

XVII

XI

I

XXI

Digitaler Adventskalender 2007

www.mathekalender.de



Aufgaben und Lösungen



DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien



Inhaltsverzeichnis

1	Musik einpacken	4
2	Weihnachtsbäume aus Blech	7
3	Die Schlittenzieher und die Urlaubsplanung	11
4	Tropische Algebra	14
5	Dächertour	20
6	Nikolausgebäck	27
7	Die Schokoladen-Diät	32
8	Aufzugssteuerung	38
9	Ein neuer Schlitten für den Weihnachtsmann?	46
10	Mathefaule Elfen in Manhattan	50
11	Schwierige Navigation	54
12	Geschenkekauf bei Knecht Ruprecht	58
13	Optimale Teddybären-Produktion	63
14	Kostenminimierung mit Wahrscheinlichkeitsrestriktionen	69
15	Rettet Weihnachten!	74
16	Knoten	84
17	Der Weihnachtsmann auf der Suche nach dem optimalen Fahrplan	87
18	Die Gewichtel	96
19	Optionsbewertung	101



20 Schneesturmsichere Weihnachtsmänner	105
21 Venedig im Kaufrausch	112
22 Lagenwechsel minimieren - Oder das Bohren von Löchern in Leiterplatten	122
23 Netze eines Weihnachtsbaums	132
24 Das perfekte Pfefferkuchenrezept	136
A Lösungen im Überblick	139

1 Musik einpacken

Autor: Andreas Loos

Projekt: F1 Discrete surface parametrization

1.1 Aufgabe

Mist. Nur noch 39,2 Megabyte Platz. Der Weihnachtsmann fluchte. Er hatte sich zum letzten Weihnachtsfest einen mp3-Player geschenkt, damit er auf der langen Schlittenfahrt vom Nordpol zu den Kindern dieser Welt ein bisschen Unterhaltung hat. Jetzt hat er schon eine Menge Songs auf den Player kopiert. Seine Lieblingslieder liegen aber noch auf dem Rechner:

s_1	Jingle Bells <i>standard version</i>	3,1 MByte
s'_1	Jingle Bells <i>80's Disco remix</i>	5,3 MByte
s_2	Rudolph the reindeer <i>standard version</i>	3,1 MByte
s'_2	Rudolph the reindeer <i>trance version</i>	7,3 MByte
s_3	Oh du fröhliche <i>standard version</i>	2,3 MByte
s'_3	Oh du fröhliche <i>techno version</i>	3,4 MByte
s_4	Vom Himmel hoch <i>standard version</i>	3 MByte
s_5	In dulci jubilo <i>standard version</i>	3 MByte
s'_5	In dulci jubilo <i>Latino-Salsa Remix</i>	6 MByte
s_6	Oh Tannenbaum <i>standard version</i>	3 MByte
s'_6	Oh Tannenbaum <i>mit 12 Minuten Gitarrensolo</i>	8 MByte
s_7	Stille Nacht <i>standard version</i>	2,5 MByte
s'_7	Stille Nacht <i>gesungen vom Chor der Engel</i>	8,6 MByte
s_8	Morgen, Kinder, wird's was geben <i>standard version</i>	2,5 MByte
s'_8	Morgen, Kinder, wird's was geben <i>unplugged version</i>	8,7 MByte
s_9	Little drummer boy <i>standard version</i>	6 MByte
s_{10}	Süßer die Glocken <i>standard version</i>	2,1 MByte
s'_{10}	Süßer die Glocken <i>House remix</i>	5,5 MByte
s_{11}	Es kommt ein Schiff geladen <i>standard version</i>	1,1 MByte
s'_{11}	Es kommt ein Schiff geladen <i>phunky-phunky</i>	5,3 MByte

Auf jeden Fall will der Weihnachtsmann von jedem Lied eine Version auf dem Player haben. Wenn er zwei Fassungen besitzt, dann bevorzugt er aber die besondere – die Standardversionen kennt er schließlich schon sehr gut.

Wie viele Lieder *in besonderer Version* kann der Weihnachtsmann unter diesen Voraussetzungen höchstens auf den Player kopieren?



Antwortmöglichkeiten:

1. keinen
2. 1 Song
3. 2 Songs
4. 3 Songs
5. 4 Songs
6. 5 Songs
7. 6 Songs
8. 7 Songs
9. 8 Songs
10. 9 Songs

Projektbezug:

Dieses Problem kann als *ganzzahliges lineares Programm* modelliert werden. Konkret geht es hier um ein so genanntes Knapsack-Problem. Solche Probleme sind im Allgemeinen schwer zu lösen, kommen in der Praxis aber sehr häufig vor, und werden daher intensiv erforscht, um für konkrete Anwendungen schnelle Heuristiken zu finden.

1.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4

Sei $c = 39,2$ MByte die Restkapazität des mp3-Players. Wir definieren $s'_4 := 3$ und $s'_9 := 6$. Eine kurze Rechnung zeigt:

$$\sum_{i=1}^{11} s_i = 31,7 \text{ MByte} < c = 39,2 \text{ MByte} < \sum_{i=1}^{11} s'_i = 67,1 \text{ MByte}$$

Daher bekommt der Weihnachtsmann auf jeden Fall alle Standardversionen unter, alle besonderen Versionen (plus die zwei Lieder, die nur in Standardversion existieren) aber nicht. Welche Standardversionen kann er also durch besondere Versionen ersetzen?

Dazu definieren wir den Vektor δ mit Einträgen $\delta_i := s'_i - s_i$:

$$\delta = (2, 2; 4, 2; 1, 1; 0; 3; 5; 6, 1; 6, 2; 0; 3, 4; 4, 2;)$$

Damit ist folgendes Problem zu lösen:

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere } \sum_{i=1}^{11} x_i ; \quad x_i \in \{0, 1\}; \\ &\text{unter Berücksichtigung von } \sum_{i=1}^{11} \delta_i x_i \leq 39,2 - 31,7 \text{ MByte} = 7,5 \text{ MByte} \end{aligned}$$

Man nennt solche Probleme Knapsack-Probleme, weil man die Aufgabe auch so lesen kann: Jemand möchte in einen Rucksack (Knapsack) mit definiertem Füllvermögen 7,5 Gegenstände bestimmter Größe δ_i packen, die – in diesem Fall – für ihn alle denselben Wert 1 haben. Wenn $x_i = 1$ gesetzt wird, dann wird der Gegenstand i eingepackt, bei $x_i = 0$ nicht.

Knapsack-Probleme kann man auf verschiedene Arten lösen – in unserem Fall reicht der so genannte gierige (*greedy*) Algorithmus: Man sortiert die δ_i aufsteigend nach Größe und wählt die ersten k Songs, bis der verfügbare Speicherplatz aufgebraucht ist. Das ergibt folgenden Lösungsvektor: $\mathbf{x} = (1; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 0; 0;)$.

Da es für $i = 4$ und $i = 9$ keine besonderen Fassungen gibt, kann der Weihnachtsmann also drei Standard-Songs gegen besondere Songs austauschen.



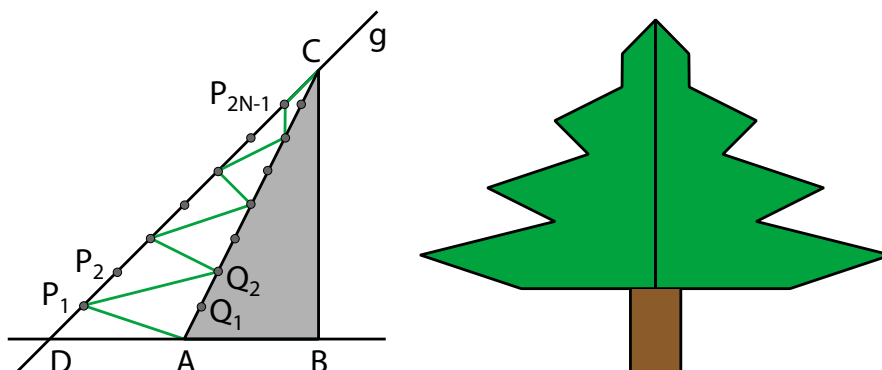
2 Weihnachtsbäume aus Blech

Autoren: Ulrich Bauer und Max Wardetzky
Projekt: F4

2.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat ein Problem: Wegen des Klimawandels ist der Wald bedroht – sämtliche Bäume stehen streng unter Naturschutz und dürfen nicht gefällt werden. Der Trend geht somit zu Weihnachtsbäumen aus Blech.

Der Weihnachtsmann konstruiert diese Bäume nun folgendermaßen: Zunächst zeichnet er ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei B sowie eine Gerade g , die durch C verläuft. Dabei soll g die Gerade, die durch A und B verläuft, im Punkte D derart schneiden, dass A zwischen D und B liegt (siehe linke Abbildung).



Nun wählt er eine natürliche Zahl $N > 0$ und unterteilt zunächst die zwei Strecken DC und AC in jeweils $2N$ gleich große Teile. Die entsprechenden $2N - 1$ Unterteilungspunkte auf DC bzw. AC werden mit $P_1, P_2, \dots, P_{2N-1}$ bzw. $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2N-1}$ bezeichnet, wobei die Nummerierung aufsteigend in Richtung von D nach C bzw. von A nach C erfolgt. Dann zeichnet er eine Zickzack-Linie, die A mit P_1 verbindet, P_1 mit Q_2 , Q_2 mit P_3 , P_3 mit Q_4 , usw., und schließlich P_{2N-1} mit C (siehe linke Abbildung). Die Krone des Weihnachtsbaumes (grüne Fläche in der rechten Abbildung) entsteht nun, indem der geschlossene Kantenzug $BAP_1Q_2P_3Q_4 \cdots P_{2N-1}CB$ an der Geraden durch BC noch einmal gespiegelt wird.

Um ein wenig Abwechslung in die Arbeit zu bringen, entwirft er die Zickzack-Linien bei jedem Baum unterschiedlich, indem er sowohl den Schnittpunkt D von g mit der Geraden durch A und B als auch die Anzahl N der Unterteilungen variiert, ansonsten aber die obige Konstruktion der Baumkrone exakt beibehält. Insbesondere bleibt das Dreieck ABC unverändert, und A muss immer zwischen D und B zu liegen kommen.

Da der Weihnachtsmann ein neugieriger Kerl ist, überlegt er: „Was passiert mit dem Umfang l der Krone und ihrer eingeschriebenen Fläche F , wenn ich *gleichzeitig* den Abstand zwischen D und A *verringere* und die Anzahl der Unterteilungen *erhöhe*?“

Achtung: Zwar muss der Abstand kleiner und N gleichzeitig größer werden, es ist aber nicht vorgeschrieben, *um wie viel* der Abstand verringert bzw. die Anzahl der Unterteilungen erhöht werden soll. Nur eine der folgenden Antworten ist für *alle möglichen* Varianten richtig.

Antwortmöglichkeiten:

1. F wird kleiner und l wird kleiner.
2. F bleibt gleich und l bleibt gleich.
3. F wird größer und l wird größer.
4. F wird kleiner, aber l kann sowohl größer als auch kleiner werden.
5. F bleibt gleich, aber l kann sowohl größer als auch kleiner werden.
6. F wird größer, aber l kann sowohl größer als auch kleiner werden.
7. l wird kleiner, aber F kann sowohl größer als auch kleiner werden.
8. l bleibt gleich, aber F kann sowohl größer als auch kleiner werden.
9. l wird größer, aber F kann sowohl größer als auch kleiner werden.
10. F und l können beide sowohl größer als auch kleiner werden.

**Projektbezug:**

Im Projekt F4 werden geometrischen Größen (wie Längenmaß, Winkelmaß, Flächenmaß oder auch Krümmung) für *gekrümmte Flächen* im Raum untersucht. Insbesondere beschäftigen wir uns mit sogenannten *diskreten Flächen*, bestehend aus einer Vielzahl flacher Dreiecke, wie sie in 3D-Anwendungen, u.a. in Computerspielen und beim Fahrzeugdesign, benutzt werden. Vom mathematischen Standpunkt aus ist es interessant zu fragen, wann geometrische Größen auf diskreten Flächen im *Grenzübergang* zu glatten Flächen mit den entsprechenden glatten Größen zusammenfallen. Die vorliegende Aufgabe spiegelt in gewisser Weise die Frage eines solchen Grenzüberganges wider: Was geschieht eigentlich, wenn der Abstand gegen Null geht und gleichzeitig die Anzahl der Unterteilungen gegen unendlich?

2.2 Lösung**Richtige Lösung: Antwort 4**

Man überlegt sich zunächst das Folgende: Wenn man den Abstand zwischen A und D nur sehr wenig verringert, die Anzahl der Unterteilungen aber gleichzeitig drastisch erhöht, dann wächst die Länge der Zickzack-Linie und somit auch der Umfang l der Baumkrone. Umgekehrt gilt: Wenn man den Abstand stark verringert, die Anzahl der Unterteilungen aber nur sehr wenig erhöht, dann fällt l . Also kann l sowohl wachsen als auch fallen.

Nun muss man noch die Fläche betrachten. Dazu nimmt man zunächst an, dass der Abstand zwischen A und D *konstant* gehalten wird, während N wächst.

Behauptung: In diesem Fall ändert sich die Fläche F nicht.

Um das zu beweisen, rechnet man zunächst die Fläche aus und zeigt dann, dass das Ergebnis unabhängig von N ist.

Diese Rechnung geht wie folgt:

Setze $P_0 = D$ und $Q_0 = A$, sowie $P_{2N} = Q_{2N} = C$. Dann ist die Fläche des Dreiecks $T_n = Q_{2n}P_{2n+1}Q_{2n+2}$ (mit $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) gleich dem halben Produkt aus der Grundseite b_n und der Höhe h_n dieses Dreiecks. Man sieht aber sofort ein, dass

$$b_n = \frac{1}{N} \cdot |AC|$$

sein muss, wobei $|AC|$ die Länge der Strecke AC bezeichnet.
Bezeichne weiterhin α den Winkel zwischen DC und AC bei C . Dann folgt aus der Definition des Sinus im Dreieck $CP_{2n+1}H_n$ (mit H_n Fußpunkt der Höhe h_n):

$$h_n = \frac{2N - (2n + 1)}{2N} \cdot |DC| \cdot \sin \alpha .$$

Also ist die Gesamtfläche der linken Zacken gegeben durch ¹

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{b_n \cdot h_n}{2} &= |AC| \cdot |DC| \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{4N^2} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} (2N - (2n + 1))}_{\text{Summe der ersten } N \text{ ungeraden Zahlen, addiert sich zu } N^2 \text{ auf}} \\ &= |AC| \cdot |DC| \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{4N^2} \cdot N^2 \\ &= \frac{|AC| \cdot |DC| \cdot \sin \alpha}{4} . \end{aligned}$$

Also ist die Gesamtfläche der linken Zacken *unabhängig* von N . Wenn man nun den Abstand von D zu A verringert, dann verringert sich auch α und somit die Gesamtfläche der linken Zacken. Es folgt, dass auch die Fläche F der Baumkrone kleiner wird. *QED*.

¹Die Kurzschreibweise $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{b_n \cdot h_n}{2}$ bedeutet dabei:
Summiere den Term $\frac{b_n \cdot h_n}{2}$ für $n = 0$ bis $n = N-1$ auf, d.h. $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{b_n \cdot h_n}{2} = \frac{b_0 \cdot h_0}{2} + \frac{b_1 \cdot h_1}{2} + \dots + \frac{b_{N-1} \cdot h_{N-1}}{2}$



3 Die Schlittenzieher und die Urlaubsplanung

Autor: Holger van Bargaen

Projekt: keins

3.1 Aufgabe

Wie jedes Jahr im November streiten sich die Rentiere darum, wer denn dieses Mal den Schlitten des Weihnachtsmannes ziehen muss und wer in Urlaub fahren darf. Leider werden alle bis auf ein Rentier zum Ziehen benötigt, so dass nur eines Urlaub bekommen kann. Da der Weihnachtsmann aber schon sehr lange Weihnachten keinen Urlaub mehr hatte, möchte er dieses Jahr ebenfalls am 24.12. frei haben. Um die entstehende Misere zu beheben, wird beschlossen, den Urlaubsstreit mit einer Partie Poker zu entscheiden. So spielen also der Weihnachtsmann und seine Rentiere eine Partie „No Limit Texas Hold'em“. Am Ende des Spiels sind nur noch der Weihnachtsmann und Rudolph - eines seiner Rentiere - im Rennen. Es sieht nicht gut aus für Rudolph. Er hat nur noch so wenig Chips übrig, dass er bereits „All in“ ist, nachdem er seinen „Big Blind“ gesetzt hat. Der Weihnachtsmann hat in dieser Runde auch noch den Karo-König und den Pik-König auf der Hand und „called“ sofort. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Weihnachtsmann nach dieser Hand das kleine Turnier gewonnen hat und in Urlaub fahren darf, wenn auf dem Flop die Karten Kreuz-Zwei, Kreuz-König und Kreuz-Drei sowie auf dem Turn die Kreuz-Vier kommt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Wahrscheinlichkeit ist eins, d.h. der Weihnachtsmann fährt in Urlaub und Weihnachten fällt aus.
2. $\frac{499}{900}$
3. $\frac{5}{9}$
4. $\frac{58730}{91080}$
5. $\frac{50714}{91080}$
6. $\frac{55553}{101200}$

7. $\frac{2}{\pi}$
8. $\frac{50726}{91080}$
9. $\frac{2}{e}$
10. Die Wahrscheinlichkeit ist Null, d.h. Rudolph gewinnt und Weihnachten findet statt.

3.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5

Es ist also gefragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Weihnachtsmann(W) tatsächlich gewinnt (das schließt die Lösung mit Hilfe vieler im www verfügbarer Poker-Rechner aus, da diese mit Split-Pot-Wahrscheinlichkeiten anders umgehen, als hier erforderlich ist).

Wir berechnen stattdessen jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass Rudolph (R) nicht verliert (und ziehen diese dann von eins ab). Wir müssen also die Spielgänge bei allen Möglichkeiten, die bei den letzten drei Karten auftreten können auszählen. Dazu betrachten wir jeweils zunächst die „River“-Karte (Wir führen den Nenner 91080 mit, weil es die Rechnung übersichtlicher gestaltet und dieser Nenner für die Lösung sowieso notwendig ist - unsinnige Antworten ausgenommen).

1. Falls auf dem „River“ irgendein Kreuz liegt, so hat W einen Flush und R mindestens einen Flush, d.h. in diesem Fall geht das Spiel weiter. Das ergibt eine Nicht-Verlust-Wahrscheinlichkeit von $\frac{9}{46} = \frac{17820}{91080}$.
2. Falls auf dem „River“ der Herz-König liegt, rettet R nur ein Straight Flush. Hierfür gibt es vier Möglichkeiten (Ass-Fünf, Fünf-Ass, Sechs-Fünf und Fünf-Sechs, jeweils alles in Kreuz). Das gibt in diesem Fall eine Gesamtwahrscheinlichkeit von $\frac{4}{91080}$.
3. Falls auf dem „River“ irgendeine Zwei, Drei oder Vier in Karo, Pik oder Herz liegt, so hat W ein Full-House und R braucht den Straight Flush (je vier Möglichkeiten wie oben) oder die beiden anderen Karten des



auf dem River befindlichen Wertes, um einen Vierling zu haben (zwei weitere Möglichkeiten). Das ergibt insgesamt eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{9 \cdot 6}{91080} = \frac{54}{91080}$.

4. Falls auf dem „River“ ein Ass in Karo, Pik oder Herz liegt (dies besitzt die Wahrscheinlichkeit $3/46$), so hat W einen Drilling und R gewinnt mit jeder Fünf, jedem Kreuz oder aber, wenn er die beiden anderen Nicht-Kreuz-Asse hat. R gewinnt nun, wenn eines der folgenden paarweise disjunkten (d.h. keine zwei der Ereignisse können gleichzeitig eintreten) Ereignisse eintritt:
 - a) Seine erste Handkarte ist 5 oder Kreuz ($12/45$, denn es gibt noch dreimal 5 und neunmal Kreuz in den 45 Karten - die Kreuz-5 zählen wir als Kreuz und nicht als 5).
 - b) Seine erste Handkarte ist weder Kreuz noch 5 ($33/45$) und die zweite ist Kreuz oder 5 ($12/44$, denn wir haben ja jetzt eine weitere Handkarte und ziehen die letzte nur noch aus 44).
 - c) Er bekommt die beiden Asse (Wahrscheinlichkeit $2 \cdot 1/45 \cdot 1/44$). Wiederum beachte man, dass es hierfür zwei Möglichkeiten gibt.Die Erfolgs-Wahrscheinlichkeit in diesen Fall ist also $\frac{12}{45} + \frac{33}{45} \cdot \frac{12}{44} + \frac{2}{45 \cdot 44} = \frac{528+396+2}{1980} = \frac{926}{1980}$. Das ergibt $\frac{2778}{91080}$ Nicht-Verlust-Chance für R (nach Multiplikation mit $3/46$).
5. Falls auf dem „River“ eine Fünf in Karo, Herz oder Pik liegt, reicht R jedes Kreuz, jede Sechs und jedes Ass. Das führt auf eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{46} \cdot \left(\frac{15}{45} + \frac{30}{45} \cdot \frac{15}{44} \right) = \frac{3330}{91080}$. Die Rechnung geht genau wie im vorhergehenden Fall, aber es gibt 15 „gute“ Karten und es ist kein hohes Paar mehr zu berücksichtigen.
6. Falls auf dem „River“ eine Sechs in Karo, Herz oder Pik liegt, reicht R jedes Kreuz und jede Fünf. Das führt auf eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{46} \cdot \left(\frac{12}{45} + \frac{33}{45} \cdot \frac{12}{44} \right) = \frac{2772}{91080}$.
7. Bei jeder anderen Karte (Sieben bis Dame, nicht Kreuz) benötigt R ein Kreuz zum Flush oder zwei Karten zur Straight. Die Rechnungen sind ebenfalls analog zu den bereits gesehenen: $\frac{18}{46} \cdot \left(\frac{9}{45} + \frac{36}{45} \cdot \frac{9}{44} + \frac{36}{45 \cdot 44} \right) = \frac{13608}{91080}$.

Summiert man dies, so übersteht R diese Runde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{40366}{91080}$. Der Weihnachtsmann darf also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{50714}{91080}$ in den Urlaub.



4 Tropische Algebra

Autoren: Christian Schröder, Bernd Sturmfels, Elena Virnik

Projekt: A9,C4

4.1 Aufgabe

Als der Weihnachtsmann von weit her mit all seinen Geschenken um die Welt eilt, passiert, was immer passiert, wenn man es gerade am eiligsten hat: Der Schlitten hat eine Panne. Nach einer gewagten Notlandung findet er sich auf einer einsamen tropischen Insel wieder, weit weg von der Zivilisation. „Jetzt werde ich es bestimmt nicht mehr pünktlich zum Weihnachtsfest schaffen“, denkt er. „Nur noch ein Wunder kann mir jetzt helfen!“.



In diesem Augenblick sieht er plötzlich ein Buch neben sich liegen. Er ist sich sicher, dass es vor einem Augenblick noch nicht da gewesen ist, und ist ganz gespannt, was er darin wohl vorfinden wird. Als er es aufschlägt, ist seine Enttäuschung groß: Es scheint ein Mathematikbuch zu sein. Mathematik hat ihm immer sehr viel Spaß gemacht, aber wie soll ihm das helfen, pünktlich zum Weihnachtsfest bei all den Kindern zu sein? Doch in diesem Moment erscheint eine Fee: „Wenn du die Aufgabe in diesem Buch lösen kannst, dann hast du einen Wunsch frei.“, sagt sie. „Doch Achtung! Eine Hexe hat die Rechenarten verhext, es ist alles nicht so, wie es scheint.“ Mit diesen Worten verschwindet sie wieder. Der Weihnachtsmann schaut nun mit mehr Elan ins Buch.



*Die Aufgabe löst sich fein,
Doch Min ist Plus und Plus ist Mal!
Die Aufgabe sei wie folgt:*

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \odot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Der Weihnachtsmann schaut kurz hoch und denkt nach. Normale Matrix-Vektor-Multiplikation und Skalar-Vektor-Multiplikation hat er schon mal gesehen, die gehen so:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{bmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{bmatrix}.$$

„Mit $\odot$ ist nun das neue Mal bezeichnet. Jetzt muss ich also nur in den mir vertrauten Multiplikationen jedes Pluszeichen durch das Minimum der beiden Summanden ersetzen und jedes Malzeichen durch Plus!“, denkt er und liest weiter:

*Für all die Buchstaben
Lassen sich Zahlen schreiben,
Schaffst du es nicht,
Musst du für immer hier bleiben.*

*Doch eine kleine Hilfe
Sei dir gegönnt:
Zehn Eigenschaften,
Doch nur die eine stimmt!*

„Alles klar! Ich muss aus den folgenden Eigenschaften diejenige auswählen, die auf jede Lösung der Gleichung zutrifft.“ Welche Antwort ist die richtige?

Antwortmöglichkeiten:

1. $\lambda < 0, x < y$
2. $\lambda < 0, x = y$

3. $\lambda < 0, x > y$
4. $0 \leq \lambda \leq 4, x < y$
5. $0 \leq \lambda \leq 4, x = y$
6. $0 \leq \lambda \leq 4, x > y$
7. $\lambda > 4, x < y$
8. $\lambda > 4, x = y$
9. $\lambda > 4, x > y$
10. Es gibt keine Lösung.

Projektbezug:

Die Rechenarten sind nicht verhext. Das Rechnen mit $(\min, +)$ statt $(+, \cdot)$ nennt man tropische Algebra. Die Berechnung von Eigenwerten in der Min-Plus-Algebra spielt eine wichtige Rolle bei der Lösung gewisser diskreter Optimierungsprobleme, insbesondere bei Systemen von Einzelprozessen, die aufeinander warten müssen. Eine allgemeinverständliche Einführung zu dieser Thematik findet man in

[C. Poppe, Fahrplanalgebra, *Spektrum der Wissenschaft* **11** (1995) 20–24].

4.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9, $\lambda > 4, x > y$

Die Lösungsmenge besteht aus allen Tripeln (x, y, λ) mit

$$\lambda = 4.5 \quad \text{und} \quad x - y = 3.5.$$

Man kann dies wie folgt herleiten:

Ersetzen der Rechenarten ergibt

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5 \odot x) \oplus (8 \odot y) \\ (1 \odot x) \oplus (6 \odot y) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \min(5 + x, 8 + y) \\ \min(1 + x, 6 + y) \end{bmatrix}$$



und

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda + x \\ \lambda + y \end{bmatrix}$$

Es ist also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \min(5 + x, 8 + y) &= \lambda + x \\ \min(1 + x, 6 + y) &= \lambda + y \end{aligned}$$

zu lösen. Subtraktion von y in beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \min(5 + x, 8 + y) - y &= \lambda + x - y \\ \min(1 + x, 6 + y) - y &= \lambda + y - y. \end{aligned}$$

Der Term $-y$ kann auf der linken Seite in das Minimum gezogen werden, was man sich zum Beispiel anhand von Waagschalen verbildlichen kann:

$$\begin{aligned} \min(5 + x - y, 8 + y - y) &= \lambda + x - y \\ \min(1 + x - y, 6 + y - y) &= \lambda + y - y. \end{aligned}$$

Mit der neuen Variablen $z = x - y$, die den Unterschied zwischen x und y beschreibt, erhalten wir das neue System

$$\begin{aligned} \min(5 + z, 8) &= \lambda + z \\ \min(1 + z, 6) &= \lambda. \end{aligned} \tag{1}$$

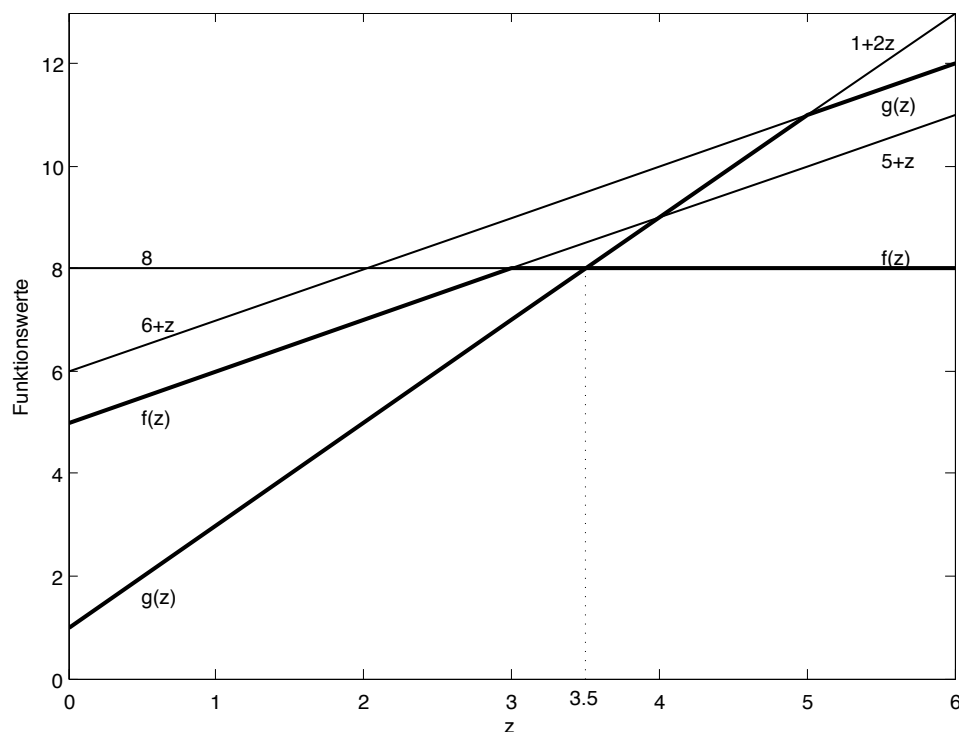
Ersetzen von λ in der ersten Gleichung durch die zweite ergibt

$$\begin{aligned} \min(5 + z, 8) &= \min(1 + z, 6) + z \\ &= \min(1 + 2z, 6 + z). \end{aligned}$$

Wir müssen also die Zahl z finden, für die die beiden Funktionen

$$f(z) = \min(5 + z, 8) \quad \text{und} \quad g(z) = \min(1 + 2z, 6 + z)$$

den gleichen Wert liefern. Zeichnet man die Funktionen $5 + z, 8, f(z), 1 + 2z, 6 + z, g(z)$ in ein Koordinatensystem, sieht man Folgendes:



Man kann ablesen, dass $z = 3.5$ ist; x ist also um 3.5 größer als y . Außerdem ergibt sich aus der Gleichung (1), dass $\lambda = \min(1 + 3.5, 6) = 4.5$. Somit ist Antwort Nr. 9 ($\lambda > 4, x > y$) richtig.

Das gegebene Problem bestand darin, die Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2×2 -Matrix A über der Min-Plus-Algebra zu berechnen. Diese Algebra ist auch unter dem Namen *Tropischer Semiring* bekannt. Man weiß, dass jede $n \times n$ -Matrix genau einen tropischen Eigenwert λ besitzt, nämlich λ ist die minimale normierte Zykellänge im gerichteten Graphen der Matrix $A = (a_{ij})$. In diesem Graphen hat die Kante von i nach j das Gewicht a_{ij} , und die Länge eines Zyklus ist die Summe aller Gewichte ihrer Kanten, dividiert durch die Zahl der Kanten im Zykel. In unserem Beispiel ist dies $(1 + 8)/2 = 4.5$.

Wenn man den Eigenwert λ erst einmal kennt, lässt sich der Eigenraum $\{x : A \odot x = \lambda \odot x\}$ relativ leicht bestimmen. Das Buch



[R. Cuninghame-Green: Minimax Algebra. Springer Verlag, Berlin 1979]

enthält dazu viele Einzelheiten. Eine neuere Perspektive findet sich in

[M. Akian, R. Bapat and S. Gaubert: Perturbation of eigenvalues of matrix pencils and optimal assignment problem. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 339 (2004) 103–108].



5 Dächertour

Autor: Christian Liebchen

Projekt: B15

5.1 Aufgabe

In Zeiten der Globalisierung wollen sich auch die deutschen Nikolause internationalen Trends öffnen, insbesondere angelsächsischen. So haben 12 Nikolause beschlossen, in diesem Jahr ihre Geschenke durch die Schornsteine zu den Kindern zu bringen - nicht jedoch ohne strikte Einhaltung der strengsten deutschen Sicherheitsvorschriften: Ein Nikolaus muss stets oben am Schornsteinkopf bereit stehen, um seinem womöglich in Schwierigkeiten geratenen Kollegen wieder nach oben zu helfen. Es müssen also Teams, bestehend aus jeweils genau zwei Nikolausen, gebildet werden, die heute Abend noch ihre Pionierleistung vollbringen wollen.

Als wäre die neue Distributionstechnik noch nicht schwierig genug, so sind auch die Nikolause allen Facetten zwischenmenschlicher Beziehungen ausgesetzt. Die Nikolause 1 und 2 bestehen jeder darauf, wenn überhaupt, dann nur mit einem der Nikolause 3 oder 4 ein Team zu bilden, insbesondere also auch nicht untereinander. Ähnlich geht Nikolaus 5 nur gemeinsam mit Nikolaus 6 oder 7; Nikolaus 8 nur mit Nikolaus 9 oder 10 auf Dächertour. Für die Nikolause 6 und 7 wäre es aber auch vollkommen in Ordnung, gemeinsam ein Team zu bilden oder auch mit Nikolaus 4 loszuziehen. Und wenn es denn unbedingt sein müsste, dann würde Nikolaus 7 sogar noch mit Nikolaus 3 gehen, aber bitte nicht mit einem der anderen Kollegen. Die Nikolause 11 und 12 sind schließlich am flexibelsten: Sie können gemeinsam mit den Nikolausen 3, 9 und 10, oder auch untereinander ein Team bilden; Nikolaus 12 sogar noch mit Nikolaus 4.

In den Teams gibt es keinen ersten oder zweiten Nikolaus, beide sind jeweils gleichberechtigt. Und ein Team kann nur dann gebildet werden, wenn keiner der beiden Nikolause den anderen als unerwünschten Partner benennt - sei es explizit, oder implizit, indem er sagt, dass er "nur" mit bestimmten anderen zusammen gehen werde.



Stellt euch folgende Verfahrensweise zur Bildung von Teams vor:

Die Nikolause geben sich eine Reihenfolge und stellen sich nacheinander auf - nicht notwendigerweise aufsteigend nach ihren Personalnummern. Gemäß der jeweils festgelegten Reihenfolge wählt der nächste noch ungebundene Nikolaus einen Partner aus, mit dem er sich verträgt und der in noch keinem Team gebunden ist; gegebenenfalls findet er jedoch keinen solchen Partner mehr. Danach ist einfach der nächste Nikolaus an der Reihe. Wichtig ist, dass kein auf diese Weise gebildetes Team im Nachhinein wieder aufgebrochen werden darf.

Frage: Wie viele Teams lassen sich mittels dieses Verfahrens minimal und maximal bilden, d.h. unter Anwendung unterschiedlicher Reihenfolgen der Nikolause?

