Digitaler Adventskalender 2006
www.mathekalender.de

Aufgaben und Lösungen

DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

Inhaltsverzeichnis

1	Gibt es den Weihnachtsmann wirklich?	4
2	Der Oktaederwiderstand	7
3	Der Elfenkalender	10
4	Heiße Kufe	19
5	Langsam rieselt der Schnee	23
6	Der Terminplan des Weihnachtsmanns	28
7	Identifizierung unartiger Kinder	35
8	Wunschzettel von Nele und Tim	38
9	Bruchpilot Rudi	42
10	Schlittenbeladung einmal anders	47
11	Ausstellung der Weihnachtsbären	57
12	Statistische Tests	60
13	Nette Leute spielen Schach!	63
14	Knecht Ruprechts Billardproblem	66
15	Das morgendliche Brückenritual	70
16	Weihnachtsbaumfällen	77
17	Geschenke	81
18	Die Elfenstadt	88
19	Neue Brücken	98
20	Das Geschenkpapierproblem	103

21 Das Schmücken des Weihnachtsbaums **109**

22 Elfenfunk **116**

23 Der Königsweg **124**

24 Schlittenfahrt durch die Zeit **128**

1 Gibt es den Weihnachtsmann wirklich?

Autor: Matthias Ehrhardt

1.1 Aufgabe

Wie jedes Jahr fragen sich die wissbegierigen Kinder in einem bestimmten Alter, ob es den Weihnachtsmann denn wirklich gibt. Die meisten jungen Zweifler gibt es stets wegen diesem *Geschenke-Lieferungs-Problem* des Weihnachtsmannes. Schließlich gibt es ca. 2 Milliarden Kinder in der Welt, die alle zu Weihnachten auf ihre Geschenke warten. Angenommen pro Haushalt gibt es durchschnittlich 2,5 Kinder, so müsste der Weihnachtsmann ungefähr 800 Millionen Haushalte verteilt auf dem ganzen Globus besuchen.
Die zurückzulegende Distanz können die Kinder sehr leicht mit Hilfe der folgenden Überlegung grob abschätzen. Zunächst kennen sie aus der Schule den mittleren Erdradius als 6.371 km und bestimmen so die Oberfläche der Erdkugel. Weiterhin nehmen die Kinder an, dass nur ca. 30% dieser Fläche aus Land besteht. Der Einfachheit halber seien die Haushalte mit Kindern gleichmäßig auf dieser Landfläche verteilt. Die so erhaltene Teilfläche (vergleichen Sie es mal mit der Größe eines Fußballfelds!) gehört also zu einem einzelnen Haushalt und die Quadratwurzel davon ist demnach die mittlere Distanz zwischen den Haushalten. Endlich können die Kinder so die Gesamtdistanz, die der Weihnachtsmann zurücklegen muss, um alle Geschenke abzuliefern, leicht ausrechnen. Vergleichen Sie diese Distanz mit der Entfernung zwischen Erde und Sonne!
Nun rotiert (zum Glück) die Erde und der Weihnachtsmann hat somit mehr Zeit zum Ausliefern, als einige Kinder zunächst vermuten. Er beginnt an der internationalen Datumsgrenze und fährt mit seinem Schlitten von Ost nach West über verschiedene Zeitzonen hinweg. Dabei hat er nicht nur 10 Stunden (vom Schlafengehen um 20 Uhr abends bis zum Aufwachen der Kinder um 6 Uhr morgens) sondern zusätzliche 24 Stunden, also insgesamt 34 Stunden!
Dennoch ist das eine gewaltige Aufgabe selbst für den Weihnachtsmann und die Frage ist: Kann er es schaffen? Denn auch für den Weihnachtsmann gilt: nichts ist schneller als die Lichtgeschwindigkeit.

Bemerkung 1: Aufmerksame Kinder werden beim Vorüberfliegen des Weihnachtsschlittens erkennen, dass die Nase von Rudolph, dem Chef–Rentier, nicht mehr rot erscheint; diese Farbe ändert sich mit der Geschwindigkeit (Doppler–Effekt). Mit Hilfe der Tabelle unten können die Kinder somit die Geschwindigkeit abschätzen und Ihre Rechnung kontrollieren.

Farbe von Rudolphs Nase	rot	gelb	grün	blau	violett
Wellenlänge in Nanometer	650	580	550	480	400
Geschwindigkeit in Prozent der Lichtgeschwindigkeit	0	11	17	29	45

Bemerkung 2: Natürlich treten bei diesem Problem relativistische Effekte auf. So wird sich z.B. bei dieser hohen Geschwindigkeit die Masse, die Größe und das Altern des Weihnachtsmannes ändern. Eine Diskussion hierzu gehört aber eher in einen physikalischen Adventskalender.

Antwortmöglichkeiten:

1. Teilfläche eines Haushalts > Fußballfeld, Gesamtdistanz > Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit > Lichtgeschwindigkeit
2. Teilfläche eines Haushalts > Fußballfeld, Gesamtdistanz > Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit < Lichtgeschwindigkeit
3. Teilfläche eines Haushalts > Fußballfeld, Gesamtdistanz < Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit > Lichtgeschwindigkeit
4. Teilfläche eines Haushalts > Fußballfeld, Gesamtdistanz < Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit < Lichtgeschwindigkeit
5. Teilfläche eines Haushalts < Fußballfeld, Gesamtdistanz > Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit > Lichtgeschwindigkeit
6. Teilfläche eines Haushalts < Fußballfeld, Gesamtdistanz > Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit < Lichtgeschwindigkeit
7. Teilfläche eines Haushalts < Fußballfeld, Gesamtdistanz < Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit > Lichtgeschwindigkeit
8. Teilfläche eines Haushalts < Fußballfeld, Gesamtdistanz < Entfernung Erde–Sonne, Geschwindigkeit < Lichtgeschwindigkeit

1.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 2

mittlerer Erdradius $R = 6,371 \cdot 10^6$ m

Fußballfeld: (aus `http://de.wikipedia.org/wiki/Fussballfeld`)
Die Länge der kurzen Seiten sollte zwischen 45 und 90 Meter, die der langen Seiten (Seitenlinie) zwischen 90 und 120 Meter betragen. Üblich sind 68 auf 105 Meter, d.h., wir nehmen als Fläche eines Fußballfeldes $F = 7.140\text{m}^2$.

Entfernung Erde–Sonne $D_{ES} \approx 1,5 \cdot 10^{11}$m

Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s

Rechnung:

Erdoberfläche $S = 4\pi R^2 \approx 5,1 \cdot 10^{14}$ m^2

$\rightsquigarrow$ Teilfläche pro Haushalt $S_H = \dfrac{0,3 \cdot S}{8 \cdot 10^8}$ m$^2 \approx 1,91 \cdot 10^5$ m^2
(d.h. über 26 Fußballfelder!)

$\rightsquigarrow$ Gesamtdistanz $D = 8 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{S_H} \approx 3,5 \cdot 10^{11}$ m
(d.h. weiter als von der Erde zur Sonne und zurück!)

$\rightsquigarrow$ Geschwindigkeit $v = \dfrac{D}{34 \cdot 3.600\text{s}} \approx 2,86 \cdot 10^6$ m/s
(d.h. ca. 1% von der Lichtgeschwindigkeit)

Es gibt somit (zumindest aus dieser Problematik) keinen Grund an der Existenz des Weihnachtsmannes zu zweifeln.

2 Der Oktaederwiderstand

Autorinnen: Simone Bächle, Anita Liebenau
Projekt: D2

2.1 Aufgabe

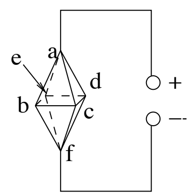


Abbildung 1: Schaltkreis

Im abgebildeten Schaltkreis ist ein Oktaeder als Widerstand eingebaut worden, dessen Kanten alle den Widerstand $R_i = 1\Omega$ haben. Nun möchte man das Oktaeder durch einen einfachen Widerstand ersetzen: Wie groß muss

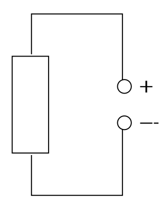


Abbildung 2: Schaltkreis mit neuem Widerstand

man den neuen Widerstand wählen, damit er dem des Oktaeders entspricht?

Antwortmöglichkeiten:

1. Einen Widerstand der Größe 1.
2. Einen Widerstand der Größe $\frac{1}{4}$.

3. Einen Widerstand der Größe 4.
4. Einen Widerstand der Größe 12.
5. Einen Widerstand der Größe 6.
6. Einen Widerstand der Größe $\frac{1}{12}$.
7. Einen Widerstand der Größe $\frac{1}{2}$.
8. Einen Widerstand der Größe 8.
9. Einen Widerstand der Größe 24.
10. Einen Widerstand der Größe $\frac{1}{3}$.

2.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

In jedem der Eckpunkte b, c, d und e des Oktaeders treffen jeweils vier Widerstände mit $R_i = 1\Omega$ zusammen. Zwischen diesen Eckpunkten findet also kein Spannungsausgleich statt. Deshalb kann man den quadratischen Ring, den die vier Punkte bilden, wie einen Knoten auffassen. In der oberen Hälfte

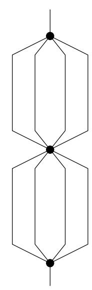


Abbildung 3: Widerstand abstrakt

ergibt sich der Gesamtwiderstand aus der Gleichung für den Widerstand in einer Parallelschaltung: $R_{GES,1} = \frac{1}{1+1+1+1} = \frac{1}{4}$. $R_{GES,2}$, der Gesamtwiderstand in der unteren Hälfte, lässt sich auf dieselbe Art berechnen. Nun sind praktisch zwei Widerstände in Reihe geschaltet: So ergibt sich der Gesamt-

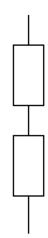


Abbildung 4:

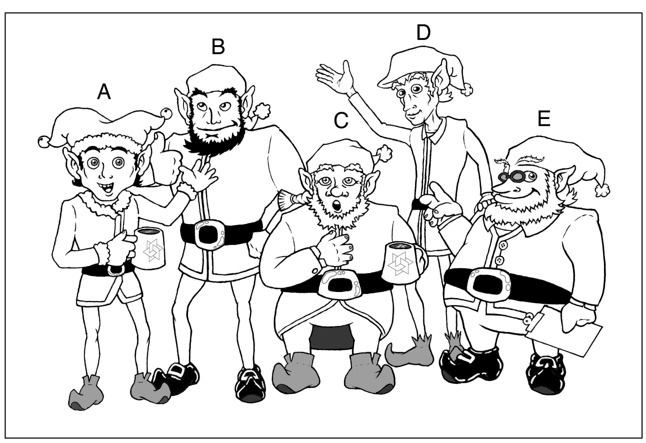
widerstand wie folgt: $R_{GES} = R_{GES,1} + R_{GES,2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Antwort 7) ist richtig.

3 Der Elfenkalender

Autorin: Katja Biermann

3.1 Aufgabe

Die Elfen sind ein fleißiges Volk, jedes Jahr helfen sie dem Weihnachtsmann, damit die Menschen rechtzeitig zu Weihnachten ihre Geschenke bekommen. Dabei brauchen sie viel Mathematik. Sie müssen ausrechnen, wieviel Geschenkpapier sie für ein Geschenk brauchen und wieviele unterschiedliche Farben sie an Geschenkpapier brauchen, damit kein Kind Geschenke mit einer gleichfarbigen Verpackung bekommt. Am schwierigsten ist es jedoch, den Austeilungsplan für den Weihnachtsmann zu erstellen, damit am Heilig Abend alle Kinder beschenkt werden können.
Damit der Elfennachwuchs möglichst früh mit den schweren Aufgaben vertraut gemacht wird, haben die Elfen einfach den Mathekalender des MATHEON kopiert. So brachten sie den kleinen Elfen spielerisch alle nötigen Grundlagen der Mathematik bei. Die kleinen Elfen lösten ganz fleißig alle Aufgaben, aber auch viele Erwachsene hatten ihren Spaß.
Im August dieses Jahres gab es die feierliche Preisverleihung. (Anmerkung: Wie jeder weiß, feiern Weihnachtselfen Weihnachten am 24.07., da sie ja am 24.12. keine Zeit haben.) Auf der Preisverleihung trafen sich auch alle Elfen, die Aufgaben für den Elfenkalender erstellt haben. Von 5 gibt es sogar folgendes Bild:

LINKS  RECHTS

Diese Fünf erzählten den ganzen Abend über den Elfenkalender und ihre Aufgaben. Der Elfenreporter Luigi war die ganze Zeit dabei und hat sich fleißig Notizen gemacht. Doch am Abend konnte er nur noch einige seiner Stichpunkte entziffern.

I. Till, der direkt links neben dem Elf der Aufgabe „Pythagoras im Wald“ zu sehen ist, hat nicht den Kennbuchstaben A.

II. Die Aufgabe des Elfen auf Platz C des Bildes erschien 13 Tage später als „Vom Mäusezählen“ und früher als die Aufgabe von Hugo.

III. Die Aufgabe des Elfen auf Platz A erschien später als die Aufgabe des Elfen von Platz B.

IV. Zwischen Emil und dem Elf mit der Aufgabe vom 24.07. steht höchstens ein anderer Elf auf dem Bild.

V. Weder Hugo noch der Elf mit der 15. Aufgabe stehen auf dem Bild ganz außen.

VI. „Fraktale Geometrie im Blattwerk“ erschien später als die Aufgabe von Malte.

VII. Arnolds Aufgabe erschien früher als „Kürzeste Wege im Unterholz“, dessen Aufgabensteller direkt rechts von Arnold steht, aber nicht auf Platz D.

VIII. Aufgabensteller: Arnold, Emil, Hugo, Malte, Till

IX. Türchen: 1, 2, 6, 15, 24

X. Aufgabentitel: „Kürzeste Wege im Unterholz“, „Pythagoras im Wald“, „Vom Mäusezählen“, „Fraktale Geometrie im Blattwerk“, „Elchsteuerung“

Kann er trotzdem noch rekonstruieren, welcher Elf wo auf dem Bild steht, welche Aufgabe er erstellt hat und hinter welchem Türchen diese war? Luigi hat es geschafft! Welche der folgenden Aussagen kann Luigi nun als falsch erkennen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Auf Platz C steht nicht Malte.
2. Arnold ist nicht außen auf dem Bild zu sehen.
3. Emil hat eine Aufgabe vor dem 15.07. erstellt.
4. „Die Elchsteuerung“ ist nicht von Hugo.
5. Till steht in der Mitte des Bildes.
6. Emil steht nicht ganz links.
7. „Vom Mäusezählen“ ist die Aufgabe von Arnold.
8. „Kürzeste Wege im Unterholz“ ist von Till.
9. Malte hat nicht Aufgabe Nummer 6.
10. Hugo hat Aufgabe 24 erstellt.

3.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

Luigi zieht folgende Schlussfolgerungen aus den Stichpunkten:
Die Abstände zwischen den Tagen der einzelnen Aufgaben sind: 1, 5, 14, 23, 4, 13, 22, 9 und 18. Damit sehen wir, dass nur zwischen der zweiten Aufgabe und der 15. Aufgabe ein Abstand von 13 ist und somit sagt uns Hinweis II, dass der Elf von Aufgabe 15 auf Platz C zu finden ist. Weiterhin ist aus II zu folgern, dass „Vom Mäusezählen“ am 02.07. gelöst werden musste und Hugo Aufgabe 24 erstellt hat. Anschaulich sieht das so aus:

	Arnold	Emil	Hugo	Malte	Till	1	2	6	15	24	Mäusezählen	Elchsteuerung	Pythagoras	Fraktale	Kürzeste Wege
A									-						
B									-						
C			-			-	-	-	+	-	-				
D									-						
E									-						
Mäusezählen			-			-	+	-	-	-					
Elchsteuerung							-								
Pythagoras							-								
Fraktale							-								
Kürzeste Wege							-								
1			-												
2			-												
6			-												
15			-												
24	-	-	+	-	-										

Weiterhin ist durch V Hugo weder auf Platz A noch auf Platz E zu finden. Somit bleiben Platz B und D übrig. Platz B kann jedoch durch Hinweis III ausgeschlossen werden (da Hugo ja die letzte Aufgabe des Kalenders erstellt hat). Somit ist Hugo im Bild auf Platz D zu sehen. Im Diagramm kann man nun folgende Eintragungen machen:

	Arnold	Emil	Hugo	Malte	Till	1	2	6	15	24	Mäusezählen	Elchsteuerung	Pythagoras	Fraktale	Kürzeste Wege
A			-						-	-					
B			-						-	-					
C			-			-	-	-	+	-	-				
D	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-				
E			-						-	-					
Mäusezählen			-			-	+	-	-	-					
Elchsteuerung							-								
Pythagoras							-								
Fraktale							-								
Kürzeste Wege							-								
1			-												
2			-												
6			-												
15			-												
24	-	-	+	-	-										

Mit VII folgt, dass Arnold nicht den Kennbuchstaben E oder C hat. Es bleiben A oder B als Platz übrig. Somit bleibt für den Aufgabensteller von „Kürzeste Wege im Unterholz“ Platz B oder C.
Als Daten fallen für „Kürzeste Wege im Unterholz“ der 01.07., wegen VII, und der 02.07. weg. Zudem kann die Aufgabe auch nicht am 24.07. gestellt worden sein, da der Aufgabensteller nach VII nicht auf Platz D zu sehen ist. Somit kommen nur der 06.07. und der 15.07. in Betracht.

