großäugige Weihnachtswichtelin Babette meint: „Ich glaube, Linie 1 ist nie in einer kostenminimalen Lösung, egal wie die Kosten von Linie 2 und Linie 6 sind.“
5. Benno, der Kopfrechenkönig unter den Rentieren, sagt: „Eine kostenminimale Lösung ohne Linien 2 und 6 kostet 80 Euro.“
6. Das immermüde Rentier Kalle murmelt: „Es gibt eine Lösung mit drei Linien, so dass jedes Depot von genau einer Linie angefahren wird.“
7. Die selbstbewusste Weihnachtselfin Gerda sagt: „Falls die Kosten der Linie 2 kleiner gleich 35 sind, gibt es eine kostenminimale Lösung, die Linie 2 enthält.“
8. Der extravagante Weihnachtswichtel Bob kontert: „Falls die Kosten der Linie 6 kleiner gleich 30 sind, gibt es eine kostenminimale Lösung, die Linie 6 enthält.“
9. Das aufgeweckte Rentier Charlotte meint: „Wenn die Linien 2 und 6 jeweils halb so teuer sind wie Linie 7, können wir für weniger als 100 Euro alle Geschenke ohne Umladen transportieren. Und da ist noch nicht mal der Rabatt eingerechnet.“
10. Der faule Weihnachtself Paul meint: „Zum Glück müssen wir keine Geschenke zwischen Depot B und C transportieren. Das wäre nie ohne Umladen gegangen.“

Projektbezug: Im MATHEON Projekt „Angebotsplanung im öffentlichen Nahverkehr“geht es darum, mathematische Optimierungsmethoden zu entwickeln und zu verbessern, die die Planung des Angebots eines Nahverkehrsunternehmens unterstützen. Zum Angebot gehören z. B. die Planung des Liniennetzes, des Fahrplans und der Fahrpreise. Wie in der Aufgabe müssen in der Linienplanung Pfade im Netz (Linien) gefunden werden, so dass alle Passagiere von ihren Start- zu ihren Zielorten gelangen können. Dabei müssen außerdem noch Kapazitäten, Fahrzeiten und Kosten berücksichtigt werden.

16.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7
Zur Berechnung der Linienkosten ergibt sich folgendes Gleichungssystem(c_ℓ Kosten von Linie ℓ):

$$\begin{aligned} c_3 &= 2 \cdot c_5 \\ c_1 &= 2 \cdot c_7 \\ c_4 &= c_3 + 5 \\ c_4 &= c_1 - 5 \\ c_7 &= \tfrac{2}{3} c_3. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1 &= 40 \\ c_3 &= 30 \\ c_4 &= 35 \\ c_5 &= 15 \\ c_7 &= 20. \end{aligned}$$

Es ist relativ leicht zu sehen, dass die Depots nicht mit zwei oder weniger Linien miteinander verbunden werden können. Daher sind mindestens drei Linien notwendig. Wenn es nur um Kosten geht, wird man nicht mehr als drei Linien auswählen. Seien x und y die Kosten der Linien 2 und 6. Man kann sich nun alle Lösungen mit drei Linien anschauen und folgendes feststellen:

- Eine kostenminimale Lösung ohne die Linien 2 und 6 ist die Wahl der Linien 3, 4, 5 mit Kosten 80 (Antwort 5 ist eine richtig Aussage).
- Eine kostenminimale Lösung mit Linie 2 (aber ohne 6) ist die Wahl von den Linien 2, 4, 5 mit Kosten $50 + x$.
- Eine kostenminimale Lösung mit Linie 6 (aber ohne 2) ist die Wahl von den Linien 3, 6, 7 mit Kosten $50 + y$
- Eine kostenminimale Lösung mit Linie 2 und Linie 6 ist die Wahl der Linien 2, 6, 7 mit Kosten $20 + x + y$.

Es ergibt sich für die 10 Aussagen:

1. Aussage richtig: In Depot D fahren nur die Linien 4 und 6. Um Depot D anzufahren, muss wenigstens eine der beiden Linien gewählt werden.

2. Aussage richtig: Alle Linien fahren höchstens zwei Depots an. Alle Linien die zwei Depots anfahren, haben entweder ein Depot gemeinsam oder treffen sich nicht. Daher braucht man wenigstens 3 Linien.

3. Aussage richtig: In jedem Schnitt im Liniennetzgraph, der zwei Depots voneinander trennt, gibt es mindestens zwei Linien, d. h. es gibt immer mindestens zwei verschiedene Möglichkeiten, zwei Depots miteinander zu verbinden.

4. Aussage richtig: Ergibt sich aus den obigen Feststellungen.

5. Aussage richtig: Ist die erste Feststellung.

6. Aussage richtig: Siehe z. B. Linien 3, 4 und 5.

7. Aussage falsch: Wenn sowohl Linie 2 als auch Linie 6 über 30 € kosten, ist die Wahl der Linien 3, 4, 5 am kostengünstigsten.

8. Aussage richtig: Kostet Linie 6 weniger oder gleich 30 € und Linie 2 mehr als 30 € ist die Wahl der Linien 3, 6, 7 am kostengünstigsten. Falls auch die Kosten von Linie 2 kleiner gleich 30 sind, ist die Wahl der Linien 2, 6, 7 am besten. In jedem Fall ist in einer kostenminimalen Lösung die Linie 6 enthalten.

9. Aussage richtig: Eine Lösung ohne Umladen ist 1, 2, 4, 6 mit Kosten 40+10+35+10=95.

10. Aussage richtig: Es gibt keine Linie, die Depot B und C direkt miteinander verbindet.

17 Hüttenlauf

Autor: Andreas Zeiser

17.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann und dessen Rentier Rudolf wollen zu ihrer 10 km entfernten Hütte laufen, die auf einem Berg liegt. Der Weihnachtsmann läuft konstant mit 5 km/h. Rudolf ist jedoch schneller als der Weihnachtsmann und läuft mit 10 km/h den Berg bis zur Hütte hinauf. Dort kehrt er sofort um und läuft mit 15 km/h wieder zurück zum Weihnachtsmann. Dort angekommen kehrt er wieder um, usw. Welche Strecke ist Rudolf gelaufen, wenn die beiden an der Hütte ankommen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die beiden kommen nie an der Hütte an.
2. 10 km.
3. 15 km.
4. 20 km.
5. 22 km.
6. 25 km.
7. 27 km.
8. 30 km.
9. 40 km.
10. Rudolf läuft eine unendlich große Strecke.

17.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5
Nach einer Stunde ist Rudolf an der Hütte angekommen, der Weihnachtsmann hat dabei jedoch nur 5 km zurückgelegt. Die Zeit t, die Rudolf nun bis zum Weihnachstmann braucht, ist durch

$$10\,\mathrm{km} - 15\,\mathrm{km/h} \cdot t = 5\,\mathrm{km} + 5\,\mathrm{km/h} \cdot t$$

gegeben, also $t = 1/4\,\mathrm{h}$. Damit hat Rudolf eine Durchschnittsgeschwindigkeit von

$$v = \frac{10\,\mathrm{km/h} \cdot 1\,\mathrm{h} + 15\,\mathrm{km/h} \cdot 1/4\,\mathrm{h}}{1\,\mathrm{h} + 1/4\,\mathrm{h}} = 11\,\mathrm{km/h}.$$

Diese Geschwindigkeit ist unabhängig von der Strecke. Das heißt Rudolf läuft diese Geschwindigkeit durchschnittlich über die zwei Stunden die der Weihnachstmann unterwegs ist. Daher legt Rudolf eine Strecke von 22 km zurück.

aus H. Vogel, "Gerthsen Physik", 19. Auflage, Springer (1997), Aufgabe 1.2.2
Morgens um 6 Uhr bricht Jäger Bumke zu seiner 10 km entfernten Jagdhütte auf. Sein Hund läuft doppelt so schnell, kehrt an der Jagdhütte um, läuft wieder bis zu seinem Herrn zurück und pendelt so ständig zwischen Jäger und Hütte hin und her. Welche Strecke ist der Hund gelaufen, wenn der Jäger um 8 Uhr an der Hütte anlangt?
Da der Hund zwei Stunden ständig doppelt so schnell läuft wie sein Herr, hat er doppelt so viel, nämlich 20 km zurückgelegt. Man sagt, dass Mathematiker sich mit dieser Aufgabe im Allgemeinen schwerer tun als Physiker, denn sie erkennen sofort, dass die Teilwege des Hundes eine geometrische Reihe bilden, und lassen sich verleiten, diese aufzusummieren, was länger dauert als die obige Betrachtung. Ein Psychologe testete alle Wissenschaftler, deren er habhaft werden konnte, und fand, dass (gute) Mathematiker im Mittel 35 sec brauchen, (gute) Physiker 14 sec. Johann von Neumann brauchte 8 sec, worauf der Psychologe sein Erstaunen ausdrückte, dass er als Mathematiker es so schnell schaffe, obwohl er doch eigentlich die Reihen summieren müsste. "Habe ich ja", sage Neumann.