Antwortmöglichkeiten:

1. 3 Teams; 3 Teams
2. 3 Teams; 4 Teams
3. 3 Teams; 5 Teams
4. 3 Teams; 6 Teams
5. 4 Teams; 4 Teams
6. 4 Teams; 5 Teams
7. 4 Teams; 6 Teams
8. 5 Teams; 5 Teams
9. 5 Teams; 6 Teams
10. 6 Teams; 6 Teams

Projektbezug:

Der Aufgabe liegt ein Basisproblem aus dem Gebiet der kombinatorischen Optimierung zu Grunde. Die meisten Projekte der Application Area B sind auf ausgefeiltere Probleme und Methoden dieses Gebietes spezialisiert.

5.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6

Bei der Teambildung der Nikolause handelt es sich um ein Zuordnungsproblem (engl. Matching) aus der mathematischen Teildisziplin der Kombinatorischen Optimierung. In dieser werden Praxisprobleme häufig in Form von Graphen veranschaulicht.

Ein Graph besteht grob gesprochen aus Kullern, von denen ausgewählte Paarungen durch Linien miteinander verbinden werden. Die Kuller heißen dabei Knoten und die Linien Kanten.

In unserer Aufgabenstellung entspricht jeder Nikolaus einem Knoten. Die Knoten werden also zweckmäßigerweise von 1 bis 12 nummeriert. Wenn ein Paar von Nikolausen grundsätzlich teamfähig ist, dann werden ihre beiden Knoten durch eine Kante miteinander verbunden. Als Ergebnis dieses Modellierungsschritts steht dann der ungerichtete Graph¹ in Bild 1.

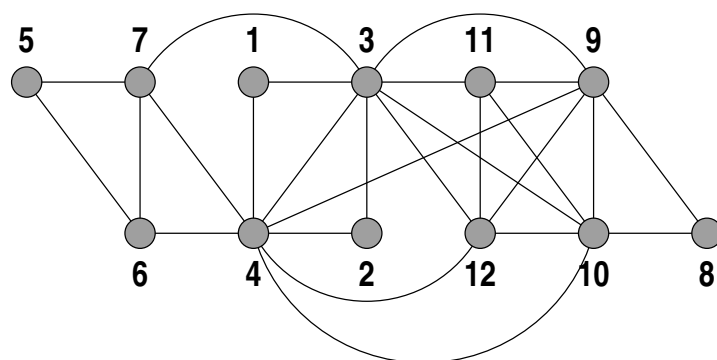


Bild 1: Modellierungsergebnis

¹Für eine kurze Diskussion anderer, streng genommen jedoch nicht ganz zutreffenden Lesarten der Aufgabenstellung, siehe Anhang.



Gemäß Aufgabenstellung sollen nun „Teams bestehend aus jeweils genau zwei Nikolausen gebildet werden“. Da in dem beschriebenen Graphenmodell alle zulässigen Teampaarungen als Kante vorkommen, übersetzt sich diese Aufgabe wie folgt:

Wähle eine (möglichst große) Teilmenge der Kanten aus, so dass jeder Knoten an höchstens einer der ausgewählten Kanten beteiligt ist. Würde für einen Knoten mehr als eine Kante ausgewählt, so müsste der entsprechende Nikolaus in zwei Teams seinen Dienst tun.

Nun zu dem bei der Teambildung anzuwendenden Verfahren. Als erstes kann festgestellt werden, dass für jede Auswahl von drei Kanten jeweils noch mindestens eine andere Kante existiert, von der keiner ihrer beiden Endknoten an einer der drei ausgewählten Kanten beteiligt ist.

Folgende Reihenfolge der Nikolause erlaubt es, lediglich vier Teams zu bilden:

- 3 (wählt 7 als Partner)
- 4 (wählt 6 als Partner)
- 9 (wählt 11 als Partner)
- 10 (wählt 12 als Partner)
- und irgendwie weiter

Dann lässt sich leicht beobachten, dass die folgenden Nikolause noch ohne Partner sind:

1, 2, 5, 8.

(selbst schuld – was sind sie auch so wählerisch!)

In dem Graphen existiert jedoch zwischen keinen dieser Knoten eine Kante; mit diesen vier Nikolausen kann also kein Team mehr gebildet werden.

Wenn sich die Nikolause hingegen die folgende alternative Reihenfolge geben

- 1 (wählt 4 als Partner)
- 2 (wählt 3 als Partner)
- 3 (ist schon in einem Team)
- 4 (ist schon in einem Team)

- 5 (wählt 6 als Partner)
- 6 (ist schon in einem Team)
- 7 (kann kein Team mehr bilden)
- 8 (wählt 9 als Partner)
- 9 (ist schon in einem Team)
- 10 (wählt 11 als Partner)
- 11 (ist schon in einem Team)
- 12 (kann kein Team mehr bilden)

dann werden 5 Teams gebildet – und nur die Nikolause 7 und 12 haben in diesem Jahr frei.

Die eigentlich spannende Frage ist nun, ob es eine Reihenfolge gibt, die sogar sechs Team ermöglichen würde. Hmmh, was könnte ich hier schreiben, das euch überzeugen würde? Habt ihr eine Idee?

Zuerst die schlechte Nachricht: Ein wirklich nahe liegendes und kompaktes Zertifikat dafür, dass es nicht besser gehen kann, kenne ich leider auch nicht. Die gute Nachricht ist, dass ich dennoch ein Zertifikat angeben an – nur liegt dies nicht wirklich auf der Hand. Versuchen wir es dennoch mit Hilfe von Bild 2.

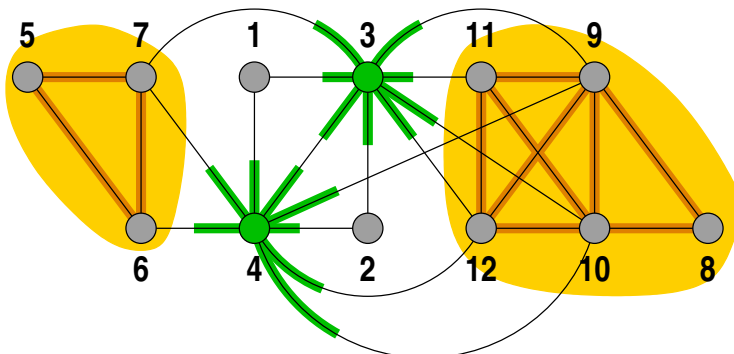


Bild 2: Zertifikat, dass mind. zwei Nikolaus frei haben müssen



Die erste Beobachtung ist, dass jeder Knoten in höchstens einer ausgewählten Kante vorkommen darf – ansonsten wäre ja ein Nikolaus zwei Teams zugeordnet. Auf den Knoten 3 bezogen heißt dies konkret:

Von den Kanten $\{3, 1\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 7\}$, $\{3, 9\}$, $\{3, 10\}$, $\{3, 11\}$ und $\{3, 12\}$ kann in jeder zulässigen Teameinteilung maximal eine Kante ausgewählt werden, also ein Team gebildet werden. Analoges gilt für die acht Kanten des Knotens Nummer 4. Von diesen insgesamt 15 möglichen Teams können also in jeder einzelnen Teameinteilung insgesamt maximal nur jeweils zwei ausgewählt werden!

Bleiben schließlich noch die Kanten in den beiden orange unterlegten Bereichen. Betrachten wir zunächst die Nikolause 5, 6 und 7. Von den drei zwischen ihnen verlaufenden Kanten kann in jeder zulässigen Teameinteilung selbstverständlich bestenfalls eine ausgewählt werden – aus drei Nikolausen lassen sich schlichtweg keine zwei Teams mit jeweils zwei Nikolausen bilden. Somit kann von den Kanten $\{5, 6\}$, $\{5, 7\}$ und $\{6, 7\}$ immer nur eine ausgewählt werden. Analog können von den zwischen den Knoten 8-12 verlaufenden Kanten stets maximal zwei Kanten ausgewählt werden.

Damit haben wir aber eine Aussage für jede einzelne Kante getroffen: Ausgewählt werden dürfen also

- maximal eine Kante zum Knoten 3,
- maximal eine Kante zum Knoten 4,
- maximal eine Kante im Bereich 5-7 und
- maximal zwei Kanten im Bereich 8-12.

Dies ergibt insgesamt maximal fünf Teams, die gebildet werden können.

Noch eine letzte Anmerkung:

Dass bei der Reihenfolge 3, 4, 9, 10 schon nach vier Teams Schluss ist, soll verdeutlichen, dass es in der kombinatorischen Optimierung Probleme gibt, bei denen man nicht „einfach drauf los“ (gierig, bzw. englisch „greedy“) vorgehen darf, wenn man die bestmögliche Lösung erreichen will. Vielmehr müssen unter Umständen einzelne Entscheidungen gezielt revidiert werden. Im Beispiel: Revidiere die Entscheidung, ein Team $\{4, 6\}$ zu bilden zugunsten der beiden

möglichen Teams $\{2, 4\}$ und $\{5, 6\}$. Das Matchingproblem ist ein durchaus anspruchsvolles Optimierungsproblem, für das beherrschbare Strategien zum revidieren von Entscheidungen bekannt sind („polynomielle Laufzeit“). Für andere Optimierungsprobleme riskieren jedoch selbst die besten bekannten Verfahren, sich praktisch endlos im Revidieren von revidierten revidierten Entscheidungen zu verheddern („exponentielle Laufzeit“).

Anhang

Im Forum ist deutlich geworden, dass es nicht ganz leicht war, überhaupt erst den Graphen in Bild 1 anhand des Aufgabentextes aufzubauen. Formulierungen wie „am flexibelsten“, „nur“ und „auch“ mögen dabei in der Tat ein zweites Nachdenken erfordert haben. Zu guter letzt sei daher angemerkt, dass sehr viele andere Graphen auf dasselbe Ergebnis („4 bzw. 5 Teams“) geführt hätten. So bleibt die gesamte oben geführte Diskussion unverändert auch gültig für den Graphen in Bild 3.

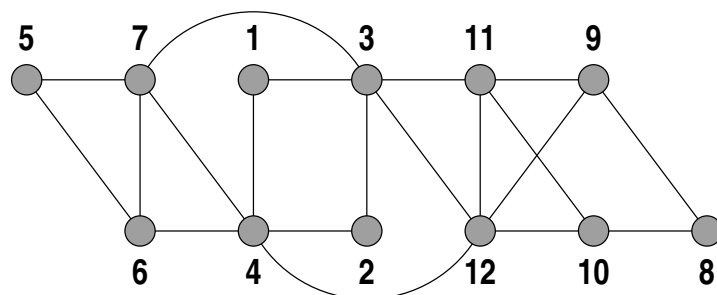


Bild 3: Ein anderer Graph

Auf diesen Graphen kommt man übrigens, wenn man nur solche Kanten einfügt, von denen für einen der beteiligten Nikolaus im Text explizit gesagt wurde, dass für ihn dieses Team möglich ist.



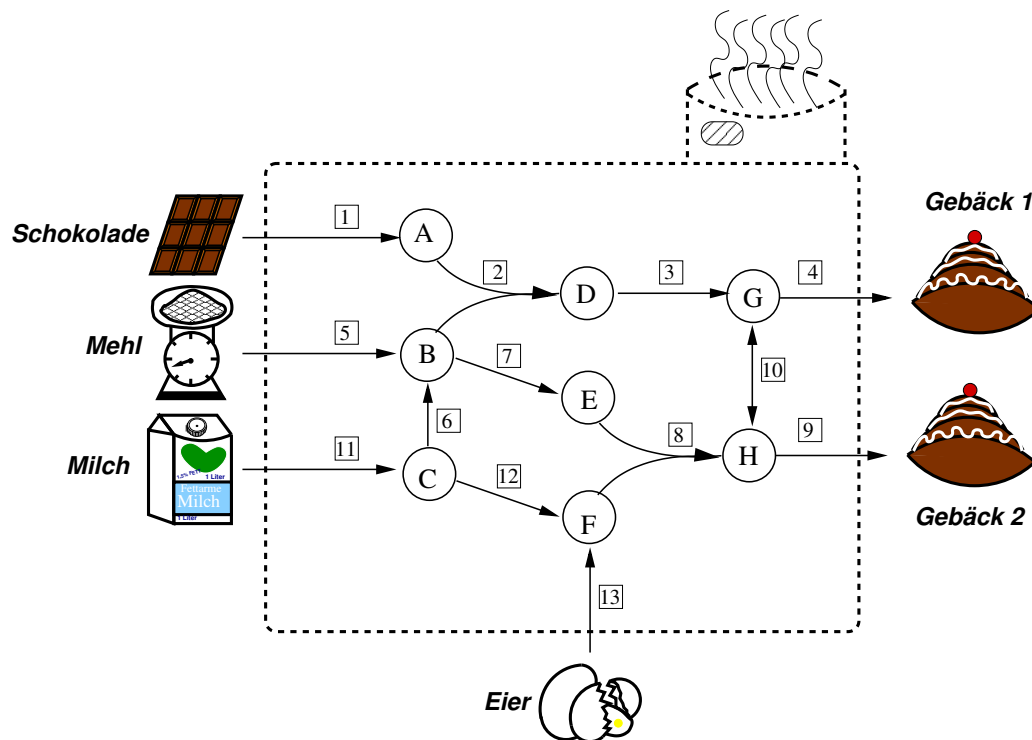
6 Nikolausgebäck

Autoren: A. Bockmayr, A. Larhlimi

Projekt: A8

6.1 Aufgabe

Um am Nikolaustag die Kinder mit seinen Gaben reich beschenken zu können, muss der Nikolaus sich rechtzeitig um die Herstellung von Nikolausgebäck kümmern. Im Laufe der Jahrhunderte wurden viele verschiedene Backrezepte erfunden, ein kleiner Ausschnitt davon ist in dem folgenden Netzwerk dargestellt:



Zunächst sind da die Zutaten wie Schokolade, Mehl, Milch, Eier, die in beliebiger Menge zur Verfügung stehen. In einer Reihe von Arbeitsschritten, die durch die Pfeile 1, ..., 13 dargestellt sind, können daraus Zwischenprodukte A, B, ..., H hergestellt werden, aus denen am Ende das Gebäck entsteht.

Da der Nikolaus sehr beschäftigt ist, sucht er nach minimalen Rezepten, um eine oder mehrere Gebäcksorten herzustellen. Ein *Rezept* ist dabei eine nichtleere Menge von Arbeitsschritten mit den folgenden Eigenschaften:

1. Ein Zwischenprodukt kann nur verwendet werden, wenn es zuvor hergestellt wurde; bei den Arbeitsschritten 2 und 8, die zwei Zwischenprodukte verwenden, müssen diese beide vorhanden sein.
2. Ein Zwischenprodukt darf nur hergestellt werden, wenn es in einem nachfolgenden Arbeitsschritt auch verbraucht wird.

Innerhalb eines Rezepts darf Arbeitsschritt 10 in die eine oder die andere Richtung durchlaufen werden, nicht aber in beide Richtungen gleichzeitig. Das Rezept heißt *minimal*, wenn man keinen Arbeitsschritt auslassen kann, ohne die Bedingung 1 oder 2 zu verletzen. Ein Beispiel für ein minimales Rezept ist die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Frage a) Wie viele minimale Rezepte gibt es?

Knecht Ruprecht, der Gehilfe des Nikolaus, kann die zweite Gebäcksorte überhaupt nicht leiden. Deshalb überlegt er, wie er die Herstellung dieses Gebäcks verhindern kann. Eine Möglichkeit wäre, die Auslieferung in Arbeitsschritt 9 zu blockieren. Das aber wäre zu auffällig. Wenn Schritt 9 nicht blockiert werden kann, müssen mindestens zwei andere Schritte blockiert werden, um die Herstellung der ungeliebten Gebäcksorte zu verhindern, z.B. $\{8, 10\}$.

Frage b) Wie viele solche zweielementige Blockademengen gibt es?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt 8 minimale Rezepte und 10 zweielementige Blockademengen.
2. Es gibt 8 minimale Rezepte und 12 zweielementige Blockademengen.
3. Es gibt 10 minimale Rezepte und 8 zweielementige Blockademengen.



4. Es gibt 10 minimale Rezepte und 10 zweielementige Blockademengen.
5. Es gibt 10 minimale Rezepte und 12 zweielementige Blockademengen.
6. Es gibt 10 minimale Rezepte und 14 zweielementige Blockademengen.
7. Es gibt 12 minimale Rezepte und 8 zweielementige Blockademengen.
8. Es gibt 12 minimale Rezepte und 10 zweielementige Blockademengen.
9. Es gibt 12 minimale Rezepte und 12 zweielementige Blockademengen.
10. Es gibt 14 minimale Rezepte und 10 zweielementige Blockademengen.

Projektbezug:

Die in der Aufgabe betrachteten Fragestellungen entstehen bei der mathematischen Analyse metabolischer Netzwerke, die den Stoffwechsel in einem Organismus beschreiben. Zum einen sucht man minimale Reaktionswege, um bestimmte wichtige Stoffe zu produzieren, zum anderen einfache Möglichkeiten, die Produktion eines unerwünschten Stoffes zu verhindern.

6.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8

Es gibt 12 minimale Rezepte und 10 zweielementige Blockademengen.

Um die minimalen Rezepte zu bestimmen, halten wir folgende Eigenschaften fest:

1. Die Schritte 1, 2 und 3 bedingen sich wechselseitig.
2. Die Schritte 7 und 8 bedingen sich wechselseitig.
3. Für jedes minimale Rezept gilt:
 - (a) Wenn Schritt 12 beteiligt ist, dann auch die Schritte 7 und 8, nicht aber Schritt 13.
 - (b) Wenn Schritt 6 beteiligt ist, dann auch Schritt 11, nicht aber Schritt 5.



- (c) Ist Schritt 10 an der Umwandlung von G in H beteiligt, dann auch die Schritte 1, 2 und 3.
 - (d) Ist Schritt 10 an der Umwandlung von H in G beteiligt, dann auch die Schritte 7 und 8.
4. Jedes minimale Rezept führt zur Herstellung von mindestens einer der beiden Gebäcksorten.

Auf diese Beobachtungen gestützt suchen wir zuerst die minimalen Rezepte, die zur Herstellung von Gebäck 1 führen (d.h. Schritt 4 beinhalten). Dann bestimmen wir die minimalen Rezepte, die zur Herstellung von Gebäck 2 führen (d.h. Schritt 9 beinhalten).

Abb. 1 veranschaulicht die Gesamtheit der möglichen minimalen Rezepte.

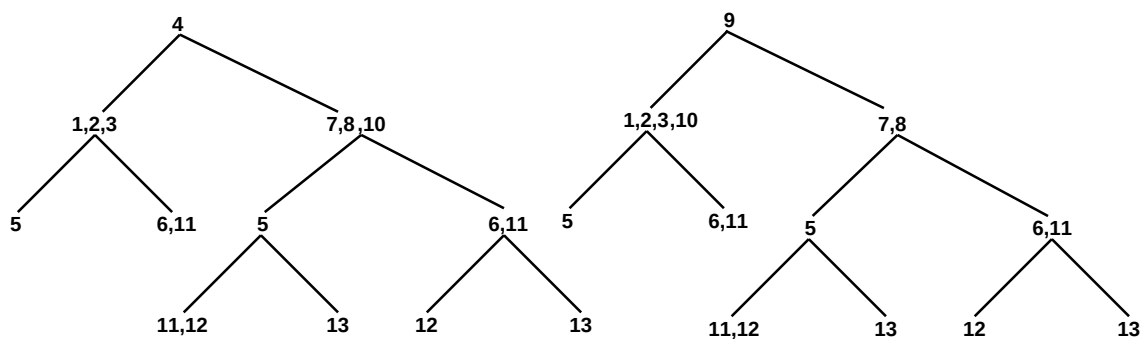


Abbildung 1: Minimale Rezepte

In Mengenschreibweise erhalten wir von links nach rechts:

1. $\{1,2,3,4,5\}$
2. $\{1,2,3,4,6,11\}$
3. $\{4,5,7,8,10,11,12\}$
4. $\{4,5,7,8,10,13\}$
5. $\{4,6,7,8,10,11,12\}$
6. $\{4,6,7,8,10,11,13\}$
7. $\{1,2,3,5,9,10\}$



8. $\{1,2,3,6,9,10,11\}$
9. $\{5,7,8,9,11,12\}$
10. $\{5,7,8,9,13\}$
11. $\{6,7,8,9,11,12\}$
12. $\{6,7,8,9,11,13\}$

Die zweielementigen Blockademengen können aus Abb. 1 wie folgt bestimmt werden. Wir müssen sicherstellen, dass durch Blockade von nur zwei (von Schritt 9 verschiedenen) Schritten alle Rezepte zur Herstellung von Gebäck 2 verhindert werden. Dies ist entweder durch Blockade eines Schrittes aus der Menge $\{1, 2, 3, 10\}$ zusammen mit einem Schritt aus der Menge $\{7, 8\}$ möglich, oder durch Blockade von Schritt 5 zusammen mit einem Schritt aus der Menge $\{6, 11\}$.

Insgesamt ergeben sich $4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 10$ Möglichkeiten, nämlich

1. $\{1,7\}$
2. $\{1,8\}$
3. $\{2,7\}$
4. $\{2,8\}$
5. $\{3,7\}$
6. $\{3,8\}$
7. $\{10,7\}$
8. $\{10,8\}$
9. $\{5,6\}$
10. $\{5,11\}$

7 Die Schokoladen–Diät

Autor: Matthias Ehrhardt

7.1 Aufgabe

Uff, endlich ist Feierabend! Nach einem langen, anstrengenden Arbeitstag sitzt der Weihnachtsmann mit seinem Freund Mathis, einem Mathematiker, zusammen und sinniert bei einem Glas Rotwein über Gott und die Welt. Als sein Blick auf die vielen Schokoladen–Weihnachtsmänner fällt, muss er auch sogleich an den heute abgesprungenen Knopf seiner Weihnachtsmannjacke denken. Spontan fragt er seinen Freund Mathis:

„Kann man eigentlich abnehmen und gleichzeitig Schokolade essen?“

Mathis denkt kurz nach: „Klar, das ist prinzipiell möglich!“ und macht sich gleich daran, das Problem mathematisch zu formulieren.

Die Funktion $G(t)$ bezeichne das Gewicht des Weihnachtsmannes zur Zeit t . Sie erfüllt die *Differentialgleichung*

$$G'(t) = E(t) - A(t) - S(G(t)), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

wobei $E(t) \geq 0$ die Essensaufnahme–Funktion (in Kalorien pro Zeit), $A(t) \geq 0$ ein Maß für die körperliche Aktivität ist und $S(G(t)) \geq 0$ den Stoffwechsel modelliert, der vom Gewicht $G(t)$ abhängt. Mathis wählt die Funktion

$$S(G(t)) = \sigma G(t)^{3/4}, \quad (3)$$

wobei $\sigma > 0$ ein Parameter ist. Mathis erklärt: „Nun ist die einfachste *Diät–Strategie*, einfach die Essensaufnahme (z.B. Schokolade) und die Essensverbrennung (z.B. beim Geschenke verpacken / sortieren / stapeln) über ein überschaubares Zeitintervall als konstant anzusehen, d.h. zu mitteln.“ Mathis legt dieses Zeitintervall auf einen Tag fest und setzt die konstante Essensrate (Kalorien pro Tag) als $\bar{E}$ und analog die konstante Kalorien–Verbrennungsrate als $\bar{A}$ an, d.h.

$$[E(t) - A(t)]_{\text{Tag}} = \bar{E} - \bar{A} = \lambda, \quad (4)$$

wobei der Parameter λ im allgemeinen positiv ist: $\lambda > 0$. Einsetzen von (3), (4) in (2) liefert nun die Gleichung

$$G'(t) = \lambda - \sigma G(t)^{3/4}, \quad t \geq 0, \quad (5)$$



Dies ist eine *nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung*, die von 2 Parametern λ und σ abhängt. Sie besitzt keine elementare explizite Lösung, aber auch ohne Kenntnis dieser Lösung kann der Weihnachtsmann wichtige Erkenntnisse gewinnen.

Bei einer Diät ist man am Langzeitverhalten der Lösungen von (5) interessiert; es wird bestimmt durch sog. *Fixpunkte* (konstante Lösungen $G(t)$ für die gilt $G'(t) = 0$).

Frage 1: Was ist der Fixpunkt $\bar{G}$ von (5) (für festes λ und σ)?

Weiterhin ist wichtig, wie stabil sich die Lösung dicht am Fixpunkt verhält, d.h. wie wirken sich kleine Schwankungen $\varepsilon(t)$ des Körpergewichts aus? Dazu machen wir den sog. *Störungsansatz*

$$G(t) = \bar{G} + \varepsilon(t), \quad |\varepsilon(0)| \text{ viel viel kleiner als } \bar{G}, \quad (6)$$

wobei $\varepsilon(0)$ eine kleine Störung des Fixpunkts ist. Einsetzen von (6) in (5), Reihenentwicklung und Betrachten der linearen Terme in $\varepsilon(t)$ liefert die folgende lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\varepsilon'(t) = -R\varepsilon(t), \quad R = \frac{3\sigma}{4} \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{1/3} > 0. \quad (7)$$

Frage 2: Was ist der Grenzwert von $\varepsilon(t)$ für $t \rightarrow \infty$ (sprich: t geht nach unendlich), wenn sich $\varepsilon(t)$ als Lösung der Gleichung (6) wie folgt darstellen lässt?

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot e^{-Rt}, \text{ mit } \varepsilon_0 = \varepsilon(0) \text{ fest und wie in Gleichung (6) gegeben.} \quad (8)$$

Schließlich kann sogar das sog. globale Verhalten der Lösungen (d.h. wie entwickelt sich das Körpergewicht?) für positive Anfangsdaten $G(0) > 0$ anhand von (5) abgelesen werden:

Frage 3: Wie ist das Vorzeichen der Ableitung von G links/rechts vom Fixpunkt $\bar{G}$?

Die Ableitung von G (geschrieben $G'(t)$) hat dabei folgende Gestalt:

$$G'(t) = \varepsilon'(t), \quad (9)$$



wie sich schnell aus Gleichung (6) folgern lässt.

Zusatzfrage: Was bedeutet das eigentlich?



Antwortmöglichkeiten:

Dabei heißt z.B. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, dass der Grenzwert von $\varepsilon(t)$ gleich 0 ist für t geht nach unendlich.

1. Fixpunkt $\bar{G} = \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^{4/3}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, $G'(t) = \begin{cases} > 0, & G > \bar{G}, \\ < 0, & 0 < G < \bar{G}; \end{cases}$
2. Fixpunkt $\bar{G} = \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^{4/3}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, $G'(t) = \begin{cases} < 0, & G > \bar{G}, \\ > 0, & 0 < G < \bar{G}; \end{cases}$
3. Fixpunkt $\bar{G} = \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^{4/3}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ existiert nicht, $G'(t) = \begin{cases} > 0, & G > \bar{G}, \\ < 0, & 0 < G < \bar{G}; \end{cases}$
4. Fixpunkt $\bar{G} = \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^{4/3}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$, $G'(t) = \begin{cases} < 0, & G > \bar{G}, \\ > 0, & 0 < G < \bar{G}; \end{cases}$
5. Fixpunkt $\bar{G} = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{3/4}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, $G'(t) = \begin{cases} > 0, & G > \bar{G}, \\ < 0, & 0 < G < \bar{G}; \end{cases}$
6. Fixpunkt $\bar{G} = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{3/4}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, $G'(t) = \begin{cases} < 0, & G > \bar{G}, \\ > 0, & 0 < G < \bar{G}; \end{cases}$
7. Fixpunkt $\bar{G} = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{3/4}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ existiert nicht, $G'(t) = \begin{cases} > 0, & G > \bar{G}, \\ < 0, & 0 < G < \bar{G}; \end{cases}$
8. Fixpunkt $\bar{G} = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{3/4}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$, $G'(t) = \begin{cases} < 0, & G > \bar{G}, \\ > 0, & 0 < G < \bar{G}; \end{cases}$
9. Teilprobleme lösbar, aber nicht eindeutig;
10. mindestens ein Teilproblem nicht lösbar.

Projektbezug:

Mit der Formulierung und exakten oder numerischen Lösung sehr viel kom-

plexerer Differentialgleichungen, die bei der Modellierung physikalischer Vorgänge wie z.B. Schaltvorgängen in Halbleiterbauelementen auftreten, beschäftigen sich Wissenschaftler am DFG-Forschungszentrum MATHEON *Mathematik für Schlüsseltechnologien* in Berlin.

Bemerkung:

Ein komplexeres Modell ist durch die Stoffwechselfunktion

$$S(G) = \frac{AG}{1 + BG^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (10)$$

mit positiven Parametern A, B gegeben. Beide Modelle sind konsistent mit bekannten Daten über Diäten.

Referenz:

T.A. McMahon und J.T. Bonner, *On Size and Life*, Scientific American Library, New York, 1985, Seiten 64–66.

7.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 2

Lösung 1: Fixpunkt $\bar{G}$ von (4)

Konstante Lösung bedeutet $G'(t) = 0$ setzen in (4), d.h. $\bar{G}$ ist die Lösung von

$$0 = \lambda - \sigma \bar{G}^{3/4}$$

und somit ergibt sich $\bar{G} = \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^{4/3}$.

Lösung 2: Grenzwert von $\varepsilon(t)$ für $t \rightarrow \infty$

Aus der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\varepsilon'(t) = -R\varepsilon, \quad R > 0, \quad (6)$$

folgt wegen des Vorzeichens von R , dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ gilt.

Lösung 3: Vorzeichen der Ableitung von G links/rechts von $\bar{G}$

Man erkennt unmittelbar an (4):

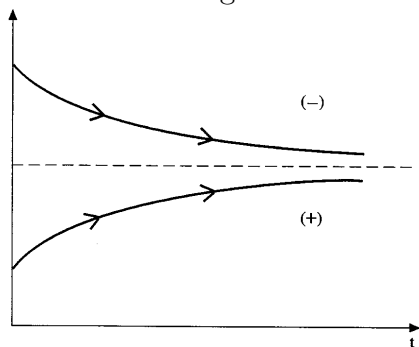
$$G'(t) = \begin{cases} < 0, & G > \bar{G}, \\ > 0, & 0 < G < \bar{G}. \end{cases}$$



Somit kann man folgern, dass alle Lösungen mit zunehmender Zeit monoton den Fixpunkt $\bar{G}$ erreichen, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \bar{G}, \quad G(0) > 0.$$

Dies ist in der folgenden Grafik skizziert:





8 Aufzugssteuerung

Autor: Andreas Tuchscherer

Projekt: B14

8.1 Aufgabe

Wir betrachten die Steuerung eines Aufzugs mit *Zielrufsystem*. Während ein Fahrgast in einem herkömmlichen System zunächst nur die gewünschte Fahrtrichtung eingibt, spezifiziert ein Fahrgast in einem Zielrufsystem schon bei Eingabe seines Fahrtwunsches (außerhalb des Aufzugs) die Zieletage. Insgesamt kennt man somit für jeden Fahrtwunsch die Startetage, die Zieletage und den Zeitpunkt der Eingabe.

Wir nehmen vereinfachend an, dass nur eine Person in den Aufzug passt. Zur Steuerung des Aufzugs stehen die folgenden Aktionen zur Verfügung:

- Einladen eines Passagiers auf der aktuellen Etage, falls der Aufzug leer ist
- Ausladen des geladenen Passagiers auf der aktuellen Etage, falls ein Passagier geladen und dies seine Zieletage ist
- Eine Etage nach oben oder eine Etage nach unten fahren, sofern sich der Aufzug nicht am entsprechenden Schachtende befindet
- Auf der aktuellen Etage warten

Die letzten beiden Aktionen erfordern jeweils eine Zeiteinheit. Wir gehen vereinfachend davon aus, dass das Be- und Entladen des Aufzugs keine Zeit erfordert.

Ein Fahrtwunsch hat eine Startetage, eine Zieletage und eine Zeit, zu der er auftritt und dem System bekannt wird. Diese nennen wir *Ankunftszeit*. Die *Wartezeit* eines Fahrtwunsches ist die Differenz zwischen der Zeit, zu der der zugehörige Passagier den Aufzug betritt, und der Ankunftszeit des Fahrtwunsches. Als Beispiel betrachten wir zwei Fahrtwünsche mit den Ankunftszeiten 1 und 2. Wenn diese zur Zeit 2 bzw. 5 eingeladen werden, so sind die Wartezeiten der Fahrtwünsche $2 - 1 = 1$ und $5 - 2 = 3$. Unser Ziel ist es, den Aufzug so zu steuern, dass die maximale Wartezeit, die ein Passagier



erdulden muss, so klein wie möglich ist. Im Beispiel beträgt die maximale Wartezeit 3.

Neue Fahrtwünsche treten nur zu ganzen Zeiteinheiten auf (Zeit $0, 1, 2, \dots$). Zu jeder ganzen Zeiteinheit kann aber höchstens ein neuer Fahrtwunsch kommen. Warten auf einer Etage mehrere Fahrgäste, muss von diesen als erstes immer derjenige mit der kleinsten Ankunftszeit bedient werden. Ein geladener Passagier verlässt den Aufzug nur dann, wenn seine Zieletage erreicht ist.

Wir nehmen an, dass jede Strategie zur Aufzugssteuerung einen geladenen Passagier immer umgehend zu der gewünschten Zieletage befördert. Eine Steuerungsstrategie ist also eindeutig durch ihr Verhalten bei leerem Aufzug definiert. Wir betrachten die folgenden Strategien zur Aufzugssteuerung:

F (First-In-First-Out) Zu jedem Zeitpunkt, zu dem ein neuer Fahrtwunsch bekannt wird und der Aufzug leer ist, und immer, wenn der Aufzug leer wird, plane wie folgt: Sofern kein Passagier wartet, bleibt der Aufzug auf der aktuellen Etage stehen. Sofern mindestens ein Fahrtwunsch wartet, wird als nächstes und schnellstmöglich der Fahrtwunsch bedient, der die kleinste Ankunftszeit hat (also schon am längsten wartet). Dieser Fahrtwunsch ist eindeutig, da zu jedem Zeitpunkt höchstens ein neuer Fahrtwunsch auftritt.

N (Nächster Nachbar) Zu jedem Zeitpunkt, zu dem ein neuer Fahrtwunsch bekannt wird und der Aufzug leer ist, und immer, wenn der Aufzug leer wird, plane wie folgt: Wartet gegenwärtig kein Passagier, bleibt der Aufzug auf der aktuellen Etage stehen. Wartet mindestens ein Fahrgast, wird als nächstes ein Fahrtwunsch bedient, dessen Startetage minimale Entfernung zur aktuellen Etage hat. Falls die nächstgelegene Etage mit wartendem Fahrgast nicht eindeutig ist, wird von den Fahrtwünschen mit nächstgelegener Startetage als nächstes derjenige bedient, der die kleinste Ankunftszeit hat.