	Arnold	Emil	Hugo	Malte	Till	1	2	6	15	24	Mäusezählen	Elchsteuerung	Pythagoras	Fraktale	Kürzeste Wege
A			-						-	-					-
B			-						-	-					
C	-		-			-	-	-	+	-	-				
D	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-				-
E	-		-						-	-					-
Mäusezählen			-			-	+	-	-	-					
Elchsteuerung							-								
Pythagoras							-								
Fraktale							-								
Kürzeste Wege	-					-	-			-					
1			-												
2			-												
6			-												
15			-												
24	-	-	+	-	-										

Angenommen, „Kürzeste Wege im Unterholz“ sei am 06.07. erschienen und somit dessen Elf auf Platz B zu sehen, dann muss Arnold auf dem Bild den Kennbuchstaben A tragen und seine Aufgabe vom 01.07. oder 02.07. sein. Dies widerspricht jedoch III. Somit folgt: “Kürzeste Wege im Unterholz“ wurde am 15.07. gestellt und dessen Elf ist auf Platz C zu sehen. Arnold sieht man unter dem Kennbuchstaben B. Mit III kann Arnold auch nicht Aufgabe Nummer 6 haben und der Elf auf Platz A nicht die Aufgabe vom 01.07.

	Arnold	Emil	Hugo	Malte	Till	1	2	6	15	24	Mäusezählen	Elchsteuerung	Pythagoras	Fraktale	Kürzeste Wege
A	-		-			-			-	-					-
B	+	-	-	-	-			-	-	-					-
C	-		-			-	-	-	+	-	-	-	-	-	+
D	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-				-
E	-		-						-	-					-
Mäusezählen			-			-	+	-	-	-					
Elchsteuerung							-		-						
Pythagoras							-		-						
Fraktale							-		-						
Kürzeste Wege	-		-			-	-	-	+	-					
1			-												
2			-												
6	-		-												
15	-		-												
24	-	-	+	-	-										

Aus I kann gefolgert werden, dass Till nicht den Kennbuchstaben A oder E haben kann, somit bleibt C für ihn übrig. Weiterhin wissen wir so, dass „Pythagoras im Wald“ zum Elf auf Platz D gehört.
Hinweis IV legt Emil nun auf Platz E fest und somit muss Malte auf Platz A zu sehen sein.

	Arnold	Emil	Hugo	Malte	Till	1	2	6	15	24	Mäusezählen	Elchsteuerung	Pythagoras	Fraktale	Kürzeste Wege
A	-	-	-	+	-	-			-	-			-		-
B	+	-	-	-	-			-	-	-			-		-
C	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+
D	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-
E	-	+	-	-	-				-	-			-		-
Mäusezählen			-		-	-	+	-	-	-					
Elchsteuerung			-		-		-		-	-					
Pythagoras	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+					
Fraktale			-		-		-		-	-					
Kürzeste Wege	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-					
1			-	-	-										
2			-		-										
6	-		-		-										
15	-	-	-	-	+										
24	-	-	+	-	-										

Mit Hinweis VI kann „Fraktale Geometrie im Blattwerk“ nur am 06.07 erschienen sein und diese hat, nach Hinweis VI, Emil erstellt. Weiterhin bleibt für den ersten Tag nur „Die Elchsteuerung“.

	Arnold	Emil	Hugo	Malte	Till	1	2	6	15	24	Mäusezählen	Elchsteuerung	Pythagoras	Fraktale	Kürzeste Wege
A	-	-	-	+	-	-			-	-			-		-
B	+	-	-	-	-			-	-	-			-		-
C	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+
D	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-
E	-	+	-	-	-				-	-			-		-
Mäusezählen			-		-	-	+	-	-	-					
Elchsteuerung			-		-	+	-	-	-	-					
Pythagoras	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+					
Fraktale			-		-	-	-	+	-	-					
Kürzeste Wege	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-					
1			-	-	-										
2			-		-										
6	-	+	-	-	-										
15	-	-	-	-	+										
24	-	-	+	-	-										

Die weiteren Folgerungen ergeben sich automatisch aus dem Schema. Somit kann zusammengefasst werden:

A	B	C	D	E
Malte	Arnold	Till	Hugo	Emil
2	1	15	24	6
„Mäusezählen“	„Elchsteuerung“	„Kürzeste Wege“	„Pythagoras“	„Fraktale“

Nun kann leicht überprüft werden, dass nur Antwort 7 falsch ist.

4 Heiße Kufe

Autoren: Sören Bartels und Rüdiger Müller
Projekt: C 16

4.1 Aufgabe

Auf seiner langen Reise am Heiligabend gönnt sich der Weihnachtsmann eine kleine Pause an einem zugefrorenen See. Dabei passiert ihm ein Missgeschick und er verschüttet seinen heißen Weihnachtspunsch über eine der Kufen seines Schlittens. Aus Sicherheitsgründen darf er den See mit seinem Schlitten nur überqueren, wenn die Temperatur der jeweils 10m langen Kufen an keiner Stelle größer als 17.5℃ ist. Zu den Zeitpunkten $t_n = n \cdot \Delta t$ in Minuten $(n = 0, 1, 2, ...)$ sei die Temperatur in Grad Celsius der mit Punsch erwärmten Kufe am Ort $x_j = j \cdot \Delta x$ in Metern $(j = 0, 1, 2, ..., 10)$ durch die Größe T_j^n beschrieben. Aus der Anfangstemperatur T_j^0 läßt sich die Wärmeausbreitung in der Kufe (die hier als dünner Metallstab angenommen sei) - in einfacher Approximation - durch die Formel

$$T_j^{n+1} = s \cdot (T_{j+1}^n + T_{j-1}^n) + (1 - 2s) \cdot T_j^n$$

bestimmen, wobei $s = \Delta t/\Delta x^2$ ist.
Wie lange muss der Weihnachtsmann warten, bis er seine Reise über den See fortsetzen darf, wenn die Anfangstemperatur T_j^0 gegeben ist durch $T_5^0 = 64$ und $T_j^0 = 0$ für $j \neq 5$ und er die obige Rekursionsformel mit $\Delta t = 1/4$ und $\Delta x = 1$ verwendet? Wie groß ist die Temperatur am Ort $x = 2$ zum Zeitpunkt der frühesten Weiterfahrt?

Bemerkung:
Auch wenn mit dieser Formel die Temperatur nicht an allen Kufenstücken zu jeder Zeit berechnet werden kann, ist es doch eine gute Näherung für die Temperatur in der Kufe und reicht dem Weihnachtsmann zur Entscheidung aus.

Antwortmöglichkeiten:
Der Zeitpunkt t_W der Weiterfahrt und die Temperatur T_W am Ort $x = 2$ zum Zeitpunkt t_W sind:

1. $t_W = 1/4$, $T_W = 16$
2. $t_W = 1/4$, $T_W = 6$
3. $t_W = 1/2$, $T_W = 15$
4. $t_W = 1/2$, $T_W = 4$
5. $t_W = 3/4$, $T_W = 0$
6. $t_W = 3/4$, $T_W = 1$
7. $t_W = 1$, $T_W = 2$
8. $t_W = 1$, $T_W = 0$
9. $t_W = 5/4$, $T_W = 17,5$
10. $t_W = 5/4$, $T_W = 14$

Projektbezug:
Die Entwicklung und Analyse einfacher Verfahren zur Beschreibung praxisrelevanter physikalischer Vorgänge ist eine wichtige Aufgabe der numerischen

Mathematik. Insbesondere ist die zuverlässige und effiziente Vorhersage der Temperaturausbreitung beispielsweise in Halbleitern von entscheidender Bedeutung für deren Lebensdauer.

4.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

Durch Einsetzen in die Formel erhält man folgende Tabelle für T_j^n

	j = 0	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5	j = 6	j = 7	j = 8	j = 9	j = 10
n=0	0	0	0	0	0	64	0	0	0	0	0
n=1	0	0	0	0	16	32	16	0	0	0	0
n=2	0	0	0	4	16	24	16	4	0	0	0
n=3	0	0	1	6	15	20	15	6	1	0	0
n=4	0	0.25	2	7	14	17.5	14	7	2	0.25	0

5 Langsam rieselt der Schnee

Autoren: Henseler, Reiner; Kimmerle, Sven-Joachim
Projekt: C14

5.1 Aufgabe

Wir betrachten eine Schneeflocke auf ihrem Weg (aus genügend großer Höhe) zur Erde.

Wir fragen uns nun: Mit welcher Geschwindigkeit kann die Schneeflocke maximal zur Erde fallen?
In unserem Modell wollen wir berücksichtigen, dass die Schneeflocke der Gravitation unterworfen ist sowie Luftwiderstand und Auftrieb nicht vernachlässigt werden können.
Dies führt zu folgender Differentialgleichung für die Geschwindigkeit v der Schneeflocke:

$$\frac{d}{dt}v(t) = -bv^2(t) - lv(t) + g,$$

wobei g die gegebene Fallbeschleunigung auf der Erde, l und b strikt positive Reibungskonstanten seien.
Zur Bestimmung der maximal möglichen Geschwindigkeit $v_\infty \in [0, \infty)$ betrachten wir folgenden Iterationsansatz: Wir starten mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v^0 = v(t = 0) = 0$ zur Zeit $t = 0$ und berechnen die Geschwindigkeit v_{n+1} nach $n + 1$ Zeitintervallen der Länge Δt nach folgender

Iteration:

$$v_{n+1} = -(\Delta t)bv_n^2 + (1-(\Delta t)l)v_n + (\Delta t)g \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$
$$v_0 = v^0. \tag{2}$$

Diese Iterationsvorschrift ist z.B. für $\Delta t \in (0, \frac{-l+2\sqrt{l^2+3bg}}{l^2+4bg}]$ und Startwerte $v^0 \in [0, \frac{1-(\Delta t)l)}{(\Delta t)b}]$ sinnvoll.
Welcher Wert ergibt sich durch die in (1) und (2) gegebene Iterationsvorschrift für v_∞?
Hinweis: Man suche Fixpunkte obiger Iteration. Dabei braucht man keine Annahmen über Δt auszunutzen.

Antwortmöglichkeiten:

1. $v_\infty = \frac{l}{2b}$
2. $v_n \to +\infty$ falls $n \to \infty$
3. wenn M die Masse der Schneeflocke ist, dann gilt: $v_\infty = \frac{1}{2}Mg^2$
4. $v_\infty = \frac{g}{l}$
5. $v_\infty = -\frac{l}{2b} - \sqrt{\frac{l^2}{4b^2} + \frac{g}{b}}$
6. das hängt von der Fallhöhe h ab: $v_\infty = \sqrt{2gh}$
7. $v_\infty = \frac{l}{2b}(\sqrt{1 + \frac{4gb}{l^2}} - 1)$
8. $v_\infty = -\frac{l}{2b} + \sqrt{\frac{l^2+4g}{4b^2}}$
9. $v_\infty = 0$
10. $v_\infty = \arctan(-2\pi bg)$

Projektbezug:
Das Aufstellen geeigneter Iterationsschemata und die Bestimmung ihrer Fixpunkte ist ein essentielles Werkzeug der modernen Angewandten Analysis. Im Projekt C14 des DFG Forschungszentrums MATHEON werden unter anderem derartige Methoden zur Lösung Partieller Differentialgleichungen angewendet, die dort aus der Modellierung der Tropfenbildung in halbleitenden Kristallen hervorgehen.

5.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

1. Lösungsmöglichkeit (direkt)
Man sucht nach Fixpunkten v_∞ der angegebenen Iteration:

$$0 = bv_\infty^2 + lv_\infty - g.$$

Die beiden Lösungen dieser von Δt unabhängigen, quadratischen Gleichung lauten

$$v_\infty^{1,2} = -\frac{l}{2b} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4b^2} + \frac{g}{b}}.$$

Die Wurzel ist dabei immer reell. Da die Schneeflocke nach Aufgabenstellung fällt, sind nur strikt positive Lösungen sinnvoll. Also

$$v_\infty = -\frac{l}{2b} + \sqrt{\frac{l^2}{4b^2} + \frac{g}{b}} = \frac{l}{2b}(\sqrt{1 + \frac{4gb}{l^2}} - 1).$$

Dies ist die maximal mögliche Fallgeschwindigkeit v_∞, die im Grenzwert $t \to \infty$ auch angenommen wird. Die richtige Antwort ist somit durch 7) gegeben.

2. Lösungsmöglichkeit (mittels Iteration)
Man kann auch den eindeutigen Fixpunkt durch die Iterationsvorschrift

$$v_{n+1} := f(v_n), \qquad v_0 := v^0 \in [0, \frac{1 - (\Delta t)l}{(\Delta t)b}],$$

wobei

$$f : (0, v_{max}) \to (0, v_{max}), \quad x \to -(\Delta t)bx^2 + (1 - (\Delta t)l)x + (\Delta t)g,$$

suchen, da (für die angegebenen Schranken an Δt und v^0) f eine streng kontraktive Selbstabbildung ist und damit alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind.
Dieser Lösungweg ist aber nur insofern von Nutzen, dass man für einige konkrete Zahlenwerte für b, l, g einige Iterationen durchführt und durch Ausprobieren dann versucht, Lösungvorschläge ausschließen zu können.

Anmerkung: Man könnte die Antwort auch durch Lösen der Differenzialgleichung und Untersuchung dieser Lösung für $t \to \infty$ bestimmen. Da aber zur Lösung der Aufgabe keinerlei Vorkenntnisse über Differentialgleichungen vorausgesetzt wurden, soll hier darauf nicht näher eingegangen werden.

Anmerkung zur Modellierung: Üblicherweise vernachlässigt man bei fallenden Körpern in Luft den Einfluss der Stokes'schen Reibung, d.h. $l \to 0$, und betrachtet nur Newtonsche Reibung. In Luft gilt $b = \frac{\rho c_w A}{2}$, wobei ρ die Dichte der Luft, c_w der durch die Form der Schneeflocke bestimmte Widerstandsbeiwert und A die Querschnittsfläche der Schneeflocke sind. Da eine Schneeflocke aufgrund ihrer fraktalen Struktur eine relativ große Oberfläche im Vergleich zur Masse hat, ist es nicht klar, ob die Stokes'sche Reibung vernachlässigt werden kann.
Für eine Schneeflocke mit Radius 1 cm erhält man als typische Zahlenwerte $l = 1,05\frac{1}{s}$, $b = 65,9\frac{1}{m}$ und es ergibt sich für die maximale Geschwindigkeit $v_\infty \approx 37,8\frac{cm}{s}(\approx 1,36\frac{km}{h})$. Die Geschwindigkeit v nähert sich schon nach wenigen Sekunden gut an v_∞ an.

6 Der Terminplan des Weihnachtsmanns

Autor: Sebastian Stiller
Projekt: B15

6.1 Aufgabe

Wie kann der Weihnachtsmann in einer einzigen Nacht alle Kinder beschenken? Manche behaupten, dies sei dadurch zu erklären, dass in Wahrheit die Eltern die Geschenke unter den Weihnachtsbaum legen. Dergleichen wollen wir natürlich nicht behaupten. Aber wir haben Grund zu der Annahme, dass der Weihnachtsmann nach einem perfekten Terminplan vorgeht. Dieser Plan und seine Ausführung müssen folgenden Vorgaben genügen:

1. Damit er durch den Kamin hereinkommen kann, muss das Feuer rechtzeitig gelöscht werden. Das lässt sich einrichten, allerdings nur, wenn der Weihnachtmann keinesfalls früher in den Kamin steigt als angekündigt - sonst verbrennt er sich die Hose.

2. Der Besuch beim ersten Kind kann nicht früher als E Uhr und der beim letzten nicht später als L Uhr eingeplant werden. Wenn es am Ende doch später wird, ist das nicht schön, aber möglich (dazu kommen wir noch). Wenn ein Besuch hingegen von vornherein schon später als L Uhr eingeplant würde, hagelte es Beschwerden von Seiten der Eltern.

3. Für jeden Besuch eines Kindes nimmt sich der Weihnachtsmann T Minuten Zeit. Der Rentierschlitten ist so ungeheuer schnell, dass man die Zeit zwischen den Besuchen vernachlässigen kann.

Soweit ist das alles noch ganz einfach zu planen, aber ...

4. . . . selten, sehr selten, im Schnitt bei allenfalls einem von 500 Kindern kommt es vor, dass sich die Sache schwieriger gestaltet und der Besuch t Minuten länger dauert. Die Weihnachtsmänner haben schon alles versucht, aber diese Fälle lassen sich einfach nicht genauer vorhersagen.

Die vierte Vorgabe erklärt, weshalb sich der Weihnachtsmann manchmal trotz seiner Planung verspätet: Es ist einfach nicht genug Zeitzwischen E Uhr und L Uhr, um für alle Kinder $T + t$ Minuten einzuplanen. Dennoch ist der Terminplan im Sinne der folgenden Vorgabe *perfekt*:

5. Im Erwartungswert soll die Summe der Wartezeiten aller Kinder minimal sein. Dabei zählt jede Minute, die ein Kind auf den Weihnachtsmann länger als vereinbart warten muss. Insbesondere macht es keinen Unterschied, ob ein Kind bis nach L Uhr warten muss oder ein anderes Kind vor L Uhr genauso lange wartet.