18 12 Tage

Autor: Falk Ebert

18.1 Aufgabe

The twelve days of Christmas ist ein englisches Weihnachtslied.

Es gibt auch eine deutsche Version mit etwas verändertem Text von Reinhard Mey:

> Am ersten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am zweiten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am dritten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am vierten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir vier Kolibris, drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am fünften Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir fünf gold'ne Ringe, vier Kolibris, drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am sechsten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir sechs Turteltäubchen, fünf gold'ne Ringe, vier Kolibris, drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am siebten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir sieben Galtiger[1], sechs Turteltäubchen, fünf gold'ne Ringe, vier Kolibris, drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.

[1] Galtiger = Bengalischer Tiger oder Königstiger

> Am achten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir acht rosa Ferkel, sieben Galtiger, sechs Turteltäubchen, fünf gold'ne Ringe, vier Kolibris, drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am neunten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir neun bunte Hunde, acht rosa Ferkel, sieben Galtiger, sechs Turteltäubchen, fünf gold'ne Ringe, vier Kolibris, drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am zehnten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir zehn verrückte Hühner, neun bunte Hunde, acht rosa Ferkel, sieben Galtiger, sechs Turteltäubchen, fünf gold'ne Ringe, vier Kolibris, drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am elften Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir elf aufgebund'ne Bären, zehn verrückte Hühner, neun bunte Hunde, acht rosa Ferkel, sieben Galtiger, sechs Turteltäubchen, fünf gold'ne Ringe, vier Kolibris, drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.
>
> Am zwölften Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir zwölf hypnotisierte Kaninchen, elf aufgebund'ne Bären, zehn verrückte Hühner, neun bunte Hunde, acht rosa Ferkel, sieben Galtiger, sechs Turteltäubchen, fünf gold'ne Ringe, vier Kolibris, drei Kängurus, zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.

Es hat sich herausgestellt, dass dieses Lied vor elf Jahren als Werbeslogan einer Zoohandlung mit dem Wortlaut:

Am Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir ein höchst ungewöhnliches Tier.

entstand. Im darauffolgenden Jahr wurde zur weiteren Absatzsteigerung der Text erweitert auf:

Am ersten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir ein höchst ungewöhnliches Tier.

Am zweiten Weihnachtstage, da schenkt die Liebste mir zwei Nachtigallen und ein höchst ungewöhnliches Tier.

Nach diesem Prinzip ging es dann jedes Jahr weiter. Irgendwann dazwischen sind die Juweliere auf den erfolgreichen Zug der Weihnachtsliederwerbung aufgesprungen und haben die fünf goldenen Ringe hinzugefügt. Und letztendlich wird in diesem Jahr erstmalig der Handel mit hypnotisierten Kaninchen propagiert.
Höchst ungewöhnliche Tiere sind so ungewöhnlich, dass sie mit keinem der anderen genannten Tiere übereinstimmen. Auch wird davon ausgegangen, dass alle Tiere gut gehalten werden, so dass bisher keines davon gestorben ist. Ja wir wissen, dass das bei Kolibris schwierig ist.
Es soll an dieser Stelle vermerkt sein, dass wir in keinster Weise den Handel mit bedrohten Tierarten unterstützen wollen. Und die zwölf Weihnachtstage sind auch keine extra Ferien sondern die zwölf Tage bis zum eigentlichen Weihnachtsfest, also vom 13. bis zum 24. Dezember.
Wenn jemand also seit 1997 von seiner Liebsten in jedem Jahr und an jedem besungenen Tag die im Lied vorgegebenen Gaben erhalten hat und auch in diesem Jahr wieder erhält, dann sollte er einen kleinen Zoo zu Hause haben. Welche der 10 Antworten ist richtig?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die meisten seiner geschenkten Tiere sind ungewöhnliche Tiere.
2. Er bekommt weniger als 120 Nachtigallen geschenkt.
3. Die Anzahl der Kängurus ist durch 17 teilbar.
4. Jedem Kolibri kann genau ein Goldring zugeordnet werden.
5. Jedem Turteltäubchen kann genau ein Goldring zugeordnet werden.
6. Er bekommt weniger als 120 Galtiger geschenkt.
7. Er kann mindestens 70 Ferkelpaare zusammenstellen.
8. Die Anzahl der Bären und Hühner zusammen, ist geringer als die Anzahl der bunten Hunde.
9. Zählt er die Beine seiner Hühner und Kaninchen, erhält er mehr als 170.
10. Er hat 360 Goldringe geschenkt bekommen.

18.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4

Eigentlich nur geschicktes Zählen.
Ergebnis: Nach 2008 hat man 180 Ringe und 180 Kolibris.

Jahr	ungew. Tier	Nachtigall	Känguruh	Kolibri	Ringe	Täubchen	Galtiger	Ferkel	bunte Hunde	Hühner	Bären	Kaninchen
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1997	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1998	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1999	3	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	4	6	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0
2001	5	8	9	8	5	0	0	0	0	0	0	0
2002	6	10	12	12	10	6	0	0	0	0	0	0
2003	7	12	15	16	15	12	7	0	0	0	0	0
2004	8	14	18	20	20	18	14	8	0	0	0	0
2005	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0	0	0
2006	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10	0	0
2007	11	20	27	32	35	36	35	32	27	20	11	0
2008	12	22	30	36	40	42	42	40	36	30	22	12
Summen:	78	132	165	180	180	168	147	120	90	60	33	12

19 Roboter und Zuckerstangen

Autor: Heike Siebert
Projekt: A8

19.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat viel zu tun, und deswegen hat er sich für einfache Aufgaben robotische Hilfe beschafft. Die Roboter sollen Weihnachtsstrümpfe mit Zuckerstangen befüllen. Die Roboter stehen dazu in einer Schlange hintereinander. Ganz vorne hängt ein Strumpf, der zu befüllen ist. Alle Roboter schauen zu dem Strumpf, d. h. in die gleiche Richtung. Das Befüllen selbst funktioniert wie folgt:

- Jede Minute führen die Roboter folgende Aktion gleichzeitig aus. Wenn sie eine Zuckerstange in der Hand haben, geben sie sie an den Roboter vor ihnen in der Schlange weiter, der sie natürlich auch annimmt, oder, wenn sie ein Roboter vor dem Strumpf sind, stecken sie die Zuckerstange in den Strumpf.
- Jeder Roboter kann sowohl gleichzeitig eine Zuckerstange vom Hintermann annehmen als auch seine, die er in der Hand hält (also in der vorherigen Minute erhalten hat), weitergeben oder in den Strumpf stecken.

Von dieser Sorte sogenannter Transportroboter hat der Weihnachtsmann 14 Stück erworben. Zusätzlich hat sich der Weihnachtsmann noch zwei Multifunktionsroboter, Robbi und Tobbi, geleistet. Wenn diese beiden in Betrieb sind, produzieren sie jede Minute eine Zuckerstange und geben die eine Minute vorher produzierte Zuckerstange an den vor ihnen stehenden Roboter weiter.