Als Beispiel für die Arbeitsweise von N betrachten wir ein System mit 8 Etagen ($0, 1, \dots, 7$). Der Aufzug befindet sich auf Etage 3. Fahrtwunsch 1 wartet auf Etage 6 und Fahrtwunsch 2 wartet auf Etage 1. Fahrtwunsch 2 ist also der Fahrtwunsch mit minimaler Entfernung zur Etage 3 (Etagenabstand ist 2). Dieser wird also (nach bisheriger Planung) als erstes bedient. Wenn nun eine Zeiteinheit später der Fahrtwunsch 3 mit Startetage 2 und Zieletage 7 auftritt, wird neu geplant.



Zu diesem Zeitpunkt befindet sich der Aufzug auf Etage 2, d. h. Fahrtwunsch 3 ist nun am nächsten und wird daher als erstes bedient. Treten keine weiteren Fahrtwünsche auf, wird im Anschluss (Neuplanung erfolgt, wenn der Aufzug auf Etage 7 leer wird) Fahrtwunsch 1 bedient und Fahrtwunsch 2 als letztes.

H (Hellseher) Diese Strategie stellt eine Ausnahme dar, denn sie kennt alle auftretenden Passagiere schon im Voraus. Entsprechend wird der Aufzug immer bestmöglich gesteuert. Das heißt, diese Strategie kann immer aus allen Möglichkeiten zur Aufzugssteuerung eine solche auswählen, die die maximale Wartezeit eines Fahrtwunsches so klein wie möglich hält. Insbesondere können auch schon Etagen angefahren werden, ohne dass dort ein Passagier wartet.

FH (Fairer Hellseher) Diese Strategie arbeitet genauso wie H, abgesehen davon, dass der Aufzug nur dann bewegt werden darf, wenn gerade ein Passagier wartet oder sich im Aufzug befindet. Andersherum heißt das, wenn der Aufzug leer ist und kein Passagier wartet, dann bleibt der Aufzug auf der aktuellen Etage stehen. Unter Berücksichtigung dieser Nebenbedingung wird der Aufzug wie bei Strategie H so gesteuert, dass die maximale Wartezeit so klein wie möglich ist.

Konkret betrachten wir ein Gebäude mit vier Etagen. Diese bezeichnen wir mit 0, 1, 2 und 3. Zur Zeit 0 ist der Aufzug leer und befindet sich auf Etage 0. Aktuell ist der folgende Fahrtwunsch bekannt: Fahrtwunsch 1 mit Startetage 1, Zieletage 3 und Ankunftszeit 0.

Im Folgenden werden nach und nach weitere Fahrtwünsche bekannt. Da neue Fahrtwünsche nur zu ganzen Zeiteinheiten auftreten, kommt der nächste Fahrtwunsch frühestens zu Zeit 1. Allerdings ist völlig unbekannt, welche Fahrtwünsche auftreten werden.

Von den folgenden Aussagen ist nur eine richtig. Welche ist es?

1. Wenn nur ein beliebiger weiterer Fahrtwunsch auftritt, kann dieser so ungünstig sein, dass die maximale Wartezeit, die die Strategie F erzielt, mindestens 6 beträgt.
2. Wenn höchstens fünf weitere Fahrtwünsche auftreten, gibt es mindestens eine Situation, in der N bzgl. der maximalen Wartezeit besser abschneidet als H.



3. Wir nehmen an, dass die Startetage von Fahrtwunsch 1 nicht Etage 1 ist, sondern Etage 2. Wenn beliebig viele Fahrtwünsche kommen können, kann die Wartezeit von Fahrtwunsch 1 bei Verwendung der Strategie N höchstens 4 werden.
4. Wenn nur ein beliebiger weiterer Fahrtwunsch auftritt, ist die maximale Wartezeit, die die Strategie F erzielt, höchstens zweimal so groß wie die maximale Wartezeit von FH.
5. Wenn nur ein beliebiger weiterer Fahrtwunsch auftritt, ist die maximale Wartezeit, die die Strategie F erzielt, höchstens 2,5 mal so groß wie die maximale Wartezeit von H.
6. Wir nehmen an, dass nur ein weiterer Fahrtwunsch mit Startetage 0 und Zieletage 1 auftritt (Ankunftszeit unbekannt). Dann gibt es eine Strategie, die die Zukunft nicht kennt, so dass die erzielte maximale Wartezeit in jedem Fall höchstens zweimal so groß wie die von FH ist.
7. Wenn höchstens noch zwei weitere Fahrten auftreten, ist F bzgl. der maximalen Wartezeit immer besser als N.
8. Wenn höchstens noch zwei weitere Fahrten auftreten, ist N bzgl. der maximalen Wartezeit immer besser als F.
9. Wir nehmen an, dass das System leer ist, d. h. es ist noch kein Fahrtwunsch vorhanden. Tritt nur eine Fahrt auf (frühestens zur Zeit 1), so kann die maximale Wartezeit bei N höchstens dreimal so groß werden wie bei H.
10. Wir nehmen an, dass das System leer ist, d. h. es ist noch kein Fahrtwunsch vorhanden. Wenn alle Fahrtwünsche Etage 1 als Startetage haben, kann F bzgl. maximaler Wartezeit schlechter sein als FH.

Projektbezug:

Die Steuerung einer Gruppe von Personenaufzügen mit Zielrufsystem ist ein Thema, mit dem wir uns aktuell im MATHEON beschäftigen. Anders als in der Aufgabe müssen natürlich Systeme mit mehreren Aufzügen betrachtet werden, in die auch mehrere Passagiere passen. Bei unseren Untersuchungen versuchen wir, Antworten auf die folgenden Fragen zu finden:



- Was sind gute Strategien zur Steuerung von Aufzugsgruppen mit Zielrufsystem?
- Sind Zielrufsysteme herkömmlichen Aufzugssystemen überlegen? Wenn ja, in welchem Ausmaß?

Probleme wie die Aufzugssteuerung, bei denen man zukünftige Ereignisse nicht kennt, werden *Online-Optimierungsprobleme* genannt. Um eine gegebene *Online*-Strategie, die ohne Kenntnis der Zukunft arbeitet, zu beurteilen, verwendet man häufig die so genannte *kompetitive Analyse*. Wie in der Aufgabe vergleicht man dabei die Online-Strategie mit einer optimalen *Offline*-Strategie, die die Zukunft kennt. Üblicherweise untersucht man hierbei aber nicht so spezielle Situationen wie in der Aufgabe, sondern versucht allgemeinere Ergebnisse zu zeigen.

8.2 Lösung

Richtige Lösung: Aussage 6

Die einzige korrekte Aussage ist Antwort 6. Im Folgenden wird begründet warum diese Aussage richtig ist und die anderen falsch sind.

1. Strategie F bedient immer zunächst Fahrtwunsch 1. Der Aufzug lädt diesen zu Zeit 1 ein und ist zu Zeit 3 auf Etage 3 und der Passagier steigt wieder aus. Die Wartezeit von Fahrtwunsch 1 beträgt also 1. Kommt der zweite Fahrtwunsch erst zu Zeit 3 oder später, so ist seine Wartezeit höchstens 3, da der Aufzug jede Etage in dieser Zeit erreichen kann und den Fahrtwunsch unmittelbar bedient. Offenbar kommt der zweite Fahrtwunsch im ungünstigsten Fall gleich zu Zeit 1 und hat Startetage 0. Dieser wird dann zu Zeit 6 eingeladen. Das heißt, seine Wartezeit beträgt $6 - 1 = 5$. Diese Antwort ist daher falsch.
2. Laut Definition kennt Strategie H die Zukunft und steuert den Aufzug immer so, dass die maximale Wartezeit so klein wie möglich ist. Diese Strategie ist also optimal, egal wie viele Fahrtwünsche noch auftreten, d. h. es kann keine Strategie eine kleinere maximale Wartezeit erzielen. Daher ist die Antwort falsch.



3. Solange man zu den ungeraden Zeiten $1, 3, 5, \dots$ jeweils einen Fahrtwunsch mit Startetage 1 und Zieletage 0 kommen lässt, wird Fahrtwunsch 1 nie bedient. Der Aufzug befindet sich dann nämlich zu jedem ungeraden Zeitpunkt auf Etage 1; der gerade neu aufgetretene und hier wartende Fahrtwunsch wird jeweils als nächstes bedient. Solange diese Fahrtwünsche kommen, pendelt der Aufzug also immer zwischen Etage 0 und Etage 1. Die Wartezeit von Fahrtwunsch 1 kann somit beliebig groß werden, weshalb die Antwort falsch ist.
4. Wir wählen für den zweiten Fahrtwunsch: Startetage 0, Zieletage 1, Ankunftszeit 1. Strategie F bedient zunächst Fahrtwunsch 1. Dies ergibt für diesen eine Wartezeit von $1 - 0 = 1$. Fahrtwunsch 2 wird entsprechend zu Zeit 6 eingeladen, seine Wartezeit ist also $6 - 1 = 5$, was auch die maximale Wartezeit der Strategie F ist. FH kennt die Zukunft, und wartet in diesem Fall eine Zeiteinheit auf Etage 0 und bedient erst Fahrtwunsch 2. Die Wartezeit von Fahrtwunsch 2 beträgt somit $1 - 1 = 0$, die von Fahrtwunsch 1 ist $2 - 0 = 2$. Die maximale Wartezeit von FH ist also 2. Damit ergibt sich ein Verhältnis von $5/2$. Die maximale Wartezeit von F kann also durchaus größer sein als das Doppelte der maximalen Wartezeit von FH. Die Aussage ist also auch falsch.
5. Wir wählen für den zweiten Fahrtwunsch: Startetage 0, eine beliebige Zieletage und Ankunftszeit 6. Die beiden Strategien F und H bedienen zunächst Fahrtwunsch 1 mit einer Wartezeit von 1. Der Aufzug ist also jeweils zu Zeit 3 auf Etage 3. Während H nun schon einmal in die Etage 0 fährt, wartet der Aufzug bei Strategie F. Zur Zeit 6 hat H den Aufzug bereits in Etage 0 stehen. Daher beträgt die Wartezeit für den zweiten Fahrtwunsch 0. Bei der Strategie F fährt der Aufzug jetzt erst los und erreicht Etage 0 zur Zeit 9, womit sich eine Wartezeit von 3 ergibt. Die maximale Wartezeit ist also dreimal so groß wie bei H, weshalb diese Aussage nicht stimmt.
6. Diese Aussage ist richtig. Wir betrachten die Strategie, die eine Zeiteinheit auf Etage 0 wartet und danach wie N arbeitet. Im Folgenden bezeichnen wir diese Strategie mit $N+$. Sei t die Ankunftszeit des zweiten Fahrtwunsches von Etage 0 nach Etage 1. Wir zeigen jetzt, dass für alle Möglichkeiten für t die Strategie $N+$ bzgl. der maximalen Wartezeit



höchstens zweimal so schlecht ist wie FH.

$t = 1$: Beide Strategien N+ und FH arbeiten identisch. N+ ist hier also genauso gut wie FH.

$t = 2$: N+ bedient zunächst Fahrtwunsch 1 mit Wartezeit 2. Der zweite Fahrtwunsch wird zur Zeit 7 eingeladen. Die Wartezeit ist also $7 - 2 = 5$. FH bedient die Fahrtwünsche in umgekehrter Reihenfolge. Der zweite Fahrtwunsch wird daher zu Zeit 2 eingeladen, Fahrtwunsch 1 zu Zeit 3. Die Wartezeiten betragen daher $2 - 2 = 0$ und $3 - 0 = 3$. Das Verhältnis der maximalen Wartezeiten ist also $5/3 \leq 2$.

$t \geq 3$: Würde FH zunächst den zweiten Fahrtwunsch bedienen, so wäre die Wartezeit von Fahrtwunsch 1 mindestens 4. Besser ist jetzt die andere Abarbeitungsreihenfolge. Damit beträgt die Wartezeit von Fahrtwunsch 1 eine Zeiteinheit 1. Für den zweiten Fahrtwunsch beträgt diese in jedem Fall 3 Zeiteinheiten, da der Aufzug zur Zeit t auf Etage 3 steht und noch drei Etagen zur Startetage fahren muss. N+ arbeitet genauso, abgesehen davon, dass der Aufzug eine Zeiteinheit auf Etage 0 wartet. Die maximale Wartezeit kann damit also nur um eins größer sein als die von FH. Sie beträgt also maximal 4. Das Verhältnis der maximalen Wartezeiten ist daher $4/3 \leq 2$.

Damit ist gezeigt, dass diese Aussage richtig ist.

7. Wir wählen für den zweiten Fahrtwunsch als Startetage 0, Zieletage 3 und Ankunftszeit 1. Der dritte Fahrtwunsch hat Startetage 3, Zieletage 2 und Ankunftszeit 2. Beide Strategien bedienen zunächst Fahrtwunsch 1 (Wartezeit 1). F bedient im Anschluss zunächst den zweiten Fahrtwunsch mit einer Wartezeit von $6 - 1 = 5$ und dann den dritten Fahrtwunsch mit Wartezeit $9 - 2 = 7$. Die Strategie N arbeitet die Fahrtwünsche der anderen Reihenfolge ab. Damit ergibt sich eine Wartezeit von $3 - 2 = 1$ für den dritten Fahrtwunsch und eine Wartezeit von $6 - 1 = 5$ für den zweiten. Die maximale Wartezeit von N beträgt damit 5 Zeiteinheiten und ist damit kleiner als die von F, welche 7 Zeiteinheiten beträgt. Die Aussage ist daher falsch.
8. Hier wählen wir für den zweiten Fahrtwunsch als Startetage 2,



Zieltage 3 und Ankunftszeit 1. Der dritte Fahrtwunsch hat Startetage 3, Zieltage 0 und Ankunftszeit 2. Beide Strategien bedienen zunächst Fahrtwunsch 1 (Wartezeit 1). F bedient im Anschluss zunächst den zweiten Fahrtwunsch mit einer Wartezeit von $4 - 1 = 3$ und dann den dritten Fahrtwunsch mit Wartezeit $5 - 2 = 3$. Die Strategie N arbeitet die Fahrtwünsche der anderen Reihenfolge ab. Damit ergibt sich eine Wartezeit von $3 - 2 = 1$ für den dritten Fahrtwunsch. Diesen muss der Aufzug zunächst ganz nach unten in die Etage 0 bringen. Damit ist die Wartezeit vom zweiten Fahrtwunsch $8 - 1 = 7$. Die maximale Wartezeit von N beträgt damit 7 Zeiteinheiten und ist damit größer als die von F, welche 3 Zeiteinheiten beträgt. Die Aussage ist daher falsch.

9. Wir betrachten einen Fahrtwunsch mit Startetage 1, beliebiger Zieltage und Ankunftszeit 1. Die Strategie H fährt den Aufzug sofort in die Etage 1, so dass der Aufzug dort zu Zeit 1 schon steht. Dies ergibt eine Wartezeit von 0 Zeiteinheiten. N bleibt auf Etage 0 stehen bis zur Zeit 1 der neue Fahrtwunsch bekannt wird. Damit ergibt sich eine Wartezeit von 1. Das Verhältnis der Wartezeiten beträgt $1/0$, es ist also unbeschränkt. Daher ist die Aussage falsch.
10. Wenn alle Fahrtwünsche Startetage 1 haben, ist die Reihenfolge der Bearbeitung der Fahrtwünsche für alle Steuerungen gleich, weil Fahrtwünsche mit selber Startetage ja in der Reihenfolge zunehmender Ankunftszeiten bedient werden müssen. Eine bestmögliche Steuerungsstrategie würde immer nach Bedienen eines Fahrtwunsches unmittelbar zurück in die Etage 1 fahren. Das dürfen F und FH aber immer nur dann, wenn dort ein Passagier wartet. Daher arbeiten beide Strategien vollkommen identisch, weshalb die Aussage falsch ist.

9 Ein neuer Schlitten für den Weihnachtsmann?

Autor: Kai Lawonn

9.1 Aufgabe

Wie jedes Jahr hat auch dieses Jahr der Weihnachtsmann reichlich zu tun. Um dieses Jahr etwas Zeit zu sparen, überlegt er, ob er sich einen neuen Schlitten zulegen soll. Sein alter Schlitten musste in der Regel 7-mal während seiner jährlichen Tour „aufgetankt“ werden. Der neue Schlitten hingegen muss nach zwei Erdumrundungen „aufgetankt“ werden. Leider weiß der Weihnachtsmann nicht mehr, wie viele Kilometer er insgesamt zurücklegt. Er weiß lediglich Folgendes:

- Nach jedem Hausbesuch startet er mit Geschwindigkeit Null.
- Zwischen zwei Häusern ergibt sich der Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit von der Zeit.
- Die Geschwindigkeit des Schlittens berechnet sich aus dem Produkt der folgenden 3 Faktoren:
 - der Anzahl der bereits besuchten Häuser;
 - dem 9-fachen des Erdumfangs;
 - der seit dem letzten Hausbesuch vergangenen Zeit, potenziert mit der um 1 verringerten Anzahl der bereits besuchten Häuser.
- Grundsätzlich benötigt er zwischen zwei Häusern immer eine halbe Minute.

Die Anzahl der Häuser kann ruhigen Gewissens als unendlich angenommen werden.

Wie oft muss denn der Weihnachtsmann nun den neuen Schlitten aufladen?



Antwortmöglichkeiten:

1. 4
2. 5
3. 6
4. 7
5. 8
6. 9
7. 10
8. 11
9. 12
10. 13

Projektbezug:

Während des Scannens an einem 3D-Scanner treten solche Fragestellungen häufig in Bezug auf die Scanlines auf, die den dreidimensionalen Körper von verschiedenen Richtungen abtasten. Die Scanlines geben dann eine Tiefe-Information, die für die Darstellung von Körpern durchaus wichtig ist. Das Verständnis und der richtige Umgang mit dem Scanner helfen einem, sich in der Welt von Kurven, Flächen und dreidimensionalen Körpern zurechtzufinden und den Überblick zu behalten.

9.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort (6) oder (2)

Zunächst einmal lautet die Gleichung für die Geschwindigkeit:

$$v_n(t) = 9 \cdot U_{Erde} \cdot nt^{n-1},$$

wobei n die Anzahl der bereits besuchten Häuser, U_{Erde} den Erdumfang und

t die Zeit zwischen den besuchten Häusern darstellt.

Um nun die zurückgelegte Strecke zwischen dem n -ten und $n+1$ -ten Haus in Abhängigkeit von der Zeit zu bestimmen, muss folgendes Integral berechnet werden:

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} v_n(t) dt &= \int_0^{1/2} 9 \cdot U_{Erde} \cdot nt^{n-1} dt \\ &= 9 \cdot U_{Erde} \cdot t^n \Big|_0^{1/2} \\ &= 9 \cdot U_{Erde} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Bemerkung: Mutige, die hier ohne eine Fallunterscheidung n gekürzt haben, wurden nicht bestraft. Würde man eine Fallunterscheidung vornehmen, also einmal den Fall $n = 0$ und einmal den Fall $n \neq 0$ betrachten, so beginnt die nachfolgende Summe bei 1, ansonsten beginnt sie bei 0.

Die nächste zu verarbeitende Information ist, dass der Weihnachtsmann unendlich viele Häuser anfliegt. Also:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m 9 \cdot U_{Erde} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (11)$$

Mit $|x| < 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1-x}.$$

Also gilt dann:

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m 9 \cdot U_{Erde} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 9 \cdot U_{Erde} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 18 \cdot U_{Erde}\end{aligned}$$

Er muss in der Regel alle 2 Erdumdrehungen aufladen, also muss er insgesamt 9-mal seinen neuen Schlitten aufladen.

Wäre er mal lieber bei seinem alten Schlitten geblieben, dann hätte er vielleicht noch ein leckeres Mandelbrot essen können.



Nachtrag zu (1): Würde die Summe bei 1 beginnen, erhält man:

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m 9 \cdot U_{Erde} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 9 \cdot U_{Erde} \cdot \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right) \\ &= 9 \cdot U_{Erde} \cdot 1.\end{aligned}$$

Somit schließt man dann auf Antwort (2).

10 Mathefaule Elfen in Manhattan

Autorin/Autor: Stefan Kirchner, Valentin Ziegler

Projekt: A5

10.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann veranstaltet mit seinen Elfen, die auf den zweidimensionalen Gitterpunkten $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wohnen und nach ihren x - und y -Koordinaten benannt sind, folgendes Spiel:

Der Weihnachtsmann schickt jedesmal seinem Hauptelf, der auf dem Feld $(0, 0)$ wohnt, eine Aufgabe aus dem Adventskalender, sofern dieser Elf nicht selber gerade mit einer Aufgabe beschäftigt ist. Jeder Elf ist aber mathefaul und versucht daher, seine Aufgabe an seine Nachbarelfen loszuwerden. Das geschieht nach folgenden Regeln:

1. Es kann stets nur ein Elf eine Aufgabe erhalten oder abgeben.
2. Hat ein Elf (x, y) eine Aufgabe und es gibt mindestens zwei Nachbarelfen (**oben** $(x, y + 1)$, **unten** $(x, y - 1)$, **links** $(x - 1, y)$, **rechts** $(x + 1, y)$), die gerade keine Aufgabe haben, dann kann der Elf (x, y) die Aufgabe an genau zwei der *aufgabenlosen* Nachbarelfen weitergeben. Insbesondere gibt ein Elf seine Aufgabe stets an zwei Nachbarn weiter.
3. Sind mehr als zwei Nachbarelfen von (x, y) ohne Aufgabe, so kann er sich aussuchen, an welche zwei aufgabenlose Nachbarelfen er sie gibt. Der Elf (x, y) ist danach wieder aufgabenlos.

Man gehe davon aus, dass jeder aufgabenlose Elf nie gleichzeitig zwei Anfragen von Nachbarelfen erhält.

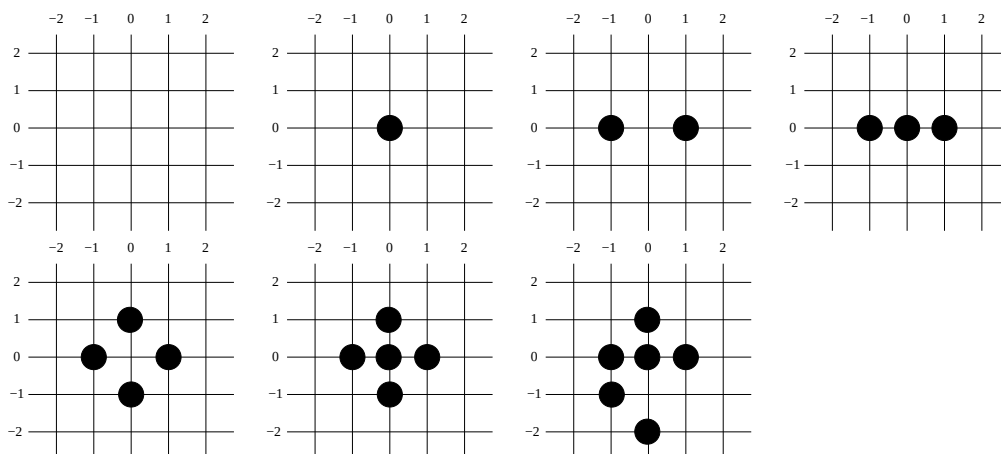
Mit jedem Zug erhöht sich also die Anzahl der mit Aufgaben beschäftigten Elfen um genau eins. Ein möglicher Spielanfang ist auf der nächsten Seite abgebildet (mit Aufgaben beschäftigte Elfen sind durch Kreise gekennzeichnet).

Auch wenn die Elfen mathefaul sind, ist ihre Neugierde groß, und sie wählen daher eine Strategie, dass der Hauptelf so viele Aufgaben vom Weihnachtsmann erhält wie möglich.

Frage: Wie viele Aufgaben kann der Weihnachtsmann dem Hauptelf maximal geben?

Hinweis 1: $\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = 1$

Hinweis 2: Gib jedem Elf (x, y) das Gewicht $(\frac{1}{2})^{|x|+|y|}$.



Beim 2. 4. und 6. Bild gibt der Weihnachtsmann seinem Hauptelf eine Aufgabe, beim 3., 5. und 7. Bild delegiert je ein Elf seine Aufgabe weiter.

Antwortmöglichkeiten:

1. 4
2. 5
3. 6–8
4. 9–11
5. 12–14
6. 15–17
7. 18–20
8. 21–23
9. 24–26
10. Ist doch klar: Der Hauptelf kann beliebig viele Aufgaben vom Weihnachtsmann erhalten. Damit der Nachschub nicht ausgeht, wird es den Matheon-Kalender daher auch die nächsten Jahre geben.



Projektbezug:

Dieses Gitter ist ein Beispiel für ein sehr einfaches Netzwerk. An der Lösung kann man erkennen, dass geeignete Invarianten oft hilfreich sind, um bestimmte Eigenschaften eines Netzwerkes nachzuweisen. Die Netzwerke, die in Projekt A5 vorkommen, sind meistens sehr viel komplizierter.

10.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3

Lösung: Dies kann man daran sehen, dass jedem Elf (x, y) das Gewicht $(\frac{1}{2})^{|x|+|y|}$ zugeordnet wird: Die Elfen auf der x -Achse haben demnach aufgrund des ersten Hinweises ein Gesamtgewicht von drei, die Elfen (x, y) mit $y = 1$ ein Gewicht von $3/2$ und allgemein haben die Elfen (x, y) mit $y = i$ das Gewicht $3/2^{|i|}$.

Das Elfengesamtgewicht ist daher $3 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} 3/2^i = 3 + 6 \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = 3 + 6 \cdot 1 = 9$.

Das Stellungsgewicht sei nun die Summe der Gewichte aller Elfen, die gerade eine Aufgabe haben.

Erhält der Hauptelf vom Weihnachtsmann eine Aufgabe, dann wird das Stellungsgewicht um eins erhöht. Delegiert ein gewöhnlicher Elf eine Aufgabe, so kann das Stellungsgewicht nicht verkleinert werden, wie man durch einfaches Nachrechnen einsieht. Nach endlicher Zuganzahl kann das Stellungsgewicht daher stets nur kleiner-gleich 8 sein, und somit kann der Weihnachtsmann maximal acht Aufgaben seinem Hauptelf geben.

Dass der Weihnachtsmann sieben Aufgaben in Umlauf bringen kann, zeigt die Folge

WM, (0 0 o u),

WM, (0 0 l r),

WM, (-1 0 o u), (1 0 o u), (0 0 l r),

WM, (-1 1 o l), (1 1 o r), (-1 -1 u l), (1 -1 u r), (0 1 l r), (0 -1 l r), (0 0 o u),

WM, (-1 2 o l), (-2 2 o l), (-2 1 o l), (-1 1 o l), (1 2 o r), (2 2 o r), (2 1 o r), (1 1 o r), (-1 -2 u l), (-2 -2 u l), (-2 -1 u l),

(-1 -1 u l), (1 -2 u r), (2 -2 u r), (2 -1 u r), (1 -1 u r), (0 1 o l), (1 0 o r), (0 -1 u r), (-1 0 u l), (0 0 o u),

WM, (0 0 l r),

WM.

WM bedeutet eine neue Aufgabe vom Weihnachtsmann an den Hauptelf, o=oben, l=links, r=rechts, u=unten. (2,1,o,r) bedeutet also, dass der Elf (2,1)



die Aufgabe an Elf $(2, 2)$ und an Elf $(3, 1)$ weitergibt.

Als Herausforderung überlassen wir es den Lesern, eine Folge mit acht vom Weihnachtsmann verteilten Aufgaben zu finden bzw. deren Nichtexistenz zu beweisen.



11 Schwierige Navigation

Autor: Karsten Tabelow

Projekt: A3

11.1 Aufgabe

Weil der Flugverkehr mit Rentierschlitten immer mehr zunimmt, wurde mittlerweile vom zuständigen Ministerium eine WeVO (Weihnachtsverkehrsordnung) erlassen: Dadurch darf der Weihnachtsmann nicht mehr einfach kreuz und quer fliegen, sondern muss sich an bestimmte Flugrouten halten. Glücklicherweise hat er dafür ein spezielles Navigationssystem, welches ihm die Richtung, in die er fliegen sollte, anzeigt. An jedem Punkt im Raum speichert der Navigator eine symmetrische 3×3 -Matrix $\mathcal{D}$. Bildet man die quadratische Form $D = \vec{b}^\top \cdot \mathcal{D} \cdot \vec{b}$ für einen beliebigen normierten dreidimensionalen Richtungsvektor $\vec{b}$, so erhält man die „Richtungserlaubniszahl“. Sie gibt auf einer absoluten Skala an, wie freigegeben diese Richtung für den Flugverkehr ist. Wir sehen, hier ist Flexibilität in der WeVO vorgesehen, aber man sollte schon meistens die Richtung nehmen, die am ehesten erlaubt ist. Ein dreidimensionaler (und vom Ministerium geeichter) Kompass zeigt ihm ein feststehendes Koordinatensystem an, in welchem der Richtungsvektor angegeben ist.

Aber ach! Der Weihnachtsmann ist überfordert! Er will losfliegen, hat das Navi aber nicht richtig eingestellt, so dass nicht die Richtung, sondern nur die Matrix $\mathcal{D}$ erscheint. Ausserdem ist das Display (obwohl nagelneu) an drei Stellen kaputt, weswegen er nur Folgendes sieht:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1.1507214 & ??????? & 0.3362158 \\ 0.5625000 & ??????? & 1.2547745 \\ 0.3362158 & 1.2547745 & ??????? \end{pmatrix}$$

In welche Richtung soll er denn nun fliegen?

Hinweis 1: In der Bedienungsanleitung stehen zum Thema „Matrixmode“ zwei Beispiele: „Ist z.B. am Nordpol $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, so ist die Richtungser-



laubnisszahl $D = 3.43566$, ist der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, so ist $D = 2.6875$.

Hinweis 2: Wenn man die Richtung kennt, muss man sich natürlich gewissermaßen noch entscheiden, auf welcher „Straßenseite“ man fliegen soll, aber das kriegt der Weihnachtsmann auch alleine hin, ist schließlich nicht das erste Mal, dass er Geschenke austeilt.

Hinweis 3: Der Weihnachtsmann startet am Nordpol.

Hinweis 4: Folgende Rechenoperationen sind in der Bedienungsanleitung beschrieben:

- Transponierter Vektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, dann ist $\vec{x}^\top = (x_1, x_2, x_3)$ und $(\vec{x}^\top)^\top = \vec{x}$.
- Matrix-Vektor-Multiplikation:

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

- Produkt von Vektoren: $\vec{x}^\top \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$

Der Weihnachtsmann fliegt somit in Richtung ...

Antwortmöglichkeiten:

1. $(1, 0, 0)^\top$
2. $(0, 1, 0)^\top$
3. $(0, 0, 1)^\top$
4. $(-0.9659258, 0.2588190, 0.0000000)^\top$

5. $(-0.1294095, -0.4829629, 0.8660254)^\top$
6. $(0.5322130, 0.1040125, -0.8401969)^\top$
7. $(0.2241439, 0.8365163, 0.5000000)^\top$
8. $(-0.6335067, -0.7531356, -0.1773584)^\top$
9. Wie so oft, wenn Bürokraten sich eine neue Regelung einfallen lassen, ohne Mathematiker zu fragen, hat man leider vergessen, dass diese Angaben noch nicht ausreichen, um die Richtung zu bestimmen!
10. Die Angaben reichen aus, um die Richtung zu bestimmen, aber der Lösungsvektor ist hier nicht angegeben.

Projektbezug: Das Projekt A3 des MATHEON beschäftigt sich mit medizinischer Bildverarbeitung. Bei der sogenannten Diffusionstensorbildgebung wird die Diffusionsfähigkeit der Wassermoleküle in vielen Raumrichtungen im Gehirn gemessen und in einem einfachen Fall durch einen Tensor (3×3 -Matrix) repräsentiert. Wie auch das seltsame Navigationssystem, bildet dies ein Abbild der Faserstruktur des Gehirns. Die Fasern anhand der Tensoren zu verfolgen, ist die Aufgabe des „fiber trackings“.

11.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

Die Matrixelemente der symmetrischen Matrix $\mathcal{D}$ seien wie folgt bezeichnet:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{xz} & D_{yz} & D_{zz} \end{pmatrix},$$

ein beliebiger Richtungsvektor $\vec{b}$ habe die Komponenten (b_x, b_y, b_z) . Durch Matrixmultiplikation erhält man dann:

$$\begin{aligned} D &= \vec{b}^\top \mathcal{D} \vec{b} \\ &= D_{xx}b_x^2 + D_{yy}b_y^2 + D_{zz}b_z^2 + D_{xy}2b_xb_y + D_{xz}2b_xb_z + D_{yz}2b_yb_z \end{aligned}$$



Der Weihnachtsmann startet am Nordpol, also ist Hinweis 1 mit der (halb) gegebenen Matrix zu benutzen. Wegen der Symmetrie der Matrix wissen wir, dass in der obersten Zeile dasselbe Element $D_{xy} = 0.5625000$ stehen muss, wie an der ersten Stelle der zweiten Zeile. Ausserdem wissen wir $D_{xx} = 1.1507214$, $D_{xz} = 0.3362158$, $D_{yz} = 1.2547745$. Damit sind nur noch D_{yy} und D_{zz} unbekannt. Mit Hinweis 1 erhalten wir aber mit den Vektoren $\vec{b} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ und $\vec{b} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3.43566 &= D_{xx}/3 + D_{yy}/3 + D_{zz}/3 + D_{xy}2/3 + D_{xz}2/3 + D_{yz}2/3 \\ 2.6875 &= D_{xx}/2 + D_{yy}/2 + D_{xy} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} 3.43566 &= 1.1507214/3 + D_{yy}/3 + D_{zz}/3 \\ &\quad + 0.56250002/3 + 0.33621582/3 + 1.25477452/3 \\ 2.6875 &= 1.1507214/2 + D_{yy}/2 + 0.5625000 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$D_{yy} = 3.099279$$

und damit ist auch

$$D_{zz} = 1.75$$

Nun ist die Matrix $\mathcal{D}$ vollständig bestimmt.

Die symmetrische Matrix definiert einen Ellipsoid, dessen Hauptachsenrichtungen durch die drei Eigenwerte der Eigenwertzerlegung gegeben sind. Wir bestimmen die Eigenwerte und -vektoren von $\mathcal{D}$ mittels Computer oder über einen bekannten Algorithmus auf dem Papier. Die Eigenwerte sind 4, 1, 1, die entsprechenden Eigenvektoren sind in den Lösungspunkten 7, 4, und 5 angegeben. Der Eigenvektor zum größten Eigenwert 4 bestimmt die Richtung, also ist 7 die richtige Lösung.

Wenn man keine Eigenwertzerlegung beherrscht, berechnet man für jeden der möglichen Lösungsvektoren $\vec{b}$ die Zahl $D = \vec{b}^\top \mathcal{D} \vec{b}$. Sie wird maximal $D = 4$ bei Punkt 7. Das ist die richtige Lösung, weil die korrekte Richtung laut Aufgabenstellung D maximieren soll.

12 Geschenkekauf bei Knecht Ruprecht

Autor: Volker Mehrmann

Projekt: D2

12.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht organisiert wie in jedem Jahr den Geschenkeeinkauf. Er bestellt dafür in der Wichtelwerkstatt. Dort kann er auch nicht funktionierende Geschenke zurückgeben.