Eure Aufgabe ist es nun, einen solchen Terminplan für einen sehr einfachen Fall zu erstellen. Nehmen wir an, der Weihnachtsmann möchte zehn Kinder besuchen. Die Zeiten t und T seien beide 30 (Minuten), E gleich 3 (Uhr nachmittags) und L gleich 8 (Uhr abends). Die Wahrscheinlichkeit, dass der Besuch beim i-ten Kind 60 statt 30 Minuten dauert, ist unabhängig voneinander für alle i gleich $\frac{1}{500}$. Mit $A_i, 0 < i < 11$, bezeichnen wir die verabredete Ankunft beim i-ten Kind. Denkt daran, dass sich ein Weihnachtsmann niemals früher als verabredet in einen Kamin schwingt.

Hier noch ein Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit für einen 60- minütigen Besuch ist sehr gering. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei oder mehr der 10 Besuche jeweils 60 Minuten dauern, ist sogar supergering! Sie ist so klein, dass man sich für die Bestimmung der optimalen Lösung nicht um die Fälle kümmern muss, in denen mehr als ein Besuch 60 Minuten dauert. Man kann exakt beweisen, dass diese Fälle so unwahrscheinlich sind, dass sie die Lösung nicht beeinflussen können. Ihr dürft dies ohne Beweis annehmen.

Welcher Plan ist perfekt und wird vom Weihnachtsmann ausgeben?

Antwortmöglichkeiten:

Plan	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
1	3:00	3:30	4:00	4:30	5:00	5:30	6:00	6:30	7:00	8:00
2	3:00	3:30	4:00	4:30	5:00	5:30	6:00	7:00	7:30	8:00
3	3:00	3:30	4:00	4:30	5:00	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00
4	3:00	3:30	4:00	4:30	5:30	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00
5	3:00	3:30	4:30	5:00	5:30	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00
6	3:00	4:00	4:30	5:00	5:30	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00
7	Keiner der angegebenen Pläne ist perfekt.									
8	3:00	3:30	4:05	4:40	5:15	5:50	6:25	7:00	7:30	8:00
9	3:00	3:35	4:05	4:40	5:10	5:45	6:15	6:50	7:20	7:55
10	3:00	3:30	4:10	4:40	5:10	5:50	6:20	6:50	7:30	8:00

Projektbezug:
Übrigens, wir wissen aus sicherer Quelle, dass sich auch schon Verkehrsunternehmen für die Planungskunst der Weihnachtsmänner interessieren. Auch bei Bussen und Bahnen zählt jede Verspätungsminute, und natürlich soll kein Zug früher abfahren als angegeben. Ihr könnt Euch sicher vorstellen, dass dies noch deutlich schwieriger ist, wenn man ein ganzes Netz von Fahrten planen muss. Deshalb hat die Planungsabteilung der Weihnachtsmänner die Verkehrsbetriebe an die Matheon-Forscher verwiesen.

6.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3

Um den perfekten Plan zu finden, stellen wir uns die verschiedenen Fälle vor, die eintreten können. Es kann sein, dass jeder Besuch genau eine halbe Stunde dauert, es kann sein, dass jeder Besuch genau eine Stunde dauert, es kann sein, dass der dritte und der achte Besuch je eine Stunde und alle anderen je eine halbe Stunde dauern, und so weiter. Jeder dieser Fälle, wir nennen sie Szenarien, hat eine bestimmte Wahrscheinlichkeit. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es überhaupt keine einstündigen Besuche gibt, bei weitem am höchsten, nämlich $(\frac{499}{500})^{10}$!
Betrachtet bitte ein kleines Beispiel, um ein Gefühl für das Problem zu erlangen. Was passiert, wenn für den vierten Besuch eine Stunde eingeplant wurde, aber alle bis auf den zweiten nur eine halbe Stunden dauern? Dann müssen der dritte und der vierte Besuch jeweils eine halbe Stunden zu spät anfangen. Ab dem fünften ist der Weihnachtsmann wieder im Plan. Nehmen wir nun an, dass nicht der zweite, sondern der fünfte Besuch als einziger eine Stunde dauert. Jetzt ist der Puffer beim vierten Besuch überflüssig, denn der Weihnachtsmann kann—um seiner Hose willen—den Besuch beim fünften Kind nicht früher anfangen als geplant. Mithin fangen alle Besuche ab einschließlich des sechsten mit einer halben Stunde Verspätung an. Für den Erwartungswert heißt dies: 5 Besuche mal 30 Minuten Verspätung mal der Wahrscheinlichkeit für das Szenario, in dem nur der fünfte Besuch eine volle Stunde dauert $(5 \cdot 30 \cdot \frac{1}{500}(\frac{499}{500})^9)$.
Wie ihr schon gemerkt habt, stehen den Planern insgesamt 30 Minuten Puffer zur Verfügung. In obigem Beispiel haben wir den gesamten Puffer an einer Stelle, nämlich vor dem fünften Besuch eingeplant. Wäre es nicht besser, den Puffer auf mehrere Stellen zu verteilen? Man kann zeigen, dass, da die Verzögerungen bei den Besuchen auch mindestens eine halbe Stunde betragen, es nicht sinnvoll ist, den Puffer feiner als halbstündig aufzuteilen. Hätte man zwei Stunden Puffer zur Verfügung, wäre es sicher sinnvoll, an mehreren Stellen Puffer einzuplanen, aber jeweils von mindestens einer halben Stunde Länge. (Hat man insgesamt z.B. 81 Minuten Puffer, so gibt es einen perfekten Plan, bei dem alle bis auf genau einen Puffer Vielfache von 30 Minuten lang sind und der andere Puffer 21 oder 51 oder 81 Minuten beträgt.) Das ist eine starke Behauptung, die man mit etwas weitergehender Mathematik

(der Theorie vollständig unimodularer Matrizen) schnell beweisen kann. Aber auch ihr könnt es mit Hilfe eines Gedankenexperiments sofort einsehen.

6.2.1 Ganzzahligkeit der Lösung

Stellen wir uns einen Plan mit überfein—soll heißen, feiner als in 30er Schritten—aufgeteiltem Puffer vor. Was passiert, wenn wir ein kleines bisschen Puffer verschieben? In einigen Szenarien werden sich die Wartezeiten einiger Kinder verändern. Jetzt verschieben wir doppelt so viel (aber immer noch sehr wenig) Pufferzeit. Natürlich werden sich in denselben Szenarien dieselben Wartezeiten verändern, und zwar genau doppelt so stark wie bei der ersten Verschiebung. Die Auswirkung einer kleinen Verschiebung in einem Szenario ist *linear*. Da sich der Erwartungswert aber seinerseits linear aus den Wartezeiten in den Szenarien zusammensetzt, wirken sich kleine Verschiebungen auch linear auf diesen aus. Was heißt es in diesem Zusammenhang, dass eine Verschiebung klein ist? Ganz einfach, eine Verschiebung ist mindestens so lange klein, bis einer der beteiligten Puffer ein Vielfaches von 30 Minuten (allgemein der Störungslänge) erreicht. Für Szenarien, in denen der erste Besuch eine Stunde dauert, lohnt es sich, den Puffer vor Beginn des zweiten Besuchs zu erhöhen: je mehr Puffer, desto weniger Wartezeit. Plant man aber mehr als eine halbe Stunde Puffer ein (d.h. $A_1 = 3:00, A_2 > 4:00$), so bringt das nichts mehr. Die Funktion, die den Puffer nach dem ersten Besuch auf die Wartezeit im Szenario abbildet, hat einen Knick. Wir nennen das „*stückweise linear*". Wichtig ist, dass wir in einer überfeinen Pufferverteilung immer eine kleine Verschiebung finden, die in die eine Richtung eine Verschlechterung, in die andere eine Verbesserung darstellt oder in beide Richtungen neutral ist. Daher muss es auch eine *perfekte* Pufferverteilung geben, die nicht überfein ist.

6.2.2 Optimallösung für genau eine Verzögerung

Wir wissen also, dass wir die ganzen 30 Minuten Puffer an eine Stelle legen können. Aber an welche? Dies hängt stark davon ab, wie hoch die Wahrscheinlichkeit einstündiger Besuche ist. Allgemein gilt, dass frühe Puffer viel bewirken können, weil alle Besuche hinter dem Puffer davon profitieren, wenn er eine Verzögerung abpuffert. Dafür ist es für späte Puffer wahrscheinlicher, dass sie tatsächlich benötigt werden. Ist es also sicher oder zumindest sehr wahrscheinlich, dass die Besuche lange dauern, so wird es sinnvoll sein, den

Puffer zwischen den ersten und den zweiten Besuch zu legen. In unserem Fall ist es aber hoch unwahrscheinlich, dass sich ein Besuch verzögert ($\frac{1}{500}$). Soll der Puffer also ganz nach hinten? Nein, es ist niemals sinnvoll, den Puffer später als nach der Hälfte der Termine zu platzieren. Und genau da gehört er in unserem Fall auch hin.
Um das zu zeigen, teilen wir die Menge aller Szenarien in drei überschneidungsfreie Teilmengen ein. Die Menge A besteht nur aus dem Szenario, in dem alle Besuche eine halbe Stunde dauern. Die Menge B enthält die Szenarien, in denen es genau einen Besuch gibt, der eine Stunde dauert. Alle anderen Szenarien gehören zur Menge C. Gemäß derAufgabenstellung ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Szenario aus $B \cup C$ eintritt, viel kleiner als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Szenario aus A eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit für B und C ist sehr klein. Wenn wir auf die Menge $B \cup C$ sozusagen stochastisch zoomen, dann fällt auf, dass auch die Wahrscheinlichkeit für B sehr viel größer ist als die für C! Der Fall in A spielt für die Lösung keine Rolle, da bei jeder Pufferverteilung die gleiche, nämlich gar keine Wartezeit auftritt. Es wird ein Leichtes sein zu zeigen, dass, wenn man sich nur nach den Fällen in B richtet, der Puffer in die Mitte gehört. Zum Abschluss werden wir beweisen, dass B so viel wahrscheinlicher ist als C, dass jedes Abrücken von der Optimallösung bzgl. B niemals so viel für die Fälle in C bewirken kann, dass es sich im Ganzen lohnt.
Betrachten wir also zunächst nur B. Wir haben genau eine Verzögerung, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit bei einem der zehn Besuche auftritt. Setzen wir den Puffer hinter den k-ten Besuch (d.h. $A_{k+1} - A_k = 60$), für $1 \leq k \leq 9$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Verzögerung vor dem Puffer liegt, gleich $\frac{k}{n}$, wobei n die Anzahl der Kinder ist, also $n = 10$. Wenn die Verzögerung vor dem Puffer liegt, verhindert er bei $n - k$ Kindern eine Wartezeit. Der Erwartungswert der Wartezeiten eingeschränkt auf die Menge B für einen Puffer hinter dem k-ten Besuch ist also $(X - (\frac{1}{n}k(n-k))30)$ Minuten, wobei X irgendeine von k unabhängig Zahl ist, die uns nicht interessiert. Dieser Erwartungswert ist minimal, wenn $k = 5$ ist, wie ihr mit elementarer Kurvendiskussion schnell nachrechnen könnt.

6.2.3 Abschätzung der übrigen Fälle

Jetzt müssen wir nur noch die Behauptung einlösen, dass wir die Fälle in C vernachlässigen können. Um diese Rechnungen übersichtlicher zu gestalten, wählen wir 30 Minuten als neue Einheit. Wenn wir z.B. einen Wert a als Erwartungswert bestimmen, dann bedeutet dies eine erwarte Gesamtwartezeit von $30 \cdot a$ Minuten. Wir schätzen zunächst ab, wie viel es mindestens kostet, in den Szenarien aus B von der Lösung $k = 5$ abzuweichen. Offensichtlich ist die Abweichung für $k = 4$ oder $k = 6$ am geringsten. Sei $f(x) = -\frac{1}{n}x^2 + x$, dann stellt sich heraus, dass $f(k-1) - f(k) = f(k+1) - f(k) = -\frac{1}{n}$. Wir bezeichnen mit c_i^P den Durchschnitt der Summe der Wartezeiten aller Kinder über alle Szenarien mit genau i Verzögerungen für einen Terminplan P. Dann ergibt sich für den gesamten Erwartungswert der Wartezeit eines Planes P:

$$E[c^P] = \frac{1}{500^{10}} \left(499^{10} \cdot c_0^P + 499^9 \cdot n \cdot c_1^P + \sum_{i=2}^{10} 499^{10-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot c_i^P \right) \tag{3}$$

Der erste Summand in der Klammer ist immer gleich Null. Wir wissen, dass für jede andere Lösung P als unsere $c_1^* - c_1^P \geq \frac{1}{n}$ gilt, wobei mit dem Stern von nun an immer die Kosten indiziert sind, die zu unserer Lösung gehören. Wir müssen nun abschätzen, um wie viel besser eine von unserer abweichende Lösung P für die verbleibenden $c_i, 1 \leq i \leq 10$, sein kann. Man kann das auf verschiedene Weisen angehen. Dies ist nur eine Variante und bestimmt nicht die genaueste. Sicherlich gilt $c_i^* - c_i^P \geq -n$. Wenden wir dies auf unsere Formel 3 an. Für jeden anderen Plan P gilt:

$$E[c^P] - E[c^*] \geq \frac{1}{500^{10}} \left(499^9 \cdot n \cdot \frac{1}{n} - \sum_{i=2}^{10} 499^{10-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot n \right) \tag{4}$$

Es genügt also zu prüfen, ob folgender Ausdruck kleiner oder gleich 1 ist:

$$\sum_{i=2}^{10} 499^{1-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot n = \frac{n^3 - n^2}{499 \cdot 2} + \sum_{i=3}^{10} 499^{1-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot n \tag{5}$$

Mit $n = 10$ ergibt sich für den Bruch $\frac{n^3-n^2}{499 \cdot 2} = \frac{900}{998} < \frac{10}{11}$. Versuchen wir also die Summe ganz rechts gegen $\frac{1}{11}$ abzuschätzen. Der größte der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$ ist immer $\binom{n}{\frac{n}{2}}$. Für $n = 10$ ist dann $\binom{n}{i} \cdot n \leq 2520$. Der erste Faktor jedes Summenglieds ist stets kleiner gleich 499^{-2}. Bei 8 Summengliedern ergibt sich, dass die Summe kleiner sein muss als $\frac{8 \cdot 2520}{499^2} < \frac{1}{11}$. Damit ist bewiesen, dass man unter den gegebenen Bedingungen ($n = 10$, Wahrscheinlichkeit$\frac{1}{500}$) nicht in C herausholen kann, was man in B falsch macht. Der *perfekte* oder, wie wir sagen würden, *optimale* Terminplan ist Lösung Nummer 3.

7 Identifizierung unartiger Kinder

Autoren: Stefan Hougardy, Stefan Kirchner, Mariano Zelke
Projekt: A5

7.1 Aufgabe

Wie jedes Jahr kurz vor Weihnachten ist der Weihnachtsmann wieder mal im Stress, da die Geschenke rechtzeitig verteilt werden müssen. Vor sich hat er einen großen Sack mit Geschenken für die Lange Straße. Die Hausnummern der Langen Straße sind aufsteigend mit 1,2,3,4,... nummeriert. Auf jedem Geschenk im Sack steht die Hausnummer geschrieben, damit der Weihnachtsmann weiß, wo er das Geschenk abzuliefern hat. Die Menge der Hausnummern auf den Geschenken im Sack bezeichnet der Weihnachtsmann als Menge S.
Für zwei Häuser hat er kein Geschenk, die Kinder dort waren im vergangenen Jahr nicht hinreichend artig. Für die restlichen Häuser ist jeweils genau ein Geschenk im Sack.
Verständlicherweise ist Knecht Ruprecht brennend an den beiden Häusern mit den unartigen Kindern interessiert, darf er doch dort seine Ruten verteilen. Er drängt den Weihnachtsmann dazu, die beiden fraglichen Hausnummern herauszufinden. Dieser will gerne helfen, ist aber, wie gesagt, in Eile. Daher hat er nur die Zeit, jede Hausnummer auf den Geschenken genau einmal zu lesen. Erschwerend kommt hinzu, dass er ein miserables Gedächtnis hat, welches ihm nur gestattet, sich maximal vier Zahlen zu merken. Andererseits ist er aber ein hervorragender Kopfrechner, da er seit seiner Kindheit zum einen sehr viel rechnen musste und es zum anderen noch keine Taschenrechner gab.
Es ist ihm klar, dass er die Anzahl der Pakete zählen muss. Mit welcher zusätzlichen Strategie kann der Weihnachtsmann die beiden Hausnummern, in denen die unartigen Kinder wohnen, zuverlässig rekonstruieren?