So stehen die Roboter in zwei geordneten, jeweils von Robbi und Tobbi ausgehenden Reihen und befüllen einen Strumpf, als plötzlich ein wildgewordenes Rentier vorbei prescht und alle Roboter durcheinander wirbelt. Sie rappeln sich wieder auf, laufen verwirrt durcheinander und kommen schließlich in einer neuen Anordnung zur Ruhe.

Robbi, Tobbi und 8 weitere Roboter stehen in einem Kreis, in dem alle Roboter in Uhrzeigerrichtungssinn blicken. Unter den Robotern, die in dem Kreisbogen stehen, der von Robbi zu Tobbi führt, gibt es drei Roboter, die nicht nur einen Roboter vor sich zu stehen haben, sondern auch einen in Reichweite neben sich. D. h. hier zweigen insgesamt 3 Schlangen vom Kreis ab. Jede dieser 3 Schlangen endet vor einem leeren Strumpf.
Robbi und Tobbi haben bei dem Unfall ihre Produktion gestoppt, und fast alle Roboter haben ihre Zuckerstangen verloren, nur Tobbi und drei Transportroboter haben noch eine in der Hand. Diese drei Transportroboter stehen alle in dem Teil des Kreisbogens, der von Tobbi zu Robbi führt.

Wie sich die verbleibenden Roboter, die nicht im Kreis stehen, auf die drei abzweigenden Schlangen aufteilen, ist unklar. Man weiß nur, dass alle wieder mitarbeiten.

Abbildung 1 gibt einen Überblick über die prinzipielle neue Anordnung. wobei R für Robbi und T für Tobbi stehen.

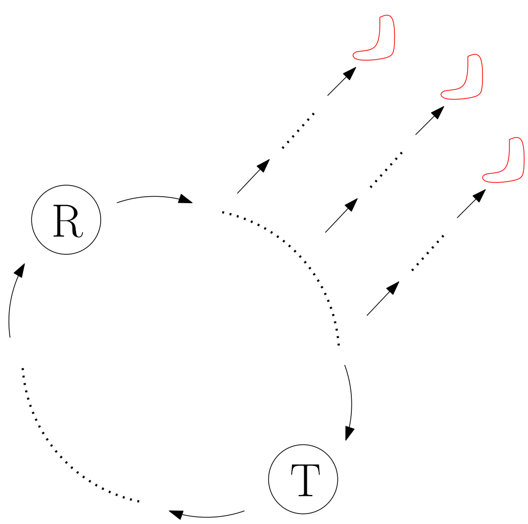


Abbildung 9: Schematische Darstellung des neuen Aufbaus

In dieser neuen Situation beginnen die Roboter wieder ihre Arbeit, d. h. nach jeder Minute sollten sie die oben beschriebenen Aktionen ausführen. Aber die neue Anordnung verwirrt einige Roboter und führt bei manchen zu einer Funktionsänderung. Jeder Roboter, der einen Roboter vor sich und einen

neben sich zu stehen hat, ändert seine jede Minute stattfindende Weiterreichaktion, so er denn eine Zuckerstange zum Weiterreichen hat, folgendermaßen: Er bricht die Zuckerstange durch und reicht jedem der beiden eine Hälfte. Ein Teil einer Zuckerstange wird von allen Robotern wie eine ganze Zuckerstange behandelt.
Robbi und Tobbi sind begeistert, wenn ihnen eine Zuckerstange gereicht wird. Sie essen sie mit einem Biss auf und vergessen darüber in derselben Minute, in denen ihnen die Stange gereicht wird, eine neue Stange zu produzieren, reichen aber, falls sie eine Minute vorher eine produziert haben, diese trotzdem brav weiter. In der Minute nach jedem Schmaus produzieren sie wieder, es sei denn, sie bekommen erneut einen Stange gereicht. In der ersten Minute reicht Tobbi die Zuckerstange, die er nach dem Sturz noch in der Hand hat, weiter und produziert gleichzeitig eine neue.
32 Minuten nachdem die Roboter ihre Arbeit wieder aufgenommen haben, sieht der Weihnachtsmann nach, ob die Strümpfe fertig befüllt sind. In jedem Strumpf sollen mindestens 3 Zuckerteile sein, wobei manche Kinder Pech haben werden, da ein Zuckerteil sowohl eine ganze als auch ein Stück einer Zuckerstange sein kann. Wie viele der 3 Strümpfe können fertig befüllt sein?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es sind alle Strümpfe fertig befüllt, egal wie die Roboter stehen.
2. Es sind genau zwei oder genau drei Strümpfe fertig befüllt.
3. Nur ein Strumpf ist fertig befüllt, egal wie die Roboter stehen.
4. Genau ein Strumpf ist fertig befüllt oder genau drei Strümpfe sind fertig befüllt.
5. Es sind alle oder keiner der Strümpfe fertig befüllt.
6. Genau ein Strumpf oder genau zwei oder genau drei Strümpfe sind fertig befüllt.
7. Es ist keiner oder genau einer der Strümpfe fertig befüllt.
8. Alle oder genau zwei oder keiner der Strümpfe sind fertig befüllt.

9. Es sind genau zwei Strümpfe fertig befüllt, egal wie die Roboter stehen.
10. Es ist keiner der Strümpfe fertig befüllt, egal wie die Roboter stehen.

Projektbezug:
In der Systembiologie interessiert man sich dafür, wie verschiedene Komponenten biologischer Systeme, z. B. Proteine, Gene, Stoffwechselprodukte, einander beeinflussen und somit die Funktion des Systems gewährleisten. Komponenten und Interaktionen zwischen den Komponenten können oft als gerichtete Graphen dargestellt werden wie auch die Anordnung der Roboter in der Aufgabe. Mittels einer Funktion kann man dann beschreiben, nach welchen Regeln sich die Komponenten gegenseitig beeinflussen, z. B. welche Substanzen vorliegen müssen, damit eine bestimmte Reaktion ablaufen und eine neue Substanz erzeugt werden kann. Durch wiederholtes Anwenden der Funktion können wir simulieren, wie das System sich über einen gewissen Zeitraum hinweg verhalten wird. Oft ist es von Interesse, ob das System bestimmte Aufgaben erfüllen kann, etwa ob ein bestimmtes Gen expressioniert wird. Simulation und Analyse des mathematischen Modells, also des Graphen und der Funktion, geben Hinweise darauf, ob die Vorstellung, die man vom Aufbau des Systems hat, mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmen. Oft liefern sie neue Ansatzpunkte für die Gestaltung von Experimenten im Labor, die zu einem besseren Verständnis des Systems führen können.

19.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8

Zunächst besteht die Schwierigkeit darin, dass wir nicht genau wissen, wie sich die Roboter aufgestellt haben. Wir wissen, dass zehn Roboter einen Kreis bilden und die anderen 6 sich auf drei Schlangen aufteilen. Da die drei Schlangen von Transportrobotern in der Schlange von Robbi zu Tobbi abzweigen, stehen in dieser also mindestens drei Transportroboter. Weiter haben drei Transportroboter Zuckerstangen in der Hand und stehen in der Schlange zwischen Tobbi und Robbi. Sechs Transportroboter teilen sich auf drei Schlangen auf, also haben wir die möglichen Aufteilungen 1, 1, 4 oder 1, 2, 3 oder 2, 2, 2 auf die drei Schlangen.

Die Zuckerstangen oder Zuckerstangenstücke, die die Strümpfe befüllen, werden alle von Robbi produziert, da die von Tobbi produzierten schließlich an Robbi weitergegeben werden und der sie aufisst. Wir müssen also herausfinden, ob und mit welcher Frequenz Robbi Zuckerstangen produziert und dann überlegen, wie lange es dauert bis die produzierten Stangen oder Stücke davon die Strümpfe erreichen.