Am 1. Tag kauft er 4 Playstations, 1 048 Gameboyspiele und 11 040 000 Barbiepuppen und zahlt insgesamt 44 274 140 Kronen.

Am 2. Tag gibt er 2 Playstations, 504 Gameboyspiele und 5 350 000 Barbiepuppen zurück, die er am ersten Tag gekauft hat. Er bekommt 21 455 010 Kronen ausgezahlt.

Am 3. Tag kauft er 503 neue Gameboyspiele und 504 000 Barbies. Er zahlt 2 067 809 Kronen.

Um zu prüfen, ob die Wichtel ihn auch nicht übers Ohr gehauen haben, bestimmt er die Preise der einzelnen Waren (mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren).

- a) Was kostet eine Playstation (P), ein Gameboyspiel (G) und eine Barbiepuppe (B)?
- b) Leider ist der Taschenrechner von Knecht Ruprecht kaputt, so dass er überschlagen muss. Er kann es nur im Kopf ausrechnen, wenn er die Zahlen rundet. Dabei geht er wie folgt vor:
 - Er stellt alle Zahlen in der Form $0.xyz \cdot 10^j$ mit $j \in \mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$ dar.
 - Er rundet dann nach den üblichen Rundungsregeln auf die zweite Nachkommastelle. Er betrachtet dazu nur die dritte Nachkommastelle.



- Im mathematischen Sinn heißt dies, man rundet auf zwei gültige Stellen.

Beispiele:

$$13445 = 0.13445 \cdot 10^5 \approx 0.13 \cdot 10^5 = 13000$$
$$0.00555 = 0.555 \cdot 10^{-2} \approx 0.56 \cdot 10^{-2} = 0.0056$$

Was kosten dann die Playstation (P), das Gameboyspiel (G) und die Barbiepuppe (B)?

Antwortmöglichkeiten:

- a) P = 9 993 144 Kronen, G = 4 236 Kronen und B = 0 Kronen
b) P = -19 786 667 Kronen, G = -7 734 Kronen und B = 12 Kronen
- a) P = 1 549 Kronen, G = 103 Kronen und B = 4 Kronen
b) P = -20 004 590 Kronen, G = 8 909 Kronen und B = 12 Kronen
- a) P = 1 179 Kronen, G = 97 Kronen und B = 4 Kronen
b) P = 15 050 000 Kronen, G = -5 800 Kronen und B = -10 Kronen
- a) P = -24 Kronen, G = 102 Kronen und B = 4 Kronen
b) P = 1 179 Kronen, G = 97 Kronen und B = 4 Kronen
- a) P = 1 179 Kronen, G = 97 Kronen und B = 4 Kronen
b) P = -20 004 590 Kronen, G = 8 909 Kronen und B = 12 Kronen
- a) P = 1 549 Kronen, G = 103 Kronen und B = 4 Kronen
b) P = 1 549 Kronen, G = 103 Kronen und B = 4 Kronen
- a) P = -24 Kronen, G = 102 Kronen und B = 4 Kronen
b) P = -20 004 590 Kronen, G = 8 909 Kronen und B = 12 Kronen
- a) P = 9 993 144 Kronen, G = 4 236 Kronen und B = 0 Kronen
b) P = -24 Kronen, G = 102 Kronen und B = 4 Kronen
- a) P = 1 549 Kronen, G = 103 Kronen und B = 4 Kronen
b) P = -15 050 000 Kronen, G = -5 800 Kronen und B = 10 Kronen
- a) P = 9 993 144 Kronen, G = 4 236 Kronen und B = 0 Kronen
b) P = 19 786 667 Kronen, G = 7 734 Kronen und B = 12 Kronen

Projektbezug:

Die numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen ist eine zentrale Aufgabe bei der Lösung vieler Probleme des wissenschaftlichen Rechnens, so z.B. in der Schaltungssimulation, wo die Probleme ähnlich wie in der Aufgabe sehr empfindlich gegenüber kleinen Störungen sind und damit Rundungsfehler zu schlechten oder ganz falschen Ergebnissen führen. Um dies Problem zu bearbeiten, werden sogenannte Präkonditionierer entwickelt, ein wichtiges Thema in zahlreichen MATHEON-Projekten.

12.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9

a):

Die Einkäufe des ersten Tages können wie folgt geschrieben werden:

$$4 \cdot P + 1\,048 \cdot G + 11\,040\,000 \cdot B = 44\,274\,140.$$

Für Tag 2 und 3 gilt entsprechend:

$$-2 \cdot P - 504 \cdot G - 5\,350\,000 \cdot B = -21\,455\,010$$

$$0 \cdot P + 503 \cdot G + 504\,000 \cdot B = 2\,067\,809.$$

Insgesamt gesehen gibt dies folgendes Gleichungssystem:

$$4 \cdot P + 1\,048 \cdot G + 11\,040\,000 \cdot B = 44\,274\,140$$

$$-2 \cdot P - 504 \cdot G - 5\,350\,000 \cdot B = -21\,455\,010$$

$$0 \cdot P + 503 \cdot G + 504\,000 \cdot B = 2\,067\,809$$

Dies kann als erweiterte Koeffizientenmatrix geschrieben werden:

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 1\,048 & 11\,040\,000 & 44\,274\,140 \\ -2 & -504 & -5\,350\,000 & -21\,455\,010 \\ 0 & 503 & 504\,000 & 2\,067\,809 \end{array}$$

Mittels des Gaußschen Eliminationsverfahren formen wir wie folgt um:

1. Die erste Zeile multipliziert mit $\frac{1}{2}$ zur zweiten Zeile addieren:



$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 1\,048 & 11\,040\,000 & 44\,274\,140 \\ 0 & 20 & 170\,000 & 682\,060 \\ 0 & 503 & 504\,000 & 2\,067\,809 \end{array}$$

2. Die zweite Zeile multipliziert mit $\frac{503}{20}$ von der dritten Zeile subtrahieren:

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 1\,048 & 11\,040\,000 & 44\,274\,140 \\ 0 & 20 & 170\,000 & 682\,060 \\ 0 & 0 & -3\,771\,500 & -15\,086\,000 \end{array}$$

Jetzt haben wir schon Dreiecksform und können die Warenpreise ausrechnen. Aus der letzten Zeile berechnen wir:

$$B = \frac{-15\,086\,000}{-3\,771\,500} = 4.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung erhalten wir:

$$G = \frac{682\,060 - (170\,000 \cdot 4)}{20} = 103.$$

G und B eingesetzt in die erste Gleichung ergibt:

$$P = \frac{44\,274\,140 - (11\,040\,000 \cdot 4 + 1\,048 \cdot 103)}{4} = 1\,549$$

Somit bezahlt Knecht Ruprecht 1 549 Kronen für eine Playstation, 103 Kronen für ein Gameboyspiel und 4 Kronen für eine Barbiepuppe.

b):

Unsere erweiterte Koeffizientenmatrix heißt jetzt:

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 1\,000 & 11\,000\,000 & 44\,000\,000 \\ -2 & -500 & -5\,400\,000 & -21\,000\,000 \\ 0 & 500 & 500\,000 & 2\,100\,000 \end{array}$$

Mittels des Gaußschen Eliminationsverfahren formen wir wie folgt um:

1. Die erste Zeile multipliziert mit $\frac{1}{2}$ zur zweiten Zeile addieren:

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 1\,000 & 11\,000\,000 & 44\,000\,000 \\ 0 & 0 & 100\,000 & 1\,000\,000 \\ 0 & 500 & 500\,000 & 2\,100\,000 \end{array}$$

2. Nach Vertauschung von Zeile 2 und 3 haben wir schon Dreiecksform:

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 1\,000 & 11\,000\,000 & 44\,000\,000 \\ 0 & 500 & 500\,000 & 2\,100\,000 \\ 0 & 0 & 100\,000 & 1\,000\,000 \end{array}$$

Aus der letzten Zeile berechnen wir:

$$B = \frac{1\,000\,000}{100\,000} = 10$$

Aus der zweiten Gleichung können wir berechnen:

$$G = \frac{2\,100\,000 - 500\,000 \cdot 10}{500} = -5800.$$

Und noch in die erste eingesetzt:

$$P = \frac{44\,000\,000 - (11\,000\,000 \cdot 10 + 1\,000 \cdot -5800)}{4} = -15\,050\,000.$$

Damit bekommt Knecht Ruprecht 15 050 000 Kronen, wenn er eine Playstation kauft, er bekommt 5 800 Kronen, wenn er ein Gameboyspiel kauft und er zahlt 10 Kronen, wenn er eine Barbiepuppe kauft. Vielleicht sollte sich Knecht Ruprecht nicht auf sein Kopfrechnen verlassen.



13 Optimale Teddybären-Produktion

Autorin: Daniela Kern

Projekt: C11

13.1 Aufgabe

Die Elfen Johnny und Murkeli haben die Geschenke-Fabrik des Weihnachtsmanns am Nordpol aufgrund schlechter Bezahlung verlassen und gründen ein eigenes Startup-Unternehmen. Sie wollen vorerst 2 Sorten von Teddybären produzieren, die erste Sorte soll „Brummiges Fellohr“, die zweite „Meister Tatz“ heißen. Die Fellohren bringen 3 Euro, die Tatzen 2 Euro Gewinn pro Bär. Die Fellohren sollen mit schwarz polierten, die Meister mit hölzernen Knopfaugen bestückt werden. Der Knopfaugenlieferant kann 300 schwarze und 700 hölzerne Knopfpaare liefern. Die Produktionskapazität bei Beschränkung auf eine Sorte beträgt bei den Fellohren 500, bei den Meistern 1000 Bären (d.h. in der Zeit, die gebraucht wird, ein brummiges Fellohr herzustellen, können zwei Meister Tatz produziert werden - in der gegebenen Zeit aber höchstens 500 Fellohren beziehungsweise höchstens 1000 Meister, würden sich Johnny und Murkeli auf eine Sorte beschränken). Alle Bären sollen eine rot-weiße Bommelmütze erhalten, die Oma Trudchen eigenhändig strickt. Trudchen ist zwar nicht mehr ganz so flink mit den Stricknadeln, aber immer noch Weltmeisterin, und kann 800 Mützen fertigen.

Johnny und Murkeli wollen ihren Gewinn maximieren, um ihre Produktpalette im nächsten Jahr ordentlich erweitern zu können. Wie viele brummige Fellohren und wie viele Meister Tatz werden sie herstellen?

(Die Aufgabe kann z.B. graphisch durch Linien im (x,y) -Koordinatensystem gelöst werden: Ordne den beiden Bärensorten jeweils eine Koordinatenachse zu und gehe von proportionalen Zusammenhängen aus. Die Tatsache, dass man keine zerrissenen Bären und somit nur ganze Zahlen als Bärenanzahlen zulassen will, möge bei der Vorgehensweise trotz Weihnachten bitte ignoriert werden.)



Antwortmöglichkeiten:

1. Nachdem sie bereits 350 Fellohren hergestellt haben, geben sie ihre Pläne wieder auf und kehren zum Weihnachtsmann zurück. Zu Weihnachten sollte man nicht an Geld denken. Die bereits produzierten Fellohren nehmen den üblichen Weg durch den Kamin.
2. Sie stellen 700 Meister Tatz und kein einziges Fellohr her. Die 100 übrig gebliebenen Bommelmützen werden für nächstes Jahr aufbewahrt.
3. 800 Fellohren sind rechtzeitig zu Beginn des vorweihnachtlichen Kaufrauschs bereit, Meister Tatz endet als Entwurf in der Schublade.
4. Da es zwei gewinn-optimale Möglichkeiten gibt, nämlich 700 Meister Tatz und 100 Fellohren oder 300 Fellohren und 400 Meister Tatz, geraten Johnny und Murkeli in einen heftigen Streit, den Oma Trudchen durch ein Machtwort beenden muss.
5. Es gibt unbegrenzt viele Möglichkeiten, den optimalen Gewinn von 1800 Euro zu erwirtschaften. Das verwirrt Johnny und Murkeli so sehr, dass sie darüber ganz vergessen, mit der Produktion zu beginnen.
6. Beim Stollen-Essen fällt Johnny und Murkeli die richtige Antwort ein: 320 Fellohren und 480 Tatz bei einem Gewinn von 1920 Euro.
7. Beim Punsch-Trinken revidieren sie ihre Meinung vom Stollen-Essen zuvor: 320 Fellohren und 480 Tatz bei einem Gewinn von 2080 Euro.
8. Bei Meister Tatz sind die Knöpfe viel einfacher anzunähen. Dennoch mühen sich Johnny und Murkeli auch durch 200 Paare schwarzer Glanz-Knöpfe, um eben diese Anzahl brummiger Fellohren und 600 Meister Tatz herzustellen.
9. An Weihnachten sind Johnny und Murkeli total erschöpft, aber um 1900 Euro reicher. Zur Feier des Tages gibt es Truthahn und Lebkuchenpudding.
10. Die albernen Mützen sollte man einfach weglassen, auch wenn Oma Trudchen dann sicher gekränkt sein wird. Ohne Berücksichtigung der



Mützen besteht die optimale Lösung darin, 300 Fellohren und 400 Meister Tatz herzustellen, was einen Gewinn von 1700 Euro einbringt.

Projektbezug:

Bei der Aufgabe handelt es sich um ein (lineares) Optimierungsproblem. Im Matheon in Projekt C11 werden Phasenübergänge bei der Wärmebehandlung von Stahl und daraus resultierende Steuerungsprobleme untersucht. Solche Steuerungsprobleme gehören einer allgemeineren Klasse von Optimierungsproblemen an.

13.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Aufgabentyp zu lösen, hier wird die Lösung an einer Graphik veranschaulicht: An der x -Achse ist die Anzahl brummiger Fellohren, an der y -Achse die der Meister Tatz aufgetragen. Da die Anzahl der Teddybären nicht negativ sein kann, betrachten wir nur den ersten Quadranten, also nur den Bereich des Koordinatensystems, in dem $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt. Die in der Aufgabenstellung formulierten Beschränkungen sind in der Abbildung eingezeichnet und entsprechend beschriftet. Die Beschränkung „Schwarze Knöpfe“ beispielsweise wirkt nur auf die Produktion der Fellohren und definiert somit einen Abschnitt auf der x -Achse. Links der Linie ist die Beschränkung erfüllt, rechts davon nicht mehr. Analog verhält es sich mit der Beschränkung „Holzknöpfe“, hier wird entsprechend ein Abschnitt auf der y -Achse spezifiziert. Die Beschränkung „Kapazität“ betrifft die Produktion beider Bärensorten. Würde man sich auf eine Sorte beschränken, könnte man 1000 Meister Tatz herstellen, entsprechend beginnt die Linie bei $(x, y) = (0, 1000)$ (kein Fellohr, 1000 Meister Tatz). Umgekehrt kann man 500 Fellohren produzieren, wenn man auf Meister Tatz verzichtet. Also geht die Linie auch durch den Punkt $(x, y) = (500, 0)$. Es besteht ein proportionaler Zusammenhang zwischen den jeweiligen Produktionskapazitäten der beiden Bärensorten - für die Herstellung eines Fellohrs wird soviel Zeit wie für die zweier Meister benötigt, die Punkte $(0, 1000)$ und $(500, 0)$ werden somit durch eine Linie verbunden. Ähnlich verhält es sich mit den Mützen. Es stehen 800 Mützen zur Verfügung, also ist die Anzahl der Bären durch 800 beschränkt, $x + y \leq 800$. Auf der mit „Mützen“ beschrifteten Linie gilt genau

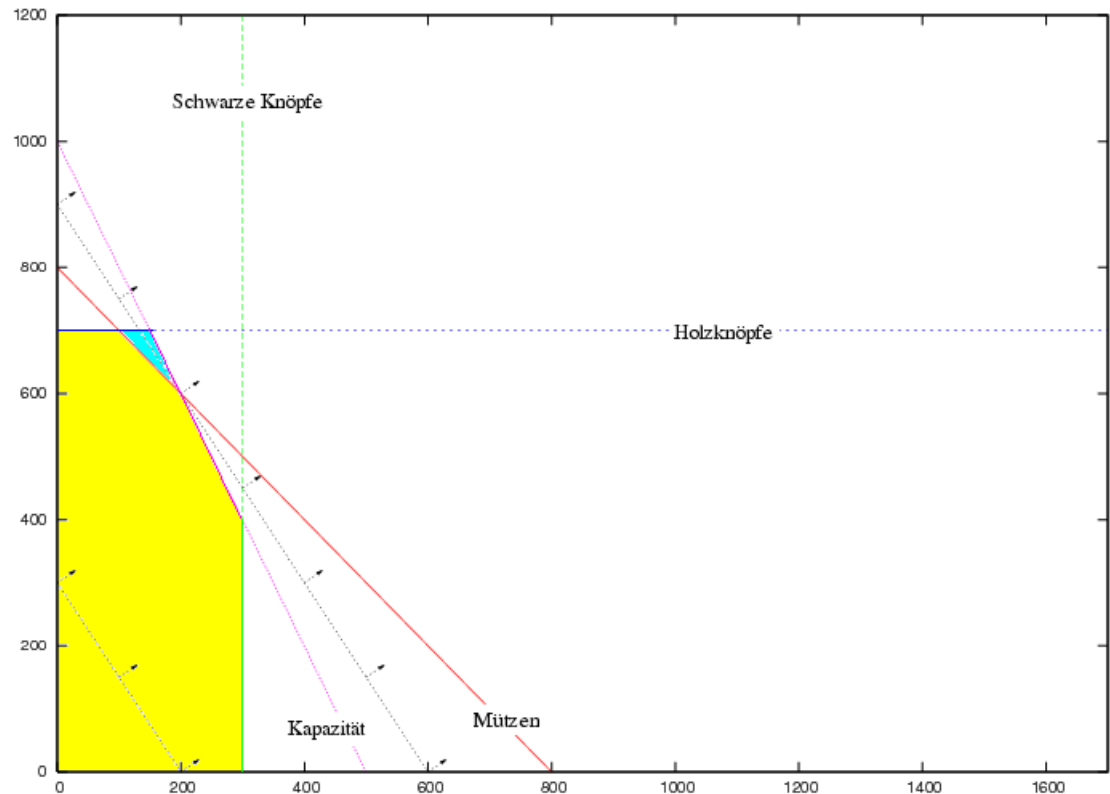


Abbildung 2: x : Anzahl brummiger Fellohren, y : Anzahl Meister Tatz

$x + y = 800$. Links der Linie ist die Bedingung erfüllt, rechts davon nicht. Die Gesamtheit der Beschränkungen definiert den zulässigen Bereich, also die Werte (x, y) , die sich auch tatsächlich unter den gegebenen Beschränkungen (wie z.B. die limitierte Anzahl der jeweiligen Knöpfe) realisieren lassen. Der zulässige Bereich für die Originalaufgabe ist gelb eingefärbt; verzichtet man auf die Bommelmützen, kommt zu dem gelben noch der cyanblaue (hellblaue) Bereich dazu.

Der optimale Gewinn wird bei einem Paar (x, y) dieser zulässigen Produktionszahlen angenommen. Neben den Beschränkungslinien sind in der Abbildung noch zwei *Niveaulinien* eingezeichnet (diese sind mit kleinen senkrecht stehenden Pfeilen versehen, deren Bedeutung weiter unten erläutert wird). Entlang einer solchen Niveaulinie nimmt der Gewinn als Funktion $f(x, y)$ (der erzielte Gewinn bei Herstellung von x Fellohren und y Meister Tatz)



konstant den gleichen Wert an. So geht z.B. die links unten eingezeichnete Niveaulinie durch $(x, y) = (0, 300)$ und $(x, y) = (200, 0)$. In diesen beiden Punkten und auch auf allen anderen Punkten dieser Linie gilt $f(x, y) = 600$, der Gewinn beträgt dort auf allen Punkten der Linie also 600 Euro. Auf der Niveaulinie oben rechts, die durch die Punkte $(x, y) = (0, 900)$ und $(600, 0)$ geht, beträgt der Gewinn 1800 Euro. Man könnte noch beliebig viele weitere Niveaulinien einzeichnen, zu jedem Gewinn-Betrag eine. Alle diese Niveaulinien wären parallel zu den beiden eingezeichneten. Die kleinen Pfeile an den beiden exemplarischen Niveaulinien deuten die Richtung der Gewinn-erhöhung: in Pfeilrichtung wird der Gewinn immer größer. Zieht man nun ein Lineal in Pfeilrichtung (bzw. parallel zu den eingezeichneten Niveaulinien) über das Bild, dann entspricht die Linealkante also zu jedem Zeitpunkt des Darüberziehens selber einer solchen Niveaulinie, entlang derer der Wert der Gewinnfunktion gleichbleibend (konstant) ist. Fügt man nun noch die Informationen zusammen, dass der Gewinn in Pfeilrichtung steigt und dass die Produktionszahlen, also (x, y) , im zulässigen (den Beschränkungen genügenden) Bereich liegen muss, erhält man, dass wir dann den höchsten erreichbaren Gewinn haben, wenn wir das Lineal solange in Pfeilrichtung über das Bild schieben, bis die Linealkante noch den zulässigen Bereich berührt, aber bereits auf seinem Rand liegt. Die Niveaulinie oben rechts entspricht genau dem Beschriebenen: sie berührt den zulässigen Bereich gerade noch und liegt am äußersten Punkt in Pfeilrichtung. Der Gewinn entlang dieser Niveaulinie beträgt 1800 Euro, insbesondere auch in dem zulässigen Punkt, der auf dem Rand des zulässigen Bereich liegt und durch den die Niveaulinie gezogen ist. Dieser Punkt hat die Koordinaten $(200, 600)$. Der maximale Gewinn wird also bei Produktion von 200 brummigen Fellohren und 600 Meister Tatz erreicht und beträgt 1800 Euro.

Ließe man die Bommelmützen-Beschränkung weg, könnte man „das Lineal“ noch weiter in Pfeilrichtung in den cyanblauen Bereich ziehen und gelangte zum Punkt $(300, 400)$, wo der Gewinn - da wir uns in Pfeilrichtung bewegen - noch höher ist als 1800 Euro, nämlich 1850 Euro.

Eine alternative Vorgehensweise: Man kann beweisen (oder sich wie oben an den Niveaulinien anschaulich klarmachen), dass der maximale Gewinn an einer Ecke des zulässigen Bereichs realisiert wird (manchmal auch an einer ganzen Kante, also sogar an 2 Ecken und den unendlich vielen Punkten dazwischen, wenn man auch zerrissene Bären zulässt. Die Forderung nach Unzerissenheit der Bären ist in der Aufgabe aber sowieso explizit ausgeschlossen,

denn sonst wäre auch der oben beschriebene Lösungsweg nicht korrekt. Dass die optimale Lösung $(x, y) = (200, 600)$ ganzzahlig herauskommt, ist „eingefädelter Zufall“, d.h. durch gute Wahl der Zahlen in der Aufgabenstellung herbeigeführt). Da die optimale Lösung also an einer Ecke gefunden werden kann, muss man nur die jeweils erzielten Gewinne an den Ecken vergleichen. Der höchstmögliche Gewinn unter den Ecken ist auch gleichzeitig der höchste der ganzen Aufgabe. Die an den Ecken erzielten Gewinne sind im Folgenden aufgelistet. Auch hier sieht man, dass es am gewinnträchtigsten ist, 600 Meister Tatz und 200 Fellohren zu produzieren:

Ecke Nr.	x – Anz. Fellohren	y – Anzahl Meister	Gewinn
1	300	0	900
2	300	400	1700
3	200	600	1800
4	100	700	1700
5	0	700	1400

Den höchsten Gewinn erzielt man bei Ecke 3, nämlich 1800 Euro. Lässt man die durch die Mützen gegebene Beschränkung weg, entfallen Ecken 3 und 4, stattdessen erhält man noch eine Ecke X,

Ecke Nr.	x – Anz. Fellohren	y – Anzahl Meister	Gewinn
X	150	700	1850

Tatsächlich erhält man ohne die Mützen-Beschränkung einen höheren Gewinn, dieser beträgt aber 1850 Euro und nicht 1700 Euro wie im Lösungsvorschlag.



14 Kostenminimierung mit Wahrscheinlichkeitsrestriktionen

Autor: Andreas Eichhorn

Projekt: C7

14.1 Aufgabe

Wie in vielen anderen Branchen auch, sind Weihnachtsmänner immer öfter von Sparzwängen betroffen. So hat zum Beispiel ein Weihnachtsmann, zuständig für die Besenkung von 20 Männern, von seinem Vorgesetzten die folgenden Vorgaben bekommen:

„Die 20 Männer in Deinem Bereich bekommen zu Weihnachten dieses Jahr jeweils nur noch entweder ein paar Socken oder eine Krawatte. Wir haben dafür gerade besonders günstige Bezugsquellen aufgetan. Andere Geschenke sind nicht mehr möglich. Wir müssen noch heute Abend die entsprechenden Bestellungen aufgeben, d.h. wir müssen noch heute Anzahlen b_K von Krawatten und b_S von Sockenpaaren festlegen!“

Des Weiteren bekommt der Weihnachtsmann für seinen Auftrag folgende Bedingungen:

- Krawatten kosten 6 Euro pro Stück, Socken 4 Euro pro Paar.
- Jeder Mann bekommt genau ein Geschenk.
- Die Männer dürfen nicht direkt befragt werden, welches der beiden Geschenke sie bevorzugen würden (vertragliche Überraschungsgarantie).
- Die jeweiligen Frauen aber können über ihre Männer befragt werden. Diese können die Präferenz ihrer Männer vorhersagen, irren sich aber unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,4 (= 40%).
- Bei der Geschenkübergabe können sich die Männer ihr Geschenk aus dem Sack des Weihnachtsmanns aussuchen, solange noch beide Geschenke vorhanden sind, andernfalls bekommen sie das, was noch übrig ist.
- Übriggebliebene Krawatten oder Socken kann der Weihnachtsmann nicht zurückgeben.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass *alle* Männer ihr bevorzugtes Geschenk bekommen, muss mindestens 0,98 (= 98%) betragen (vertragliche Zufriedenheitsgarantie).
- Die Gesamtkosten $6 \cdot b_K + 4 \cdot b_S$ müssen unter den gegebenen Bedingungen *minimal* sein.

Der Weihnachtsmann befragt also am selben Tag die 20 Frauen und erhält von *allen* dieselbe Antwort: „Mein Mann möchte, glaube ich, lieber eine Krawatte geschenkt bekommen.“ Als nächstes muss er nun also die Bestellung aufgeben, d.h. er muss sich für eine Anzahl b_K von zu bestellenden Krawatten und eine Anzahl b_S von zu bestellenden Sockenpaaren entscheiden. Damit tut er sich allerdings schwer. Er könnte natürlich, um die 98%-Vorgabe zu erfüllen, einfach $b_K = b_S = 20$ wählen. Damit würden *mit Sicherheit* alle zufrieden gestellt, aber die Kosten dafür wären nicht minimal und er bekäme Ärger mit seinem Vorgesetzten. Helfen Sie ihm, indem Sie die optimalen Bestellmengen b_K und b_S berechnen!

Lösungshinweise:

- Der wirkliche Bedarf an Krawatten d_K und an Sockenpaaren d_S ist zum Bestellzeitpunkt nicht exakt bekannt. Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung von d_K , d.h. berechnen Sie $P(d_K = i)$ für $i = 0, \dots, 20$, wobei P die Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Hinweis: Binomialverteilung (siehe Formelsammlung).
- Stellen Sie eine Formel für $P(b_K \geq d_K \text{ und } b_S \geq d_S)$ auf. Dies ist die in dieser Aufgabe relevante Wahrscheinlichkeit, dass alle Männer zufrieden sind.
Beachten Sie dabei:
 - Wahrscheinlichkeiten sich gegenseitig ausschließender Ereignisse können additiv zusammen gesetzt werden, z.B. $P(d_K = i) + P(d_K = i - 1) = P(d_K = i \text{ oder } d_K = i - 1) = P(i - 1 \leq d_K \leq i)$ für $i = 1, \dots, 20$.
 - Die Wahrscheinlichkeit aller möglichen Ereignisse beträgt immer 100%, d.h. z.B. $\sum_{i=0}^{20} P(d_K = i) = P(0 \leq d_K \leq 20) = 1$.
 - Es gilt immer $d_K = 20 - d_S$.



- Damit könnten Sie nun für *jede* der 441 möglichen Kombinationen für b_K, b_S die relevante Wahrscheinlichkeit $P(b_K \geq d_K \text{ und } b_S \geq d_S)$ berechnen. Allerdings muss man gar nicht alle Möglichkeiten auswerten. Starten Sie z.B. mit der Kombination $b_K = b_S = 20$ und arbeiten Sie sich dann geschickt schrittweise voran!

Viel Spaß!

Antwortmöglichkeiten:

1. $b_K = 20$ und $b_S = 0$
2. $b_K = 17$ und $b_S = 13$
3. $b_K = 12$ und $b_S = 8$
4. $b_K = 20$ und $b_S = 10$
5. $b_K = 20$ und $b_S = 8$
6. $b_K = 16$ und $b_S = 13$
7. $b_K = 18$ und $b_S = 13$
8. $b_K = 19$ und $b_S = 10$
9. $b_K = 16$ und $b_S = 14$
10. $b_K = 15$ und $b_S = 10$

Projektbezug:

Das Gebiet der mathematischen Optimierung (oder auch des Operations Research in der Ökonomie) befasst sich mit der Minimierung oder Maximierung von Funktionen, die von vielen Variablen abhängen, unter gewissen Nebenbedingungen an diese Variablen. Z.B.: Minimiere $f(x_1, x_2)$ unter der Nebenbedingung, dass $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a$ mit irgendeiner festen Zahl $a > 0$. Die

Variablen x_1, x_2 repräsentieren hier die (optimalen) Entscheidungen. In Anwendungen sind aber meist bestimmte Daten (z.B. die Zahl a) nicht exakt bekannt. Oft gibt es aber statistische Informationen über die Daten, d.h. man kennt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (z.B. für a). Meistens ist es in solchen Situationen nicht sinnvoll, $x_2 \leq a$ für alle möglichen Werte von a zu fordern, sondern man fordert, dass die Wahrscheinlichkeit für $x_2 \leq a$ z.B. mindestens 95% beträgt. In der obigen Aufgabe entsprechen d_K und d_S den (nicht exakt gegebenen) Daten, b_K und b_S entsprechen den Entscheidungen.

Im MATHEON-Projekt C7 werden solche Optimierungsansätze auf Probleme in der Energieversorgung angewendet, z.B. von folgender Art: Wann muss ich welches Kraftwerk an- und abschalten, um den Strombedarf meines Versorgungsgebietes immer zu decken und meine Kosten zu minimieren? Dabei ist der Strombedarf eine Größe, die zum Entscheidungszeitpunkt typischerweise nicht exakt bekannt ist, da das An- bzw. Abschalten von Kraftwerken mehrere Stunden dauern kann.

14.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9

Für jeden der 20 Männer beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er lieber eine Krawatte möchte, $0,6 = 60\%$, unabhängig davon, was die anderen präferieren. Dies führt auf eine *Binomialverteilung* (äquivalentes Urnenmodell, siehe Formelsammlung), d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Bedarf an Krawatten ist gegeben durch

$$P(d_K = i) = \binom{20}{i} \cdot 0.6^i \cdot 0.4^{20-i}$$

für $i = 0, \dots, 20$. Dies sind Zahlenwerte, die man mit dem Taschenrechner ausrechnen kann:

i	0	1	2	3	4	...
$\binom{20}{i}$	1	20	190	1140	4845	...
$P(d_K = i)$	$1,0995 \cdot 10^{-8}$	$3,2985 \cdot 10^{-07}$	$4,7004 \cdot 10^{-06}$	$4,2304 \cdot 10^{-05}$	$2,6969 \cdot 10^{-04}$	...

(Die Binomialkoeffizienten $\binom{20}{i}$ können dabei auch über das Pascalsche Dreieck ausgerechnet werden.)

Wegen $d_S = 20 - d_K$ gilt für den Sockenbedarf $P(d_S = i) = P(d_K = 20 - i)$



und für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & P(b_K \geq d_K \text{ und } b_S \geq d_S) \\
 &= P(b_K \geq d_K \text{ und } b_S \geq 20 - d_K) \\
 &= P(20 - b_S \leq d_K \leq b_K) \\
 &= \sum_{i=20-b_S}^{b_K} P(d_K = i) \\
 &= \sum_{i=20-b_S}^{b_K} \binom{20}{i} \cdot 0.6^i \cdot 0.4^{20-i} \\
 &= 1 - \sum_{i=0}^{19-b_S} \binom{20}{i} \cdot 0.6^i \cdot 0.4^{20-i} - \sum_{i=b_K+1}^{20} \binom{20}{i} \cdot 0.6^i \cdot 0.4^{20-i}
 \end{aligned}$$

für gegebene Bestellmengen b_K und b_S . Dabei sei der Wert einer Summe $\sum$ gleich Null, falls der untere Index größer ist als der obere, also z.B. $0 = \sum_{i=21}^{20} \binom{20}{i} \cdot 0.6^i \cdot 0.4^{20-i}$.

Nun können die relevanten Kombinationen von Bestellmengen b_K und b_S bestimmt werden, so dass $P(b_K \geq d_K \text{ und } b_S \geq d_S) \geq 0.98 = 98\%$. Dabei kann man ausnutzen, dass diese Wahrscheinlichkeit *monoton wachsend* in der Variablen b_K und in der Variablen b_S ist. Trivialerweise gilt $P(20 \geq d_K \text{ und } 20 \geq d_S) = 1 > 0.98$. Von dort aus kann man sich an die Lösung „herantasten“, indem man z.B. zunächst b_S so lange verringert, bis man den zulässigen 98%-Bereich verlässt. Dafür genügt es, jeweils nur einen Wert aus obiger Tabelle zu subtrahieren. Vom letzten zulässigen Punkt für $b_K = 20$ aus ($b_S = 13$) kann man anschließend b_K schrittweise verringern usw.. Mit obiger Formel kommt man damit auf folgende Werte für $P(b_K \geq d_K \text{ und } b_S \geq d_S)$:

$b_S \setminus b_K$	20	19	18	17	16	15 ...
20	1,00000000					0,94904805 ...
19	0,99999999					0,94904804 ...
18	0,99999966					0,94904771 ...
17	0,99999496					0,94904301 ...
16	0,99995266					0,94900070 ...
15	0,99968297					0,94873102 ...
14	0,99838848				0,98242731	0,94743652 ...
13	0,99353412	0,99349756	0,99301008	0,98992265	0,97757296	...
12	0,97897107					...
...						...

Da auch die Kosten $6 \cdot b_K + 4 \cdot b_S$ monoton wachsend in b_K und in b_S sind, ist klar, dass nur die folgenden beiden Kombinationen optimal sein können (minimale Kosten): $b_K = 16$ und $b_S = 14$ bzw. $b_K = 17$ und $b_S = 13$. Einsetzen in die Kostenfunktion ergibt, dass $b_K = 16$ und $b_S = 14$ die optimale Lösung ist, d.h. der Weihnachtsmann muss 16 Krawatten und 14 Sockenpaare bestellen und seine Firma (nur) 152 Euro dafür bezahlen.