Antwortmöglichkeiten:

1. Das lässt sich nur beantworten, wenn im Voraus bekannt ist, wie viele Hausnummern die Straße hat.

2. Er multipliziert die Hausnummern, die auf den Paketen stehen.
3. Für jede Hausnummer i, die im Sack vorkommt, berechnet er die i-te Primzahl und summiert diese.
4. Er summiert die Kubikzahlen der Hausnummern, die auf den Paketen stehen.
5. Er berechnet die beiden Zahlen $\sum_{i\in S} i$ und $\sum_{i\in S} T(i)$. Dabei ist $T(i)$ die kleinste Primzahl, die i teilt. ($T(1)$ sei 1.)
6. Er summiert zum einen die Hausnummern und bildet zusätzlich die Summe der Quadrate der Hausnummern, die auf den Paketen stehen.
7. Er berechnet $\sum_{k=1}^{|S|} k \cdot \sigma(k)$, wobei $\sigma(k)$ die Hausnummer auf dem k-ten Paket ist, das er aus dem Sack zieht. ($|S|$ ist die Anzahl der Elemente der Menge S.)
8. Er summiert alle Hausnummern auf und sucht zusätzlich die größte und zweitgrößte Hausnummer heraus.
9. Für jede Hausnummer i berechnet er 2^i, falls i gerade und 3^i, falls i ungerade ist und multipliziert diese Zahlen auf.
10. Der Weihnachtsmann kann Knecht Ruprecht nicht helfen.

Projektbezug:
Die Aufgabe stammt aus dem Bereich der Datenstrom-Algorithmen. Charakteristisch für diese Algorithmen ist, dass die Eingabe zu groß ist, um sie komplett im Arbeitsspeicher des Computers zu halten. Beispiele für solche Eingaben sind große Netzwerke, wie sie in unserem Projekt vorkommen.

7.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6

Zu je zwei verschiedenen fehlenden Hausnummernpaaren (a, b) und (c, d) muss der Weihnachtsmann unterschiedliche Werte ausrechnen. Andernfalls kann er nicht entscheiden, ob das Hausnummernpaar (a, b) oder (c, d) fehlt. Diese Eigenschaft erfüllt nur Antwort 6. Bei Antwort 2 kann z.B. nicht entschieden werden, ob im Sack die Hausnummernpaare (1, 6) oder (2, 3) fehlen $(1 \cdot 6 = 2 \cdot 3)$. Analoges gilt für die Hausnummernpaare (2, 6) und (3, 5) für Antwort 3 $(3 + 13 = 5 + 11)$; (1, 12) und (9,10) für Antwort 4 $(1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3)$. Ähnliche Beispiele lassen sich für die restlichen Antworten finden.
Im Gegensatz dazu lässt sich mit Antwort 6 das fehlende Hausnummernpaar wie folgt rekonstruieren. Zunächst seien s_1 die Summe der Hausnummern im Sack und s_2 die Summe der Quadrate der Hausnummern im Sack, also die beiden Zahlen, die der Weihnachtsmann berechnet. Außerdem zählt er die Anzahl Pakete im Sack und kennt damit auch die Anzahl Häuser in der Langen Straße (nämlich $|S| + 2$). Damit kann er nun $k := \sum_{\nu=1}^{|S|+2} \nu - s_1$ und $l := \sum_{\nu=1}^{|S|+2} \nu^2 - s_2$ berechnen. Um daraus das fehlende Hausnummernpaar (i, j) zu rekonstruieren, muss er also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} i + j &= k && (6) \\ i^2 + j^2 &= l && (7) \end{aligned}$$

lösen. (2) lässt sich schreiben als $i^2 + (k - i)^2 = l$ und diese quadratische Gleichung in i hat die Lösungen

$$i = \frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{2l - k^2}}{2}. \qquad (8)$$

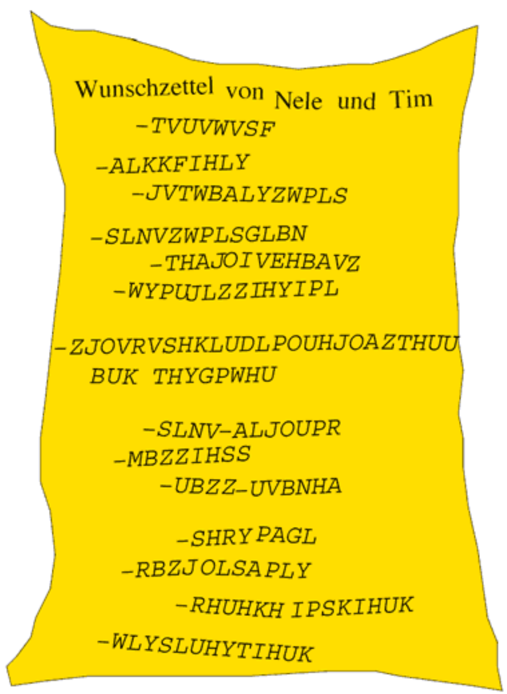
Eingesetzt in (1) ergibt sich dann $j = \frac{k}{2} \mp \frac{\sqrt{2l-k^2}}{2}$. Das Gleichungssystem ist also bis auf Symmetrie in i und j eindeutig lösbar und das fehlende Hausnummernpaar (i, j) ist damit $(\frac{k}{2} + \frac{\sqrt{2l-k^2}}{2}, \frac{k}{2} - \frac{\sqrt{2l-k^2}}{2})$ bzw. aus Symmetriegründen $(\frac{k}{2} - \frac{\sqrt{2l-k^2}}{2}, \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{2l-k^2}}{2})$.

8 Wunschzettel von Nele und Tim

Autorin: Anita Liebenau

8.1 Aufgabe

Des Weihnachtsmanns Helferselfen stöbern in der Vorweihnachtszeit in jedem Kinderzimmer, in jeder Ecke und in jeder Schublade, um alle Wunschzettel zu finden und jeden Wunsch erfüllen zu können. Bei Nele und Tim findet ein kleiner Elf aber nur diesen Wunschzettel mit einem Buchstabendurcheinander:



Er wundert sich, denn eigentlich können Nele und Tim schon lesen und schreiben. Eine Notiz liegt daneben auf dem Schreibtisch:

Aber ob die was zu bedeuten hat? Vielleicht könnt ihr ja dem kleinen Weihnachtself helfen.

Zu welcher Gruppe von Geschenken gehört der an der letzten Stelle auf dem Wunschzettel stehende Wunsch?

Antwortmöglichkeiten:

1. Schokoladen
2. Spielzeuge
3. Schmuck
4. Bastelkästen
5. Schminke
6. PC-Zubehör
7. Kuscheltiere
8. Sportgeräte (Bälle o.Ä.)
9. Weihnachtsgebäck
10. Haustiere

8.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3

Durch die Notiz, die Nele und Tim dem Weihnachtself als kleine Hilfe liegen gelassen hatten, kann man ahnen, dass ihr Wunschzettel mit der Cäsar-Verschlüsselung in einen Buchstabensalat verwandelt wurde. Bei der Cäsar-Verschlüsselung wird das Alphabet um ein paar Stellen verschoben, z.B. um drei Buchstaben:

Klartext	A	B	C	D	E	F	G	...
verschlüsseltes Alphabet	X	Y	Z	A	B	C	D	...

Es handelt sich hier um eine monoalphabetische Verschlüsselung, d.h., jedem Buchstaben wird im gesamten Text der gleiche Buchstabe aus dem verschlüsselten Alphabet zugewiesen. Eine Möglichkeit, den Text zu entschlüsseln, liegt in der so genannten Häufigkeitsanalyse. Dabei werden alle Buchstaben gezählt und deren Häufigkeiten aufgeschrieben. Ausgangsbasis für diese Methode ist die Tatsache, dass in jeder Sprache bestimmte Buchstaben häufiger auftreten als andere. Hier eine Tabelle mit der Häufigkeit der Buchstaben in einem durchschnittlichen deutschsprachigen Text:

Buchstabe	Häufigkeit	Buchtstabe	Häufigkeit	Buchstabe	Häufigkeit
a	6,51%	j	0,27%	s	7,27%
b	1,89%	k	1,21%	t	6,15%
c	3,06%	l	3,44%	u	4,35%
d	5,08%	m	2,53%	v	0,67%
e	17,40%	n	9,87%	w	1,89%
f	1,66%	o	2,51%	x	0,03%
g	3,01%	p	0,29%	y	0,04%
h	4,76%	q	0,02%	z	1,13%
i	7,55%	r	7,00%		

Zählt man alle Buchstaben des Wunschzettels durch, so sieht man, dass sowohl das "H" als auch das "L" 18 mal und damit am häufigsten vorkommen. Setzt man nun den Buchstaben "E" für das "H" im verschlüsselten Alphabet ein und gleicht das Verschlüsselungsalphabet an, so erhält man für das erste Wort auf dem Wunschzettel "QSRSTSPC" und für das zweite "XIHHCFEIV". Das klingt nicht wirklich sinnvoll und kann wohl kaum der entschlüsselte Klartext sein.

Setzt man nun den Buchstaben "E" für "L" im verschlüsselten Alphabet ein und ersetzt die anderen Buchstaben des verschlüsselten Textes sinngemäß, so erhält man als ersten Wunsch auf der Liste "MONOPOLY" und an zweiter Stelle steht "TEDDYBAER". Das sieht vernünftig aus.
Mit dieser Entschlüsselung wandelt sich das letzte Wort auf dem Wunschzettel in "PERLENARMBAND" und Antwort 3) "Schmuck" ist richtig.

9 Bruchpilot Rudi

Autorin: Peggy Daume
Projekt: Z 1.1

9.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat in seinem Rentierstall ein besonders tollpatschiges Rentier – Rudi. Rudi ist ein wahrer Bruchpilot. Besonders bei den Schlittenlandungen auf den Dächern der zu Beschenkenden leiden der Weihnachtsmann und die vielen schönen Geschenke. Dennoch hat der Weihnachtsmann bekanntermaßen ein gutes Herz und wird Rentier Rudi auch in diesem Jahr wieder vor seinen Schlitten spannen. Doch der Weihnachtsmann hat aus den Erfahrungen der letzten Jahre gelernt. Er möchte in jedem Fall enttäuschte Gesichter vermeiden.

Aus diesem Grund denkt er über die Möglichkeit nach, in diesem Jahr erstmalig eine spezielle Geschenke-Bruch-Versicherung für besonders wertvolle Geschenke abzuschließen. Dafür hat er folgenden Einfall: Geht ein Geschenk entzwei, stellt der Weihnachtsmann sofort einen Gutschein aus und verschenkt diesen. Als kleines „Schmerzensgeld“ soll der Gutschein mit einer Summe, die 10% über dem ursprünglichen Wert des Geschenks liegt, versehen werden. Das auf dem Gutschein stehende Geld möchte der Weihnachtsmann im Schadensfall von der Versicherung ausbezahlt bekommen. Mit dieser Idee wendet er sich an das Versicherungsunternehmen „FröhWeih“. Das Risiko, das die Versicherung durch die Geschenke-Bruch-Versicherung eingeht, lässt sich die Versicherung natürlich mit einem Beitrag, der so genannnten Versicherungsprämie, bezahlen. Doch wie berechnet die Versicherung die Versicherungsprämie? Der Weihnachtsmann lässt sich dies erklären:

„Zur Berechnung der Versicherungsprämie müssen wir alle möglichen Leistungen betrachten, die von uns und von Dir erbracht werden. Klar sollte zunächst sein, dass Du für die Geschenke-Bruch-Versicherung für jedes Geschenk einmalig eine Prämie zahlst. Die Prämie wird am 01. Dezember dieses Jahres fällig. Für unsere Leistungen hingegen gibt es zwei mögliche Szenarien:

- *Das Geschenk geht bei keiner der Landungen kaputt. Dann erbringen wir keine Leistung.*
- *Das Geschenk geht bei einer der Landungen kaputt. Dann zahlen wir am 01. Januar des nächsten Jahres die Versicherungssumme.*

Unsere Leistungen sind also vom zufälligen Zerbrechen der Geschenke abhängig. Wir halten es daher für fair, wenn Du als Versicherungsprämie gerade so viel bezahlst, wie wir an Leistung durchschnittlich zahlen. Das bedeutet: Ist X die Versicherungssumme (= Betrag, den Du nach Eintreten des Schadensfalls ausbezahlt bekommst), dann berechnen wir die Versicherungsprämie P mit der folgenden Formel

$$P = p_1 \cdot X + p_2 \cdot X + \ldots + p_n \cdot X.$$

Dabei ist p_1 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Geschenk bei der ersten Landung zerbricht, p_2 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Geschenk bei der zweiten Landung zerbricht, sofern es nicht schon bei der ersten Landung zerbrach usw. Dahinter steckt die Erwartung, dass wir eine Unmenge von Versicherungen dieser Art verkaufen und sich die Schadensfälle mit den Nichtschadensfälle ausgleichen, so dass wir im Durchschnitt weder Verlust noch einen Gewinn machen. Um aber die durchschnittliche Leistung berechnen zu können, brauchen wir Aussagen darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Geschenk zerbricht. Ohne diese können wir leider keine Versicherung abschließen.

Glücklicherweise hat der Weihachtsmann in den letzten Jahren genauestens darüber Buch geführt, wie viele Geschenke bei einer bestimmten Landung kaputt gegangen sind. So sind z. B. bei der ersten Landung insgesamt 0,33% aller Geschenke kaputt gegangen. Von den ganz gebliebenen und bei der ersten Landung nicht verschenkten Geschenken haben bei der zweiten Landung 0,42% einen Defekt erlitten. Da der Weihnachtsmann bekanntermaßen sehr viele Geschenke verteilt, können die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen relativen Häufigkeiten auch als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden. Der Weihnachtsmann kann der Versicherung also die notwendigen Daten zur Bestimmung der Versicherungsprämie liefern.

Landung	1	2	3	4	5
Relative Häufigkeit	0,0033	0,0042	0,0065	0,0119	0,0271

Der Weihnachtsmann denkt einen Moment über den Vorschlag der Versicherung nach. Eigentlich ist er mit dem Angebot zufrieden, allerdings ist er der Meinung, dass die Versicherung ein kleines Detail übersehen hat. Der Weihnachtsmann soll die Versicherungsprämie bereits am 01. Dezember zahlen, wird aber im Schadensfall erst einen Monat später am 01. Januar das Geld für die zerstörten Geschenke erhalten. Er denkt, dass dies unfair ist, da die Versicherung noch einen Monat lang Zinsen erhält (Jahreszinssatz 3% bei monatlicher Verzinsung mit Zinseszins und linearer Verzinsung, d. h. bei Jahreszinssatz von $i\%$ beträgt Monatszinssatz $\frac{i}{12}\%$) und erst dann die Versicherungssumme zahlen muss. Diesen Vorteil auf Seiten der Versicherung möchte der Weihnachtsmann bei der Berechnung der Versicherungsprämie berücksichtigt wissen und schlägt daher vor, dass durch so genanntes Abzinsen auf den Zeitpunkt des Vertragsabschlusses die Leistungen der Versicherung und des Weihnachtsmannes vergleichbar gemacht werden.
Wie groß ist die Differenz (bzw. der Betrag der Differenz) zwischen den zwei vorgeschlagenen Versicherungsprämien, wenn der Weihnachtsmann ein Geschenk im Wert von €5.000,00 versichern möchte, das nach der vierten Landung verschenkt wird?
Antwortmöglichkeiten:

1. €0,71
2. €0,15
3. €0,36
4. €0,32
5. €4,15

6. €0,73
7. €3,97
8. €4,27
9. €0,16
10. €1,96

Projektbezug:
Diese Aufgabe stammt aus dem Bereich der Versicherungsmathematik, die einen Teil der stochastischen Finanzmathematik ausmacht. So wie in dieser Aufgabe die Versicherungsprämie für eine Geschenke-Bruch-Versicherung bestimmt wird, werden in der Realität Prämien für Lebensversicherungen berechnet. Themen der stochastischen Finanzmathematik sind zum Teil sehr gut für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II geeignet. In dem Matheon-Projekt G2 der ersten Förderperiode wurden drei Unterrichtseinheiten mit entsprechenden Materialien zur stochastischen Finanzmathematik entwickelt und erprobt.

9.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 3

Da der Weihnachtsmann ein Geschenk im Wert von €5000,00 versichern möchte, beträgt die Versicherungssumme zuzüglich der 10% „Schmerzensgeld“ €5500,00.
Zunächst wird die von der Versicherung vorgeschlagene Prämie P_V gemäß der Formel

$$P_V = p_1 \cdot X + p_2 \cdot X + \ldots + p_n \cdot X$$

bestimmt. Dabei ist p_1 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Geschenk bei der ersten Landung zerbricht, p_2 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Geschenk bei der zweiten Landung zerbricht, sofern es nicht schon bei der ersten Landung zerbrach usw. Mit den in der Tabelle gegebenen Wahrscheinlichkeiten ergibt sich für P:

$$P_V = (0,0033 + 0,0042 + 0,0065 + 0,0119) \cdot \text{€}5500,00 = \text{€}142,45.$$

Die Versicherungsprämie nach dem Vorschlag des Versicherungsunternehmens beträgt also €142,45.
Nun betrachten wir den Vorschlag des Weihnachtsmanns. Aus einem jährlichen Zinssatz von 3% folgt ein Monatszinssatz von $\frac{3}{12}\% = 0,25\%$. Durch sogenanntes Abzinsen der oben berechneten Prämie erhalten wir unsere neue Versicherungsprämie P_W, die berücksichtigt, dass die Versicherung mit dem Geld noch einen Monat arbeiten kann. Es gilt:

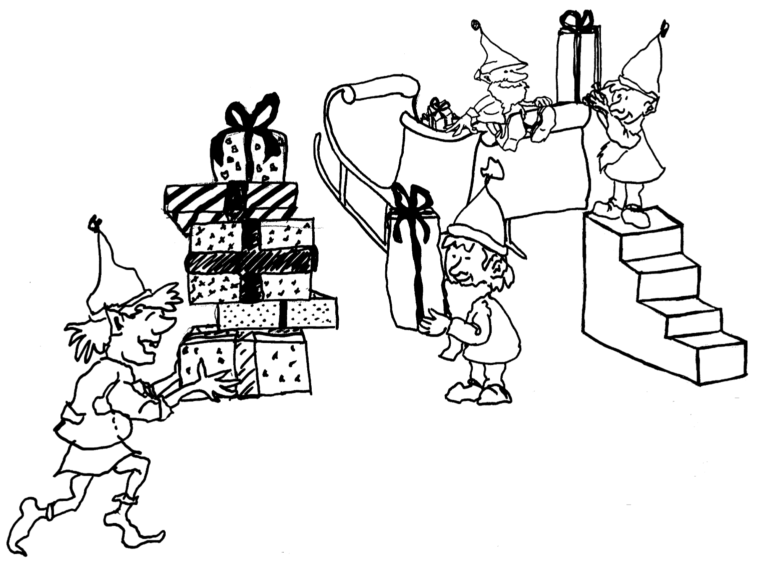
$$P_W = \frac{1}{1,0025} \cdot \text{€}142,45 = \text{€}142,09.$$

Die Versicherungsprämie nach Vorschlag des Weihnachtsmanns beträgt folglich € 142,81.
Damit beträgt die Differenz zwischen beiden Prämien €0,36. Wenn man bedenkt, dass echte Versicherungsverträge über Jahre laufen (und die Versicherungssumme in der Regel auch viel höher sind), dann lässt sich mit dem Vorschlag des Weihnachtsmanns schon etwas Geld sparen. Und tatsächlich sind Versicherungen dazu verpflichtet, ihren Zinsvorteil an die Versicherten weiterzugeben.