Wir nummerieren die Roboter, die im Kreis stehen von 1 bis 10 durch, wobei Tobbi die 1 bekommt. Nun basteln wir eine Funktion x_i für jeden der Roboter, so dass $x_i(t) = 0$ gilt, falls Roboter i in der t-ten Minute keine Stange weiterreicht, und $x_i(t) = 1$, falls Roboter i in der t-ten Minute eine Stange weiterreicht. Für jeden Transportroboter j gilt $x_j(t+1) = x_{j-1}(t)$ für $t = 2, 3, \dots$, und der Wert $x_j(1)$ hängt davon ab, ob Roboter j in der Anfangsaufstellung eine Stange in der Hand hat oder nicht. Für Tobbi gilt $x_1(t+1) = 1 - x_{10}(t)$ für $t = 2, 3, \dots$ und $x_1(1) = 1$, und für Robbi, der eine Nummer $4 < r < 8$ hat, gilt $x_r(t+1) = 1 - x_{r-1}(t)$ für $t > 1$ und $x_r(1) = 0$, da beide nur produzieren, wenn ihr Vorgänger ihnen keine Zuckerstange reicht, und sie immer die eine Minute vorher produzierte Stange weiterreichen.

Betrachten wir zuerst den Fall, dass zwischen Tobbi und Robbi nur die drei Transportroboter mit der Zuckerstange in der Hand stehen, d.h. Robbi hat die Nummer 5 und wir wissen $(x_1(1), \dots, x_{10}(1)) = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Anwendung der oben bestimmten Funktionsregeln ergibt $(x_1(2), \dots, x_{10}(2)) = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, d.h. die Situation in Bezug auf das Stangen Weitergeben ändert sich nicht. Tatsächlich ändert sich der Vektor und insbesondere der Wert $x_5(t) = 0$, der beschreibt, ob Robbi eine Stange weitergeben kann, nie. Unser Anfangswert ist ein Fixpunkt. Es bleiben also alle drei

Strümpfe leer, egal wie lange der Weihnachtsmann wartet. Damit können nur die Lösungsvorschläge 5, 7, 8 und 10 richtig sein.

Als nächstes überlegen wir, welche Anordnung zu einem Befüllen der Strümpfe führt und für welche unter diesen Anordnungen das Befüllen am langsamsten vonstatten geht. Wir nehmen nun an, dass mindestens einer der Roboter in der Schlange von Tobbi zu Robbi anfangs keine Stange hat. Wir überlegen uns zunächst, dass Robbi alle zehn Minuten so viele Zuckerstangen produziert wie Transportroboter ohne Zuckerstange in der Schlange von Tobbi zu Robbi in der Anfangsaufstellung stehen. Der Ablauf in 10 Minuten sieht wie folgt aus:

$x_r(1) = 0$, $x_r(2) = 1 - x_{r-1}(1)$, $x_r(3) = 1 - x_{r-2}(1)$,..., $x_r(k+1) = 1 - x_2(1)$, $x_r(k+2) = 1 - x_1(1)$,

wobei k die Anzahl der Transportroboter ist, die in der Schlange von Tobbi zu Robbi stehen. Da $x_1(t+1) = 1 - x_{10}(t)$, erhalten wir weiter:

$x_r(k+3) = 1 - (1 - x_{10}(1)) = x_{10}(1)$, $x_r(k+4) = 1 - (1 - x_9(1)) = x_9(1)$,...,$x_r(k+2+l) = 1 - (1 - x_{r+1}(1)) = x_{r+1}(1)$,

wobei l die Anzahl der Transportroboter in der Schlange von Robbi zu Tobbi ist, also $k + 2 + l = 10$. Wir wissen, dass $x_i(1) = 0$ für $r < i \leq 10$. Nur die Roboter i mit $1 < i < r$ und $x_i(1) = 0$ führen dazu, dass Robbi in den ersten 10 Minuten eine Stange weitergibt. Wenn wir jetzt noch einen Schritt weitergehen, sehen wir, dass $x_r(11) = x_r(1)$. Auf die gleiche Art können wir zeigen, dass $x_i(1) = x_i(11)$ für alle Roboter im Kreis, und noch genauer $x_i(1) = x_i(1 + m \cdot 10)$ für $m = 1, 2, \ldots$. Also, produziert Robbi alle zehn Minuten so viele Zuckerstangen wie Transportroboter ohne Zuckerstange in der Schlange von Tobbi zu Robbi in der Anfangsaufstellung stehen.

Jetzt können wir noch ausrechnen, wie lange es im schlimmsten Fall dauert, einen Strumpf zu befüllen. Die Zuckerstangenproduktion von Robbi geht am langsamsten, wenn nur ein Roboter ohne Zuckerstange in der Schlange von Tobbi zu ihm steht. Also stehen insgesamt vier Roboter in dieser Schlange. Je weiter der Roboter ohne Stange von Robbi entfernt steht, desto länger dauert es, bis Robbi mit der Produktion beginnt. Deshalb nehmen wir an, er steht direkt vor Tobbi, d.h. er hat die Nummer 2. Wenn Robbi eine Zuckerstange produziert, muss diese, oder Stücke davon, ja noch weiter gereicht werden. Je mehr Roboter also zwischen Robbi und einem zu befüllenden Strumpf stehen, desto länger dauert es bis dieser gefüllt ist. Da vier Roboter in der Schlange

von Tobbi zu Robbi stehen, stehen auch vier in der Schlange von Robbi zu Tobbi. Um den längsten möglichen Weg von Robbi zu einem Strumpf zu bekommen, muss also die längste mögliche Schlange, wie oben gesehen hat diese Länge 4, von dem letzten Roboter in der Schlange von Robbi zu Tobbi, also dem mit Nummer 10 abzweigen. Wir nummerieren diese Roboter 11, 12, 13 und 14. Insgesamt stehen dann 8 Roboter zwischen Robbi und dem Strumpf am Ende dieser Schlange. In diesem Szenario produziert Robbi in der vierten Minute eine Stange, da der Roboter hinter ihm in der vierten Minute keine Stange weiterreicht. Die Stange reicht Robbi in der fünften Minute weiter, d.h. $x_6(5) = 1$. Die Stange oder Teile davon werden jede Minute weitergereicht, d.h. $x_{10}(9) = 1$ und schließlich $x_{14}(13) = 1$. Das bedeutet, dass der Roboter mit Nummer 14 in der 13. Minute das erste Stangenstück in den Strumpf steckt. Nun haben wir schon gezeigt, dass sich jede Situation alle 10 Minuten wiederholt. Also wird das zweite Stangenstück in der 23. und das dritte in der 33. Minute in den Sack gesteckt. Der Weihnachtsmann unterbricht aber nach 32 Minuten, also sind erst zwei Stücke im Sack. Da alle anderen Wege von Robbi zu den verbleibenden zwei Strümpfen kürzer sind, sind diese fertig befüllt. In dieser Situation haben wir also genau zwei fertige Strümpfe.
Für jede andere Möglichkeit einer Anfangsaufstellung der Roboter – wir nehmen immer noch an, dass mindestens ein Roboter ohne Stange in der Schlange von Tobbi zu Robbi steht – gilt, dass es weniger als 13 Minuten dauert, bis jeder Strumpf ein Stangenstück enthält. Da sich jede Situation alle zehn Minuten wiederholt, dauert es also immer weniger als 33 Minuten bis jeder Strumpf fertig gefüllt ist. Damit ist Antwort 8 richtig.

20 Geschenke

Autoren: Klaus Mohnke (HU) und Elke Warmuth (Z1.2)

20.1 Aufgabe

In Finnland, wo der Weihnachtsmann zu Hause ist, sind ja bekanntlich die Kinder gut in Mathematik. Das trifft natürlich auch auf die Helfer des Weihnachtsmannes zu. Sie wissen, dass in Deutschland dieses Jahr das Jahr der Mathematik ist. Deshalb haben sie beschlossen, die Geschenke für die Kinder in Deutschland durchzunummerieren, aber natürlich nicht so langweilig mit 1, 2, 3 usw.
Jedes Kind bekommt sein Geschenk erst, wenn es die entsprechende Nummer berechnet hat. In der Mathematik-Spezialklasse der Weihnachtswichtel wurde die Gauß-Klammer $[x]$ behandelt. Diese ordnet der reellen Zahl x die größte ganze Zahl zu, die nicht größer als x ist.
Auch irrationale Zahlen kennen die Weihnachtswichtel. Sie haben sich eine positive irrationale Zahl c genommen und dann die Geschenke für die Mädchen mit den Zahlen $[kc] + k$ und die Geschenke für die Jungen mit den Zahlen $[\frac{k}{c}] + k$ versehen. Dabei haben sie k der Reihe nach aus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ genommen.
Der Weihnachtsmann ist skeptisch, ob die Wichtel dabei noch alles im Griff haben und nicht womöglich manche Zahlen doppelt und andere gar nicht vorkommen. Er bildet die Mengen

$$M_c = \{[kc] + k | k \in \mathbb{N}^+\}$$

und

$$J_c = \{[k/c] + k | k \in \mathbb{N}^+\}.$$

Nun fragt er sich, welche der folgenden Aussagen richtig ist.