15 Rettet Weihnachten!

Autoren: Daniel Dressler, Ronald Koch, Martin Skutella

15.1 Aufgabe

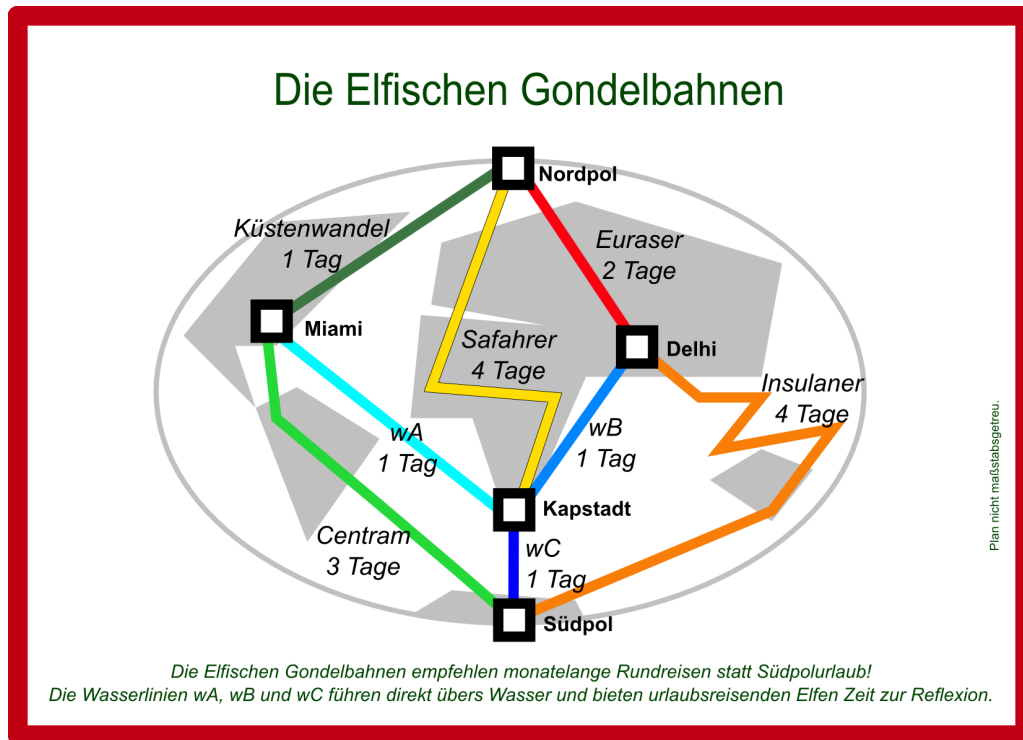
Der erfahrenste Weihnachtsmann der Welt nutzt schon lange einen Trick, um die scheinbar unmögliche Aufgabe, alle Geschenke zu verpacken, möglich zu machen: Jedes Jahr wünschen sich viele Kinder genau das gleiche. Und weil einige pseudobrave Kinder kurz vor Weihnachten wieder frech werden, lässt der erfahrenste Weihnachtsmann der Welt seine Elfen einige der üblichsten Geschenke in geringerer Stückzahl einpacken als gewünscht. Das ging bis jetzt auch immer gut ...

Aber dieses Jahr beobachtet der Weihnachtsmann mit Sorge, wie Tag für Tag die Kinder in aller Welt überdurchschnittlich brav sind. Schon im Oktober stieg die Bravheitskurve steil an, wie sie es sonst erst Mitte November tat. Und im November verlief die Kurve so steil nach oben wie nur das eine Mal, als er höchstpersönlich im Fernsehen auftrat, weil ein Lokalpolitiker seine Existenz angezweifelt hatte. Und heute, am 15.12., beschließt der Weihnachtsmann endlich, die Notbremse zu ziehen, besser gesagt, das Gaspedal durchzudrücken, und alle im Urlaub befindlichen Elfen schnellstmöglich zurück an die Einpacktische zu ordern. Das ist aber leichter gesagt als getan.

Die Elfen machen alle am Südpol Winterurlaub (weil dort Sommer ist) und die Werkbänke des Weihnachtsmanns stehen natürlich am Nordpol. Dazwischen verkehren auf geheimen Routen Gondelbahnen. Viele der Linien wurden aber entlang schöner Landschaften gebaut und nicht, um möglichst schnell wieder zur Arbeit zu kommen. Der genaue Linienplan ist übrigens unten abgedruckt. Auf jeder Linie fährt jeden Morgen eine Gondel ab, welche 100 Elfen transportieren. Das Umsteigen ist kein Problem. Der Weihnachtsmann sagt also jeder Gruppe von 100 Elfen, welche Linien sie wann nehmen muss um zurückzukommen. Er will natürlich, dass möglichst früh möglichst viele Elfen da sind. Nach etwas Überlegen kommt er darauf, dass es ihm genau genommen auf die Anzahl der verpackten Geschenke ankommt. Jeder Elf verpackt 100 Geschenke pro Arbeitstag. Wenn eine Gruppe von 100 Elfen also irgendwie einen Tag früher ankommen kann, kann sie 10.000 Päckchen



(= 10 kPä) mehr verpacken.



Es machen insgesamt 900 Elfen Urlaub am Südpol. Bis sich die Anordnungen des Weihnachtsmanns rumgesprochen haben, vergehen ein paar Stunden, so dass die Elfen erst am Morgen des 16. Dezembers abfahrbereit sind.

Zum Beispiel kann der Weihnachtsmann einer Gruppe von 100 Elfen sagen, sie sollen am 16. Dezember mit der *Centram* Richtung Miami starten, von dort mit der *Wasserlinie wA* nach Kapstadt, weiter mit der *Wasserlinie wB* nach Delhi und schließlich von Delhi zum Nordpol mit dem *Euraser*. Dann sind diese 100 Elfen am 19. Dezember morgens in Miami, am 20. in Kapstadt, am 21. in Delhi und kommen am 23. rechtzeitig zu Schichtbeginn am Nordpol an. Dort können sie noch am selben Tag 10 kPä verpacken. Wenn der Weihnachtsmann außerdem 200 anderen Elfen sagt, sie sollen gleich mit dem *Insulaner* nach Delhi und dann mit dem *Euraser* zum Nordpol, kommen 100 von diesen Elfen nach 4 Tagen, also am 20., in Delhi an und können gleich

weiter zum Nordpol fahren, wo sie nach insgesamt 6 Tagen Reise am 22. Dezember ankommen. Die anderen 100 Elfen können erst einen Tag später am Südpol mit dem *Insulaner* aufbrechen, da jeden Tag nur eine Gondel fährt. Sie kommen also gleichzeitig mit der Gruppe aus Kapstadt am 21. Dezember in Delhi an. Dort können aber nur 100 der angekommenen 200 Elfen weiterfahren, so dass die anderen 100 (egal welche) in Delhi 1 Tag warten müssen, bevor sie weiterkönnen. Also kommen von diesen insgesamt 300 Elfen 100 am 22., weitere 100 am 23. und die letzten 100 erst am 24. Dezember am Nordpol an. Somit werden am 22. Dezember 10 kPä, am 23. Dezember 20 kPä und am 24. Dezember 30 kPä verpackt, also insgesamt 60 kPä bis zum Abend des 24. Dezembers.

Helfen Sie jetzt dem erfahrensten Weihnachtsmann der Welt und planen Sie die beste Heimreise der 900 Elfen. Der beste Plan ist der, der bis zum Abend des 24. Dezembers am meisten kPä verpackt. Wenn Sie den Reiseplan erarbeitet haben, finden Sie heraus, welche Werte die folgende Aussage richtig ergänzen:

Es gibt einen Heimreiseplan, so dass bis zum Abend des 24. Dezembers ... kPä verpackt werden können und mehr Päckchen sind mit keinem Plan möglich. Insbesondere kommen laut diesem Plan am Morgen des 22. Dezember ... Elfen am Nordpol an. (Achtung, unterschiedliche Tage!)

Antwortmöglichkeiten:

1. 280 kPä, 200 Elfen
2. 280 kPä, 300 Elfen
3. 290 kPä, 200 Elfen
4. 290 kPä, 300 Elfen
5. 300 kPä, 200 Elfen
6. 300 kPä, 300 Elfen
7. 310 kPä, 200 Elfen



8. 310 kPä, 300 Elfen
9. 320 kPä, 200 Elfen
10. 320 kPä, 300 Elfen

Projektbezug:

Das hier beschriebene *dynamische Flussproblem* ist das gleiche wie bei der Evakuierung eines Gebäudes. Der Nordpol stellt den sicheren Ausgang dar, der Südpol (oder mehrere Südpole) den anfänglichen Aufenthaltsort der Menschen im Gebäude. Theoretische und praktische Schwierigkeiten entstehen dadurch, dass Menschen im Gegensatz zu Gondeln nicht immer im Gleichschritt laufen und sich gegenseitig beeinflussen.

15.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

Es können 310 kPä gepackt werden, aber nicht mehr. Am 22. Dezember kommen laut diesem Reiseplan nur 200 Elfen an.

Gute Reisepläne scheinen solche zu sein, die schnelle Wege vom Südpol zum Nordpol nutzen. Wie man leicht herausfindet, ist *wC-wA-Küstenwandel* über Kapstadt und Miami der schnellste Weg. Er dauert 3 Tage. Wir nennen ihn jetzt R_1 , Route 1. Wir würden gerne Elfen auf dieser Route schicken, wissen aber noch nicht, ob das zu einem späteren Zeitpunkt bessere Wege verhindert. Allerdings können auf diesem Weg 100 Elfen auf jeden Fall zum Nordpol kommen, denn diese werden nirgends auf ihrer Heimreise weiteren Elfen begegnen, weil es nach Miami und Kapstadt keinen anderen genauso schnellen Weg gibt. Mit dieser ersten Gruppe von Elfen können wir also nichts falsch machen, denn sie kommt so schnell wie möglich an und behindert niemanden. Da das Ganze bis jetzt aber nur ein Plan ist, können wir uns auch an jedem weiteren Tag 100 Elfen auf R_1 vorstellen und vielleicht denken wir sie uns wieder weg.

Nun müssen noch andere Wege vom Südpol zum Nordpol genutzt werden, da entlang einer Route bloß 100 Elfen pro Tag am Nordpol ankommen können. Wenn solche Routen allerdings aufeinandertreffen, kommt es zu Staus, die erst abgebaut werden können, wenn beide Routen nicht mehr verwendet werden. Dann hätte man die Elfen genauso gut später losschicken können. Noch

sinnvoller ist es, solche Staus zu vermeiden und bereits verwendete Gondelbahnen zu meiden. Denn es ist doch perfekt, wenn pro Tag 100 Elfen mit dem *Küstenwandel* am Nordpol ankommen und wir diese Rate so lange aufrechterhalten können, bis alle Elfen am Nordpol sind. Wohin also mit den Elfen, die zum Beispiel über die *Centram* in Miami ankommen? Sie könnten nach Kapstadt fahren und von dort entlang *wB-Euraser* zum Nordpol (Das ist etwas schneller als mit dem *Safahrer*). Wir nennen diese Route *Centram-wA-wB-Euraser* jetzt R_2 .

Während die Elfen auf R_2 aber mit der *Wasserlinie* wA fahren, begegnen sie auf halber Strecke einer Gruppe aus Kapstadt, die gerade in die andere Richtung nach Miami fährt. Sinnvoll ist das nicht. Anstatt also Elfen auf der gleichen Strecke in unterschiedliche Richtungen zu schicken, planen wir um und schicken die Elfen auf beiden Seiten einfach nicht los. Was passiert dann? Dann kommen in Miami immer noch 100 Elfen pro Tag an, nämlich mit der *Centram*. Und in Kapstadt kommen immer noch 100 Elfen pro Tag mit der *Wasserlinie* wC an. Und die Elfen in Kapstadt können früher weiter zum Nordpol fahren (nämlich schon nach 1 Reisetag) als die Elfen, die über Miami nach Kapstadt (nach 4 Reisetagen) gekommen wären. Schon die zweite Gruppe auf der Route R_1 kann einen anderen Weg nehmen, da sie gleichzeitig mit den ersten Elfen auf der *Centram* in Miami ankommen würden, wo sie nicht mehr benötigt werden.

Es ist allerdings kompliziert, sich zu merken, wann welche Gruppe doch woanders hin soll. Statt Routen nachträglich zu ändern, machen wir deshalb gleich zwei gedankliche Tricks:

Erstens: Wenn die Elfen der Route R_2 mit der *Centram* in Miami ankommen, werden sie zu Elfen der Route R_1 und fahren mit dem *Küstenwandel* wie für R_1 geplant weiter zum Nordpol. Schließlich ist es egal, *welche* Elfen am Nordpol ankommen. Die Elfen von der R_1 werden zu Elfen von der R_2 und fahren zurück nach Kapstadt, so wie es für R_2 geplant ist.

Zweitens: Da diese zurückfahrenden Elfen aber gerade aus Kapstadt hergekommen sind, dauert ihre Reise von Miami nach Kapstadt nicht 1 Tag, sondern *minus 1 Tag*, denn sie wären nach 2 Reisetagen in Miami angekommen, fahren aber nach 1 Reisetag schon ab Kapstadt entlang R_2 zum Nordpol anstatt nach Miami. Diese rechnerische Zeitreise macht gute Pläne viel besser beschreibbar.



Welche Routen suchen wir nun für die beste Lösung? Wir nehmen zuerst den kürzesten Weg R_1 und schicken dann pro Tag 100 Elfen auf diesem Weg. Dann suchen wir uns den zweitkürzesten Weg, bedenken aber, dass *Küstenwandel* schon ausgelastet ist und die Linie wA in Richtung Miami auch bereits gefüllt ist. Aber in die andere Richtung kann jeden Tag eine Gruppe von Elfen mit einer Dauer von -1 Tag reisen! Der zweitschnellste Weg ist dann tatsächlich R_2 , denn er dauert bloß 5 Tage ($= 3 \text{ Centram} - 1 \text{ } wA + 1 \text{ } wB + 2 \text{ Euraser}$). Tatsächlich könnten wir auch auf wC und *Küstenwandel* die Elfen umkehren lassen, jedoch findet man dadurch keine kürzere Route vom Südpol zum Nordpol als R_2 .

Nun suchen wir zum dritten Mal einen kürzesten Weg. Jetzt sind bereits *Küstenwandel*, *Centram*, wB , wC und *Euraser* ausgelastet. Hier können wir also Elfen zurückschicken, aber für die Gondelbahnen direkt zum Nordpol hin ist das bestimmt keine gute Idee. Auf wA fährt übrigens (so gut wie) niemand mehr, denn bis auf die erste Gruppe schicken wir hier alle Elfen zurück, und von der ersten wissen wir ja, dass sie niemandem in den Weg kommt. Diese Strecke darf also verwendet werden, aber mit der normalen Reisedauer 1 Tag, nicht minus 1 Tag.

Wir finden unter diesen verbleibenden Fahrmöglichkeiten den kürzesten Weg vom Südpol zum Nordpol: $R_3 = \text{Insulaner-}wB\text{-Safahrer}$. Da die Elfen auf R_3 erst nach 4 Tagen in Delhi ankommen, aber schon nach 3 Tagen Elfen von R_2 in Delhi ankommen (da es ja eigentlich Elfen von der R_1 sind, die noch etwas am Südpol warten mussten), können die Elfen aus der R_3 die *Wasserlinie* wB gegen die Zeit nutzen. Damit ist die Reisedauer auf R_3 $4 - 1 + 4 = 7$ Tage und schneller geht es nicht mehr. Auf all diesen mehr oder weniger fiktiven Routen schicken wir also 100 Elfen pro Tag los. Mehr Elfen können mit den drei Bahnen vom Südpol auch nicht aufbrechen, also brauchen wir keine weiteren Wege zu suchen.

Ein paar Fragen bleiben aber noch: Ist es wirklich möglich, die Elfen so zu schicken, oder schicken wir irgendwann echte Elfen in der Zeit zurück? Das ist ja bekanntlich unmöglich. Deswegen müssen wir uns vergewissern, dass wir die gedachten Zeitreisen erst unternehmen, wenn tatsächlich aus der anderen Richtung schon Elfen gekommen wären. Das geht aber, weil wir immer nur kürzeste Wege verwenden. Dadurch kommen die Elfen von R_1 nie nach den Elfen von R_2 an der gleichen Stelle an. Und deswegen kann R_2 immer ohne Bedenken Elfen von R_1 zurückschicken. Und Elfen von R_3 kommen immer

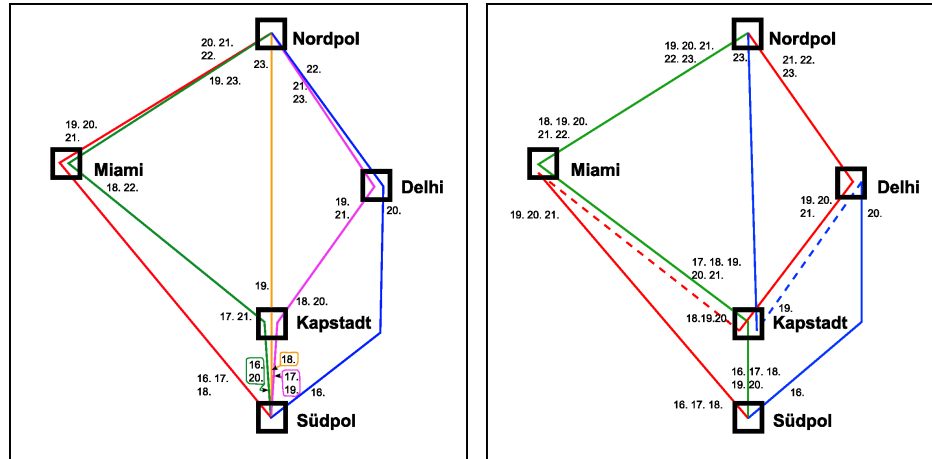


Abbildung 3: Zwei Darstellungen der selben Lösung: Ohne und mit Zeitreise. Die Zahlen zeigen, wann Elfen wo ankommen (= abfahren).

nach Elfen von R_1 und R_2 an und können diese zurückschicken.

Außerdem möchten wir natürlich wissen, ob wir wirklich mit diesem Plan so schnell wie möglich die Elfen zum Nordpol bringen können. Dafür überlegen wir uns, wieviele Elfen denn nun ankommen und wieviele Päckchen dadurch gepackt werden. Nach 3 Tagen Reise kommen die Elfen der Route R_1 an, nach 5 Reisetagen die Elfen der R_2 und nach 7 Reisetagen die Elfen der R_3 . Da die ersten Elfen auf jeder Route jeweils am 16. Dezember losfahren, kommen ab dem 19. jeden Tag 100 Elfen von der R_1 an. Ab dem 21. Dezember kommen zusätzlich noch 100 Elfen von der R_2 und ab dem 23. Dezember weitere 100 Elfen der R_3 an. Wie man der folgenden Tabelle entnehmen kann, sind dann auch alle 900 Elfen schon am Nordpol, so dass zu entsprechenden Zeiten gar keine Elfen mehr losfahren (Es ist dabei möglich, dass die Elfen die R_2 früher nicht mehr nutzen als die R_1 und dann auf der *Wasslinie* wa am Schluss doch wieder Elfen entlang R_1 fahren, wie es in der unten gezeigten Lösung der Fall ist. Dies muss nicht sein, aber dadurch können ein paar Elfen noch etwas länger Urlaub machen ohne später heimzukommen.)

Tatsächlich kann kein Plan zu irgendeinem Zeitpunkt mehr kPä als unser Plan produzieren, d.h. kein Plan kann zu irgendeinem Zeitpunkt die Ge-

Datum	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.
am N. ankommende Elfen	0	0	0	100	100	200	200	300	0
Elfen gesamt am Nordpol	0	0	0	100	200	400	600	900	900
kPä an diesem Tag	0	0	0	10	20	40	60	90	90
kPä gesamt	0	0	0	10	30	70	130	220	310

Tabelle 1: Das sogenannte Ankunfts muster der Elfen.

samtzahl der zurückgebrachten Elfen von unserem Plan überbieten und damit auch nicht die Gesamtzahl der bereits verpackten Geschenke. Dies wollen wir uns nun überlegen.

Kein Plan kann am 16., 17., 18. oder 19. Dezember mehr Elfen zum Nordpol gebracht haben, da dies nur über den einen kürzesten Weg geht. Wer diesen nicht wählt, kann erst am 20. Dezember ankommen. Ein Plan, der bis zum 20. Dezember mehr als 200 Elfen zum Nordpol gebracht hat, ist auch nicht möglich, wie man sich noch recht leicht von Hand überzeugen kann.

Am 21. Dezember können mit keinem Plan insgesamt mehr als 400 Elfen am Nordpol sein. Um das einzusehen, stellen wir Beobachter am Südpol, in Miami, in Kapstadt und in Delhi auf und schicken unsere Elfen nach dem Plan, der am meisten Elfen bis zum 21. zum Nordpol schickt. Wir wissen nicht, wie dieser Plan aussieht, aber unsere Beobachter sehen seine Auswirkungen. Diese Beobachter zählen alle Elfen, die wegfahren, außer sie fahren zu einem anderen Beobachter, um keinen Elfen doppelt zu zählen. Da diese Beobachter alle Wege von der Südhalbkugel zur Nordhalbkugel bewachen, muss jeder Elf bei mindestens einem Beobachter vorbeikommen und wenn die Beobachter dann irgendwann vermelden, wieviele Elfen bei ihnen weggefahren sind, wissen wir, wieviele höchstens zum Nordpol gefahren sind.

Die Beobachter stehen jedoch nicht von Anfang an überall, sondern zuerst nur am Südpol, aber dadurch, dass sie wissen, wann welcher Beobachter wo hinzukommt, können sie entscheiden, ob sie eine Gruppe von Elfen zählen müssen oder nicht. Am 19. Dezember kommt ein Beobachter in Kapstadt dazu und am 20. sind auch die Beobachter in Miami und Delhi auf ihrem Posten. Der Beobachter am Südpol zählt am 16. Dezember höchstens 100 Elfen Richtung Miami, denn alle späteren werden wegen der Reisezeit vom Beobachter in Miami erfasst. Außerdem zählt er bis zu 100 Elfen Richtung Kapstadt und noch einmal bis zu 100 Elfen Richtung Kapstadt am 17. Dezember. Die

Elfen, die erst am 18. Richtung Kapstadt aufbrechen, werden dort am 19. von einem Beobachter schon bemerkt. Die Elfen Richtung Delhi zählt der Beobachter am Südpol überhaupt nicht, denn diese kommen frühestens am 20. Dezember in Delhi an, wo ebenfalls schon ein Beobachter auf sie wartet. Der Beobachter in Kapstadt zählt keine Elfen in Richtung Miami, da er erst am 19. in Kapstadt ist und die Elfen Richtung Miami erst am 20. in Miami ankommen, wo bereits ein Beobachter wartet. Ebenfalls muss er keine Elfen in Richtung Delhi zählen, da auch dort dann schon ein Beobachter steht. Und in Richtung Nordpol zählt er auch keine Elfen, da diese frühestens vier Tage später, also am 23. Dezember, am Nordpol ankommen würden. Wir wollen aber gerade wissen, wieviele Elfen bis zum 21. Dezember am Nordpol ankommen. Der Beobachter in Delhi zählt ebenfalls keine Elfen, da diese nur zum Beobachter in Kapstadt fahren können oder mit dem *Euraser* einen Tag zu spät am Nordpol ankommen. Nur der Beobachter in Miami zählt noch bis zu 100 Elfen, die am Tag seines Dienstantritts mit dem *Küstenwandel* zum Nordpol fahren. Wer erst am 21. Dezember losfährt, kommt nämlich auch zu spät an.

Somit haben die Beobachter insgesamt höchstens 300 Elfen am Südpol und höchstens 100 Elfen in Miami gezählt. Es können also bloß 400 Elfen bis zum Morgen des 21. Dezembers am Nordpol angekommen sein, da jeder angekommene Elf irgendwo gezählt wurde. So viele Elfen werden aber auch mit unserem Plan geschickt, weswegen es bis zum 21. Dezember keinen besseren Plan geben kann.

Die gleichen Beobachter können uns auch sagen, dass bis zum 22. Dezember nicht mehr als 600 Elfen am Nordpol angekommen sein können. Das einzige, was sich ändert, ist, dass der Beobachter in Miami auch am 21. Dezember noch 100 Elfen zählen kann und der Beobachter in Delhi ebenfalls 100 Elfen Richtung Nordpol mit dem *Euraser* zählt. Mit dem *Safahrer* kommen immer noch keine Elfen rechtzeitig am Nordpol an, die vom Beobachter in Kapstadt gezählt werden müssten.

Also ist unser Plan bis zum 22. Dezember mindestens so gut wie jeder andere Plan. Danach kommen die maximal möglichen 300 Elfen pro Tag an und dann sind alle angekommen. Damit ist unser Plan auch am 23. und 24. Dezember der beste und an *jedem* Tag sind schon so viele Elfen wie möglich am Nordpol und haben so viele Päckchen wie möglich verpackt. Damit kann



es auch nicht sein, dass ein Plan insgesamt so gut ist wie unserer und am 22. Dezember mehr als 200 Elfen ankommen lässt. Denn er kann am Ende des 22. nicht mehr kPä verpackt haben, muss also vorher weniger Elfen heimgebracht haben. Dann muss dieser Plan aber nicht nur die Anzahl der Elfen wieder aufholen, sondern zusätzlich noch die Anzahl der verpackten Päckchen. Um das zu erreichen, muss er zu einem Zeitpunkt echt mehr Elfen in der Summe heimgebracht haben als unser Plan und genau das ist nicht möglich.

Somit können in der besten Lösung nur 200 Elfen am 22. Dezember ankommen und damit ist die Antwort 7 eindeutig die richtige. Der optimale Plan an sich ist übrigens nicht eindeutig.



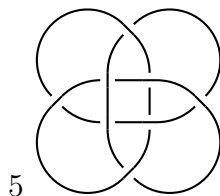
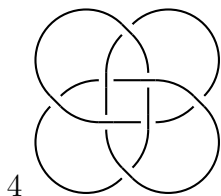
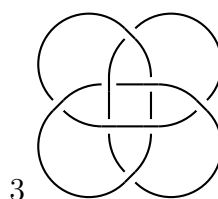
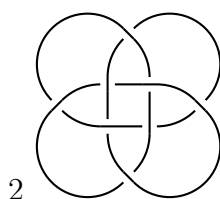
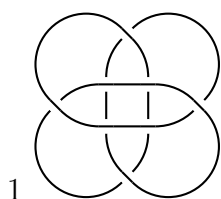
16 Knoten

Autor: John Sullivan

Projekt: F5

16.1 Aufgabe

In der riesigen Fabrik von Weihnachtsman Industries werden alle Geschenke vollautomatisch produziert und verpackt. Dazu werden auch Geschenkpapiere, Schnüre und Gummibänder hergestellt. Die Gummibänder werden zum Verpacken von besonderen Überraschungen benötigt und sind auf himmlische Weise in sich verschlungen. Leider ist in der Gummibandproduktionsmaschine ein Defekt aufgetreten: Nur zwei von fünf Gummibändern wurden wie gewünscht produziert, die anderen drei sind zu kompliziert geraten. Welche der fünf Bilder zeigen die richtigen Gummibänder? (Achtung: Beim Hinlegen kann es passieren, dass zwei gleich verschlungene Gummibänder jeweils ein anderes Bild abgeben!)



Antwortmöglichkeiten:

1. 1 und 2 sind gleich.



2. 1 und 3 sind gleich.
3. 1 und 4 sind gleich.
4. 1 und 5 sind gleich.
5. 2 und 3 sind gleich.
6. 2 und 4 sind gleich.
7. 2 und 5 sind gleich.
8. 3 und 4 sind gleich.
9. 3 und 5 sind gleich.
10. 4 und 5 sind gleich.

Projektbezug:

In der Mathematik versteht man unter einem Knoten eine geschlossene Schleife im Raum, wie aus Bindfaden. Zwei Knoten werden als gleich betrachtet, wenn man sie ineinander deformieren kann, ohne den Faden zu zerschneiden. Das Ziel der Knotentheorie ist, alle möglichen Knoten zu klassifizieren. Für dieses Problem interessieren sich seit einiger Zeit auch Biophysiker, die über DNS-Moleküle forschen. Wenn bei der Zellteilung die Doppelhelix der DNS kopiert wird, würden sich beide Stränge schrecklich verknoten, wenn es nicht Enzyme gäbe, die es möglich machen, dass sich ein Strang durch den anderen bewegt.

Wissenschaftler im Projekt F5 haben ein geometrisches Verfahren untersucht, wie man automatisch komplizierte Knoten entwirren kann.

16.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6

Abbildungen 2 und 4 zeigen den gleichen Knoten.

Knoten zu entwirren, zählt zu den schwierigen Problemen der Mathematik: Bisher ist kein effizientes Verfahren bekannt, um zu entscheiden, ob zwei



beliebige, gegebene Knoten identisch sind oder nicht. In vielen Fällen ist es jedoch möglich, einen Knoten (die Darstellung eines Knotens) zu vereinfachen, indem man z. B. eine Schleife des Knotens über eine andere hinweg bewegt. Das Bild eines Knotens wird dabei „einfacher“, wenn es gelingt, die Anzahl der Überkreuzungen zu verringern. Alle gezeichneten Knoten haben acht Überkreuzungen. Zieht man bei den Knoten 2 und 4 die Schlaufe rechts unten etwas enger, so verringert sich die Zahl der Überkreuzungen auf sechs. Entwirrt man die Knoten 2 und 4 weiter, so kommt man schließlich auf drei Überkreuzungen und kann sich einfach davon überzeugen, dass es sich um den gleichen Knoten handelt. Dieser Knoten mit drei Kreuzungen ist der kleinste nichttriviale Knoten und wird Kleeblattschlinge oder auf englisch Trefoil knot genannt.

(Der Knoten 1 lässt sich entsprechend auf vier Kreuzungen reduzieren und Knoten 5 auf sechs Kreuzungen. Hingegen lässt sich Knoten 8 nicht vereinfachen. Achtung: Bei manchen Knoten muss man erst Überkreuzungen hinzufügen, bevor man sie anschließend vereinfachen kann! Genau das macht die Sache so schwierig...).



17 Der Weihnachtsmann auf der Suche nach dem optimalen Fahrplan

Autor: Martin Grötschel und Thomas Schlechte

Projekt: BMWi Trassenbörse

17.1 Aufgabe

Wie in jedem Jahr steht der Weihnachtsmann vor der schweren Aufgabe, genügend Nüsse, Marzipan und Schokolade aus aller Welt zu allen artigen Kindern zu transportieren - Tonnen von Süßigkeiten und Leckereien werden gebraucht.

Um dieses Jahr den fleißigen Rentieren die Arbeit etwas zu erleichtern, hat er sich überlegt, soviel wie möglich bereits auf anderem Weg in Richtung Rentierhausen zu transportieren. Zweifellos eignet sich der Schienenverkehr am ehesten für den Transport enormer Mengen, zumal nach Regelfahrplan zur Nacht sowieso keine Züge von Lapplandia nach Rentierhausen unterwegs sind. Es ist ihm dabei auch egal, wieviel Tonnen letztendlich direkt in Rentierhausen ankommen, entscheidend ist, dass möglichst viel auf der Schiene transportiert wird.

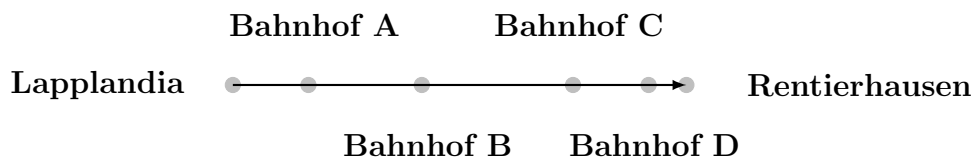


Abbildung 4: Schienennetz von Lapplandia nach Rentierhausen.

Hochmotiviert und voller Tatendrang lässt er bei Dr. Weiche, der Chefin des Eisenbahnschienennetzes, nachfragen, welche Züge sie ihm auf der Strecke von Lapplandia nach Rentierhausen wann und mit welcher maximalen Transportkapazität zur Verfügung stellen könne.

Deren Fahrzeiten zu bestimmen, ist keine leichte Aufgabe: Das Fahrverhalten eines Zuges hängt natürlich erheblich von der Fracht, der Strecke und den speziellen Zugeigenschaften ab - deshalb werden Fahrzeiten heutzutage mit entsprechender Simulationssoftware bestimmt. Nach einer Weile erhält

der Weihnachtsmann aber die folgenden Informationen über die verfügbaren Züge:

Tabelle 2: Zuginformationen:

Zug	Abfahrtsort	Abfahrtszeitpunkt	Ankunftsart	Ankunftszeitpunkt	Kapazität in Tonnen
1	Lapplandia	22:10	Bahnhof D	23:00	23
2	Bahnhof A	22:00	Bahnhof D	23:10	25
3	Bahnhof A	23:00	Bahnhof B	23:50	24
4	Lapplandia	23:00	Bahnhof D	23:50	33
5	Bahnhof B	22:00	Rentierhausen	22:30	23
6	Bahnhof B	22:20	Rentierhausen	22:50	21
7	Bahnhof B	22:40	Rentierhausen	23:10	49
8	Bahnhof A	22:40	Rentierhausen	23:30	35
9	Lapplandia	22:40	Rentierhausen	23:50	31
10	Bahnhof B	23:20	Rentierhausen	23:40	45
11	Bahnhof C	23:00	Rentierhausen	24:00	71
12	Bahnhof C	22:00	Rentierhausen	23:00	43
13	Lapplandia	23:20	Bahnhof B	23:40	41
14	Lapplandia	23:40	Bahnhof B	24:00	43
15	Bahnhof B	23:00	Bahnhof D	24:00	27
16	Bahnhof C	22:20	Rentierhausen	22:40	x
17	Bahnhof C	22:40	Rentierhausen	23:20	y

Erleichtert bedankt sich der Weihnachtsmann bei Dr. Weiche für die erfolgreiche Zusammenarbeit und freut sich, dass alle Züge jetzt wohl losrollen können. Daraufhin reagiert diese entsetzt:

„Lieber Weihnachtsmann - dir ist schon bewusst, dass alle diese Züge auf der gleichen Strecke von Lapplandia nach Rentierhausen verkehren! Dadurch, dass diese zum einen neue und alte Lokomotiven und zum anderen unterschiedlich viele Waggons haben, sind auch die Fahrzeiten, wie du der Tabelle 2 entnehmen kannst, extrem unterschiedlich. Die Kapazitäten der Züge 16 und 17 sind im Übrigen noch unbekannt. Wir können aber durchaus annehmen, dass es sich um echt positive Größen x und y handelt. Es besteht auf dieser Bahnstrecke leider auch keine Möglichkeit zu überholen. Du musst dir also genau überlegen, welche Züge du problemlos fahren lassen kannst und welche bei gleichzeitiger Fahrt zu einer Kollision auf der Strecke führen würden. Suche dir doch einfach Züge aus der Tabelle 2 aus, die zu keinem Unfall führen und die insgesamt am meisten Tonnen transportieren!“

Leicht gesagt - desillusioniert und mit gehörigem Respekt vor der Aufgabe macht sich dann der Weihnachtsmann an die Arbeit. Auf dem Weg zu einer Lösung kommt er aber schließlich auf die in Abbildung 5 dargestellte Skizze. Zu sehen ist von oben nach unten (Y-Achse) die betrachtete Bahnstrecke und von links nach rechts (X-Achse) die Zeit. Jede Linie in diesem Bild entspricht



einem Zug und seinem zeitlichen und örtlichen Verlauf gemäß Tabelle 2. Die am Startpunkt jeder Linie verzeichnete Zahl beziffert die Tonnen, die dieser Zug transportieren könnte, falls er denn führe. Das entspricht also dem Nutzen oder dem Wert, den dieser Zug hat. Gleichzeitig können wir annehmen, die Züge nur vollbeladen zu fahren.