10 Schlittenbeladung einmal anders

Autoren: Falk Ebert, Anita Liebenau
Projekt: D13

10.1 Aufgabe



Alle Geschenke sind verpackt, die Rentiere gefüttert, des Weihnachtsmanns Schuhe geputzt. Nun müssen nur noch die Schlitten mit den Geschenken beladen werden. 8 Schlitten gilt es mit Spielzeugautos, Bällen, Puppen, Schokolade, Lakritze und Kuscheltieren zu beladen. Die folgende Tabelle gibt die gewünschte Bepackung der 8 Schlitten an:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
Auto	5	4	2	4	2	5	2	5
Ball	2	4	2	4	8	2	2	2
Puppe	4	5	3	4	4	4	1	4
Schokolade	5	4	2	4	2	5	2	5
Lakritze	5	4	2	3	2	5	2	6
Kuscheltier	3	4	2	4	6	3	2	3

D.h., auf Schlitten 1 sollen fünf Autos, zwei Bälle, vier Puppen, fünfmal

Schokolade, fünfmal Lakritze und drei Kuscheltiere liegen.
Nun gibt es beliebig viele Wichtel, die diese Schlitten bepacken können. Allerdings sind in diesem Jahr viele neue Geschenke zu bauen, für die man gern einige der Wichtel abziehen möchte. Weiterhin wird für die Wichtel ein Arbeitsplan festgelegt.

- Ein Wichtel bewegt sich immer von *einem* Schlitten ins Geschenkelager oder vom Lager zu *einem* Schlitten.
- Das Lager hat mehr als genug Geschenke jeden Typs vorrätig.
- Ein Wichtel kann beliebig oft hin und her laufen und beschwert sich niemals darüber.
- Die Reihenfolge, in der die Wichtel an den Schlitten ankommen, ist prinzipiell egal.
- Jeder Wichtel kennt nur ein bestimmtes Muster, Geschenke zu transportieren: Ein Wichtel geht stets vom Lager zum Schlitten und zurück oder vom Schlitten zum Lager und dann zurück zum Schlitten. Dabei nimmt er eine feste Anzahl jedes Geschenktyps von seinem Startpunkt mit und deponiert sie am Ziel und eine feste Anzahl jedes Geschenktyps von seinem Zielpunkt wieder zum Startpunkt zurück. Alle Anzahlen können auch null sein.
- Ein Wichtel ist auch nur ein Mensch und kann von jedem Typ nicht mehr als zwei Geschenke tragen.

Beispiel
Wichtel Arvin trägt stets zwei (Spielzeug-)Autos und eine Puppe, sonst nichts. Egal wie oft er vom Lager zu einem Schlitten läuft, auf diesem Schlitten sind dann stets doppelt so viele Autos wie Puppen. Wenn man eine gleiche Anzahl dieser beiden Geschenke auf einem Schlitten benötigt, reicht Arvin also nicht aus. Kommt jetzt Wichtel Berit dazu, kann diese den Schlitten eventuell korrigieren. Berit trägt stets ein Auto hin und eine Puppe zurück, egal von wo nach wo. Wenn jetzt auf einem Schlitten drei Autos und drei Puppen liegen sollen, so reicht es, Arvin zweimal vom Lager zum Schlitten laufen zu lassen (vier Autos, zwei Puppen) und Berit einmal vom Schlitten zum Lager. Berit nimmt vom Schlitten ein Auto weg, schafft es ins Lager und holt von dort eine Puppe und legt sie auf den Schlitten. Mit diesen beiden

Wichteln kann man den Schlitten also korrekt beladen, mit nur einem der beiden nicht.
Diese beiden können auch beim Beladen der anderen Schlitten helfen, eventuell braucht man aber noch mehr Wichtel, um alle Schlitten korrekt beladen zu können. Je weniger man braucht, desto besser.

Aufgabe

I Man möchte so wenig wie möglich Wichtel einsetzen. Wie viele Wichtel benötigt man mindestens, um die 8 Schlitten korrekt zu bepacken?

II Lässt man bei der Gesamtbeladung kleine Abweichungen zu (d.h. auf jedem Schlitten darf genau ein Geschenk zu wenig oder zu viel sein), wie viele Wichtel benötigt man dann für die Beladung mindestens?

Antwortmöglichkeiten:

1. korrekt 5, mit Abweichung 3
2. korrekt 7, mit Abweichung 6
3. korrekt 4, mit Abweichung 3
4. korrekt 6, mit Abweichung 7
5. korrekt 4, mit Abweichung 4
6. korrekt 5, mit Abweichung 4
7. korrekt 5, mit Abweichung 2
8. korrekt 6, mit Abweichung 3
9. korrekt 4, mit Abweichung 2
10. korrekt 6, mit Abweichung 4

Projektbezug:
Die Aufgabe hat ihren mathematischen Hintergrund in einer Problemstellung, die sich *Modellreduktion* nennt. Dabei geht es darum große mathematische Probleme so umzuformulieren, dass sie mit möglichst wenig Unbekannten auskommen. Das hat den Vorteil, dass diese Aufgaben für einen Computer schneller lösbar sind und auch noch weniger Speicherplatz verbrauchen. Unter Umständen nimmt man für so einen Gewinn an Geschwindigkeit beim Lösen der Aufgaben auch kleine Fehler in Kauf - allerdings nur, solange man weiß, wie groß die Fehler maximal werden können. Modellreduktion wird in der Projektgruppe D13 zum Beispiel für Gleichungen aus der Schaltkreissimulation untersucht.

10.2 Lösung

Richtige Lösung: Aufgabe 9

Um herauszufinden, wie viele Wichtel man mindestens benötigt, kann es sehr hiflreich sein, sich Wichtel zu "kreieren", die möglichst günstig Geschenke hin und her tragen.
Bei genauerem Hinschauen fällt auf, dass Schlitten 1 und Schlitten 6 gleich bepackt sind. Habe ich also Wichtel, die den Schlitten 1 korrekt bepacken, kann ich die gleiche Kombination von Wichteln für Schlitten 6 benutzen. Außerdem sind auf Schlitten 2, 3, 4 und 7 fast immer gleiche Anzahlen an Geschenken. Es mag sinnvoll erscheinen, mir einen Wichtel Carl zu nehmen, der von jedem Geschenktyp jeweils ein Geschenk trägt. Carl lässt man jeweils viermal zum Schlitten 2 und 4 laufen und jeweils zweimal zum Schlitten 3 und 7. Nun nimmt man sich Wichtel Dorian zu Hilfe, der pro Lauf eine Puppe trägt. Dorian lässt man dann jeweils einmal vom Lager zu Schlitten 2 und 3 laufen und einmal von Schlitten 7 zum Lager. Nun liegt auf Schlitten 4 noch einmal Lakritze zuviel. Wichtel Elmina, die pro Lauf einmal Lakritze trägt, läuft dann einmal von Schlitten 4 zum Lager.
Nun haben wir 3 Wichtel, die 4 Schlitten korrekt beladen können, mit dem folgenden Tragemuster:

	C	D	E
Auto	1	0	0
Ball	1	0	0
Puppe	1	1	0
Schokolade	1	0	0
Lakritze	1	0	1
Kuscheltier	1	0	0

Nun versucht man, diese Wichtel für die Beladung der anderen Schlitten zu benutzen. Man könnte Wichtel Carl viermal zum Schlitten 1 laufen lassen, dann betragen die Abweichungen zur korrekten Beladung bei jedem Geschenktyp höchstens 2 Geschenke. Man beachte, dass man mit den bisherigen Wichteln Schlitten 1 nicht korrekt beladen kann, da nur Carl Autos und Bälle tragen kann, also niemand die Anzahl für Bälle oder Autos korrigieren könnte, egal wie oft die Wichtel laufen. Also muss ein weiterer Wichtel her. Finn trägt bei jedem Lauf ein Auto, nimmt zwei Bälle wieder zurück, trägt keine Puppe, einmal Schokolade und einmal Lakritze hin und ein Kuscheltier wie-

der zurück. Lässt man Finn nun einmal zum Schlitten 1 laufen, so ist dieser richtig beladen. Wie schon zu Anfang erwähnt, wird Schlitten 6 nach dem gleichen Muster beladen.
Außerdem muss Schlitten 8 ganz ähnlich beladen werden wie Schlitten 1 und 6. Lediglich einmal Lakritze mehr muss drauf. Aber es gibt ja schon einen Wichtel, der pro Lauf nur einmal Lakritze trägt, nämlich Elmina. Also müssen Carl viermal, Finn und Elmina jeweils einmal zum Schlitten laufen, damit auch Nummer 8 korrekt beladen ist.
Nun muss nur noch Schlitten 5 richtig beladen werden. Ist es möglich, diesen Schlitten ohne Zunahme eines weiteren Wichtels zu bepacken und damit die Anzahl der Wichtel auf 4 zu beschränken? Durch geschicktes Hinschauen und/oder Ausprobieren findet man folgende Möglichkeit: Carl läuft viermal vom Lager zum Schlitten. Damit sind von jedem Geschenktyp vier Geschenke auf dem Schlitten. Nun läuft Finn zweimal vom Schlitten zum Lager. D.h., pro Lauf trägt er ein Auto vom Schlitten zum Lager, zwei Bälle zurück (also zum Schlitten), keine Puppe, einmal Schokolade und einmal Lakritze zum Lager und ein Kuscheltier zurück zum Schlitten. Damit ist auch Schlitten 5 richtig beladen und man braucht nicht mehr als vier Wichtel.
Nun noch einmal übersichtlich:

Wie viel trägt jeder Wichtel von jedem Geschenktyp:

	C	F	D	E
Auto	1	1	0	0
Ball	1	-2	0	0
Puppe	1	0	1	0
Schokolade	1	1	0	0
Lakritze	1	1	0	1
Kuscheltier	1	-1	0	0

Wie oft läuft jeder Wichtel zu den einzelnen Schlitten:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
Carl	4	4	2	4	4	4	2	4
Finn	1	0	0	0	-2	1	0	1
Dorian	0	1	1	0	0	0	-1	0
Elmina	0	0	0	-1	0	0	0	1

Nun kann man also die acht Schlitten mit diesen vier Wichteln korrekt beladen. Ist das aber die minimale Anzahl an Wichteln, die benötigt werden?

Oder anders: Ist einer der Wichtel überflüssig? Ein Wichtel wäre überflüssig, wenn das, was er auf einen Schlitten packt, durch eine Laufkombination von den anderen drei Wichteln erreicht werden kann. In der Mathemaitk spricht man von der Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit: Kann man keinen der vier Wichtel durch eine Kombination der drei anderen ersetzen, so sind die vier Wichtel "linear unabhängig"und alle vier sind notwendig, um die acht Schlitten korrekt zu beladen.

C: Egal, wie man Wichtel Finn mit Dorian und Elmina kombiniert, man wird bei den Komponenten Auto, Ball, Schokolade und Kuscheltier nie auf die Trageleistung von Carl kommen, da nur Finn Geschenke dieser Arten trägt und er allein nicht die Anzahl auf einen Schlitten packen kann, die Carl tragen würde.

F: Hier besteht genau das gleiche Problem wie bei Carl.

D,E: Offensichtlich gibt es keine Kombination von Carl und Finn, mit der man sowohl bei der Komponente "Auto"als auch bei der Komponente "Ball"auf Null kommt. Damit können auch Dorian und Elmina jeweils nicht ersetzt werden.

Also sind unsere vier Wichtel "linear unabhängig".
Eine andere Möglichkeit, die lineare Unabhängigkeit auszudrücken, ist folgende: Ist es möglich, einen leeren Schlitten durch eine Laufkombination der Wichtel zu bepacken, wobei diese Laufkombination verschieden ist von der, dass keiner der Wichtel läuft? Das hieße nämlich,dass ein Wichtel die Sachen wieder mitnehmen würde, die die anderen auf den Schlitten gepackt haben. Damit wäre dieser Wichtel überflüssig. Durch eine Gleichung lässt sich das prüfen:

$$x_1 * C + x_2 * F + x_3 * D + x_4 * E = 0 \tag{9}$$

wobei x_1 die Anzahl der Läufe von Carl ist, x_2 die Anzahl der Läufe von Finn, usw. Natürlich kann ich $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ setzen, womit die Gleichung erfüllt wäre. Linear unabhängig sind C, F, D und E aber nur (und genau dann), wenn es für x_1, x_2, x_3 und x_4 keine weitere Lösung gibt. Dies ist hier der Fall.

Kleiner Exkurs
Die Tragemuster der einzelnen Wichtel bezeichnet man auch als Vektoren.
D.h., der (Arbeits-)Vektor von Carl wäre $C = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Im Folgenden steht Gleichung (1) in Vektorenschreibweise:

$$x_1 * \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2 * \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + x_3 * \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_4 * \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichung lässt sich nun in ein Gleichungssystem mit vier Variablen und sechs Gleichungen umschreiben. Da die Variablen (x_1, x_2, x_3, x_4) alle in der ersten Potenz stehen, nennt man das Gleichungssystem linear.

$$\begin{array}{rcccccccl}
\text{I} & x_1 & + & x_2 & & & & & = 0\\
\text{II} & x_1 & - & 2x_2 & & & & & = 0\\
\text{III} & x_1 & & & + & x_3 & & & = 0\\
\text{IV} & x_1 & + & x_2 & & & & & = 0\\
\text{V} & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = 0\\
\text{VI} & x_1 & - & x_2 & & & & & = 0
\end{array}$$

Nach Gleichung VI gilt $x_1 = x_2$. Die Summe von x_1 und x_2 soll nach I den Wert Null haben. Das geht nur für $x_1 = x_2 = 0$. Dadurch ergeben sich dann mit Gleichung III und V auch die Werte für x_3 und x_4, nämlich $x_3 = x_4 = 0$. Also gibt es für unser Gleichungssystem nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ und die Vektoren C, F, D und E sind linear unabhängig voneinander.
In der Mathematik, speziell in der Vektorraumtheorie, gibt der *Rang* einer Matrix die Minimalanzahl der Vektoren eines Erzeugendensystems an. D.h., kennt man den Rang einer Matrix, so weiß man, wie viele linear unabhängige Vektoren man mindestens benötigt, um die Matrix zu erzeugen, ohne diese Vektoren explizit angeben zu müssen. In dem konkreten Fall der Matrix, die

aus den Spaltenvektoren der Schlittenbeladungen S_1 bis S_8 nebeneinander gebildet wird, beträgt dieser Rang genau 4, dementsprechend sind wenigstens 4 Wichtel nötig, um alle Schlitten korrekt zu bepacken.