Antwortmöglichkeiten:

1. Für verschiedene c sind deren Durchschnitte $M_c \cap J_c$ und deren Vereinigungen $M_c \cup J_c$ jeweils verschieden.

2. Es gibt c, für die die Vereinigung $M_c \cup J_c$ nicht aus ganz $\mathbb{N}^+$ besteht.

3. Für verschiedene c sind deren Durchschnitte $M_c \cap J_c$ verschieden, während deren Vereinigungen $M_c \cup J_c$ gleich sind.
4. Der Durchschnitt $M_c \cap J_c$ ist für beliebige c nicht leer.
5. Für verschiedene c sind deren Durchschnitte $M_c \cap J_c$ gleich, während deren Vereinigungen $M_c \cup J_c$ verschieden sind.
6. Für verschiedene c sind deren Durchschnitte $M_c \cap J_c$ immer leer, während die Vereinigungen $M_c \cup J_c$ verschieden sind.
7. Es gibt c, für die die Vereinigungen $M_c \cup J_c$ ohne die Elemente aus dem Durchschnitt $M_c \cap J_c$ leer sind.
8. Für verschiedene c sind deren Durchschnitte $M_c \cap J_c$ verschieden, während die Vereinigungen $M_c \cup J_c$ immer ganz $\mathbb{N}$ ergeben.
9. Für verschiedene c sind deren Durchschnitte $M_c \cap J_c$ leer, während die Vereinigungen $M_c \cup J_c$ immer ganz $\mathbb{N}$ ergeben.
10. Für verschiedene c sind deren Vereinigungen $M_c \cup J_c$ ohne die Elemente aus dem Durchschnitt $M_c \cap J_c$ immer verschieden.

Projektbezug: Die MATHEON-Projekte "Current mathematics at schoolsünd "Teachers at universitiesßchlagen eine Brücke zwischen Schule und Universität. Das Ziel ist einerseits, mehr modernere Mathematik in der Schule zu verankern und andererseits die Lehreraus- und -weiterbildung zu verbessern. Die Projekte arbeiten innerhalb des "Berliner Netzwerks mathematisch-naturwissenschaftlich profilierter Schulenßusammen.

20.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9
Wir betrachten die Folgen

$$a_k = [kc] + k,\ k = 1, 2, \ldots \text{ und } b_k = \left[\frac{k}{c}\right] + k,\ k = 1, 2, \ldots$$

Die Gauß-Klammer hat folgende Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen k und alle reellen Zahlen x gilt

$$[x] + k = [x + k].$$

Daraus folgt zunächst, dass die Folgen (a_k) und (b_k) streng monoton wachsend sind.

Daraus wiederum folgt, dass für jedes c in der Folge (a_k) und in der Folge (b_k) eine beliebige natürliche Zahl nur einmal vorkommen kann.

Die Gleichung

$$[kx] + k = \left[\frac{l}{x}\right] + l,\ l \in \mathbb{N}$$

wird von der rationalen Zahl $x = \frac{l}{k}$ gelöst. Wegen der unterschiedlich starken Monotonie der Folgen a_k und b_k müssen alle anderen Lösungen „benachbart" zu $\frac{l}{k}$ liegen. Jetzt wird aber die rechte Seite der Gleichung, wenn man

$$x = \frac{l}{k} + \epsilon$$

betrachtet, für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ kleiner. Also kann es rechts von $\frac{l}{k}$ keine Lösungen geben. Andererseits wird bei

$$x = \frac{l}{k} - \epsilon$$

die linke Seite immer kleiner. Also gibt es auch links von $\frac{l}{k}$ keine Lösungen. Folglich ist das rationale $\frac{l}{k}$ die einzige Lösung. Da c irrational ist, ist für alle c der Durchschnitt $M_c \cap D_c$ gleich der leeren Menge.

Wir beweisen nun noch, dass $M_c \cup D_c = \mathbb{N}$ für jedes irrationale $c > 0$ gilt. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ sei k die kleinste natürliche Zahl mit $n \leq k(c+1)$. Wenn dann auch $k(c+1) < n+1$ gilt, dann ist $n = a_k$. Wenn $(k-1)(c+1) < n$ und $k(c+1) > n+1$ gilt, dann müssen wir auf die Folge (b_k) ausweichen. Aus $(k-1)(c+1) < n$ folgt $\frac{1}{c} > \frac{k-1}{n-k+1}$ und aus $k(c+1) > n+1$ folgt $\frac{1}{c} < \frac{k}{n-k+1}$. Daraus schlussfolgern wir

$$\frac{n}{n-k+1} < \frac{1}{c} + 1 < \frac{n+1}{n-k+1}$$

und weiter

$$n < (n-k+1)\left(\frac{1}{c}+1\right) < n+1.$$

Folglich ist $n = b_{n-k+1}$.

21 Südsee

Autor: Andreas Wiese und Sebastian Stiller
Projekt: B15

21.1 Aufgabe

Es ist der 27. Dezember, Weihnachten ist vorüber und die Weihnachtsmänner wollen mit dem Rentierschlitten in die Südsee fliegen. Doch die Sache hat ihre Tücken: In Anwesenheit der Rentiere verhalten sich die Weihnachtsmänner sehr zivilisiert, sobald die Rentiere jedoch nicht mehr da sind, brechen alte Streitigkeiten unter den Weihnachtsmänner, wieder auf.
Es fing wohl an, als Weihnachtsmann Niklas Wäschedienst hatte. Er wusch versehentlich die roten Mäntel von Wilfried, Reinhardt, Kasimir und Horst mit dem falschen Waschprogramm. Die Mäntel sind immer noch rosa. Keiner der vier rosa Weihnachtsmänner glaubt Niklas, dass es ohne böse Absicht geschehen war. Horst war so sehr außer sich, dass er blindwütig den Mantel von Friedolin grün einfärbte. Das fand Friedolin nicht lustig. Heinz hingegen glaubte, die Zeit der Einheitsfarbe Rot sei damit überwunden und lackierte die Wohnungstür des Apartments gelb, in dem Klaus, Nathan, Knut, Sepp, Konstantin und Niklas, allesamt entschiedene Gelbverächter, gemeinsam wohnten.
Konstantin ist darüber hinaus noch auf den Vormieter seines Zimmers, Heinrich, sauer, weil der die Wände beim Auszug weiß statt, wie üblich, leuchtend rot gestrichen hatte. Nach diesen Vorgängen entschloss sich Armin außerdienstlich immer mit einem Eimer roter Farbe unterwegs zu sein, zur Sicherheit falls einmal etwas plötzlich nicht mehr rot ist. Dass Armin dabei ständig und überall rote Farbe verschüttet, empfindet der Weihnachtsmannhausmeister Konstantin als Affront.
Abgesehen von der Farbfrage ist es friedlich, es sei denn, Arnulf ist mit dem Kochen dran. Durch seinen Salbei-Gurken-Plätzchenauflauf sind Konstantin, Berthold, Burkhardt, Calvin und Horst für ihn Feinde fürs Leben geworden. Und dann ist da noch die Sache mit den Aprilscherzen. Archibald hatte Konstantin und Berthold am 1. April erfolgreich weisgemacht, es sei bereits der 22. Dezember und die beiden hatten stundenlang hektisch Weihnachtsgeschenke verpackt, bis Archibalds Lachen nicht mehr zu überhören war.
Sepp hatte am selben Tag Heinrichs Schlittenführerschein durch ein Scho-

koladenimitat ersetzt - große, braune Flecken im roten Mantel. Überhaupt Schlitten! Erwin würde seit Jahren schon gerne einmal den ganz großen Rentierschlitten mit Klimaanlage und Navigationsgerät fahren. Allerdings haben Horst und Calvin es bisher immer geschafft, Erwin zuvorzukommen. Jetzt mag er die beiden nicht mehr so recht. Beim letzten Südseetrip mit besagtem Schlitten hatte Konstantin Sigmunds Buch „Yoga für gestresste Saisonarbeiter“ mit Sonnenöl verschmiert. Abends hatte dann Hartmut noch Horst und Kasimir beim Pokern übers Ohr gehauen. Und warum Klaus und Wilfried sich nicht mögen, weiß eigentlich niemand so genau. Wahrscheinlich was mit Farben.