Eine Teilmenge M der Menge der Linien nennen wir „zulässig“, wenn sich je zwei der Linien, die in M enthalten sind, in der Graphik 5 nicht berühren bzw. schneiden. Nur solche „zulässigen“ Linienmengen repräsentieren also eine kollisionsfreie Menge von Zügen. Gesucht ist demnach eine „zulässige“ Menge von Linien, deren Wert in Summe maximal ist. Eine solche Menge nennen wir optimale Linienmenge oder optimale Lösung; deren Gesamtwert in Tonnen bezeichnen wir mit Optimum. Kannst du dem Weihnachtsmann dabei helfen, eine kollisionsfreie Menge von Zügen zu bestimmen, die die maximale Anzahl an Tonnen auf der gesamten Strecke befördert?

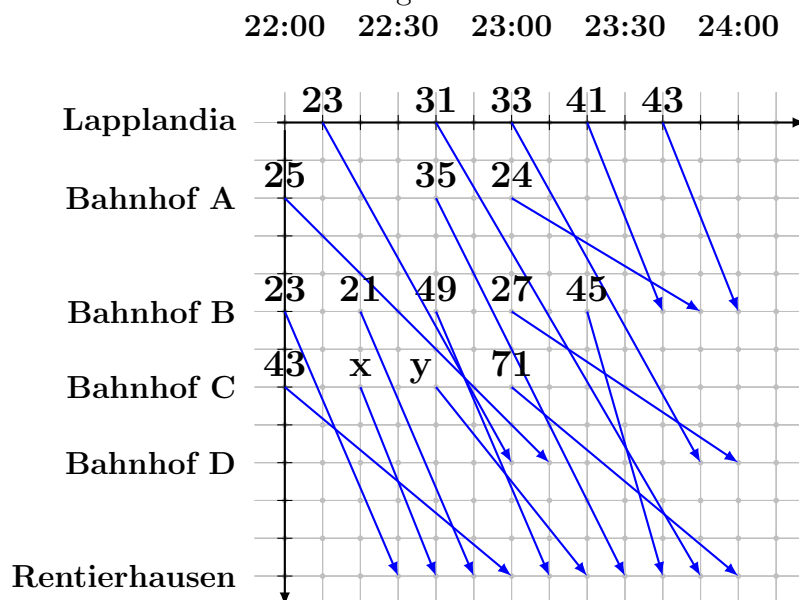


Abbildung 5: System von Linien.



Welche Antwort stimmt ?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt keine zulässige Linienmenge, die alle von Lapplandia startenden Linien beinhaltet.
2. Es gibt eine optimale Lösung, ohne die Linie 16 mit dem unbekannten Wert x .
3. Falls y grösser ist als 22, ist y in jeder optimalen Lösung enthalten.
4. Es gibt keine zulässige Linienmenge mit genau 10 Linien.
5. Das Optimum beträgt $209 + x + \max\{49, 25 + y\}$.
6. Jede optimale Lösung enthält die Linie 11 mit dem größten fest vorgegebenen Wert 71.
7. Die Linie 6 mit dem kleinsten fest vorgegebenen Wert 21 ist in keiner optimalen Lösung enthalten.
8. Das Optimum beträgt $241 + x + \max\{49, 25 + y\}$.
9. x muss größer als 12 sein, um in einer optimalen Linienmenge zu sein.
10. Das Optimum beträgt $290 + x + \max\{49, y\}$.

Projektbezug:

Bei der Eisenbahn ist es üblich, die Fahrt eines Zuges in einem Weg-Zeit-Diagramm darzustellen. Wir betrachten hier den (extrem einfachen) Fall eines Eisenbahnnetzes, das nur eine einzige Strecke oder Fahrtrasse hat, die von einem Bahnhof im Ort A , über Bahnhöfe in B , C und D zum Bahnhof E führt. In einem Weg-Zeit-Diagramm läuft die Zeit t vom Ursprung aus nach rechts, der Weg w nach unten.

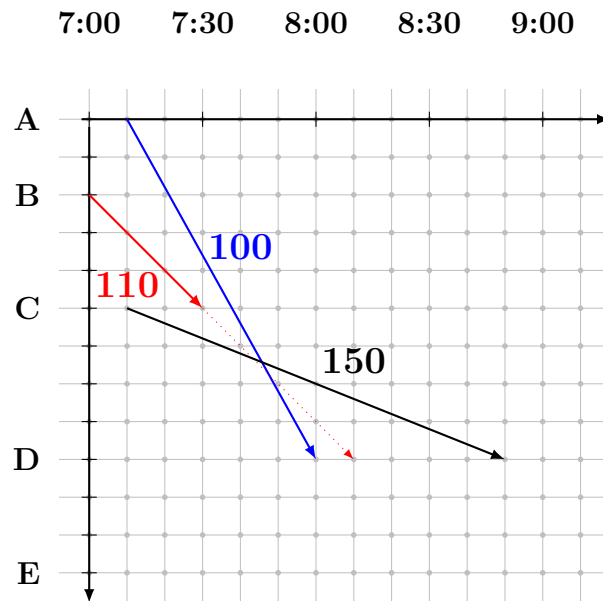


Abbildung 6: Beispiel.

In Abbildung 6 repräsentiert ein Intervall zwischen zwei Strichen auf der horizontalen (waagerechten) Achse einen Zeitraum von 10 Minuten, ein Intervall zwischen zwei Strichen auf der vertikalen (senkrechten) Achse entspricht zwanzig Kilometern. Die Markierungen *A* bis *E* auf der senkrechten Achse markieren die Bahnhöfe. Die Linie, die in Punkt *B* beginnt und im 45° -Winkel nach unten verläuft, repräsentiert einen Zug, der zum Zeitpunkt 7:00 Uhr den Bahnhof *B* verlässt und nach 30 Minuten den Bahnhof *C* erreicht. Der Zug hat somit eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h. Ein zweiter Zug verlässt den Bahnhof *A* um 7:10 Uhr und fährt ohne Halt nach *D*, wo er um 8:00 Uhr ankommt. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 216 km/h. Schnelle Züge erkennt man daran, dass die zugehörige Linie im Weg-Zeit-Diagramm steiler nach unten verläuft. Führe der erste Zug (von *B* nach *C*) ohne Halt in *C* weiter, so träfen die beiden Züge um 7:45 Uhr aufeinander. Das darf natürlich nicht passieren! Wenn also Linien in einem Weg-Zeit-Diagramm Züge repräsentieren, dann dürfen sich die Linien nicht schneiden (in der Realität, die natürlich etwas komplizierter ist, müssen zur Sicherheit sogar gewisse Mindestabstände eingehalten werden).

Stellen wir uns nun vor, bei der Eisenbahn gäbe es Konkurrenz (überall in Europa versuchen die etablierten Eisenbahnunternehmen das zu verhindern). In einem solchen Falle gehörte z.B. die Fahrtrasse von A nach E einer staatlichen Netzagentur. Die Netzagentur schriebe die Benutzung der Strecke von A nach E aus. Konkurrierende Eisenbahnverkehrsunternehmen $U_1, \dots, U_k$ gäben dann Gebote ab. Unternehmen U_1 böte z.B. 100 €, um einen Zug auf die Strecke zu bringen, der A um 7:10 Uhr verlässt und D um 9:00 Uhr erreicht. U_2 möchte einen Zug fahren lassen, der B um 7:10 Uhr verlässt und C um 7:40 Uhr erreicht. Dieses Unternehmen bietet dafür 110 €. Und wie in Abbildung 6 dargestellt, will U_3 einen sehr langsamem Zug von C nach D für 150 € ersteigern. Natürlich können nicht alle Züge gleichzeitig fahren. Andererseits soll aber der Nutzen (in diesem Fall der Auktionserlös des Fahrplanes) möglichst hoch sein.

Wie in der Aufgabe oben, geht es nicht nur um einen Konflikt zwischen zwei Zügen. Bei großer Konkurrenz auf wichtigen Strecken werden viele Konflikte zwischen Geboten auftreten. Und natürlich ist die Realität noch viel komplizierter. Hier gibt es nicht nur eine Strecke von A nach E , sondern ein ganzes Netzwerk von ein- und mehrgleisigen Strecken mit Weichen und Bahnhofsdurchfahrten. Des Weiteren müssen auch noch Anschlüsse gesichert werden. Ein Eisenbahnverkehrsunternehmen wird nicht nur auf einen einzelnen Zug bieten, sondern miteinander verknüpfte Züge fahren lassen wollen. Wie findet man hier eine Kombination von Zügen, die zu einem „zulässigen“ bzw. „fahrbaren“ Fahrplan führt und die vorhandenen Trassen „möglichst gut“ ausnutzt? In unserem Falle heiße „möglichst gut“, dass die Trassenerlöse maximiert werden sollen.

Die oben skizzierte Fragestellung wird in einem gemeinsamen Projekt von Mathematikern, Ökonomen und Schienenverkehrsfachleuten (BMW Projekt Trassenbörse) untersucht. In diesem interdisziplinären Projekt soll ein Auktionsmechanismus entworfen werden, mit dem man einen fairen Zugang zur Schieneninfrastruktur sicherstellen kann.

Die gestellte Aufgabe kann also als das Problem angesehen werden, welches die Netzagentur zu lösen hätte, wenn sie aus den Geboten für eine einzelne Schienentrasse, die für einen gewissen Zeitraum vorliegen, die Kombination von Zügen auswählte, die der Netzagentur den höchsten Gewinn bringt.

Noch mehr Informationen zu dem vom Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie (BMW) geförderten Projekt findet ihr auf unserer Homepage www.trassenboerse.de.



17.2 Lösung

Richtige Lösung:

Antwort 8 - Das Optimum beträgt $241 + x + \max\{49, 25 + y\}$.

Lösungsweg:

Züge ohne Konflikt kann man immer auswählen, d.h. Zug 14(43), in Klammern die Tonnen, ist immer in einer optimalen zulässigen Linienmenge. Bei Zügen mit Konflikten betrachtet man alle konfliktfreien Mengen und wählt die mit dem größten Wert. Glücklicherweise zerfällt das Problem dadurch auch in kleinere Teilprobleme (divide&conquer) - dies gilt zum Beispiel im Bild unten links für die Linien 5(23), 6(21), 12(43) und 16(x).

Da die Linie 5 und 6 zusammen einen Wert von 44 erbringen und beide zusammen konfliktfrei sind, kann Linie 12 ($43 < 44$) nicht Teil einer optimalen Lösung sein. Dadurch kann aber auch Linie 16 immer ausgewählt werden. Diese Argumentation ergibt dann schon einmal, dass die Optimallösung die Linien 14, 5, 6 und 16 enthält und der Optimalwert mindestens $43 + 23 + 21 + x$ beträgt.

Danach betrachtet man die restlichen Linien und führt diese Argumentation so fort. Insgesamt erhält man abhängig von y zwei Lösungen, wie in den Abbildungen 7 und 8 dargestellt. Die Formel, die den maximalen Wert bei der Lösungen beschreibt, ist dann Antwort 8. Im Übrigen ist die Lösung in Abbildung 8 auch ein Gegenbeispiel zur Aussage 4, da sie 10 Linien enthält.

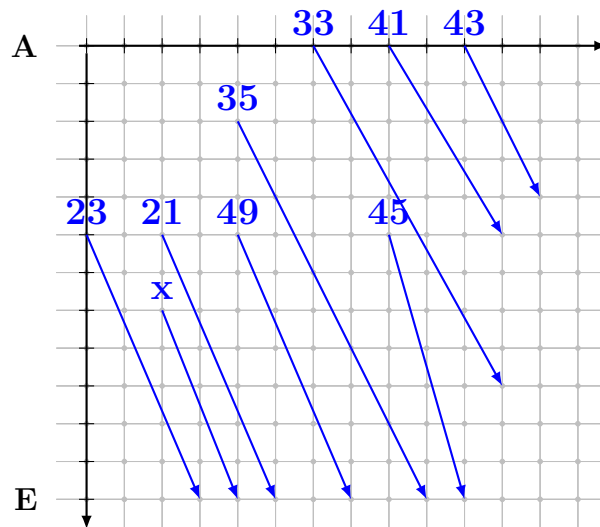


Abbildung 7: Optimale Lösung falls $y \leq 24$.

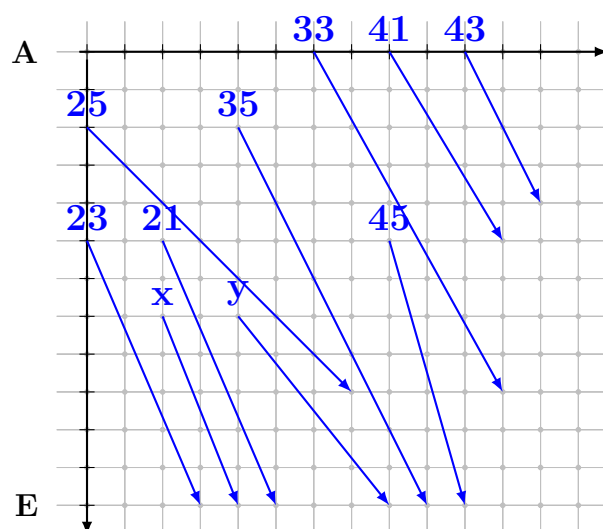


Abbildung 8: Optimale Lösung falls $y \geq 24$.



18 Die Gewichtel

Autor: Falk Ebert

Projekt: D13

18.1 Aufgabe

Der Verlademeister Valentin hat ein Problem: Seine Gewichte sind weg. Und das so kurz vor Weihnachten. Er hat doch dafür zu sorgen, dass der Schlitten des Weihnachtsmanns den Nachtflugregulationen entspricht und die besagen nun einmal, dass ein Schlitten über bewohntem Gebiet maximal 220kg wiegen darf. Der Weihnachtsmann allein bringt schon exakte 100kg auf die Waage, aber die Geschenke variieren ja jedes Jahr wieder. Demnach muss Valentin jedes Geschenk einzeln abwiegen. Standardmäßig haben die Geschenke immer nur volle Kilogrammgewichte (der Rest wird immer mit Verpackungsmaterial und Süßigkeiten aufgefüllt). Zum Wiegen verwendet Valentin eine uralte Balkenwaage, bei der auf die eine Seite Gewichte und auf die andere Seite das zu wiegende Geschenk gestellt werden. Da ihm die Gewichte aber fehlen, will Valentin sich vom Geschenkeaufseher Gernot ein paar seiner Geschenkewichtel als Gewichtel ausleihen. Diese haben glücklicherweise auch immer nur volle Kilogrammgewichte (der Rest wird immer mit Süßigkeiten aufgefüllt). Die Wichtel haben dabei alle möglichen Gewichte von 1 kg (Mikroelektronik-Wichtel) bis 120 kg (Motorroller-Wichtel). Gernot will natürlich keine 120 Wichtel abkommandieren, sondern so wenige wie möglich. Valentin kann ja mehrere Wichtel gemeinsam auf die Gewichte-Seite der Waage stellen, um so verschiedene Gegengewichte zu erhalten. Dann kommt ihm eine grandiose Idee: Er kann ja seine Gewichtel auf beide Seiten der Waage stellen, d.h. auch auf die Seite mit dem Geschenk.

Wie viele Gewichtel benötigt Valentin, wenn er eine bzw. beide Seiten der Waage mit Gewichteln besetzen kann, um damit das Gewicht jeden Geschenkes (1 - 120kg) exakt abwiegen zu können?

Antwortmöglichkeiten:

1. 6 Gewichtel bzw. 6 Gewichtel



2. 5 Gewichtel bzw. 7 Gewichtel
3. 8 Gewichtel bzw. 7 Gewichtel
4. 9 Gewichtel bzw. 4 Gewichtel
5. 7 Gewichtel bzw. 4 Gewichtel
6. 7 Gewichtel bzw. 6 Gewichtel
7. 7 Gewichtel bzw. 7 Gewichtel
8. 6 Gewichtel bzw. 5 Gewichtel
9. 6 Gewichtel bzw. 4 Gewichtel
10. 7 Gewichtel bzw. 5 Gewichtel

Bemerkung: Spitzfindigkeiten der Art, dass man Gewichtel in unterschiedlichem Abstand vom Drehpunkt platzieren könne, werden von der Waage nicht berücksichtigt!

Projektbezug:

Der Autor beschäftigt sich innerhalb des Projekts D13 vor allem mit der Frage, wie man Gleichungen, die komplizierte Schaltkreise beschreiben, effizient auf dem Computer lösen kann. Daneben hält er mathematische Vorträge vor Schülern und macht sich zur Zeit Gedanken, was er seiner Familie zu Weihnachten schenken kann - also ist nur ein indirekter Projektbezug erkennbar.

18.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 10

Betrachten wir zuerst den Fall, dass nur eine Seite der Waage mit Gewichteln besetzt werden kann. Jeder Gewichtel hat den Zustand 'auf der Waage' oder 'unten'. Wir ordnen dem Zustand 'auf' den Wert $\alpha = 1$ zu und dem Zustand 'unten' den Wert $\alpha = 0$. Sind jetzt die Gewichtel durchnummeriert und hat der i -te Wichtel Gewicht g_i , dann ergibt sich für ihr Gesamtgewicht

$$G = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \dots$$

Wenn die Gewichte g_i bekannt sind, dann reicht es aus, die Folge $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ zu kennen, um das Gesamtgewicht zu berechnen. Dies bedeutet aber, dass wir alle Zahlen zwischen 1 und 120 durch eine Folge von Nullen und Einsen darstellen müssen. Dieser Sachverhalt ist auch als Binärsystem¹ bekannt, bei dem die Gewichte $g_i = 2^{i-1}$ sind. Mit den Gewichteln von 1kg, 2kg, 4kg, 8kg, 16kg, 32kg und 64kg lassen sich so sämtliche Gewichte zwischen 1kg und 127 kg ausdrücken.

Ähnlich gehen wir vor, wenn Gewichtel auf beiden Seiten der Waage stehen können:

Diesmal lassen wir die Zustände

- 'rechts' (Gewichtel stehen auf der Seite des Geschenks $\equiv -1$);
- 'links' (Gewichtel stehen nicht auf der Seite des Geschenks $\equiv 1$);
- 'unten' (Gewichtel stehen nicht auf der Waage $\equiv 0$)

zu.

Dass man hier 3 Zustände zur Verfügung hat, legt nahe, dass man hier nicht das Binär-, sondern das Ternärsystem zuhelfe nimmt, d.h. die Zahldarstellung zur Basis 3.

Mit den Potenzen 3^0 ; 3^1 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 lassen sich im Ternärsystem alle Zahlen zwischen 1_{10} und 242_{10} darstellen.²

Andererseits stellt jede gegebene Folge $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ mit $\alpha_i \in \{-1; 0; 1\}$ die Verteilung der Gewichtel auf der Waage dar. Addiert man zu jedem Folgenglied 1 dazu, so kann man die entstehende Zahlenfolge als ternäre Zahl auffassen.

¹Im Dezimalsystem wird jede Zahl dargestellt als eine Summe von Potenzen der Zahl 10. Bsp. (die Zahl im Index benennt die Basis):

$$127_{10} = 7 * 10^0 + 2 * 10^1 + 1 * 10^2 \quad ;$$

analog gilt für das Binärsystem:

$$127_{10} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3 + 1 * 2^4 + 1 * 2^5 = 111111_2$$

$$126_{10} = 0 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3 + 1 * 2^4 + 1 * 2^5 = 111110_2$$

²Dafür müssen die Gewichte allerdings doppelt vorhanden sein, was hier nicht der Fall sein soll (z.B. $242_{10} = 2 * 81 + 2 * 27 + 2 * 9 + 2 * 3 + 0 * 1 = 22220_3$ - jedoch dürfen die Gewichte ja auf beide Seiten der Waage gestellt werden und zudem hat man noch das Gewicht der Geschenke).



Bsp.:

60kg sollen ausgewogen werden. Bekannt sei die Verteilung der Gewichtel
81kg, 27kg, 9kg, 3kg, 1kg:

1 -1 1 -1 0 (Verteilung der Gewichtel in von links absteigender Folge)

- Dies wird durch Addition von 1 zur Ternärzahl:

$$2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \quad (1 * 3^0 + 0 * 3^1 + 2 * 3^2 + 0 * 3^3 + 2 * 3^4 = 181_{10})$$

$$\text{anders: } 20201_3 = 181_{10}$$

Will man aus dieser Gleichung/ Zahldarstellung auf die Verteilung der Gewichtel schließen, gibt es 2 Wege:

a) im Ternärsystem:

Ziehe von jeder Stelle der Folge 1 ab.

b) interessanter ist der Fall im Dezimalsystem (in dem ja auch die Gewichte der Geschenke angegeben sind):

Hier tritt an die Stelle der Reduzierung des Stellenwerts um 1 (wie im Ternärsystem) die Subtraktion einer Potenz von 3:

Also ist zu rechnen: $181 - 81 - 27 - 9 - 3 - 1 (= 60)$.

D.h. aber auch, dass man bei gegebenem Gewicht in Dezimaldarstellung nur die Potenzen von 3 addieren muss, um aus der entstehenden Dezimalzahl die Ternärdarstellung und damit die Verteilung der Gewichte zu ermitteln.

Bsp.:

Sei 75kg das Gewicht des Geschenkes. Gesucht ist die Verteilung der Gewichtel. Aus obigen Überlegungen folgt:

$$75 + 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 196_{10}$$

Die Darstellung von 196 im Ternärsystem lautet:

$$196_{10} = 2 * 81 + 1 * 27 + 0 * 9 + 2 * 3 + 1 * 1 = 21021_3$$

In dieser Darstellung wird jedes Folgenglied um 1 reduziert, um auf die Verteilung der Wichtel schließen zu können:

Es resultiert die Folge 1; 0; -1; 1; 0. Dies bedeutet:

Auf der Seite des Geschenks steht der Gewichtel 9kg.

Keine Verwendung finden die Gewichtel 1kg und 27kg.

Auf der anderen Waagschale stehen die Gewichtel 81kg und 3kg.

Es wurde somit exemplarisch gezeigt, dass die 5 Gewichtel 1kg, 3kg, 9kg,

27kg und 81kg genügen, um jedes Geschenk auswiegen zu können.

Um zu begründen, dass 7 bzw. 5 Gewichtel auch das Minimum sind, greifen wir auf das Prinzip der *Codierung* zurück. Wir wissen bereits, dass man die zu messenden Geschenkgewichte durch eine geordnete Folge von Gewichteln codieren kann. Das liefert im ersten Fall die Binärdarstellung und im zweiten die zur Ternärdarstellung äquivalente Form. In jedem Fall hat die Folge das Aussehen $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$. Dabei kann jedes a_i einen von k Zuständen annehmen. Eine solche Folge von n Gliedern kann damit genau k^n Zustände codieren. Wir wollen sämtliche Geschenke im ganzzahligen Bereich von 1kg bis 120kg auswiegen können. Diese Folge muss also mindestens 120 Zustände annehmen können. Im ersten Fall ist $k = 2$ und $2^7 = 128$ liefert genügend solche Zustände, wohingegen $2^6 = 64$ nicht ausreicht. Im zweiten Fall ist $k = 3$ und $3^5 = 243$ reicht aus, $3^4 = 81$ aber nicht.

Antwort 10 ist richtig.

Anmerkung:

Die angegebenen Basisgewichtel sind nicht eindeutig. Im ersten Fall wäre beispielsweise auch die Verteilung 1kg, 2kg, 4kg, 8kg, 15kg, 30kg, 60kg möglich. Im zweiten Fall ist der Spielraum kleiner, aber man hat beispielsweise die Möglichkeit 2kg, 3kg, 9kg, 27kg und 81kg oder 1kg, 3kg, 9kg, 27kg und 80kg zu wählen. Dies ändert aber nichts an der Anzahl der benötigten Gewichte.



19 Optionsbewertung

Autor: John Schoenmakers

Projekt: E5

19.1 Aufgabe

Wir betrachten folgendes stilisierte Aktien-Zins-Modell:

Eine Aktie hat heute einen Wert von 100 Euro. Mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit steigt der Wert der Aktie in einem Jahr auf 205 Euro, sonst fällt er auf 55 Euro (also auch mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit). Festverzinlich angelegtes Geld wird mit 10% jährlich verzinst, und man darf auch gegen 10% ‚negativ‘ anlegen, d.h. leihen.

Ein Investor will ohne Einsatz eigenen Geldes am Markt eine sogenannte Call-Option verkaufen mit einem Basispreis von 105 Euro und einer Laufzeit von 1 Jahr. Der Käufer dieser Option erwirbt das Recht, aber nicht die Pflicht, die Aktie in einem Jahr für 105 Euro zu kaufen: Wenn der Wert der Aktie steigt, wird er die Option nutzen und somit de facto um $205 - 105 = 100$ Euro reicher, aber falls ihr Wert fällt, wird er die Option verfallen lassen.

Die Aufgabe lautet:

Ermittle, welchen Preis der Investor fairerweise für diese Option verlangen kann (unter einem fairen Preis versteht man hier, dass der Investor(!) durch die Kursentwicklung der Aktie keinen Verlust erleidet, aber auch keinen Gewinn erzielt, wenn die Option fällig wird - das Risiko liegt nur beim Optionskäufer).

Hinweis: Lege heute ein Portfolio (Bestand an Wertpapieren) an aus Anteilen der Aktie und einer risikolosen festverzinslichen Anlage auf dem Bankkonto. Gestalte den Wert P dieses Portfolios so, dass ‚egal, was passiert‘, nach einem Jahr genau die Auszahlungsverpflichtung gegenüber dem Optionshalter abgedeckt ist. Der heutige Wert dieses Portfolios ist dann der sogenannte „arbitragefreie“ Preis der Call-Option.

Antwortmöglichkeiten:

1. 66,66 Euro



2. 55,50 Euro
3. 50,00 Euro
4. 45,45 Euro
5. 43,33 Euro
6. 40,00 Euro
7. 36,66 Euro
8. 33,33 Euro
9. 30,00 Euro
10. 25,66 Euro

Projektbezug:

Im Projekt E5 werden komplizierte Optionen bezüglich vielen Bedingungen unterliegender Finanztitel bewertet. Hierbei gilt das Arbitrage-Argument als Grundprinzip, das in dieser Aufgabe vereinfacht dargestellt wird.

19.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8

1. Lösungsansatz:

Sei θ die Anfangsposition an Aktienanteilen und ψ die Anfangsposition des Bankkontos. Somit beträgt der Anfangswert P des Portfolios

$P = 100 \cdot \theta + \psi$ Euro.

Die Wertentwicklung des Portfolios soll derjenigen der Option entsprechen, d.h.: Ist der Wert der Aktie nach einem Jahr gestiegen, so ist der Wert der Option gleich 100 (Differenz aus aktuellem Aktienwert von 205 und „Auslösepreis“ der Option von 105). Ist nach einem Jahr die Aktie gefallen, so ist der Wert der Option gleich Null (sie wird nicht ausgelöst).

Daraus resultiert

$$205 \cdot \theta + 1.1 \cdot \psi = 100$$

$$55 \cdot \theta + 1.1 \cdot \psi = 0$$



Lösung:

$$\theta = \frac{2}{3}, \psi = -\frac{100}{3},$$

also

$$P = \frac{100}{3} = 33,33 \text{ Euro.}$$

2. Nähere Erklärung:

Zu Beginn des Optionsgeschäftes benötigt der Investor $\frac{2}{3}$ Aktienanteile. Die Kaufsumme finanziert er zur Hälfte aus dem Preis für die Option, zur anderen Hälfte über einen Kredit.

1. Der Kurs der Aktie sei gestiegen.

D.h. der Optionskäufer wird sein Kaufrecht ausüben und 105 Euro an den Investor zahlen. Um dem Inhaber der Option 1 Aktie geben zu können, benötigt der Investor nochmals ein Drittel einer Aktie zum Preis von $\frac{1}{3} * 205$.

Sein Saldo gestaltet sich somit wie folgt:

„Ausübung der Option“ – „Kaufpreis $\frac{1}{3}$ Aktienanteil“ – „Tilgung verzinsten Kredit“

$$= +105 - \frac{1}{3} * 205 - \frac{100}{3} * 1,1 = 0$$

2. Der Kurs der Aktie sei gefallen.

D.h. der Optionskäufer wird sein Kaufrecht nicht ausüben. Der Investor verkauft seine Aktienanteile zum aktuellen Preis und tilgt seinen verzinsten Kredit:

„aktueller Aktienwert“ – „verzinsten Kredit“

$$= \frac{2}{3} * 55 - \frac{100}{3} * 1,1 = 0$$

Der Investor erzielt/ erleidet also in beiden Fällen weder Gewinn noch Verlust - der Preis ist „fair“



Bemerkung: Die abdiskontierte 'erwartete' Optionsauszahlung beträgt in Euro:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{100}{1,1} = 45,45$$

Antwort 4 wäre also kein korrekter Preis!

Der Investor könnte z.B. 45,45 Euro - 33,33 Euro risikolos anlegen und erzielte damit einen Gewinn, weil alles andere genauso wie oben dargestellt ablief.



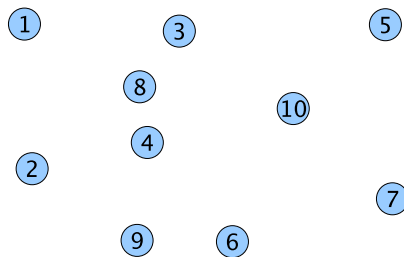
20 Schneesturmsichere Weihnachtsmänner

Autoren: Christian Raack und Marc Pfetsch

Projekt: B3, B15

20.1 Aufgabe

Angekommen im 21. Jahrhundert, ist die alljährliche Adventszeit für den Weihnachtsmann und seine Helfershelfer zu einer logistischen Herausforderung geworden. Da es im deutschen Luftraum in der Vorweihnachtszeit wiederholt zu Engpässen und auch zu Unfällen gekommen ist, wurde vor geraumer Zeit das *Weihnachtsmannluftwegeregulierungsgesetz* (WeiLWRegG) eingeführt. Es existieren nunmehr genau 10 mögliche *Weihnachtsmannlandeplätze*.



An diesen zentralen Kreuzungspunkten muss jeder passierende Weihnachtsmann landen und eine vorgeschriebene Ruhezeit einhalten, bevor er seinen winterlichen Weg fortsetzt. Zwischen je zwei solcher Weihnachtsmannlandeplätze gibt es einen genau definierten *Luftkorridor*. Alle 45 Korridore sind räumlich voneinander getrennt. Diese Maßnahme konnte die Zahl der verunglückten Weihnachtsmänner auf ein Minimum reduzieren. Auch scheinen die Nikoläuse und Ruprechte nun entspannter ans Ziel zu gelangen.

Die Weihnachtsmänner eines jeden Landes können bis zum 31.12. des Vorjahres beim *Bundesministerium für Weihnachtsangelegenheiten* (BMWA) Luftraum reservieren. Der deutsche Nikolaus hat im deutschen Luftraum natürlich Reservierungsvorrecht und wir wollen ihm bei der Planung seiner Luftwege für das nächste Jahr behilflich sein. Einerseits will der Weihnachtsmann natürlich möglichst viele Strecken über den schnellen Luftweg zurücklegen. Andererseits kann er nicht einfach alle 45 Korridore blockieren, ohne den



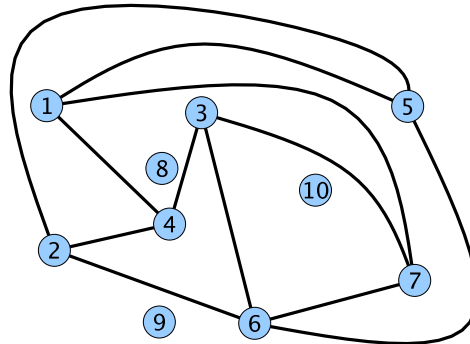
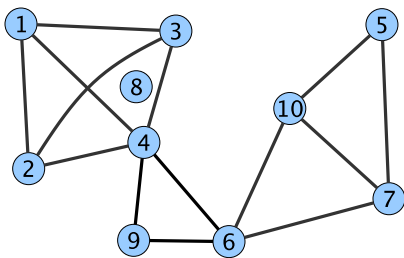
Unmut seiner ausländischen Kollegen auf sich zu ziehen. Im nächsten Jahr will er die folgenden strategisch wichtigen Verbindungen ermöglichen:

- Landeplatz 1 soll mit Landeplatz 2 verbunden werden,
- Landeplatz 1 mit Landeplatz 3,
- Landeplatz 3 mit Landeplatz 4,
- Landeplatz 5 mit Landeplatz 6 und
- Landeplatz 5 mit Landeplatz 7.

Es genügt, die Luftkorridore so zu reservieren, dass der Weihnachtsmann mit Zwischenlandung an sein Ziel gelangt (Bsp.: Start in Landeplatz 1, Zwischenlandung in Landeplatz 3 und dann weiter zu Landeplatz 2, kurz: 1-3-2). Jede Verbindung kann natürlich auch direkt über den entsprechenden Luftkorridor geschaffen werden.

Erschwerend kommt hinzu, dass der Weihnachtsmann unwettersicher planen muss. Da es in der Vorweihnachtszeit immer wieder zu schweren Schneestürmen kommt, können einzelne Korridore komplett ausfallen. Glücklicherweise sind erfahrungsgemäß maximal zwei Korridore gleichzeitig durch Unwetter unpasierbar. Die Aufgabe des Weihnachtsmannes besteht nun darin, Luftkorridore so beim BMWA zu reservieren, dass eine Verbindung zwischen den oben genannten Landeplätzen geschaffen wird. Jede Verbindung muss immer noch möglich sein, selbst wenn zwei beliebige der reservierten Korridore ausfallen. Im Interesse der ausländischen Weihnachtsmänner, die in der Vorweihnachtszeit den deutschen Luftraum passieren müssen, soll die Anzahl der nötigen Luftkorridore so klein wie möglich sein.