Lösung für II:
Nun ist die Frage, wie viele Wichtel ich weglassen kann, ohne eine Abweichung auf einem der Schlitten zu bekommen, die größer ist als 1. Schauen wir uns noch einmal die Matrizen zu Trage- und Laufmuster der Wichtel an:

	C	F	D	E
Auto	1	1	0	0
Ball	1	-2	0	0
Puppe	1	0	1	0
Schokolade	1	1	0	0
Lakritze	1	1	0	1
Kuscheltier	1	-1	0	0

(11)

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
Carl	4	4	2	4	4	4	2	4
Finn	1	0	0	0	-2	1	0	1
Dorian	0	1	1	0	0	0	-1	0
Elmina	0	0	0	-1	0	0	0	1

(12)

In Tabelle (3) sieht man, dass Dorian nur ein Geschenk trägt. In Tabelle (4) steht für Dorian in der Spalte für Schlitten 2 nur eine "1"als Eintrag. D.h., ließe man Dorian weg, so fehlte auf Schlitten 2 lediglich eine Puppe. Außerdem läuft Dorian auch nur einmal zum Schlitten 3 und einmal vom Schlitten 7 zum Lager. Also betrüge auch auf den anderen Schlitten die Abweichung von der korrekten Beladung höchstens 1. Elmina trägt ebenfalls nur ein Geschenk. Auch sie läuft vom Schlitten 4 zum Lager und zum Schlitten 8 jeweils nur einmal. Nähme man sie weg, so betrüge auf diesen Schlitten die Abweichung höchstens eins.
Da Elmina und Dorian

1. *nicht* zu den gleichen Schlitten laufen,

2. *jedesmal* nur ein Geschenk tragen und

3. zu bzw. von jedem Schlitten höchstens *einmal* laufen,

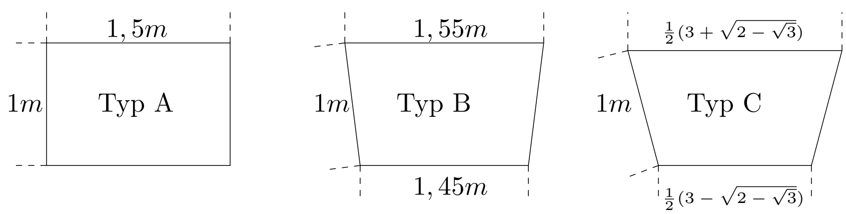
kann man beide Wichtel weglassen und erhält 8 beladene Schlitten, deren Beladung um höchstens ein Geschenk von der korrekten Beladung abweicht. Nun kann man weder Finn noch Carl weglassen, ohne eine höhere als die geforderte Abweichung zu erhalten. Auch eine andere Wahl von Wichtelbeladungen kann nicht dazu führen, dass nur ein Wichtel benötigt wird. Das würde bedeuten, dass alle Schlitten näherungsweise ein Vielfaches dieser Wichtelbeladung aufweisen müssten. Dies trifft aber bereits bei S_1 und S_2 nicht zu.
Damit ist Antwort 9. richtig.

11 Ausstellung der Weihnachtsbären

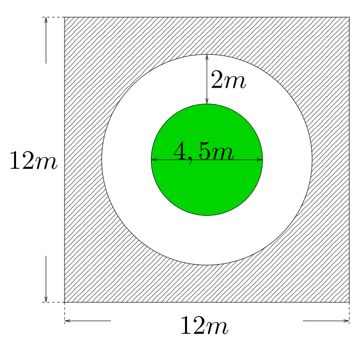
Autor: Thilo Rörig

11.1 Aufgabe

Für eine Ausstellung sollen in der Adventszeit 24 Weihnachts-Buddybären in einem Raum aufgestellt werden. Die Bären sind auf drei verschiedene Bodenplatten der folgenden Formate montiert:



Der Raum ist $12m \times 12m$ groß. In der Mitte des Raumes befindet sich ein riesiger Weihnachtsbaum mit $4,5m$ Durchmesser. Damit man sich sowohl den Weihnachtsbaum, als auch die Bären gemütlich anschauen kann, soll der Abstand zwischen dem Weihnachtsbaum und den Bodenplatten der Bären mindestens $2m$ betragen (siehe Skizze). Außerdem sollen die Platten Kante an Kante verlegt werden, d.h., die jeweils $1m$ langen Kanten der Bodenplatten werden so aneinander gelegt, dass die Bären einen geschlossenen „Kreis“ bilden. Auch die Bären sollen die Adventsstimmung genießen und in Richtung Weihnachtsbaum schauen, d.h., die schmalen Seiten der trapezförmigen Bodenplatten zeigen in Richtung Weihnachtsbaum.



Wie viele Bodenplatten von den jeweiligen Sorten benötigt man für die Aufstellung der Bären?
Antwortmöglichkeiten:

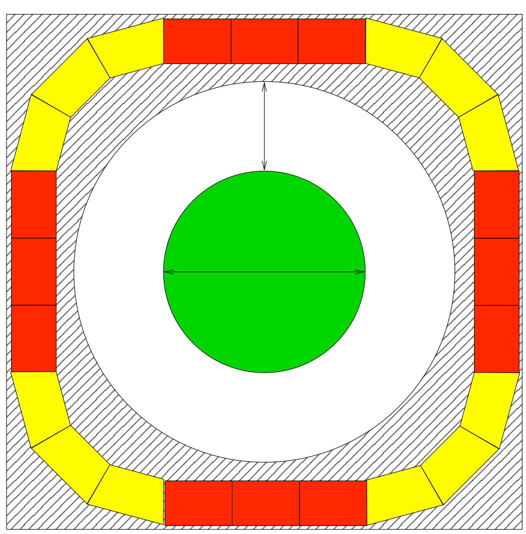
1. 8 Platten von Typ A, 8 Platten von Typ B, 8 Platten von Typ C
2. 0 Platten von Typ A, 12 Platten von Typ B, 12 Platten von Typ C
3. 0 Platten von Typ A, 24 Platten von Typ B, 0 Platten von Typ C
4. 20 Platten von Typ A, 0 Platten von Typ B, 4 Platten von Typ C
5. 12 Platten von Typ A, 6 Platten von Typ B, 6 Platten von Typ C
6. 4 Platten von Typ A, 10 Platten von Typ B, 10 Platten von Typ C
7. 12 Platten von Typ A, 0 Platten von Typ B, 12 Platten von Typ C
8. 8 Platten von Typ A, 4 Platten von Typ B, 12 Platten von Typ C
9. 6 Platten von Typ A, 6 Platten von Typ B, 12 Platten von Typ C
10. 16 Platten von Typ A, 0 Platten von Typ B, 8 Platten von Typ C

Projektbezug:
Bei der Aufgabe handelt es sich um eine Vereinfachung eines realen Problems, das es bei der Aufstellung der United Buddy Bears auf dem Wiener Karlsplatz gab.

11.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

- Wir benutzen a Teile von Typ A, b Teile von Typ b und c Teile von Typ C.
- Da wir insgesamt 24 Bären aufstellen, muss gelten $a + b + c = 24$.
- Wir benötigen die Winkel der einzelnen Teile. Diese berechnen wir mit arcsin und erhalten:
  1. $\alpha = 0$ Grad
  2. $\beta = 5,731967965...$ Grad
  3. $\gamma = 30$ Grad
- Damit die Bodenplatten am Ende wieder Kante an Kante liegen, muss die Summe der Winkel der Bodenplatten 360 Grad ergeben, also: $a\alpha + b\beta + c\gamma = 360$. Da $\alpha = 0$ ist, erhalten wir: $b\beta + c\gamma = 360$. Da $b\beta$ außer für $b = 0$ niemals eine ganze Zahl ist, $c\gamma$ aber immer ganzzahlig ist, folgt, dass $b = 0$ und $c = 12$ ist. Daher muss auch $a = 12$ sein.
- Damit ist Nummer 7 die richtige Lösung und die Austellung kann wie folgt aufgebaut werden.



12 Statistische Tests

Autor: Karsten Tabelow
Projekt: A3 „Image and Signal Processing in medicine and biosciences"

12.1 Aufgabe

Auch Wichtel, die fleißigen Helfer des Weihnachtsmannes, sind vernascht und so kam es, dass kurz vor dem Heiligen Abend 100 Schokoladenweihnachtsmänner fehlten, die doch eigentlich zum Verteilen an die Kinder gedacht waren. Traurig, aber wahr: Es musste herausgefunden werden, wer dem Duft der Schokolade nicht hatte widerstehen können. 100000 Wichtel waren verdächtigt, doch alle beteuerten ihre Unschuld! Es gab sogar einige Wichtel, die in den hinteren Reihen kicherten, passierte dies doch nicht zum ersten Mal! Doch Erfahrung macht ja bekanntlich klug, und so gab es in diesem Jahr einen komplizierten Test, mit dem herausgefunden werden konnte, ob ein Wichtel die Schokolade genommen hatte. Der Test besteht aus einer langen und komplizierten Prozedur aus Abkitzeln, Wiegen, und Ohrenlangziehen. Wie bei jedem Test, bei dem der Zufall eine Rolle spielt, gibt es eine positive Wahrscheinlichkeit a dafür, dass ein unschuldiger Wichtel für schuldig befunden wird. Dies sind sogenannte falsch positive Testergebnisse. Glücklicherweise kann durch intensiveres und vor allem längeres Kitzeln die Empfindlichkeit des Tests so eingestellt werden, dass ein beliebig kleiner Wert von a erreicht wird.
Wie groß muss a gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass bei den einhunderttausend gekitzelten Wichteln mindestens ein Test ein falsch positives Ergebnis liefert, nur 1% ist?
Hinweis: Es sollte gerundet werden!

Antwortmöglichkeiten:

1. 0.01%
2. 99.5%
3. 0.0000007%

4. 1%
5. 0.56%
6. 0.00001%
7. 50%
8. 3.2%
9. 0.2%
10. 23.5%

Projektbezug:
Vor solchen multiplen Testproblemen steht man in der funktionellen Magnetresonanztomographie, mit der untersucht wird, welche Bereiche des Gehirns für eine bestimmte kognitive Leistung verwendet werden. Dabei muss entschieden werden, ob ein bestimmes kleines Volumenelement des Gehirns (ein Voxel) während des Experiments aktiv wahr. Diese Entscheidung muss so empfindlich sein, dass im ganzen Gehirn nur ein festzulegender Anteil an falsch positiven Entscheidungen auftritt, weil sonst die Zahl der falsch positiven Voxel die Zahl der aktivierten bei weitem übersteigen kann.
Das Projekt A3 im Matheon beschäftigt sich mit Glättungsmethoden, mit denen diese Entscheidung noch wesentlich verbessert werden kann.

12.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6

Wie so oft, führt die Untersuchung des komplementären Ereignisses schnell zum Ziel. Wenn für jeden einzelnen Test die Wahrscheinlichkeit, ein falsch positives Ergebniss zu liefern, α ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test kein falsch positives Ergebnis hat,

$$1 - \alpha.$$

Wenn alle $n = 100000$ Wichtel und ihre Tests unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner der Tests ein falsch positives Ergebnis liefert,

$$(1 - \alpha)^n.$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Test (von n) falsch positiv ist

$$1 - (1 - \alpha)^n.$$

Diese Wahrscheinlichkeit soll laut Aufgabe nur 1% betragen, damit ist aber α auf jeden Fall klein und wir erhalten durch Taylorentwicklung

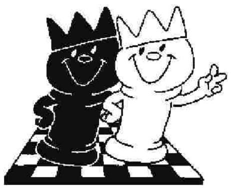
$$1 - (1 - \alpha)^n \approx 1 - (1 - n\alpha) = n\alpha.$$

Demnach muss

$$\alpha = 1\%/n = 0.00001\%$$

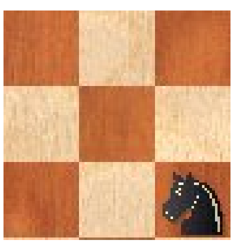
sein!

13 Nette Leute spielen Schach!



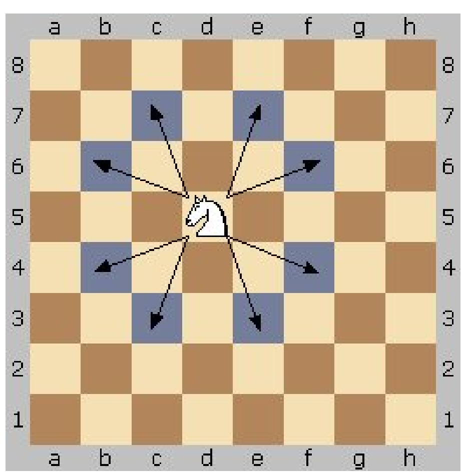
Autorin: Elena Virnik
Projekt: A9

13.1 Aufgabe



Wir haben ein vereinfachtes Schachbrett, siehe Abbildung links. Der Springer beginnt seine Tour in der rechten unteren Ecke. In jedem Zug springt er entweder auf eines der möglichen Felder oder er verbleibt da, wo er gerade ist. Welche der Antwortmöglichkeiten ist die beste Näherung (da gerundet) an die Wahrscheinlichkeit, dass der Springer sich nach 2006 Zügen wieder im Startfeld unten rechts befindet?

Kleine Erinnerung an die Schachregeln: der Springerzug geht so...



Antwortmöglichkeiten:

1. 11,11%
2. 16,67 %
3. 22,22%
4. 12,5%
5. 33,33%
6. 37,5%
7. 44,44%
8. 25%
9. 55,56%
10. 52,5%

Projektbezug:
Während man diese Aufgabe auf einem 3x3 Schachbrett durch Nachdenken lösen kann, wird man beim 4x4 Fall, oder gar erst auf einem richtigen Schachbrett schnell merken, dass man ohne die Hilfe eines Computers nicht auskommt.
Die Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich als ein sogenannter endlicher homogener Markov-Prozess modellieren. Dies ist ein spezieller stochastischer Prozess mit der folgenden charakteristischen Eigenschaft: Es gibt n verschiedene Zustände. Der Übergang von einem Zustand in einen anderen hängt ausschließlich von der Übergangswahrscheinlichkeit ab und nicht von dem Zeitpunkt, zu dem der Übergang passiert. Schreibt man die Übergangswahrscheinlichkeiten in eine Matrix, so kann man den Vektor mit dem Ausgangszustand 2006 mal mit der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten multiplizieren und erhält so die Lösung. Allerdings geht es auch einfacher!

13.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4

Lösungswege

1. Durch scharfes Hinsehen und Feststellen, dass alle Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erreichbar sind und das mittlere Feld nicht erreicht werden kann. Dies sieht man z.B. wie folgt: Man stellt fest, dass für **jedes** Feld (außer dem Mittelfeld) folgendes gilt (beispielhaft nehmen wir die rechte untere Ecke):

   - es gibt genau drei Felder, von wo aus man direkt hinkommt (die zwei direkt erreichbaren und das Feld selbst)
   - es gibt genau ein Feld, das gegenüberliegende (in unserem Beispiel die linke obere Ecke), von wo aus man am längsten braucht, nämlich 4 Züge;
   - von den beiden Nachbarfeldern (in unserem Beispiel das Mittelfeld der unteren Zeile und das Mittelfeld der rechten Spalte) aus braucht man 3 Züge;
   - von den übrigen beiden Feldern braucht man jeweils 2 Züge.

   Hieraus kann man schließen, dass, wenn man "lange genug" läuft (und dies ist approximativ der Fall nach 2006 Zügen), man zu jedem Feld im Schnitt gleich lange braucht, d.h. alle Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erreicht werden können. Dies ist z.B. bei einem 4x4 Brett bereits nicht mehr der Fall. Man stellt leicht fest, dass es Felder gibt, von denen aus man in eine Ecke 5 Züge braucht, wogegen die Mittelfelder von jedem Feld aus in maximal 4 Zügen erreichbar sind.

2. Durch Aufstellen der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten und Festellen, dass diese doppelstochastisch ist, so dass alle Einträge des stationären Verteilungsvektors 1/8 sind.

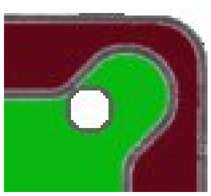
3. Durch 2006maliges Multiplizieren der Ausgangsverteilung mit der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Rechners.

14 Knecht Ruprechts Billardproblem

Autor: Martin Weiser
Projekt: A1

14.1 Aufgabe

Seit Knecht Ruprecht letztes Jahr zu Weihnachten einen perfekten Billardtisch geschenkt bekommen hat, auf dem die exakt runden Kugeln reibungsfrei und geradlinig rollen, vertreibt er sich das Warten auf die diesjährige Adventszeit damit, besonders schwierige Stöße zu üben. Auf der Diagonale des Tisches verteilt er gleichmäßig 3 Kugeln, so dass deren Mittelpunkte Abstände von 50cm haben. Mit einem gut gezielten Stoß des Queues auf die erste Kugel möchte er alle der Reihe nach anstoßen, so dass die dritte Kugel schließlich in die 1m entfernte Ecktasche rollt. Nun ist zwar der Billardtisch perfekt, Knecht Ruprecht aber nicht — er hält das Queue niemals perfekt entlang der Diagonale. Welche Winkelabweichung (in Grad) darf er sich höchstens erlauben, damit die letzte Kugel tatsächlich in die Tasche rollt?
Übrigens: Billardkugeln haben einen Durchmesser von 57,2mm, während die Ecktaschen eine Breite von 11cm aufweisen. Um tatsächlich in die Ecktasche zu gelangen, muss die Kugel in ihrer ganzen Breite hineinpassen (so wie im Bild) — Reflexionen an den Taschen-Eckpunkten führen nicht zum Erfolg.



Antwortmöglichkeiten:

1. 0.0003
2. 0.001
3. 0.003

4. 0.01
5. 0.03
6. 0.1
7. 0.3
8. 1
9. 3
10. 10

Projektbezug:
Die Fehlerfortpflanzung zu berücksichtigen ist bei allen numerischen Simulationen wichtig. So hat die Dynamik von Molekülbewegungen, wie sie am Matheon bearbeitet wird, durchaus Ähnlichkeit mit diesem Billardproblem.