So weit, so schlimm. Hinzu kommt, dass Klaus, Archibald und Kasimir nordpolweit als Chaostruppe bekannt sind. Alle drei dürfen nicht ohne Beaufsichtigung zusammen sein, zwei von ihnen sind gerade noch in Ordnung. Auch Sepp, Hartmut und Erwin produzieren zu dritt ohne Aufsicht unter Garantie gröbsten Unfug. Höchstens zwei von ihnen, ohne Rentiere, sind tolerabel. Dasselbe gilt für Berthold, Wilfried und Calvin.

Weil alle anderen Rentiere sich schon aus dem Staub gemacht haben, muss Rentier Gustav den Schlitten leider alleine ziehen. Beim Ausflug will Gustav unbedingt vermeiden, dass die beschriebenen Streitigkeiten hervortreten. Das kann nur verhindert werden, indem Gustav immer dabei ist, wenn Weihnachtsmänner, die miteinander Probleme haben oder verursachen, auf einem Fleck sind. Das heißt, jedes Mal, wenn der Schlitten in der Luft ist, dürfen am Nordpol und in der Südsee nur Weihnachtsmänner warten, die zusammen keine Probleme verursachen. Da große Schlitten ziemlich schwer zu ziehen sind, soll der Schlitten für den Transport möglichst klein sein. Es ist klar, dass Gustav daher mehrmals zwischen Nordpol und Südsee hin- und herpendeln wird und manche Weihnachtsmänner diese Strecke auch nicht nur einmal sehen.

Wie viele Sitzplätze hat der Schlitten mit den wenigsten Sitzplätzen, mit dem sukzessive alle 22 Weihnachtsmänner in die Südsee transportiert werden können, ohne dass die geschilderten Probleme auftauchen?

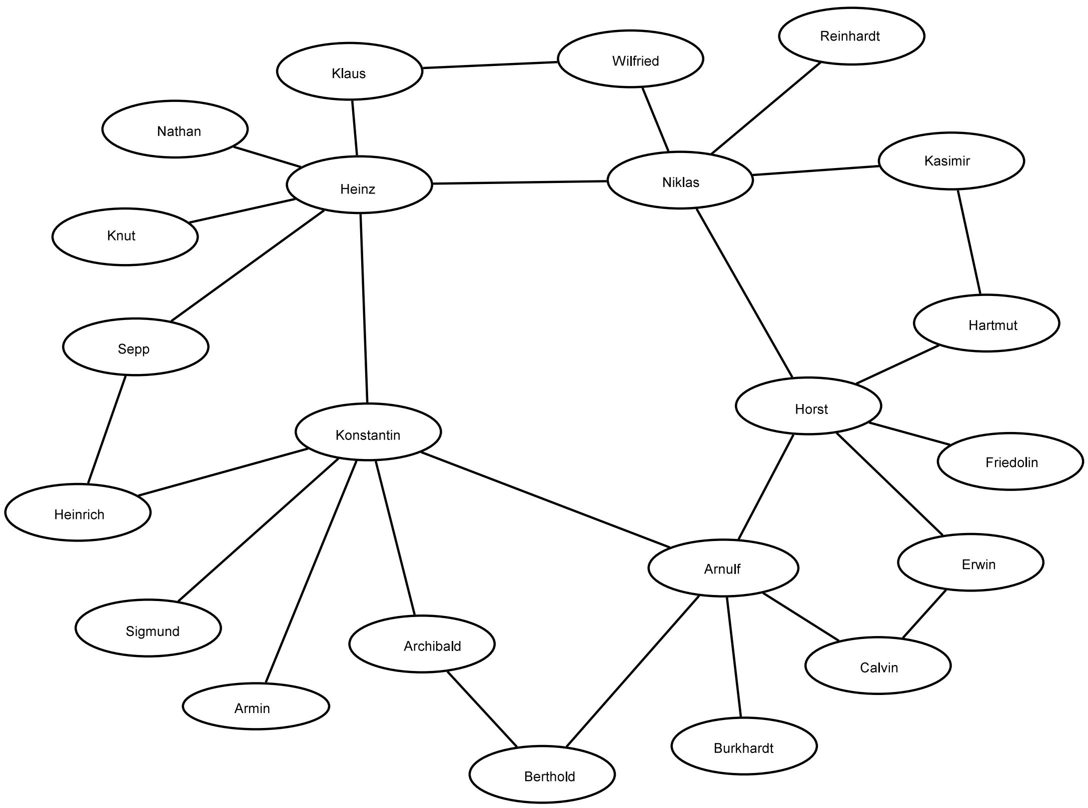
Antwortmöglichkeiten:

1. Der Schlitten kann beliebig wenige Sitzplätze haben.
2. 5 Sitzplätze
3. 8 Sitzplätze
4. 9 Sitzplätze
5. 10 Sitzplätze
6. 11 Sitzplätze
7. 12 Sitzplätze
8. 13 Sitzplätze
9. 14 Sitzplätze
10. Egal, wie viele Sitzplätze der Schlitten hat, es wird immer zu Problemen kommen.

Projektbezug: Für die Lösung dieses Problems spielt ein kombinatorisches Optimierungsproblem eine große Rolle Um nicht zu viel zu verraten, sagen wir jedoch nicht welches. Dieses ist auch für die Theorie verspätungsresistenter Fahrpläne (Projekt B15) von Bedeutung.

21.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5
Das Problem lässt sich mit einem Graphen modellieren: jeder Weihnachtsmann entspricht einem Knoten, zwei Knoten werden durch eine Kante verbunden, wenn die betreffenden Weihnachtsmänner sich nicht leiden können.



Bei der ersten Tour des Schlittens müssen die Weihnachtsmänner, die am Nordpol bleiben, eine stabile Menge bilden, d.h. es dürfen keine zwei adjazenten Knoten am Nordpol bleiben. Also muss der Schlitten mindestens so viele Plätze haben, wie die Kardinalität des minimalen Vertex Covers VC_{OPT} im Graphen.
Ein Vertex Cover ist eine Menge von Knoten VC mit folgender Eigenschaft: von jeder Kante im Graphen ist mindestens einer der beiden Knoten, die sie verbindet, in VC enthalten. Etwas mathematischer: Sei e=(u,v) eine Kante. Dass ist u in VC oder v in VC (oder halt beide).