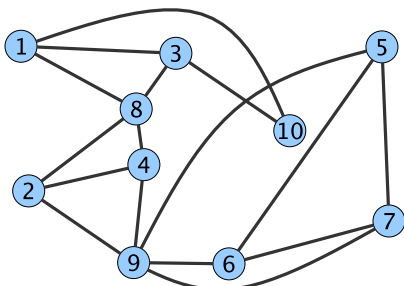
Im Folgenden sind zwei mögliche Reservierungen von Luftraum beispielhaft angegeben:



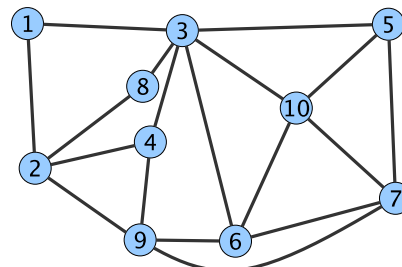
Hierbei entspricht jede der Linien zwischen zwei Landeplätzen einem reservierten Luftkorridor. Der linke der beiden Luftwegepläne schafft zwar alle geforderten Verbindungen, ist aber nicht unwettersicher. Der rechte Plan mit 11 Korridoren erfüllt alle Bedingungen und ist sogar optimal, denn mit nur 10 Korridoren können die strategischen Landeplätze nicht unwettersicher verbunden werden.

Welche der folgenden 10 Luftwegereservierungen stellt die geforderten Verbindungen unwettersicher bereit und braucht dabei am wenigsten Luftkorridore?

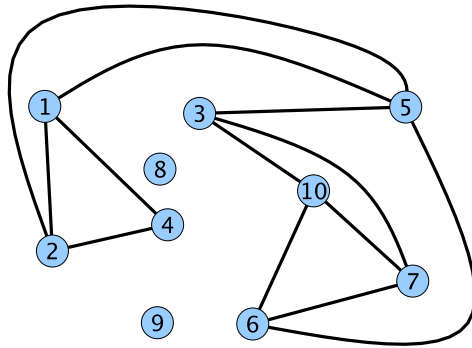
Tipp: Überlegen Sie, wie man bei gegebener Reservierung überzeugend nachweisen kann, dass alle Anforderungen erfüllt sind, und wie man zeigt, dass sie nicht erfüllt sind. Welcher Nachweis ist kürzer?



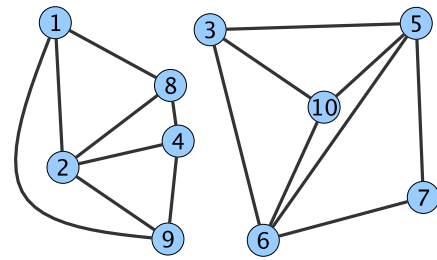
(a)



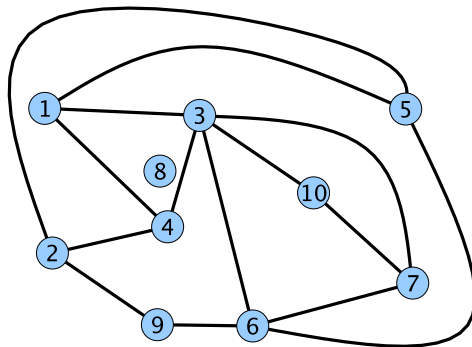
(b)



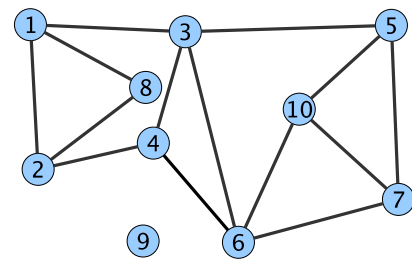
(c)



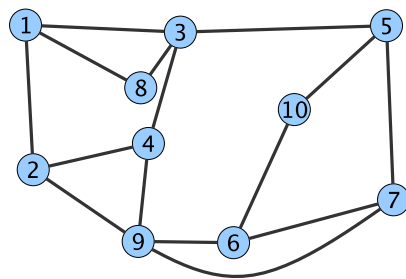
(d)



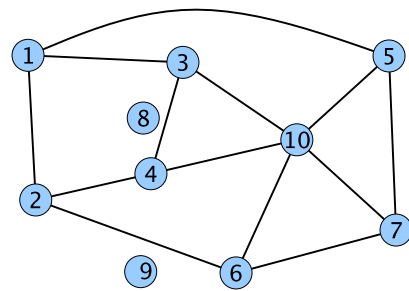
(e)



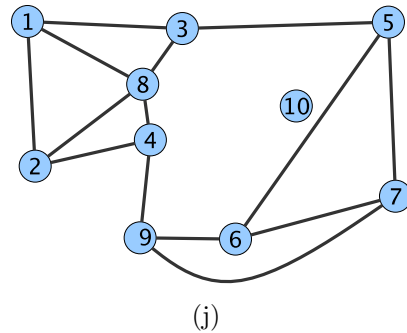
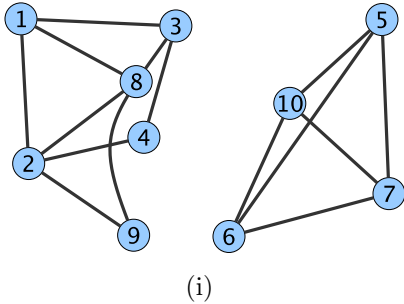
(f)



(g)



(h)



Projektbezug:

Sowohl bei der Planung von Telekommunikationsnetzen als auch bei der Planung von Wegen / Linien im Straßenverkehr oder ÖPNV muss berücksichtigt werden, dass geplante Verbindungen auch ausfallen können. Durch den Ausfall von Knotenhardware (Server, Rechner o.ä.) oder auch durch die Zerstörung von Kabeln bei Bauarbeiten können ganze Regionen vom Zugang zu Kommunikationsnetzen (Telefon, Internet) abgeschnitten werden. Durch geschickte Planung und geeignete Ausfallmechanismen, die nötige Verbindungen im Fall der Fälle über andere Wege umlenken, können solche Desaster weitestgehend verhindert werden. Dazu muss allerdings schon im Vorfeld genügend Kapazität (Verbindungen, Bandbreite, „Luftkorridore“) bereit gestellt werden.

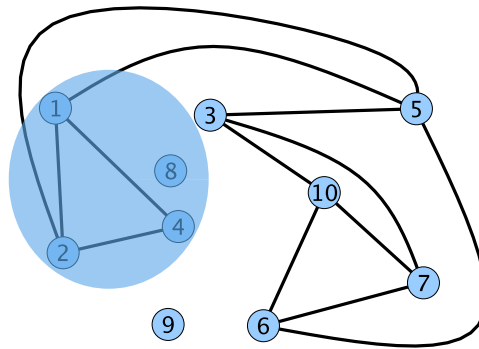
20.2 Lösung

Die Lösung ist gegeben durch den Plan Nummer 8. Dieser benutzt 13 Luftkorridore.

Für eine Luftwegereservierung betrachten wir eine Teilmenge S der Landeplätze und alle Luftkorridore, zu denen genau einer der zugehörigen Landeplätze in S liegt (nicht beide). Die zu S gehörende Menge solcher Luftkorridore einer Luftwegereservierung nennen wir *Schnitt*. Wir wählen S nun so, dass es auch mindestens eine Verbindungsforderung gibt, für die genau einer der beiden Landeplätze in S liegt. Finden wir nun eine solche Menge von Landeplätzen S , deren Schnitt weniger als drei Korridore enthält, so kann die Luftwegereservierung die geforderte Verbindung nicht unwettersicher bereit stellen. Es gibt dann keine drei Wege, die unterschiedliche Korridore benutzen. Für Antwortmöglichkeit 3 kann man zum Beispiel die Landeplätze



$\{1, 2, 4, 8\}$ betrachten. Der zugehörige Schnitt besteht aus den Korridoren 2-5 und 1-5. Es gibt jedoch eine Verbindungsforderung „über“ den Schnitt, nämlich 1-3. Diese kann nicht unwettersicher über drei verschiedene Wege erfüllt werden.



Wenn eine Reservierung die Aufgabe löst, geben wir neben der Anzahl der benutzten Korridore für jede geforderte Verbindung drei kantendisjunkte Wege an. Wenn eine Reservierung die Aufgabe nicht löst, geben wir den Schnitt an, der weniger als drei Korridore enthält.

1. Keine Lösung, Schnitt zu $S = \{1, 3, 10\}$ hat nur zwei Korridore.
2. Keine Lösung, Schnitt zu $S = \{1\}$ hat nur zwei Korridore.
3. Keine Lösung, Schnitt zu $S = \{1, 2, 4, 8\}$ hat nur zwei Korridore.
4. Keine Lösung, Schnitt zu $S = \{1, 2, 4, 8, 9\}$ hat keine Korridore.
5. Lösung mit 14 Korridoren:
 - $1 \leftrightarrow 2$: a) 1-5-2 b) 1-4-2 c) 1-3-6-9-2
 - $1 \leftrightarrow 3$: a) 1-3 b) 1-4-3 c) 1-5-6-3
 - $3 \leftrightarrow 4$: a) 3-4 b) 3-1-4 c) 3-6-9-2-4
 - $5 \leftrightarrow 6$: a) 5-6 b) 5-2-9-6 c) 5-1-3-6
 - $5 \leftrightarrow 7$: a) 5-6-7 b) 5-1-3-7 c) 5-2-4-3-10-7
6. Keine Lösung, Schnitt zu $S = \{1, 8, 2\}$ hat nur zwei Korridore.



7. Lösung mit 15 Korridoren:

- $1 \leftrightarrow 2$: a) 1-2 b) 1-3-4-2 c) 1-8-3-5-10-6-9-2
- $1 \leftrightarrow 3$: a) 1-3 b) 1-8-3 c) 1-2-4-3
- $3 \leftrightarrow 4$: a) 3-4 b) 3-1-2-4 c) 3-5-10-6-9-4
- $5 \leftrightarrow 6$: a) 5-7-6 b) 5-10-6 c) 5-3-4-9-6
- $5 \leftrightarrow 7$: a) 5-7 b) 5-10-6-7 c) 5-3-4-9-7

8. Lösung mit 13 Korridoren:

- $1 \leftrightarrow 2$: a) 1-2 b) 1-3-4-2 c) 1-5-10-6-2
- $1 \leftrightarrow 3$: a) 1-3 b) 1-2-4-3 c) 1-5-10-3
- $3 \leftrightarrow 4$: a) 3-4 b) 3-1-2-4 c) 3-10-4
- $5 \leftrightarrow 6$: a) 5-10-6 b) 5-7-6 c) 5-1-2-6
- $5 \leftrightarrow 7$: a) 5-7 b) 5-10-7 c) 5-1-2-6-7

9. Keine Lösung, Schnitt zu $S = \{4\}$ hat nur zwei Korridore.

10. Lösung mit 14 Korridoren:

- $1 \leftrightarrow 2$: a) 1-2 b) 1-8-2 c) 1-3-8-4-2
- $1 \leftrightarrow 3$: a) 1-3 b) 1-8-3 c) 1-2-4-9-6-5-3
- $3 \leftrightarrow 4$: a) 3-8-4 b) 3-1-2-4 c) 3-5-6-9-4
- $5 \leftrightarrow 6$: a) 5-6 b) 5-7-6 c) 5-3-8-4-9-6
- $5 \leftrightarrow 7$: a) 5-7 b) 5-6-7 c) 5-3-8-4-9-7

21 Venedig im Kaufrausch

Autor: Anton Schiela

Projekt: A1

21.1 Aufgabe

Ganz Venedig war in Aufregung. Das erste Mal seit 250 Jahren war eine neue Baugenehmigung ausgesprochen worden und dann auch noch für ein Kaufhaus direkt am Canal Grande - nicht irgendein Kaufhaus, sondern das edelste und exklusivste Kaufhaus westlich von Byzanz. Allein die Gewürzabteilung würde über 500 verschiedene Sorten Pfeffer anbieten, so hieß es.

Die Planungen waren schon in vollem Gange. Es sollte ein schlichter rechteckiger Bau werden - einerseits aus ästhetischen Gründen, andererseits, um möglichst wenig Verkaufsfläche zu verschenken. So kam es, dass der Bauherr und sein Hausmathematiker spät abends noch folgende Diskussion führten:

- Mathematikus! Komm Er mal her!
- Sie wünschen, Padrone?
- Der Architekt hat mir geschrieben. Es gibt noch ein Problem mit dem Grundriss: Dieser verwünschte Kanal zwischen dem Palazzo Maldini und dem Palazzo Bernoulli, der direkt auf unser Grundstück zuführt! Am liebsten würde ich ihn zuschütten lassen, aber die Baubehörde verlangt, dass er weitergeführt wird.
Da steckt sicher wieder mein neidischer Halbvetter dahinter.
- Und damit verkleinert sich natürlich Euer Grundstück.
- Es ist zum Haare raufen! Mein Architekt hat vorgeschlagen, den Kanal im rechten Winkel weiterzuführen, bis er auf den Canal Grande trifft.
- Und wo ist das Problem, Padrone?
- Ich möchte diese Verlängerung möglichst schmal bauen. Allerdings verlangt die Baubehörde, dass zumindest eine Gondel um die Ecke fahren kann, ohne sich zu verklemmen. Berechne Er mir die Breite des Kanals!



- Und was versteht die Baubehörde unter einer Gondel? Es gibt sie ja in allen Farben² und Formen.
- Laut §10 VKBO³ müssen Kanäle so gebaut werden, dass ein rechteckiges Boot von 10 m Länge und 1.5 m Breite durch den Kanal fahren kann.
- Welch armselige Beschreibung für eine Gondel! Aber das wird meine Aufgabe etwas einfacher machen. Lasst mich das Problem wiederholen, damit ich sehe, ob ich alles richtig verstanden habe:
Wir bauen also einen L-förmigen Kanal mit einem rechtwinkligen Knick?
- Genau.
- Und wie breit ist der Kanal vor dem Knick?
- Vor dem Knick ist er 6 m breit.
- Ein rechteckiges Boot von 10 m Länge und 1.5 m Breite muss durch den Kanal fahren und den Knick passieren können?
- So ist es. Mir ist egal wie, Hauptsache, das Boot kommt irgendwie durch.
- Und Eure Frage lautet nun: Wie breit muss der Kanal hinter dem Knick mindestens sein?
- Richtig. Berechne Er mir die Breite auf 10 cm genau, aber auf keinen Fall zu schmal, sonst bringt es mein neidischer Halbvetter fertig und lässt mein Kaufhaus wieder dem Erdboden gleich machen.
- Mit Verlaub, Padrone, es gibt keinen Erdboden in Venedig.
- Haarspalter! Mache Er sich an die Arbeit! Bis morgen früh wünsche ich eine Antwort.
- Sehr wohl, Padrone!

²Unsere Geschichte spielt in der Zeit vor dem Erlass von 1562, welcher die Farbe Schwarz für die Gondeln vorschrieb.

³Venezianische Kanalbauordnung.



Und so zog sich unser Mathematiker in sein Studierstübchen zurück und rechnete die ganze Nacht, bis er - der Morgen dämmerte schon - endlich die Lösung in der Hand hatte. Könnt ihr es ihm leichtun?

Antwortmöglichkeiten:

Als richtig gilt die kleinste Zahl, die größer als das exakte Resultat ist.

1. 3.1 m
2. 3.2 m
3. 3.3 m
4. 3.4 m
5. 3.5 m
6. 3.6 m
7. 3.7 m
8. 3.8 m
9. 3.9 m
10. 4.0 m

Projektbezug:

Die Formulierung und Lösung von Optimierungsproblemen ist ein klassisches Aufgabenfeld der angewandten Mathematik. Unsere Geschichte fällt in diese Kategorie, genauso wie die Probleme, die im MATHEON Projekt A1 behandelt werden.



21.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4

Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist, das konkrete Problem mathematisch richtig zu fassen, das gewonnene mathematische Modell auszuwerten, und schließlich die Lösung richtig zu interpretieren. Diese Vorgehensweise und die dabei auftretenden Herausforderungen sind typisch für die Arbeit in der angewandten Mathematik. Dabei ist es nicht nur wichtig, richtig zu rechnen, sondern auch, ein Gefühl für das Problem zu entwickeln.

Bei diesem Lösungsvorschlag wird die Bewegung der Gondel übersetzt in eine mathematische Funktion, deren Maximum dann die gesuchte Lösung ergibt. Um die Bewegung der Gondel zu beschreiben, brauchen wir ein Koordinatensystem für den Kanal, dessen Ursprung in der inneren Ecke des Kanals liegen soll (siehe Abb. 1 links). Die Gondel erhält auch ein Koordinatensystem, dessen Ursprung in der linken unteren Ecke liegt (siehe Abb. 1 rechts).

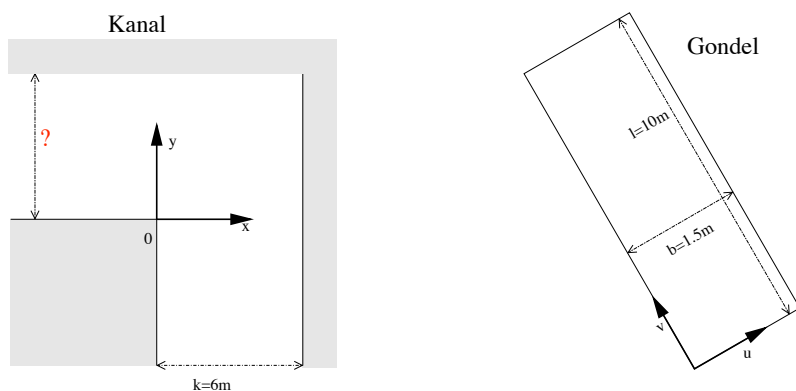


Abbildung 9: Skizze von Kanal und Gondel

Die Bewegung der Gondel: Wenn die Gondel langsam um die Ecke fährt, führt sie eine Bewegung in der Ebene aus. Sie verschiebt und dreht sich. Ein Punkt der Gondel mit den Koordinaten (u, v) hat im Kanal die Koordinaten (x, y) , wobei gilt:

$$x = s + \cos(\alpha)u - \sin(\alpha)v \quad (12)$$

$$y = t + \sin(\alpha)u + \cos(\alpha)v. \quad (13)$$



Hierbei stehen s und t für die Verschiebung der Gondel, und der Winkel α beschreibt ihre Drehung. Manchen könnte diese Formel bekannt sein, man kann sie sich aber auch mit etwas Geometrie und Trigonometrie selbst herleiten.

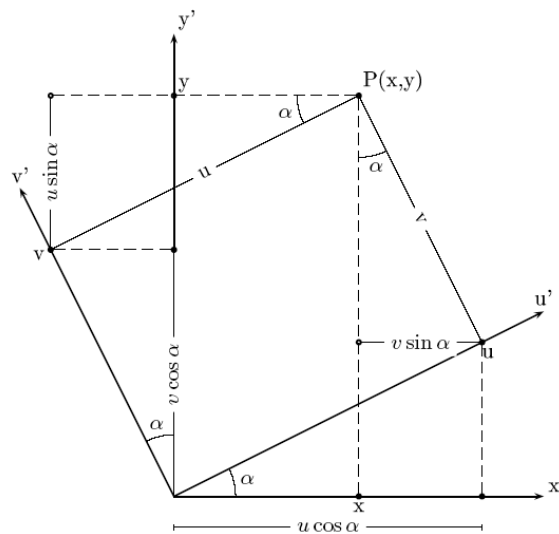


Abbildung 10: Koordinatendrehung

Jetzt können wir also jeden Punkt der Gondel über die Ebene bewegen. Was wir noch wissen, sind die Ausmaße der Gondel. Sie ist rechteckig und hat eine Länge $l = 10m$ und die Breite $b = 1.5m$. Außerdem möchte sie innerhalb des Kanals, der vor dem Knick eine Breite $k = 6m$ besitzt, um die Kurve kommen. Versuchen wir uns vorzustellen, wie diese Bewegung aussieht:

- Die Gondel vollführt eine Vierteldrehung (in unserer Skizze gegen den Uhrzeigersinn), d.h. α nimmt jeden Wert zwischen 0 und 90 an.
- Die Gondel muss immer links von der rechten Kanalwand sein (die Gondel darf nicht in die Kanalwand hineinragen).
- Kein Punkt der Gondel darf links unten von der Ecke des Kanals sein (die Ecke darf nicht in die Gondel hineinragen).



Vereinfachende Annahmen: Wieviel Platz braucht nun die Gondel? Das Problem ist, dass sie auf ganz viele unterschiedliche Weisen durch den Kanal fahren kann (wir haben die 3 Parameter s, t und α zur Auswahl, um die Gondel zu bewegen), und wir können nicht jede dieser Bahnen untersuchen. Also müssen wir uns noch Gedanken darüber machen, wie eine möglichst platzsparende Fahrweise aussieht. Mit Hilfe dieser Überlegungen können wir dann s und t eliminieren, was die Sache erheblich erleichtert.

Weil das Manöver den gegebenen Platz möglichst gut ausnutzen sollte, kann man annehmen, dass die Gondel an den Kanalwänden „entlangschrammt“, d.h. die Kanalwände immer (zumindest in der kritischen Phase der Bewegung) an zwei Punkten berührt (im Maximum sogar an 3 Punkten). Wenn das nicht so wäre, könnte man den Kanal verkleinern und damit das Ergebnis verbessern. Ein Blick auf unsere Skizze legt uns die folgenden Annahmen nahe:

1. Die linke Seite der Gondel (also alle Punkte mit $u = 0$ und $0 \leq v \leq l$) berührt immer die innere Ecke des Kanals ($x = y = 0$, roter Kreis in Abb. 2). Wenn man das in die Gleichungen (12) und (13) einsetzt, erhält man

$$0 = s + \cos(\alpha) \cdot 0 - \sin(\alpha) \cdot v$$

$$0 = t + \sin(\alpha) \cdot 0 + \cos(\alpha) \cdot v.$$

Wir werden die Bedingung $0 \leq v \leq l$ nicht in unsere Rechnung mit eingehen lassen, aber im Hinterkopf behalten, wenn es um die Interpretation der Ergebnisse geht.

2. Die rechte untere Ecke der Gondel (also der Punkt $u = b, v = 0$) berührt immer die rechte Kanalwand ($x = k$, grüner Kreis in Abb. 2). In Gleichung (12) eingesetzt, ergibt das

$$k = s + \cos(\alpha) \cdot b - \sin(\alpha) \cdot 0.$$

Zusammengefasst haben wir drei Gleichungen, aus denen wir s und t eliminieren wollen:

$$0 = s - \sin(\alpha) \cdot v$$

$$0 = t + \cos(\alpha) \cdot v$$

$$k = s + \cos(\alpha) \cdot b.$$

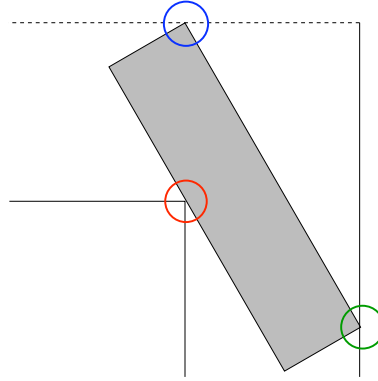


Abbildung 11: Die Gondel im Kanal und die vereinfachenden Annahmen

Die dritte Gleichung liefert

$$s = k - \cos(\alpha) \cdot b.$$

Wenn man die erste Gleichung mit $\cos(\alpha)$ und die zweite Gleichung mit $\sin(\alpha)$ multipliziert und dann beide addiert, erhält man

$$0 = \cos(\alpha) \cdot s + \sin(\alpha) \cdot t,$$

und damit

$$\sin(\alpha) \cdot t = -\cos(\alpha) \cdot s = \cos^2(\alpha) \cdot b - \cos(\alpha) \cdot k,$$

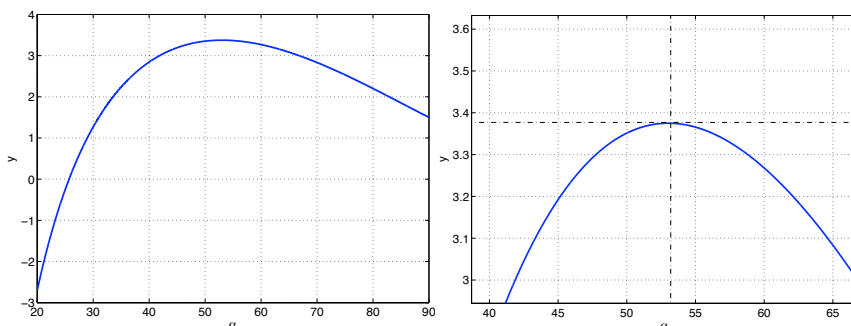
also

$$t = \frac{1}{\tan(\alpha)} (\cos(\alpha) \cdot b - k).$$

Jetzt setzen wir s und t in die Gleichungen (12) und (13) ein. Die Bewegung einer Gondel, die an den Kanalwänden entlangschrammt, schreibt sich damit als

$$\begin{aligned} x &= k - \cos(\alpha) \cdot b + \cos(\alpha)u - \sin(\alpha)v \\ y &= \frac{1}{\tan(\alpha)} (\cos(\alpha) \cdot b - k) + \sin(\alpha)u + \cos(\alpha)v. \end{aligned} \quad (14)$$

Für u und v können wir einen beliebigen Punkt auf der Gondel einsetzen, also $0 \leq u \leq b$ und $0 \leq v \leq l$, und wir erhalten mit x und y den dazugehörigen Punkt im Kanal, abhängig vom Drehwinkel α .

Abbildung 12: Die Funktion $y(\alpha)$ und (in Vergrößerung) ihr Maximum

Bestimmung des Maximums: Jetzt kommen wir zur entscheidenden Frage: Wie breit muss denn nun der Kanal sein, oder anders formuliert, wieviel Platz braucht die Gondel in y -Richtung?

Wenn man sich nochmals das Bild ansieht, stellt man fest, dass die rechte obere Ecke der Gondel ($u = b$, $v = l$) der Punkt ist, der den meisten Platz in y -Richtung benötigt (siehe blauer Kreis in Abb. 2). Setzen wir also $u = b$, $v = l$ in Gleichung (14) ein, so bekommen wir die folgende Funktion:

$$y(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}(\cos(\alpha) \cdot b - k) + \sin(\alpha) \cdot b + \cos(\alpha) \cdot l,$$

wobei natürlich $b = 1.5m$, $k = 6m$, $l = 10m$ gegeben sind. Diese Funktion ist das mathematische Modell, das wir gesucht haben. Um den maximalen Platz, den die Gondel benötigt, zu bestimmen, müssen wir nun das Maximum dieser Funktion bestimmen (zumindest auf $10cm$ genau). Am einfachsten geht das, wenn man sich die Funktion aufzeichnet (oder aufzeichnen lässt) wie in Abb. 3. Auf diese Art und Weise ist es sicherlich nicht schwierig, unter den 10 vorgegebenen Antworten die richtige herauszufinden, auch wenn man die exakte Antwort nicht berechnet. Man sieht, dass das Maximum ungefähr bei $y \approx 3.37m$ liegt und bei $\alpha \approx 53$ angenommen wird. Für die venezianischen Maurer reicht die so erzielte Genauigkeit locker aus.

Richtig ist also Antwort 4: $3.4m$.

Modell und Wirklichkeit: Genaue Beobachter haben vielleicht bemerkt, dass die Funktion $y(\alpha)$ für kleine α sehr stark negativ wird ($1/\tan(\alpha) \rightarrow -\infty$ für $\alpha \rightarrow 0$). Das stimmt offensichtlich nicht mit unserer Vorstellung überein, wie sich die Gondel zu bewegen hat. Allerdings ist für kleine α auch unsere Annahme 1 nicht gültig, die nur für $0 \leq v \leq l$ stimmt. Wie soll auch die schmale Gondel beide Seiten des Kanals berühren, wenn sie nur um einen kleinen Winkel gedreht ist? Unser mathematisches Modell zieht die Gondel künstlich in die Länge.

Unser Modell ist also nur in einem bestimmten Bereich richtig. So etwas kommt in der Praxis sehr sehr oft vor. Man denke nur an das Modell für ein Federpendel aus dem Physikunterricht, das natürlich nicht berücksichtigt, dass jede Feder reisst, wenn man nur stark genug daran zieht. Deswegen ist das Modell nicht schlecht. Es ist nur notwendig, zu überprüfen, ob das Modell dort überhaupt gültig ist, wo man es benutzt. Nur dann hat die berechnete Antwort wirklich etwas mit der Realität zu tun.

Wir sollten also prüfen, ob $0 \leq v \leq l$ für $\alpha = 53$ gilt. Man kann sich ausrechnen:

$$v = \frac{s}{\sin(\alpha)} = \frac{k - \cos(\alpha) \cdot b}{\sin(\alpha)} \approx 6.3m,$$

also $0m \leq v \leq 10m$. Damit ist unser Modell im Maximum zulässig.

Jetzt könnte es natürlich sein, dass die Gondel gerade dann den meisten Platz braucht, wenn unser Modell ungültig ist. Diesen Fall kann man aber mit Hilfe der Skizze leicht ausschließen.

Rechnerische Lösung: Wer sich die Funktion $y(\alpha)$ nicht so genau aufzeichnen möchte oder kann, der sollte sich wenigstens einen groben Eindruck davon verschaffen, sich überzeugen, dass sie ein Maximum besitzt und dessen Lage ungefähr lokalisieren (z.B. zwischen 40 and 60). Dann kann man die Ableitung der Funktion ausrechnen (also deren Steigung) und ihre Nullstelle bestimmen, denn Nullstellen der Ableitung sind Kandidaten für Extrempunkte:

$$y'(\alpha) = \frac{k - \cos(\alpha) \cdot b}{\sin^2(\alpha)} - \sin(\alpha) \cdot l.$$

Das ist nach Multiplikation mit $\sin^2 \alpha$ die Nullstelle von

$$f(\alpha) = k - \cos(\alpha) \cdot b - \sin^3(\alpha) \cdot l.$$



Wie üblich, ist es nicht möglich, die Nullstelle exakt zu bestimmen (so etwas funktioniert nur in ganz speziellen Situationen, z.B. in Klausuraufgaben). Man kann sie aber näherungsweise z.B. durch Intervallschachtelung oder das Newton-Verfahren berechnen. Das funktioniert nach der Vorschrift

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{f(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} = \alpha_k - \frac{k - \cos(\alpha_k) \cdot b - \sin^3(\alpha_k) \cdot l}{\sin(\alpha_k) \cdot b - 3 \cdot \sin^2(\alpha_k) \cdot \cos(\alpha_k) \cdot l}.$$

Wenn man mit $\alpha_0 = 60$ beginnt, erhält man die Folge:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 52.8304255685, \\ \alpha_2 &= 53.0190918990, \\ \alpha_3 &= 53.0190529375, \\ \alpha_4 &= 53.0190529375.\end{aligned}$$

Man erreicht also bereits nach 3-maligem Einsetzen eine Genauigkeit von 10 Stellen hinter dem Komma. Wenn man diesen Winkel in $y(\alpha)$ einsetzt, erhält man

$$y = 3.3750303124m,$$

was natürlich für venezianische Verhältnisse viel zu genau ist und die Maurer unnötig unter Druck setzen würde.

Zur Methode: Das Newtonverfahren und seine Varianten sind übrigens zentrale Bausteine in modernen Optimierungsverfahren, wenn es um die Lösung von glatten, nichtlinearen Optimierungsaufgaben geht. Im Gegensatz zu unserem Fall, bei dem nur ein Optimierungsparameter auftritt, nämlich α , gibt es in der Praxis Aufgaben mit vielen tausend, hunderttausend oder gar (zumindest in der Theorie) unendlich vielen Optimierungsparametern, die mit Hilfe von Newton-artigen Verfahren gelöst werden können. Mit solchen Verfahren beschäftigen sich auch Mathematiker im MATHEON.

22 Lagenwechsel minimieren - Oder das Bohren von Löchern in Leiterplatten

Autoren: Martin Grötschel, Thorsten Koch und Dung Hoang
Projekt: D17

22.1 Aufgabe

Diese Aufgabe behandelt ein Problem, das beim Entwurf von Leiterplatten auftritt. Hierzu benötigt man keine Kenntnisse der Elektromechanik, die Aufgabe ist rein kombinatorischer Natur. Einfache Leiterplatten (siehe Abbildung 1, hier eine unbestückte Leiterplatte und ihr „Schatten“, der die Löcher in der Leiterplatte sichtbar macht) haben zwei Seiten (auch *Lagen* genannt), auf die Strom leitende Bahnen (genannt *Leiterbahnen*) aufgebracht werden können. Wir nennen diese Lagen obere und untere Lage.

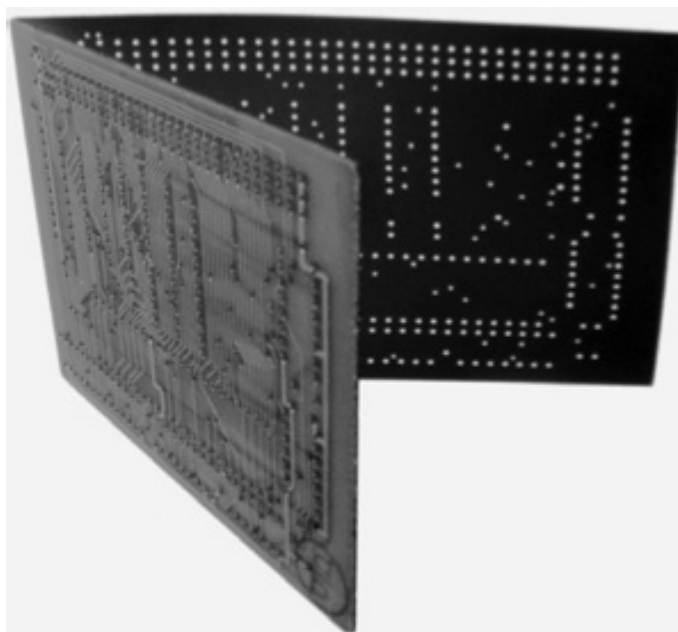


Abbildung 1

Die Leiterbahnen stellt man in „Konstruktionszeichnungen“ durch Linien dar. Diese Linien können Knicke haben und sich auch verzweigen. Abbildung 2 zeigt ein Gebilde von 7 Leiterbahnen, die jeweils so durch Farben gekennzeichnet sind, dass man an Überkreuzungen ihren Verlauf sieht.

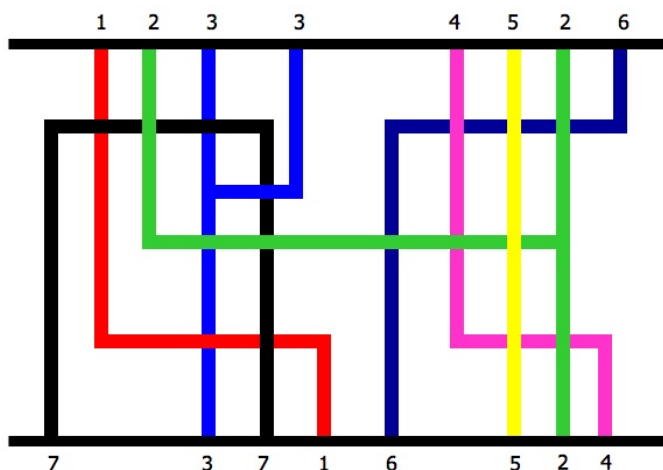


Abbildung 2

Die sieben Leiterbahnen sind als verschieden farbige Linien dargestellt. Alle Leiterbahnen in unserem Beispiel führen zum Rand der Leiterplatte. In Abbildung 2 liegen sie am nördlichen und südlichen Rand an und verlaufen (noch) auf der oberen Lage.