14.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4

Wenn eine Kugel nicht genau entlang der Diagonale gestoßen wird, sondern in einem abweichenden Winkel α, so trifft sie die nächste Kugel nicht zentral, wodurch diese in einem Winkel β angestoßen wird. In der Skizze 5 sind die Größen $L = 50cm$ und $r = 2,86cm$ bekannt, α wird als gegeben vorausgesetzt. Dann gilt

$$\begin{aligned} d &= t \sin\alpha \\ &= (L - s)\sin\alpha \\ &= \left(L - \sqrt{4r^2 - d^2}\right)\sin\alpha. \end{aligned}$$

Formen wir diese Gleichung etwas um:

$$L - \frac{d}{\sin\alpha} = \sqrt{4r^2 - d^2}$$

Quadrieren beider Seiten führt auf eine quadratische Gleichung für d, mit der Lösung

$$d = \frac{L - \sqrt{L^2 - (1 + (\sin\alpha)^2)(L^2 - 4r^2)}}{\sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}}. \tag{13}$$

Schließlich bestimmen wir

$$\sin\beta = \frac{d}{s} = \frac{d}{\sqrt{4r^2 - d^2}},$$

also mittels (1) $\sin\beta$ in Abhängigkeit von $\sin\alpha$. So können wir aus dem Anfangswinkel α_1 nacheinander die Winkelabweichungen α_2 und α_3 berechnen. Schließlich ist die Bahnabweichung der letzten Kugel beim Erreichen der Tasche $1m \sin\alpha_3$. Damit die Kugel tatsächlich in die Tasche fällt, darf die Bahnabweichung nicht mehr als 2,64cm betragen (die Hälfte der Differenz von Taschenbreite und Kugeldurchmesser). Anhand der Abbildung 6 ist ersichtlich, daß die Winkelabweichung der ersten Kugel nur rund 0.025 Grad betragen darf.

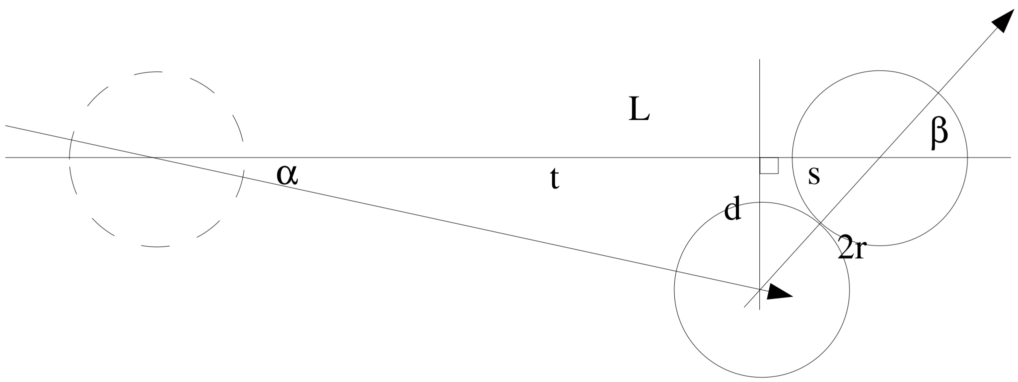


Abbildung 5: Stoß zweier Kugeln (Aufsicht).

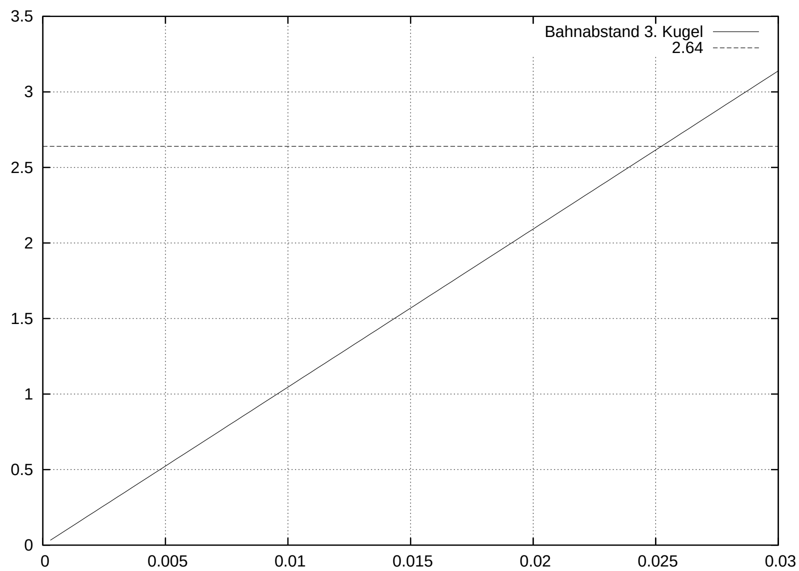


Abbildung 6: Bahnabweichung der dritten Kugel in cm abgetragen über der Winkelabweichung der ersten Kugel in Grad.

15 Das morgendliche Brückenritual

Autor: Oliver Sander
Projekt: A2

15.1 Aufgabe

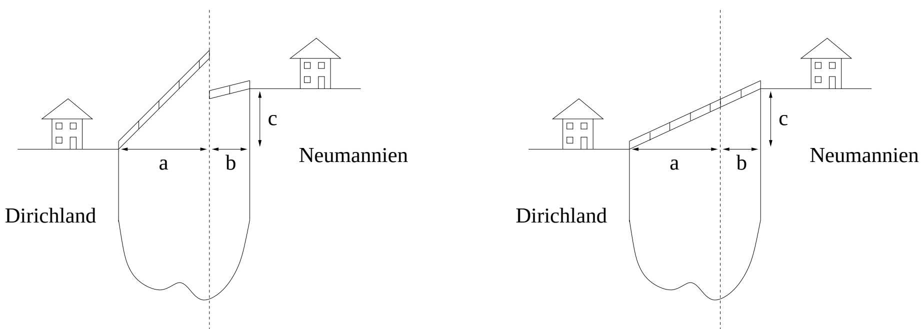


Abbildung 7: Links: Mögliche Ausgangssituation; rechts: Gesuchte Lösung

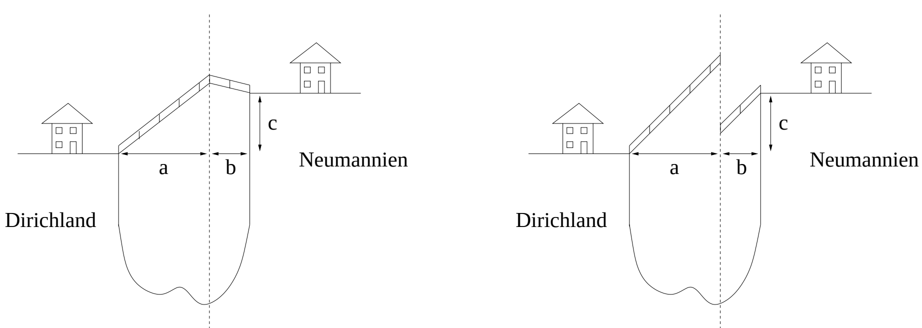


Abbildung 8: Links: Mögliche Brückenpositionen nach Schritt 2; rechts: Brücken nach Schritt 3

Die Staatsgrenze zwischen Dirichland und Neumannien liegt in einer tiefen Schlucht. Genaugenommen liegt sie a Meter von der dirichländischen Schluchtseite und b Meter von der neumannischen Schluchtseite weit weg. Die Schlucht ist also $a+b$ Meter breit. Obendrein ist die neumannische Seite c Meter höher als die dirichländische.

Die einzige Möglichkeit die Grenze zu überschreiten, bilden 2 Zugbrücken, eine dirichländische und eine neumannische. Diese sind nicht nur schwenkbar, sondern können auch in der Länge verstellt werden. Im Prinzip können sie beliebig lang werden. Aus politischen Gründen darf allerdings kein Land seine Brücke soweit verlängern, dass sie über die Staatsgrenze hinausragt. Deswegen ist Kooperation notwendig. Damit der Grenzübergang passierbar ist, müssen beide Zugbrücken so eingestellt werden, dass sie sich an der exakten Staatsgrenze treffen und eine gerade Linie bilden. Da die Brücken nachts hochgezogen werden, muss die richtige Position jeden Morgen neu eingestellt werden. Dazu bedient man sich eines jahrtausendealten, ehrwürdigen Rituals.

1. Die beiden Brücken werden in eine beliebige, nichtsenkrechte Position gezogen und so verlängert, dass sie bis zur Staatsgrenze reichen (wir gehen davon aus, dass weder die eine noch die andere Brücke zufällig sofort die korrekte Position einnimmt).
2. Die dirichländische Brücke wird so eingestellt, dass sie die neumannische an der Grenzlinie trifft.
3. Die neumannische Brücke wird so eingestellt, dass sie die gleiche Steigung hat wie die dirichländische und wird dann wieder bis zur Grenze verlängert.
4. Falls die zwei Brücken jetzt eine gerade Linie bilden, wird das Ritual abgebrochen.
5. Ansonsten zurück zu 2.

Funktioniert dieses Ritual überhaupt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Ja, das Verfahren wird nach höchstens 96 Schritten mit der richtigen Lösung beendet.
2. Ja, das Verfahren wird nach mindestens 96 Schritten mit der richtigen Lösung beendet.
3. Das Verfahren wird nie beendet, aber die Position der Brücken wird immer besser.

4. Das Verfahren wird nie beendet und die Position der Brücken wird nicht besser.

5. Das Verfahren bricht nie ab, aber falls $a > b$, so wird die Position der Brücken immer besser.

6. Das Verfahren bricht nie ab, aber falls $c > a + b$, so wird die Position der Brücken immer besser.

7. Das Verfahren wird mit der korrekten Lösung beendet, falls der Höhenunterschied zwischen den Brückenenden am Anfang nicht mehr als c beträgt.

8. Das Ritual bricht nie ab, aber die Position der Brücken wird immer besser, falls der Höhenunterschied zwischen den Brückenenden am Anfang mehr als $c + a + b$ beträgt.

9. Das Verfahren bricht nie ab, aber falls $a < b$, so wird die Position der Brücken immer besser.

10. Das Verfahren wird nie beendet, aber die Lösung wird immer besser, wenn beide Brücken am Anfang eine Ausgangslage haben, die nicht waagerecht ist.

Projektbezug:
Diese Aufgabe ist ein einfaches Beispiel eines sogenannten Gebietszerlegungsverfahrens. Wie der Grenzübergang im obigen Beispiel, der aus politischen Gründen aus zwei Brücken statt einer einzigen bestehen muss, so zerfallen auch bei manchen physikalischen Problemen die betrachteten Rechengebiete auf natürliche Weise in Teilgebiete. Es ist dann möglicherweise einfacher, die Teilprobleme mehrfach unter Berücksichtigung der neuesten Ergebnisse auf den Nachbargebieten zu berechnen, als das komplette Problem als Ganzes zu betrachten.
Im MATHEON-Teilprojekt A2 wird das mechanische Verhalten von menschlichen Kniegelenken untersucht. Dabei könnte man das gesamte Knie als ein Objekt betrachten. Tatsächlich bestehen Knie aber aus unterschiedlichen Teilen, wie z.B. den Knochen, Menisken, Muskeln, Adern, etc. Diese verhalten sich mechanisch sehr unterschiedlich. Es ist vergleichsweise einfach,

für jedes einzelne Teilgebiet das mechanische Verhalten zu simulieren, wenn die Lösung für die umliegenden Gebiete bekannt ist. Darum ist ein Gebietszerlegungsansatz eine gute Möglichkeit, das Gesamtsystem zu simulieren. Es werden, ausgehend von einer beliebigen Startlösung, immer wieder abwechselnd die einzelnen einfachen Teilprobleme gelöst. Da sich mit jeder einzelnen Lösung die Randwerte für die angrenzenden Gebiete verbessern, erwartet man, dass auch das Gesamtsystem auf eine Lösung zustrebt.

15.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5

Als erstes sollte man sich klar machen, dass das Verfahren nie abbricht. Das sieht man so: Angenommen, der Zyklus ist ein paarmal durchlaufen worden, und nach Schritt 3 ist auf einmal die korrekte Lösung erreicht. Das bedeutet, dass vor dem letzten Schritt 3 die Brücke auf der dirichländischen Seite schon die korrekte Steigung gehabt haben muss. Überhaupt muss sie die korrekte Position gehabt haben. Da sich deren Position aber an der Position der neumannischen Seite der Brücke orientiert, folgt, dass diese wiederum vorher auch schon die richtige Stellung hatte. Damit sind wir jetzt einmal im Kreis gelaufen und kommen zu dem Schluss, dass, falls das Brückenpaar auf einmal die korrekte Stellung einnimmt, es die gleiche Stellung schon einen Zyklus vorher eingenommen haben muss. Da diese Schlussfolgerung natürlich auch für den vorherigen Zyklus gilt, folgt, dass beide Brücken schon immer die richtige Position hatten. Das aber widerspricht unserer Annahme, dass die Brücken am Morgen *nicht* in der richtigen Position waren.

Dass numerische Verfahren unendlich lange laufen, ist nichts Ungewöhnliches. Es gibt in der numerischen Mathematik nur sehr wenige Algorithmen, die ein Problem in einer endlichen Anzahl von Schritten lösen. Man nennt solche Algorithmen *direkt*. Unglücklicherweise sind sie meistens sehr langsam. Deshalb werden in der Praxis die *iterativen* Verfahren fast immer bevorzugt. Man verzichtet dabei auf den Anspruch, die exakte Lösung des Problems zu erhalten. Das ist häufig nicht schlimm, da man sowieso keine exakte Lösung des Anwendungsproblems erwarten kann. Dies hat so unterschiedliche Gründe wie z.B. vereinfachende Annahmen in der mathematischen Formulierung des Problems oder auch banale Rundungsfehler, die sich auch auf modernen Rechnern nur mit extremem Aufwand vermeiden lassen. Stattdessen begnügt man sich damit, in einer gewissen Anzahl von Iterationen nah an die exakte Lösung heranzukommen.

So funktioniert auch das in der Aufgabe beschriebene 'Ritual' (Mathematiker nennen es das *Dirichlet-Neumann-Verfahren*). Um zu zeigen, dass die Lösung 'immer besser' wird, falls $a > b$ ist, müssen wir uns als erstes ein Maß für den Fehler einer Brückenposition ausdenken. Ein mögliches Maß ist das folgende: Nach jedem Schritt 2 liegen die beiden Brückenenden aneinander. Wir bezeichnen jetzt als r den vertikalen, positiven Abstand von dem Punkt,

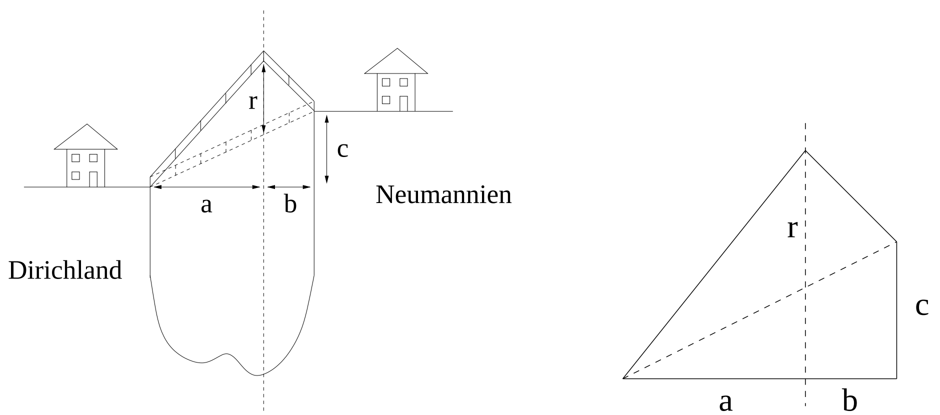


Abbildung 9: Zur Definition des Fehlers r. Rechts die schematische Darstellung

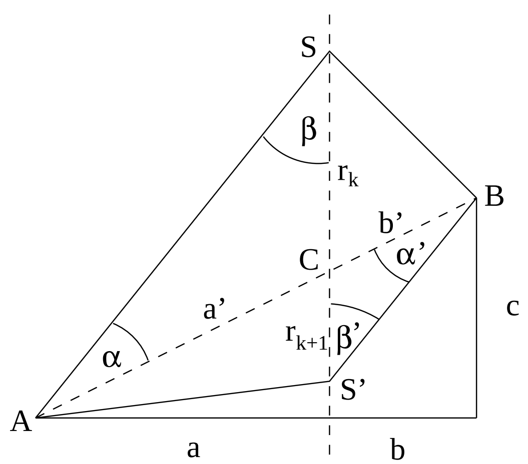


Abbildung 10: Hilfszeichung zum Beweis, dass $r_{k+1} = \frac{b}{a} \cdot r_k$

wo sie zusammenstoßen, zu dem Punkt, an dem sie in der exakten Lösung zusammenstoßen würden. Offensichtlich ist r ein gutes Fehlermaß, denn r ist immer positiv und genau dann Null, wenn die Lösung erreicht ist. Überhaupt kann man eine Brückenposition als umso 'besser' bezeichnen, je kleiner r ist. Man nehme jetzt an, dass die in der Aufgabe beschriebene Schleife k mal durchlaufen worden ist. Den Fehler nach dem k-ten Durchlauf nennen wir r_k. Entsprechend heißt der Fehler nach dem $(k+1)$-ten Durchlauf r_{k+1}. Wir werden jetzt zeigen, dass immer

$$r_{k+1} = \frac{b}{a} \cdot r_k$$

gilt. Dann ist klar, dass r genau dann immer kleiner wird, wenn $a > b$, bzw. $b/a < 1$ ist. Man betrachte also die Abbildung 10. Dort ist AS die dirichländische Brücke nach Schritt k, und BS ist die neumannische Brücke nach Schritt k. AS' ist die dirichländische Brücke nach Schritt $k+1$ und BS' die neumannische Brücke nach Schritt $k+1$. Da die neumannische Brücke immer so eingestellt wird, dass sie die gleiche Steigung wie die dirichländische hat, folgt, dass die Strecken AS und $S'B$ parallel sind. Damit muss der Winkel α gleich dem Winkel α' sein und β gleich β'. Die Dreiecke ACS und BCS sind also *ähnlich*, d.h., man kann das eine durch Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen und Größenänderungen in das andere verwandeln. Daraus folgt, dass die Strecken $S'C$ und CB im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie die Strecken SC und CA. Es gilt also

$$\frac{r_{k+1}}{b'} = \frac{r_k}{a'},$$

bzw.

$$r_{k+1} = \frac{b'}{a'} \cdot r_k.$$

Durch den Strahlensatz weiß man aber, dass $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$, und so bekommt man

$$r_{k+1} = \frac{b}{a} \cdot r_k$$

wie gewünscht.