Es gilt $|VC_{OPT}| = 10$. Dies ist wie folgt leicht einzusehen: Für alle Knoten im Graphen mit Grad eins gilt, dass es ein optimales Vertex Cover gibt, das ihre jeweiligen Nachbarn enthält. Das sind dann Heinz, Konstantin, Arnulf, Horst und Niklas. Es verbleiben die 5 Paare (Klaus, Winfried), (Kasimir, Hartmut), (Erwin, Calvin), (Archibald, Berthold), sowie (Sepp, Heinrich). Von diesen muss jeweils einer im einem optimalen Vertex Cover enthalten sein. Wir wählen Sepp, Berthold, Kasimir, Erwin und Wilfried. In der Tat reicht ein Schlitten der Größe 10 aus.
Eine Lösung sieht wie folgt aus: Niklas, Horst, Konstantin, Wilfried, Sepp, Erwin, Kasimir und Berthold sind immer im Schlitten, fahren also bei jeder Tour vom Nordpol N zur Südsee S und zurück mit dem Schlitten. Bei der ersten Tour werden zusätzlich Heinz und Arnulf mitgenommen. Arnulf wird dann in S gelassen, alle anderen fahren zum N zurück. Heinz bleibt jetzt bis auf weiteres im Schlitten. Jetzt werden in 10 Touren Weihnachtsmänner Klaus, Reinhardt, Hartmut, Friedolin, Archibald, Armin, Sigmund, Heinrich, Knut und Nathan nach S gebracht (ein Weihnachtsmann pro Tour). Dann wird Arnulf wieder nach N gefahren und allein mit Heinz dort gelassen, dafür fahren Burkhardt und Calvin nach S und bleiben dort. Ganz am Ende werden Heinz und Arnulf von N nach S gefahren.
Dadurch, dass Sepp, Berthold und Kasimir die ganze Zeit über im Schlitten sitzen, entstehen auch keine Probleme durch die drei „Chaos-Truppen“, die alleine immer groben Unfug anstellen.

22 Weihnachtsbäckerei

Autoren: Sören Bartels, Rüdiger Müller
Projekt: C16

22.1 Aufgabe

In der Weihnachtsbäckerei liegt der herrliche Duft frischer Plätzchen in der Luft. Gerade hat der Weihnachtsmann mehrere Bleche aus dem Ofen geholt. Jetzt geht es an die Verzierung mit bunter Glasur, praktisch in Kochbeuteln abgepackt, zum Schmelzen im Wasserbad. Dazu benutzt der Weihnachtmann seinen großen Topf mit einem Radius von 25 cm. Genau in der Mitte befindet sich ein Heizstab, der einen Radius von 2 cm besitzt und auf der Oberfläche eine konstante Temperatur von 90 ℃ liefert. Der Weihnachtsmann beginnt mit dem Glasieren, wenn sich die Temperatur an der inneren Wandseite des Topfes nicht mehr ändert. Bei gleichbleibender Wärmezufuhr des Heizstabes stellt sich dort eine konstante Temperatur von 60 ℃ ein. Wegen einer EU-Verordnung über Feinbackwaren muss das Schmelzen bei mindestens 70 ℃ passieren. Andererseits bleiben die Lebensmittelfarben des Weihnachtsmanns nur bis 80 ℃ farbstabil.

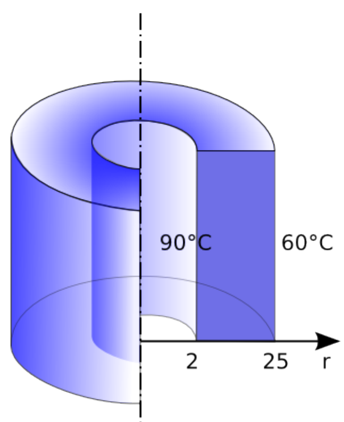


Abbildung 10: Schematische Skizze des Wasserbades (r in cm).

In welchem Bereich darf die Glasur geschmolzen werden? Der Weihnachtsmann überlegt: „Es findet ein beständiger Wärmefluss $F(r)$ von innen nach außen statt, der, weil ja nichts verloren gehen darf, über jeden Zylindermantel konstant ist. Also folgt

$$F(r) \sim 1/r\,.$$

Andererseits ist der Wärmefluss proportional zum Temperaturunterschied und es gilt

$$F(r) \sim -T'(r)\,.$$

Jetzt brauche ich nur noch die Stammfunktion $T(r)$ mit der zugehörigen Ableitung $T'(r)$ zu finden und die Konstanten an die Randbedingungen anzupassen. Dafür muss doch die Formelsammlung irgendwo im Regal zwischen dem Schornstein–Atlas, den Backrezepten und den Firmware–Patches für die Playstation stehen...“

In welchem Bereich muss der Abstand d zum Innenrand des Topfes liegen, damit die Glasur korrekt geschmolzen werden kann?

Antwortmöglichkeiten:

1. $17.06\,\mathrm{cm} \leq d \leq 18.70\,\mathrm{cm}$
2. $14.22\,\mathrm{cm} \leq d \leq 20.36\,\mathrm{cm}$
3. $\sin(\sqrt{2})\,\mathrm{cm} \leq d \leq \sin(2)\,\mathrm{cm}$
4. $12.73\,\mathrm{cm} \leq d \leq 21.45\,\mathrm{cm}$
5. $5.75\,\mathrm{cm} \leq d \leq 11.14\,\mathrm{cm}$
6. $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{cm} \leq d \leq 3\pi\,\mathrm{cm}$
7. $8.47\,\mathrm{cm} \leq d \leq 16.25\,\mathrm{cm}$
8. $16.82\,\mathrm{cm} \leq d \leq 17.24\,\mathrm{cm}$
9. $10.00\,\mathrm{cm} \leq d \leq 20.00\,\mathrm{cm}$
10. $10.77\,\mathrm{cm} \leq d \leq 18.65\,\mathrm{cm}$

Projektbezug:
Bei vielen technischen Prozessen ist ein genaues Wissen über kritische Prozessgrößen wie z. B. der Temperatur erforderlich. Dazu werden aus Differentialgleichungen bestehende mathematische Modelle entwickelt, deren computerunterstützte Berechnung effiziente und verlässliche Algorithmen erfordert.

22.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 2
Die richtige Antwort ist 14.22cm$\leq d \leq$ 20.36cm.

Der Ansatz für T' ist $T'(r) = a/r$, somit folgt $T(r) = a\ln(r) + b$. Wegen der Randbedingungen muss gelten:

$$\begin{aligned} 90 &\stackrel{!}{=} T(2) = a\ln(2) + b\,, \\ 60 &\stackrel{!}{=} T(25) = a\ln(25) + b\,. \end{aligned}$$

Durch Umstellen, bzw. Lösen des 2×2 Gleichungssystems erhalten wir

$$\begin{aligned} a &= \frac{90 - 60}{\ln(2) - \ln(25)} && \approx -11.8777605\,, \\ b &= \frac{60\ln(2) - 90\ln(25)}{\ln(2) - \ln(25)} && \approx 98.2330362\,. \end{aligned}$$

Nun werden noch die Punkte benötigt, die den erlaubten Bereich begrenzen:

$$\begin{aligned} r_{70} &= \exp\left(\frac{70 - b}{a}\right) \approx 10.772\,, \\ r_{80} &= \exp\left(\frac{80 - b}{a}\right) \approx 4.642\,. \end{aligned}$$

Es gilt $d_{\text{min}} \leq d \leq d_{\text{max}}$. Damit ist $d_{\text{min}} = 25 - r_{70} \approx 14.228$ und $d_{\text{max}} = 25 - r_{80} \approx 20.358$.

23 Haus vom Nikolaus

Autor: John Schoenmakers

23.1 Aufgabe

Der Nikolaus hörte von seinem Finanzberaterwichtel, dass es jetzt besonders günstig sei, ein denkmalgeschütztes Haus zu kaufen. Die jüngste Finanzkrise hätte eine besorgniserregende Anfälligkeit des Finanzsystems und dessen Produkten offenbart und deswegen sei es sinnvoll, in beständige Werte zu investieren. Da das Geschäft zu Weihnachten in den letzten Jahren auf Grund der Konsumzurückhaltung der Elfen schleppend verlief, sind seine finanziellen Rücklagen jedoch dahin geschmolzen. Der Beraterwichtel riet ihm das Angebot der „Santa-Claus-Brothers Investmentbank (SCBI)“ für eine Annuitätenhypothek anzunehmen.
Bei dieser Hypothek bezahlt man über eine feste Laufzeit monatlich einen festen Betrag. Dieser Betrag setzt sich zusammen aus Zinszahlung und Tilgung. Nach jedem Monatsende wird die Restschuld, die in dem Monat noch ausgestanden hat, zu einem in der Hypothek fest vereinbarten Zinssatz verzinst. Mit dem Restbetrag wird getilgt, also die noch ausstehende Restschuld abgebaut.
Der Nikolaus benötigt ein Darlehen von 200.000 Talern und möchte diese nach genau 20 Jahren vollständig getilgt haben. Die SCBI bietet einen festen Zinssatz von 5,3% an. Diese 5,3% sind nicht als effektiver Jahreszins zu verstehen, sondern im Sinne einer Monatsrate von $\frac{5{,}3}{12}\%$.