Zwei Leiterbahnen dürfen sich jedoch nicht überschneiden, sonst gibt es einen Kurzschluss. Überkreuzungen werden dadurch vermieden, dass eine der beiden Leiterbahnen vor der Kreuzung die Seite der Platte wechselt. Das geschieht dadurch, dass man ein Loch durch die Platte bohrt und so eine der beiden sich kreuzenden Bahnen auf der Oberseite und die andere auf der Unterseite führt.

Abbildung 3 zeigt Leiterbahnen, die sowohl auf der Oberseite als auch auf der Unterseite der Leiterplatte verlaufen. Die Unterscheidung von Ober- und Unterseite einer Leiterplatte machen wir durch unterschiedliche Linienarten deutlich: Leiterbahnen mit komplett ausgefüllten Linien gehen auf der Oberseite der Leiterplatte entlang (hier Leiterbahn 1) und Leiterbahnen mit umrandeten Linien gehen auf der Unterseite der Leiterplatte entlang (hier Leiterbahnen 2 und 3).

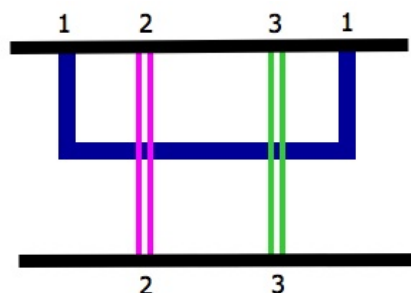


Abbildung 3

Wie man die Leiterbahnen der Leiterplatte aus Abbildung 2 den beiden Lagen zuweisen kann, zeigt Abbildung 4. Dies ist eine häufig in der Industrie genutzte sogenannte „Standardlösung“. Alle horizontalen Linien werden auf der Unterseite und alle vertikalen Linien auf der Oberseite der Leiterplatte geführt.

Das bedeutet, dass in jeden Knick einer Leiterbahn ein Loch gebohrt wird, um an dieser Stelle die Seite der Leiterplatte zu wechseln (Man muss übrigens nicht unbedingt in einem Knick bohren). In unserem Beispiel dürfen Leiterbahnen auf der Leiterplatte sowohl oberhalb als auch unterhalb beginnen, sie können oberhalb oder unterhalb aufhören. Hierfür gibt es keine Vorschriften (Das muss bei einer realen Leiterplatte jedoch nicht so sein. Hier kann es vorkommen, dass eine Bahn auf der oberen Lage beginnen und unten enden muss oder umgekehrt).

Die Bohrlöcher sind mit den roten Kreisen markiert.

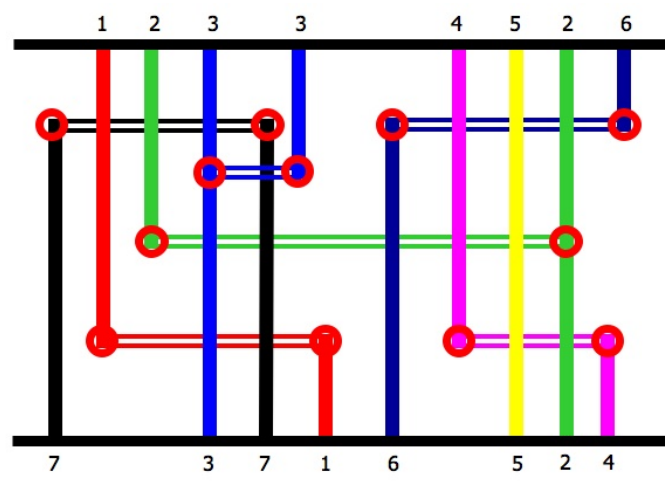




Abbildung 4

In unserem Beispiel müssen wir, wenn wir die Standardlösung der Industrie verwenden wollen, zwölf Löcher bohren, um die Lagenwechsel (Seitenwechsel) vorzunehmen.

Es geht aber viel besser. Wie Abbildung 5 zeigt, kommt man mit nur vier Löchern statt zwölf Löchern aus und hat damit eine erhebliche Aufwandseinsparung erreicht.

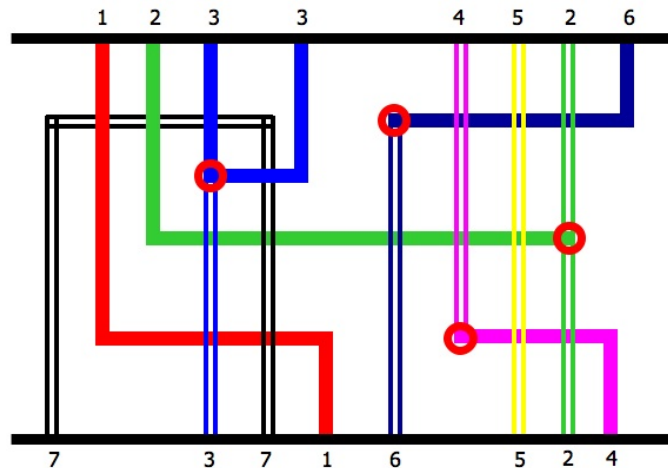


Abbildung 5

In Abbildung 6 sind 10 Leiterbahnen zu sehen. Diese sind nummeriert und farblich gekennzeichnet. Alle Leiterbahnen führen zu den Rändern der Leiterplatte. Man beachte, dass es Leiterbahnen mit 2, 3 und 4 Endpunkten gibt.

Ihre Aufgabe:

Bestimmen Sie die minimale Anzahl der Lagenwechsel (Bohrungen durch die Leiterplatte) unter den Lösungsvorschlägen, sodass kein Kurzschluss entstehen kann.

Genauer: Bestimmen Sie Punkte auf Leiterbahnen, an denen ein Loch gebohrt werden soll, damit die Leiterbahn die Lage wechseln kann, und zwar so, dass je zwei kreuzende Leiterbahnen auf unterschiedlichen Lagen sind und dass die Anzahl der zu bohrenden Löcher so gering wie möglich ist.

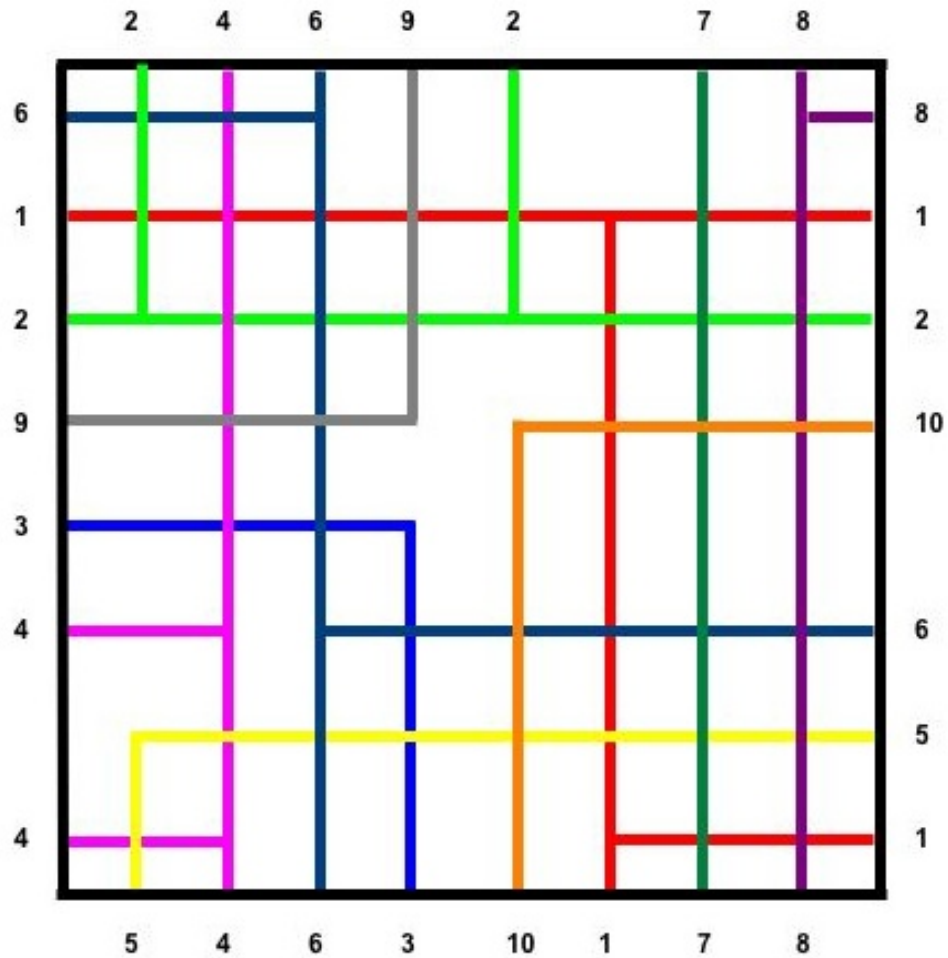


Abbildung 6

Antwortmöglichkeiten:

1. 9 Bohrungen
2. 10 Bohrungen
3. 11 Bohrungen
4. 12 Bohrungen
5. 13 Bohrungen



6. 14 Bohrungen
7. 15 Bohrungen
8. 16 Bohrungen
9. 17 Bohrungen
10. 18 Bohrungen

Hinweis:

Betrachten wir die Leiterbahn 1. Von dem mit 1 gekennzeichneten Punkt am linken Rand (Westen) führt eine gerade rotgefärbte Linie zu dem mit 1 markierten Punkt am rechten Rand (Osten). Zwischen den Leiterbahnen 2 und 7 zweigt von der roten horizontalen Linie eine rote Linie nach Süden ab. Wenn man in dem Verzweigungspunkt ein Loch bohrt, so hat man verschiedene Lagenzuweisungen zur Auswahl:

Man kann die nach Westen laufende rote Linie oberhalb der Leiterplatte, die nach Osten laufende unterhalb führen oder umgekehrt; gleichzeitig hat man die Freiheit, die nach Süden laufende rote Linie oberhalb oder unterhalb zu führen.

Verzweigungspunkte bieten also „Gestaltungsmöglichkeiten“.

Projektbezug:

In Abbildung 1 haben Sie eine unbestückte Leiterplatte und ihren Schatten auf einem weißen Stück Papier gesehen, sodass die Löcher, die in eine solche Leiterplatte gebohrt werden müssen, gut sichtbar sind.

Die beiden Seiten einer bestückten Leiterplatte sehen Sie in Abbildung 7.

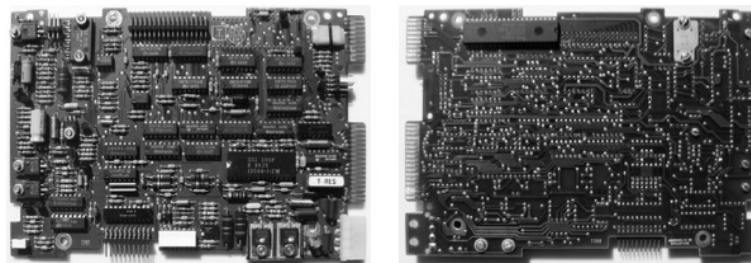


Abbildung 7



Einige Löcher haben die „Beinchen“ von Bauteilen aufgenommen, andere dienen dazu, um z.B. den Strom einer Leiterbahn von der einen Seite auf die andere Seite der Leiterplatte zu führen. Alle Löcher sind nun mit Lötzinn (oder anderem stromleitenden Material) gefüllt. Das Bohren der Löcher ist zeitaufwendig und führt nicht selten zu Beschädigungen der Platte. Schlecht verlötete Löcher beeinträchtigen die Funktionsfähigkeit der Leiterplatte. Ein Ziel beim Entwurf von Leiterplatten ist daher, die Anzahl der zu bohrenden Löcher so klein wie möglich zu halten.

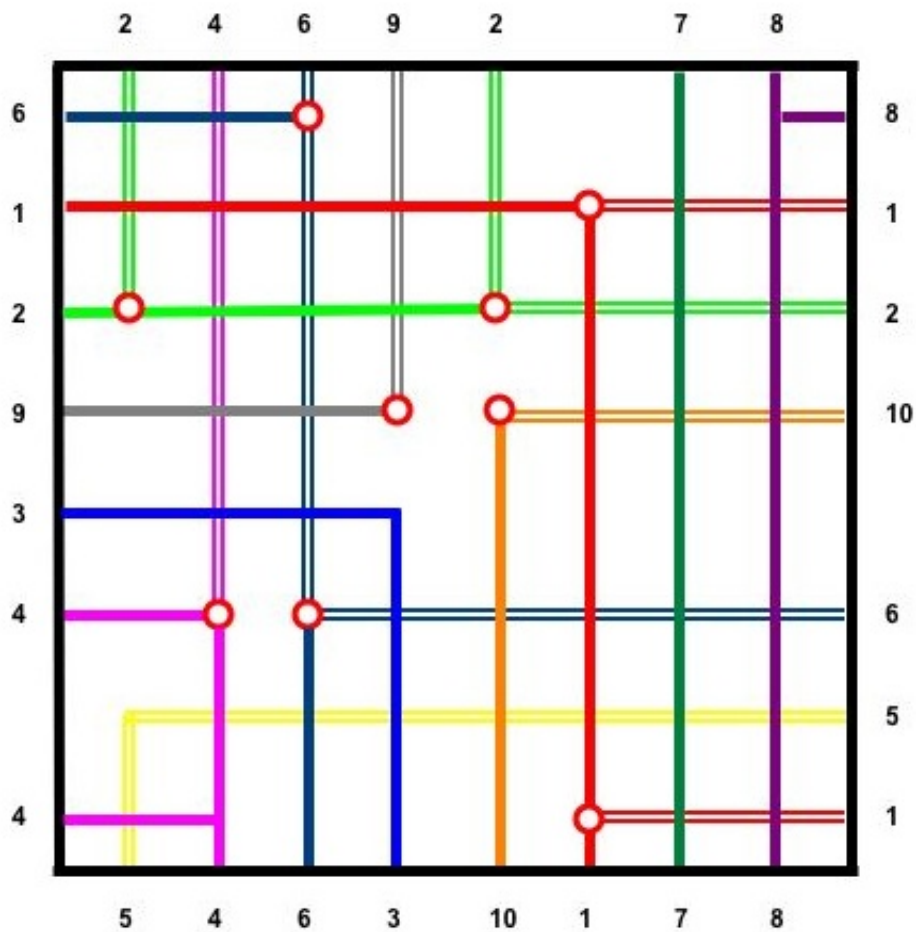
Diese Mathekalenderaufgabe ist eine (ein wenig vereinfachte) Version des Leiterplattenbohrproblems. Dieses Bohrproblem nennt man im Jargon des Leiterplatten- und VLSI-Designs Via-Minimierung (ein Loch wird hierbei als Via (Durchkontaktierung) bezeichnet).



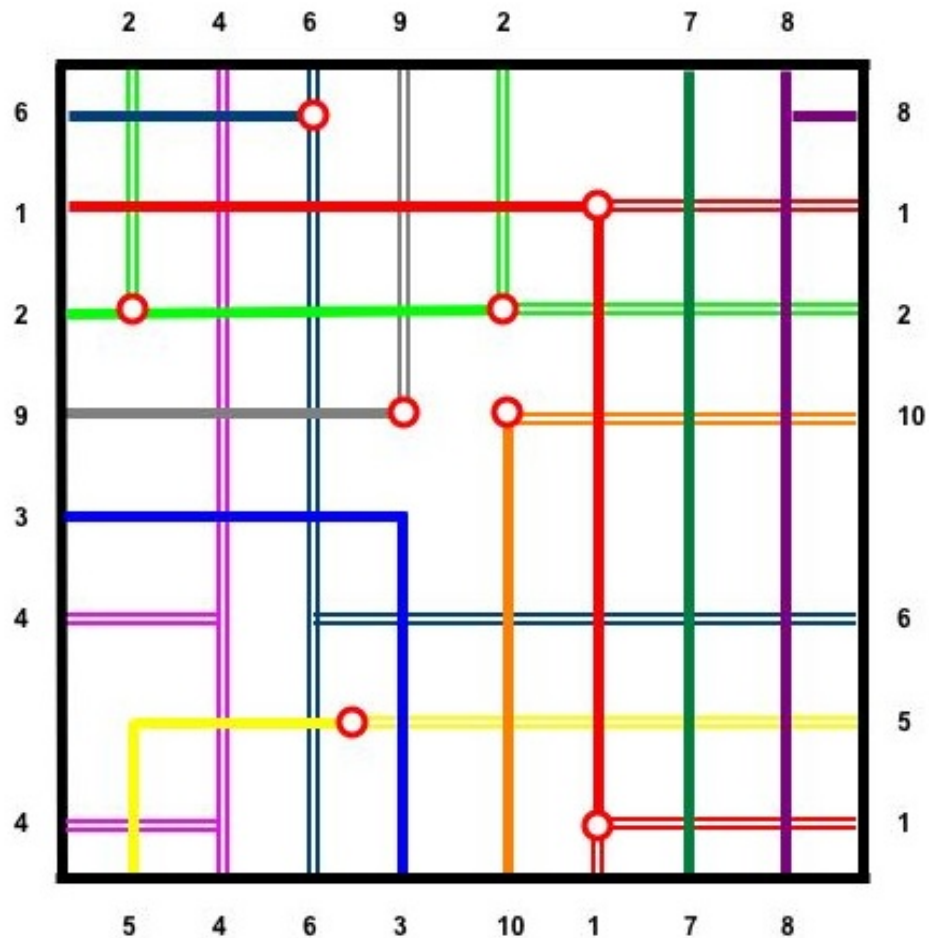
22.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 1

Die geringste Anzahl an Bohrungen unter den gegebenen Antwortmöglichkeiten sind 9:



Hierbei wurden nur Bohrungen in Knicken betrachtet. Vernachlässigt man diese Einschränkung so genügen auch nur 8 Bohrungen:



Aber: In der Realität brauchen Kreuzungen und Löcher Platz. Man kann Leitungen nicht beliebig dicht nebeneinander platzieren und je nachdem wie groß die Abstände sind, ist es möglich ein Loch zu bohren oder nicht.

Die Beweisidee dafür, dass dies auch die minimale Anzahl von Bohrungen ist, lautet folgendermaßen:

Man versucht obere und untere Schranken zur Deckung zu bringen. Die obere Schranke ist der Wert der besten bekannt Lösung, da dies ja der höchste Wert ist, den eine minimale Lösung annehmen kann. Die untere Schranke ist die Anzahl von Bohrungen von der man weiß, dass man sie mindestens braucht. Diese Schranken zu bestimmen ist schwierig, kompliziert oder aufwendig. In



DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

Digitaler Adventskalender

der Realität übernehmen Computer diese Aufgabe.

23 Netze eines Weihnachtsbaums

Autor: Klaus Hildebrandt

Projekt: F4

23.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann möchte Weihnachtsbäume aus Papier erstellen. Einen Entwurf eines Weihnachtsbaums, bestehend aus Dreiecken und Vierecken, hat er bereits im Kopf, gezeigt in Abbildung 1. Um einen Bastelbogen zu erstellen, sucht der Weihnachtsmann eine Auffaltung seines Entwurfs. Eine *Auffaltung* erhält man, indem man den Weihnachtsbaum entlang der Kanten so aufschneidet, dass er sich in die Ebene aufklappen lässt, siehe Abbildung 3. Natürlich darf der Baum nicht in mehrere Teile zerschnitten werden. Eine Auffaltung heißt ein *Netz*, wenn es in der Ebene keine Überlappungen gibt. Um aus einem Netz einen Bastelbogen zu erstellen, muss man nur noch Klebelaschen hinzufügen.

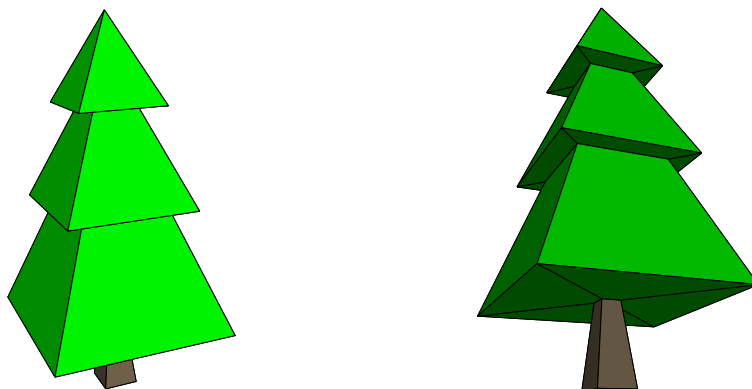
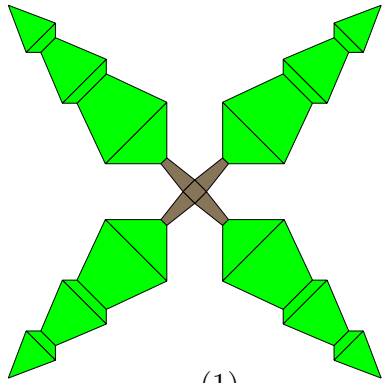
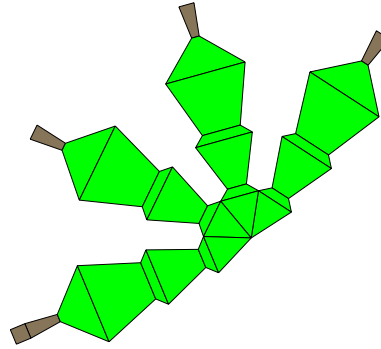


Abbildung 13: Ein Weihnachtsbaum aus verschiedenen Perspektiven.

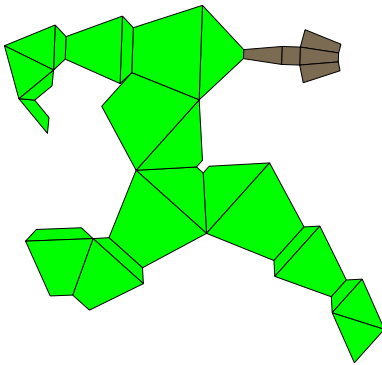
Knecht Ruprecht, der Gehilfe des Weihnachtsmanns, hat schon sechs verschiedene Schnittmuster erstellt. Diese sind in Abbildung 2 zu sehen. Leider ist Knecht Ruprecht in der Vorweihnachtszeit mit Arbeit überhäuft, ihm sind daher ein paar Fehler unterlaufen. Der Weihnachtsmann fragt sich nun: Welche der in Abbildung 2 gezeigten Schnittmuster sind Netze des Weihnachtsbaums, der in Abbildung 1 gezeigt ist?



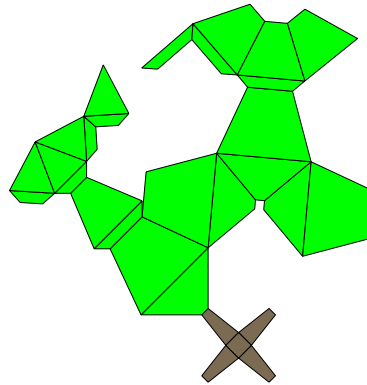
(1)



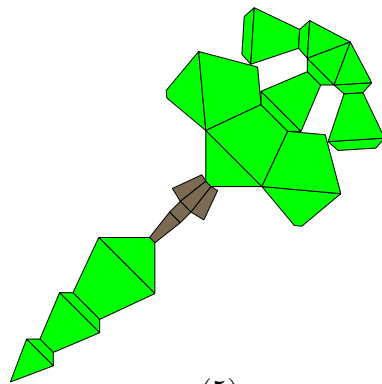
(2)



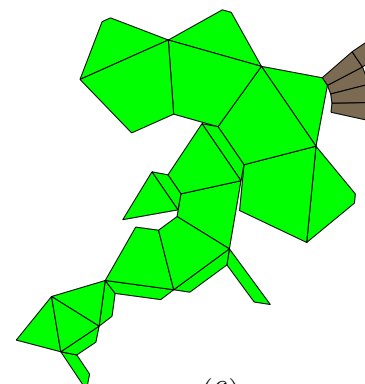
(3)



(4)



(5)



(6)

Abbildung 14: Welche der Bilder zeigen ein Netz des Weihnachtsbaums?



Antwortmöglichkeiten:

1. Nur 1, 2 und 3 sind Netze des Weihnachtsbaums.
2. Nur 1, 2 und 5 sind Netze des Weihnachtsbaums.
3. Nur 1, 2 und 6 sind Netze des Weihnachtsbaums.
4. Nur 1, 3 und 4 sind Netze des Weihnachtsbaums.
5. Nur 1, 4 und 5 sind Netze des Weihnachtsbaums.
6. Nur 1, 2, 3 und 5 sind Netze des Weihnachtsbaums.
7. Nur 1, 2, 4 und 5 sind Netze des Weihnachtsbaums.
8. Nur 1, 2, 3 und 6 sind Netze des Weihnachtsbaums.
9. Nur 1, 2, 3 und 4 sind Netze des Weihnachtsbaums.
10. Nur 1, 2, 5 und 6 sind Netze des Weihnachtsbaums.

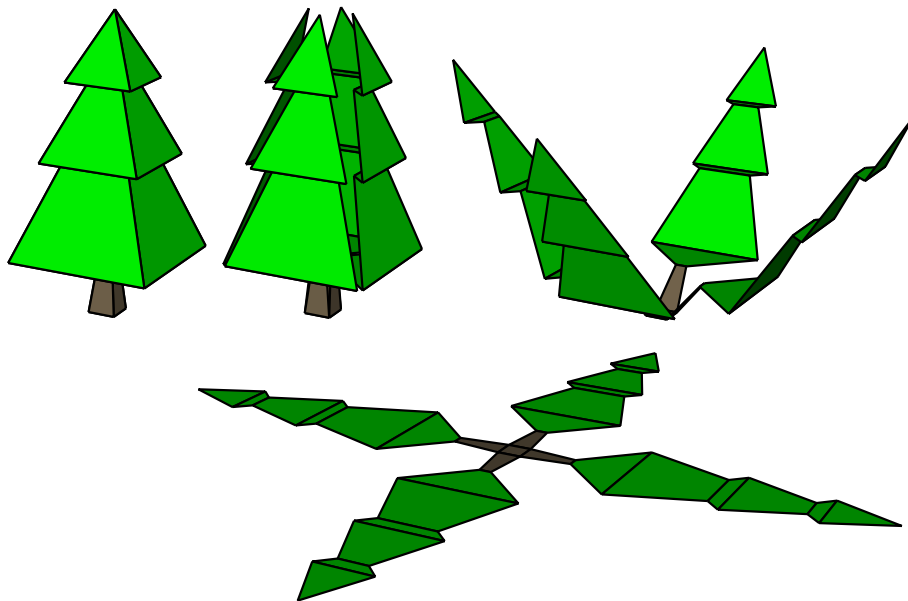


Abbildung 15: Eine Auffaltung des Weihnachtsbaums.



Projektbezug:

Geometrische Eigenschaften von Flächen werden in Projekt F4 untersucht und benutzt, um Probleme der Flächenoptimierung und -verarbeitung zu lösen, wie sie z.B. in der Automobil-, Film- oder Spieleindustrie entstehen. Ein besonderer Fokus liegt auf *polyedrischen* Flächen, bestehend aus aneinandergelassenen n-Ecken, da diese von Computern erfasst und verarbeitet werden können. Polyedrische Modelle realer Flächen können mit einem 3D-Scanner erzeugt werden. Sie bestehen aus gemessenen Punkten, die durch Dreiecke so verbunden werden, dass eine polyedrische Fläche entsteht.

Netze polyedrischer Flächen wurden bereits von Albrecht Dürer im 15. Jahrhundert beschrieben. Ein offenes mathematisches Problem ist die Frage, ob jede polyedrische Fläche, die der Rand eines konvexen Körpers ist, ein Netz besitzt.

Ein Applet, das Auffaltungen berechnet und darstellt, kann man unter der Adresse

<http://www.javaview.de/services/unfold/index.html>
im Internet finden.

23.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 2

Nur 1, 2 und 5 sind Netze des Weihnachtsbaums.

24 Das perfekte Pfefferkuchenrezept

Autoren: Christina Puhl und Sebastian Stiller

Projekt: B15

24.1 Aufgabe

In einen Pfefferkuchen gehören n verschiedene Gewürze. Um einen spezifischen Geschmack zu erzielen, will die Firma NummerSicher von manchen Gewürzen etwas weniger, von anderen etwas mehr verwenden. Die Kunst ist es, sich von der Norm abzusetzen, ohne zu vielen Kunden zu missfallen.

Nun hat allerdings jeder Pfefferkuchenverspeiser seine eigene Erwartungshaltung an die weihnachtliche Delikatesse. Freut er sich zum Beispiel besonders auf Zimt, wird ein Pfefferkuchen, in dem mehr Zimt ist, bei ihm einen Pluspunkt erhalten. Missfällt ihm hingegen der Zimtgeschmack, bekommt dieser Pfefferkuchen einen Minuspunkt.

Umgekehrt funktioniert das auch: Enthält ein Pfefferkuchen etwas weniger Nelken, so gibt das einen Pluspunkt bei allen, die Nelken ablehnen, und einen Minuspunkt in der Bewertung aller Nelkenfans. Menschen, die weder eine Vorliebe noch ein Abneigung für Nelken empfinden, bewerten den Pfefferkuchen unabhängig davon, ob mehr oder weniger Nelken enthalten sind oder die übliche Nelkendosis vorliegt.

Bleibt eine Gewürzmenge unverändert, hat dies weder bei den Freunden noch bei den Gegnern dieses Gewürzes Einfluss auf die Bewertung.

Die Gesamtbewertung eines Pfefferkuchens ist die Summe aller Pluspunkte abzüglich der Summe aller Minuspunkte. Es gibt eine psychophysische Geschmackskonstante k . Und es gilt: Ist die obige Summe kleiner oder auch nur gleich $-k$, schmeckt dem Verspeiser der Kuchen nicht. Dieses k ist gerade und merkwürdiger Weise ein Teiler von n .

Die Geschäftsleitung von NummerSicher hat ihren Produktdesignern freie Hand gegeben, und die haben gleich alle n Gewürze verstärkt oder abgeschwächt.

Für die Marktforschung arbeiten 2^n vollsensibilisierte Pfefferkuchenverspeiser, d.h. Menschen, die für jedes Gewürz entweder eine Vorliebe oder eine Abneigung haben. Jeder von ihnen hat eine andere Kombination aus Vorlieben und Abneigungen. Wie vielen von ihnen wird der neue Pfefferkuchen



nicht schmecken (d.h. die Bewertung fällt kleiner oder gleich $-k$ aus)?

(Hinweis zur Lösung: Die komische Schreibweise $\binom{a}{b}$ in den Antworten liest sich als „ b aus a “ und bezeichnet die Anzahl aller verschiedenen Teilmengen mit genau b Elementen aus einer Menge mit a Elementen. Zum Beispiel ist $\binom{4}{2} = 6$. Allgemein hat man $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$, wobei $c!$ das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis c ist. Immer gut zu wissen! Es könnte auch etwas mit der Aufgabe zu tun haben - muss aber nicht.)

1. Er schmeckt allen.

2. Er schmeckt niemandem.

3. Der Anteil der Gruppen, denen er nicht schmeckt, ist $\frac{1}{k}$ von allen.

4. Der Anteil ist $\frac{\sum_{i=\frac{n}{2k}}^n \binom{n}{i}}{2^n}$.

5. Der Anteil ist $\frac{\sum_{i=k}^n \binom{n}{i}}{2^n}$.

6. Der Anteil ist $\frac{\sum_{i=\frac{n+k}{2}}^n \binom{n}{i}}{2^n}$.

7. Der Anteil ist $\frac{\sum_{i=\frac{n}{2k}}^{n-k} \binom{n}{i}}{2^n}$.

8. Der Anteil ist $\frac{\sum_{i=\frac{k}{2}}^{n-k} \binom{n}{i}}{2^n}$.

9. Der Anteil ist $\frac{\sum_{i=\frac{k}{2}}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{i}}{2^n}$.

10. Das kann man nicht berechnen, solange man nicht weiss, wie viele Gewürze verstärkt und wieviele abgeschwächt wurden.

24.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort (6)

Die Gruppen sind vollsensibilisiert, soll heissen, sie haben für jedes Gewürz entweder eine Vorliebe (Wert $+1$) oder eine Abneigung (Wert -1). Wir beschreiben jede der 2^n Gruppen eineindeutig durch einen Vektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ mit $v_i \in \{-1; 1\}$. Die Frage lautet dann:

Gegeben sei ein beliebiger, aber fester Vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $x_i \in \{-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\}$ (ein Pfefferkuchenrezept).

Wieviele Vektoren $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ mit $z_i \in \{-1; 1\}$ haben ein Skalarprodukt kleiner oder gleich $-k$?

Nun ist in

$$zx = \sum_{i=1}^n z_i x_i = \sum_{i=1}^n \text{sign } z_i x_i$$

das Skalarprodukt durch die Anzahl der Komponenten bestimmt, in denen x und z gleiches Vorzeichen haben. (Wir schreiben sign für die Funktion, die jede positive Zahl auf 1, die Null auf sich selbst und jede negative Zahl auf -1 abbildet.) Sei u die Anzahl der Komponenten, bei denen dies *nicht* der Fall ist. Dann gilt:

$$zx = (n - u) - u.$$

Soll also $zx \leq -k$ gelten, so muss

$$-k \geq n - 2u \Leftrightarrow u \geq \frac{n+k}{2}$$

gegeben sein. Mit der Zusatzvoraussetzung aus der Aufgabe ist diese Formel unproblematisch (weil n und k gerade sind).

Gesucht ist also die Anzahl aller mindestens $\frac{n+k}{2}$ -elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen. Anders gesagt, wir suchen die Anzahl der Geschmacksprofile, die in mindestens $\frac{n+k}{2}$ Gewürzen unserem Rezept zuwiderlaufen.

Also ist Antwort Nummer 6 richtig.



A Lösungen im Überblick

Aufgabe 1	4
Aufgabe 2	4
Aufgabe 3	5
Aufgabe 4	9
Aufgabe 5	6
Aufgabe 6	8
Aufgabe 7	2
Aufgabe 8	6
Aufgabe 9	6 und 2
Aufgabe 10	3
Aufgabe 11	7
Aufgabe 12	9
Aufgabe 12	8
Aufgabe 14	9
Aufgabe 15	7
Aufgabe 16	6
Aufgabe 17	8
Aufgabe 18	10
Aufgabe 19	8
Aufgabe 20	8
Aufgabe 21	4
Aufgabe 22	1
Aufgabe 23	2
Aufgabe 24	6