Welchen Betrag muss der Nikolaus monatlich überweisen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1350,12 Taler
2. 1450,12 Taler
3. 1356,47 Taler
4. 1253,28 Taler

5. 1453,28 Taler
6. 1250,12 Taler
7. 1328,53 Taler
8. 1256,47 Taler
9. 1353,28 Taler
10. 1456,47 Taler

Projektbezug: Das Projekt E5 im MATHEON beschäftigt sich mit der Modellierung und Auswertung von strukturierten Zinsprodukten.

23.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9
Man bezahlt über eine feste Laufzeit von 20 Jahren, monatlich einen festen Betrag. Dieser Betrag setzt sich zusammen aus Zinszahlung und Tilgung. Nach jedem Monatsende wird das in dem Monat noch ausstehende Nominal zu einem in der Hypothek fest vereinbarten Zinssatz verzinst. Mit dem Restbetrag wird getilgt, also das ausstehende Nominal abgebaut. In dieser Aufgabe wird nach dem monatlichen Betrag gefragt.
K Hypotheknominal
A Monatsbeitrag
r Monatszinssatz
N Anzahl von Perioden
Es wird monatlich, also von $n = 1, ..., N$, eine Rate A gezahlt.

Frage:
Wie hoch ist die Monatsrate?

Lösung:
Hilfsvariable T_n sei der Tilgungsanteil und Z_n der Zinsanteil der Rate A, jeweils von $n = 1, ..., N$.

Es gilt also $A = T_n + Z_n$, $n = 1, ..., N$.
In dem ersten Monat stand das ganze Nominal K aus, also sind am Ende des ersten Monats ($n = 1$) Zinsen in Höhe von $Z_1 = rK$ fällig. Folglich kann der Restbetrag $T_1 = A - Z_1 = A - rK$ getilgt werden. In dem zweiten Monat steht noch ein reduziertes Nominal $K - T_1$ aus, wofür am Ende des zweiten Monats ($n = 2$) Zinsen in Höhe von $Z_2 = r\,(K - T_1)$ fällig sind. Der Rest $T_2 = A - Z_2$ wird dann wieder getilgt, also steht im dritten Monat der Betrag $K - T_1 - T_2$ noch aus. So machen wir weiter.
Im n-ten Monat steht der Betrag $K - T_1 - T_2 - ... - T_{n-1}$ aus, wofür dann am Ende des n-ten Monats Zinsen in Höhe von $Z_n = r(K - T_1 - T_2 - ... - T_{n-1})$ fällig sind, und folglich

$$T_n = A - Z_n = T_n = A - r(K - T_1 - T_2 - ... - T_{n-1}) \quad \text{also}$$
$$T_n = A - rK + r(T_1 + ... + T_{n-1}).$$

Schreiben wir obige Gleichungen auch für den vorigen Monat $(n - 1)$ auf, angenommen $n \geq 2$, dann erhalten wir neben

$$\begin{aligned} T_n &= A - rK + r(T_1 + ... + T_{n-2} + T_{n-1}) \quad \text{auch} \\ T_{n-1} &= A - rK + r(T_1 + ... + T_{n-2}). \end{aligned}$$

Subtrahieren ergibt dann

$$\begin{aligned} T_n - T_{n-1} &= rT_{n-1}, \quad \text{oder} \\ T_n &= (1+r)T_{n-1}. \end{aligned}$$

Wenden wir das letzte Ergebnis auf T_{n-1} an, dann kommt

$$\begin{aligned} T_n &= (1+r)(1+r)T_{n-2} = (1+r)^2 T_{n-2} \\ &= .... \\ &= (1+r)^{n-1} T_1; \end{aligned}$$

wobei wir feststellen, dass dieses Ergebnis auch für $n = 1$ gilt.
Wir müssen jetzt dafür sorgen, dass am Ende des letzten Monats mit der letzten Tilgung der Gesamtbetrag getilgt ist, d. h. alle Tilgungen zusammen sind gleich Hypothekennominal:

$$\begin{aligned} T_1 + ... + T_N &= K, \quad \text{oder} \\ T_1 + (1+r)T_1 + ... + (1+r)^{N-1} T_1 &= K, \quad \text{oder} \\ T_1 \left(1 + (1+r) + ... + (1+r)^{N-1}\right) &= K. \end{aligned}$$

Jetzt gilt bekanntlich

$$1 + (1+r) + ... + (1+r)^{N-1} = \frac{(1+r)^N - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^N - 1}{r}$$

(Kurze Herleitung siehe unten*)
und da wir schon sahen, dass $T_1 = A - rK$ ist, bekommen wir

$$(A - rK) \frac{(1+r)^N - 1}{r} = K.$$

Hieraus muss A gelöst werden:

$$A - rK = \frac{rK}{(1+r)^N - 1}, \quad \text{oder}$$
$$A = rK + \frac{rK}{(1+r)^N - 1}$$
$$= \frac{r(1+r)^N}{(1+r)^N - 1} K.$$

(*)

$$1 + a + a^2 + ... + a^{N-1} = \text{Summe}$$
$$a + a + a^2 + ... + a^N = a * \text{Summe}$$

Subtrahieren (unten-oben):

$$a^N - 1 = (a-1) * \text{Summe}, \quad \text{also}$$
$$\text{Summe}=\frac{a^N - 1}{a - 1}$$

Einsetzen von $K = 200000$, $r = 5.3\%/12 = 5.3/1200$, $N = 240$, ergibt ungefähr 1353.3, also Antwort 9.

24 Weihnachts-Sudoku

Autoren: Günter M. Ziegler, Maria Beitz

24.1 Aufgabe

Da der Weihnachtsmann in diesem Jahr besonders viel Unterstützung von den Engeln, Rentieren, Wichteln und Adventskalenderteilnehmern bekommen hat, bleibt am Heiligen Abend vor dem Verteilen der Geschenke noch genügend Zeit für ein Sudoku.
Doch nein!! Er ist einfach überfordert. Damit er sich nicht an dem Rätsel festbeißt und am Ende doch noch in Zeitdruck gerät, müßt ihr ihm noch ein letztes Mal helfen.

H			?			T	F	O
								
	F	R	O	H	E	S		
					F	E	S	T
F		S						
	E			T	??			
S							H	
R	O						E	F

Welche Kombination aus ? und ?? löst das Weihnachts-Sudoku?

Antwortmöglichkeiten:

1. ?=S, ??= R
2. ?= S, ??= S
3. ?= R, ??= 
4. ?=  ,??= O
5. ?= , ??= S
6. ?= R, ??= R
7. ?= , ??= 
8. ?= S, ??= O
9. ?= R, ??= H
10. ?= , ??= R

24.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6

H	S	E	**R**			T	F	O
		O	T	F	S	H	R	E
T	F	R	O	H	E	S		
O	R	H			F	E	S	T
F	T	S	E	O	H	R		
	E		S	T	**R**	F	O	H
E	H		F	R	O		T	S
S		F		E	T	O	H	R
R	O	T	H	S			E	F

A Lösungen im Überblick

Aufgabe 1	3
Aufgabe 2	6
Aufgabe 3	4
Aufgabe 4	5
Aufgabe 5	8
Aufgabe 6	10
Aufgabe 7	10
Aufgabe 8	8
Aufgabe 9	4
Aufgabe 10	10
Aufgabe 11	5
Aufgabe 12	8
Aufgabe 13	10
Aufgabe 14	8
Aufgabe 15	4
Aufgabe 16	7
Aufgabe 17	5
Aufgabe 18	4
Aufgabe 19	8
Aufgabe 20	9
Aufgabe 21	5
Aufgabe 22	2
Aufgabe 23	9
Aufgabe 24	6