16 Weihnachtsbaumfällen

Autor: Dietmar Hömberg
Projekt: C11

16.1 Aufgabe

In diesem Jahr hilft Rut ihrem Vater, einen Weihnachtsbaum zu besorgen. Sie fahren mit ihrem blauen Auto zu einem 2 x 5 km großen rechteckigen Waldstück. Dort finden Sie einen schönen Baum, sägen ihn ab und machen sich auf den Weg zurück zum Auto. Der Baum ist schwer und das Gehen im Wald ist mühsam, deshalb kommen sie im Wald nur mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h voran. Leider hat Ruts Vater kein gutes Orientierungsvermögen, so dass sie statt am Auto an der diagonal entgegengesetzten Ecke des Waldes landen, und zwar genau um 15:16 Uhr. Leider wird um genau 17:00 Uhr der Parkplatz automatisch geschlossen. Wenn die beiden außen um den Wald laufen, kommen sie schneller voran (nämlich mit $v = 4$ km/h). Trotzdem schaffen sie es dann nicht, bis 17:00 Uhr am Auto zu sein. Wenn sie den kürzesten Weg diagonal durch den Wald nehmen, dauert es noch länger. Nach einer Minute (seien wir optimistisch!) hat sich Ruts Vater einen optimalen Weg zum Auto überlegt. Können die beiden es schaffen, rechtzeitig am Auto zu sein?

Antwortmöglichkeiten:

1. Nein, jeder Weg dauert mindestens 1 h 45 min.
2. Nein, jeder Weg dauert mindestens 1 h 45 min 6 s.
3. Nein, bei dem schlechten Orientierungsvermögen von Ruts Vater können sie es sowieso vergessen.
4. Nein, Rut ist von Papas Rechenkünsten nicht überzeugt und will mit dem Taxi nach Hause fahren.
5. Nein, sie kommen erst um 17:02 Uhr beim Auto an.
6. Ja, aber nur, weil das Parkplatztor klemmt und nicht zugeht.
7. Ja, sie haben sogar noch 1,5 min Zeit, vom Parkplatz zu fahren.
8. Ja, sie kommen genau um 16:59 Uhr am Parkplatz an.
9. Ja, aber nur, weil sie unterwegs den Förster treffen, der ihnen hilft, den Baum zu tragen, so dass sie mit 6 km/h vorwärts kommen.
10. Ja, sie kommen locker 15 min vor Schließung an und können in Ruhe noch einen Spekulatius essen.

Projektbezug:
Die Lösung der Aufgabe ist ein Spezialfall des aus der Physik bekannten Fermat'schen Prinzips. Demnach nimmt das Licht immer den zeitminimalen Weg, um von einem Punkt A zu einem Punkt B zu kommen.
Im MATHEON wird in Projekt C11 untersucht, wie ein Bauteil optimal mit Laserlicht bestrahlt werden kann, um bestimmte Strukturänderungen, z. B. das Anschmelzen der Oberfläche hervorzurufen.

16.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

Sei s_w die Weglänge im Wald
s_a die Weglänge außerhalb
dann gilt

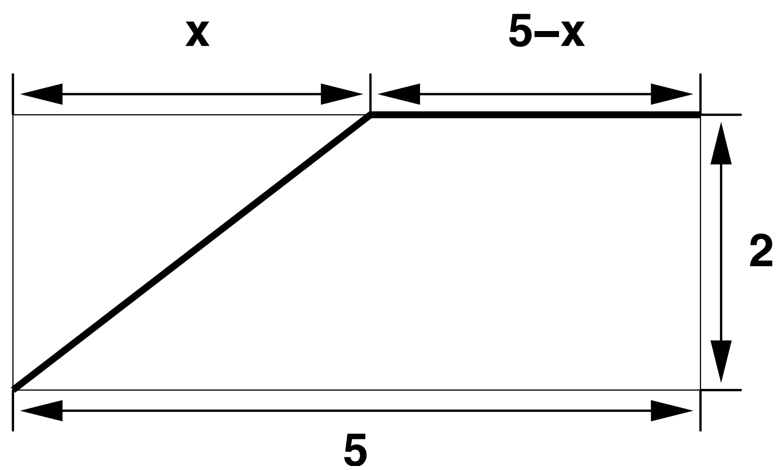
$$\begin{aligned} s_w &= 3 \cdot T_w \\ s_a &= 4 \cdot T_a \end{aligned}$$

d.h., die gesamte Zeit als Funktion von x (vgl. Skizze) ist

$$\begin{aligned} T(x) = T_w + T_a &= \frac{1}{3}s_w + \frac{1}{4}s_a \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{4}(5-x) \\ T'(x) &= \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{4} \\ T'(x) &= 0 \quad \text{und} \quad x \geq 0 \ \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}\sqrt{7} \\ T''(x) &= \frac{1}{3}\frac{4}{(4+x^2)^{3/2}} > 0 \end{aligned}$$

also ist T strikt konvex und $\bar{x} = \frac{6}{7}\sqrt{7}$globales Minimum.Die optimale Zeit ist

$T(\bar{x}) = \frac{1}{6}\sqrt{7} + \frac{5}{4} \approx 1$ h 41 min 27.6 s. Inklusive 1 min Bedenkzeit erreichen sie gegen 17:58:27 das Auto, haben also noch ca. 1.5 min Zeit, den Parkplatz zu verlassen.


x
5–x
2
5

17 Geschenke

Autor: Stefan Körkel
Projekt: C12

17.1 Aufgabe

Im Turnverein von Berlin-Adlershof ist Weihnachtsfeier für die kleinen Vereinsmitglieder. Dafür wird der Weihnachtsmann engagiert. Sieben Kinder wurden zur Feier angemeldet, deshalb bringt der Weihnachtsmann sieben Geschenke mit. Zwei Kinder fürchten sich aber so, dass sie an diesem Tag krank werden und deshalb nicht zur Feier kommen. Der Weihnachtsmann hat nun sieben (unterschiedliche) Geschenke für fünf Kinder. Wieviele verschiedene Möglichkeiten hat er, die Geschenke so zu verteilen, dass jedes Kind mindestens ein Geschenk bekommt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 5
2. 7
3. 12
4. 21
5. 35
6. 2520
7. 16800
8. 16807
9. 78125
10. 604800

17.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

Es gibt

- $\binom{5}{1} = 5$ Fälle, in denen jeweils genau 1 Kind 3 Geschenke und deshalb die anderen 4 Kinder je 1 Geschenk bekommen: $5 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 4200$ Möglichkeiten,
- $\binom{5}{2} = 10$ Fälle, in denen jeweils genau 2 Kinder je 2 Geschenke und deshalb die anderen 3 Kinder je 1 Geschenk bekommen: $10 \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 12600$ Möglichkeiten.

Da es keine anderen Fälle gibt, existieren insgesamt $4200 + 12600 = 16800$ Möglichkeiten.

Lösung für den verallgemeinerten Fall
Der Weihnachtsmann verteilt n Geschenke auf m Kinder, so dass jedes Kind mindestens ein Geschenk bekommt.
Übersetzt in die Sprache der Mathematik lautet die Aufgabe:
Wieviele verschiedene surjektive Abbildungen von einer n-elementigen Menge (hier: $n = 7$) in eine m-elementige Menge (hier: $m = 5$) gibt es?
Eine Abbildung, bei der auf jedes Element des Wertebereichs mindestens ein Element des Definitionsbereichs abgebildet wird, heißt surjektiv.

Definition 1 *Eine Abbildung f einer Menge N in eine Menge M heißt surjektiv, wenn jedes Element $y \in M$ in der Menge der Bilder von Elementen aus N vorkommt:*

$$(f : N \to M \text{ surjektiv}) \quad :\Leftarrow: \quad (\forall y \in M \ \exists x \in N : f(x) = y) .$$

Wir wollen die Anzahl aller surjektiven Abbildungen von N nach M bestimmen. Zum Beweis benötigen wir den folgenden Hilfssatz, der die Mächtigkeit einer Gesamtmenge beschreibt, die durch Vereinigung von einzelnen Mengen entsteht. Diese Vereinigung braucht dabei nicht disjunkt zu sein, d. h. die einzelnen Mengen dürfen auch gemeinsame Elemente besitzen.

Hilfssatz 2 (Prinzip von Inklusion und Exklusion) *Seien A_i, $i = 1, \ldots, n$, endliche Mengen. Dann gilt*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\{\} \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| .$$

Diesen Hilfssatz findet man in vielen Formelsammlungen. Hier ist sein Beweis.
Beweis. Induktion nach n.
Induktionsanfang: $n = 1$:

$$|A_1| = \left| \bigcup_{i=1}^{1} A_i \right| = \sum_{\{\} \neq I \subseteq \{1\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (-1)^{1+1} \cdot |A_1| = |A_1|.$$

$n = 2$: Die Vereinigungen

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \,\dot{\cup}\, (A_1 \cap A_2)$$

und

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \,\dot{\cup}\, (A_2 \setminus A_1) \,\dot{\cup}\, (A_1 \cap A_2)$$

sind disjunkt. Daher ist

$$|A_1 \setminus A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$$

und

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1 \setminus A_2| + |A_2 \setminus A_1| + |A_1 \cap A_2| \\ &= |A_1| - |A_1 \cap A_2| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|. \end{aligned}$$

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für $1, \ldots, n$.

Induktionsschritt: Zeige die Behauptung für $n+1$:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right| \\
&= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right| \\
&= \sum_{\{\}\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_{n+1}| \\
&\quad - \sum_{\{\}\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} (A_i \cap A_{n+1})\right| \\
&= \sum_{\{\}\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + \sum_{I=\{n+1\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\
&\quad + \sum_{\substack{I\cup\{n+1\}\\ \{\}\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}}} (-1)^{(|I|+1)+1} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i \cap A_{n+1}\right| \\
&= \sum_{\{\}\neq I\subseteq\{1,\ldots,n+1\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| .
\end{aligned}$$

Dabei wird in der zweiten Umformung die Induktionsannahme für 2 und in der vierten Umformung die Induktionsannahme für n verwendet. In der sechsten Umformung werden die Indexmengen der Summen wie folgt zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
&\{I : \{\} \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}\} \;\cup\; \{I \cup \{n+1\} : \{\} \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}\} \;\cup\; \{n+1\} \\
&= \{I : \{\} \neq I \subseteq \{1,\ldots,n+1\}\}.
\end{aligned}$$

Induktionsschluß. ■

Nun zum angekündigten Satz und seinem Beweis.

Satz 3 *Sei N eine Menge mit n Elementen und M eine Menge mit m Ele-*

menten, $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es

$$T(n,m) := \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot \binom{m}{k} \cdot (m-k)^n$$

verschiedene surjektive Abbildungen von N nach M.

Beweis. Sei o. B. d. A. $M = \{1, \ldots, m\}$.
Sei $j \in M$ und A_j die Menge aller Abbildungen von N nach M, bei denen kein Element von N auf j abgebildet wird, d. h. die Menge aller Abbildungen $N \to M \setminus \{j\}$. A_j hat $|A_j| = (m-1)^n$ Elemente.
Seien $j_1, \ldots, j_k \in M$ paarweise verschieden, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Der Durchschnitt $A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}$ beinhaltet die Abbildungen $N \to M \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$ und hat $|A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}| = (m-k)^n$ Elemente.
Die Menge aller nichtsurjektiven Abbildungen von $N \to M$ ist

$$A := \bigcup_{j=1}^{m} A_j.$$

Diese Vereinigung ist nicht disjunkt, deshalb muß das Prinzip von Inklusion und Exklusion angewendet werden, um die Anzahl aller nichtsurjektiven Abbildungen zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
|A| &= \left| \bigcup_{j=1}^{m} A_j \right| = \sum_{\{\} \neq I \subseteq \{1,\ldots,m\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{\substack{\{\} \neq I \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ I = \{j_1,\ldots,j_{|I|}\} \\ (j_1,\ldots,j_{|I|} \text{ paarweise verschieden})}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left| A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_{|I|}} \right| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k \in M \\ \text{paarweise verschieden}}} (-1)^{k+1} \cdot |A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}| \\
&= -\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cdot (-1)^k \cdot (m-k)^n
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, daß es $\binom{m}{k}$ Möglichkeiten gibt, k paarweise verschiedene Elemente aus M auszuwählen. Für alle diese gilt $|A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}| = (m-k)^n$.

Insgesamt gibt es $m^n = \binom{m}{0} \cdot (-1)^0 \cdot (m-0)^n$ Abbildungen $N \to M$. Die Anzahl der surjektiven Abbildungen ist daher

$$T(n,m) = m^n - |A| = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot (-1)^k \cdot (m-k)^n \qquad \text{q. e. d.}$$

$\blacksquare$

Zunächst ein einfaches Beispiel.
Für $N = \{1,2,3\}$, $M = \{1,2\}$ lauten alle surjektiven Abbildungen $N \to M$:
$f_1 : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 2$
$f_2 : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1$
$f_3 : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 1$
$f_4 : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 2$
$f_5 : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 2$
$f_6 : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1$
Die Anzahl ist $T(3,2) = (-1)^0\binom{2}{0}(2-0)^3 + (-1)^1\binom{2}{1}(2-1)^3 + (-1)^2\binom{2}{2}(2-2)^3 = 8 - 2 + 0 = 6$.
Mit einem kleinen Computerprogramm kann man die Zahlen $T(n,m)$ einfach berechnen. Hier ist ein Programm in der Sprache Python angegeben, in anderen Sprachen sieht es ähnlich aus.

```
#! /usr/bin/python

from sys import argv
from string import atoi

def bin( n, m ):
    if n < m:
       ret = 0
    else:
       ret = 1
       for i in range( m ):
           ret = ret * ( n - i ) / ( i + 1 )
    return ret

def hoch( m, n ):
    ret = 1
    for i in range( n ):
        ret = ret * m
    return ret
```

```
def T( n, m ):
    ret = 0
    fak = 1
    for i in range( 0, m+1 ):
        temp = fak * bin( m, i ) * hoch( m - i, n )
        ret = ret + temp
        fak = fak * -1
        #print "%d: %d" % ( i, temp )
    return ret

def main():
    if len(argv) <= 2:
       print "Aufruf: %s n m" % ( argv[0] )
       return

    n = atoi( argv[1] )
    m = atoi( argv[2] )

    print "T(%d,%d) = %d" % ( n, m, T( n, m ) )

main()
```

Nun die Lösung der Aufgabe:
$n = 7$ Geschenke sollen auf $m = 5$ Kinder verteilt werden, so dass jedes Kind mindestens ein Geschenk bekommt.
Gesucht ist die Anzahl $T(7,5)$ der surjektiven Abbildungen von N mit 7 Elementen nach M mit 5 Elementen.

$$\begin{aligned}
T(7,5) &= \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \cdot \binom{5}{k} \cdot (5-k)^7 \\
&= (-1)^0 \binom{5}{0} (5-0)^7 + (-1)^1 \binom{5}{1} (5-1)^7 + (-1)^2 \binom{5}{2} (5-2)^7 \\
&\quad + (-1)^3 \binom{5}{3} (5-3)^7 + (-1)^4 \binom{5}{4} (5-4)^7 + (-1)^5 \binom{5}{5} (5-5)^7 \\
&= 78125 - 81920 + 21870 - 1280 + 5 - 0 \\
&= 16800
\end{aligned}$$

Die richtige Lösung ist also 16800.

18 Die Elfenstadt

Autoren: Gregor Wünsch, Janina Brenner, Christian Liebchen
Projekte: B 15, B 16

18.1 Aufgabe

Die wichtigsten Helfer des Weihnachtsmanns, die Elfen, haben ein Problem! Ihr Land wurde überschwemmt. Trotzdem lassen die 64 Elfenfamilien den Kopf nicht hängen. Da Elfen ihre Häuser traditionell auf Pfeilern über dem Boden bauen, ist zum Glück alles trocken geblieben. Sie bauen flink für jede Familie ein Boot und möchten außerdem Stege bauen, so dass jedes Haus von jedem anderen Haus entlang eines Weges aus Stegen erreichbar ist. Soweit so gut!

Da ihr Land nach der Überschwemmung jedoch mitten im Meer liegt, denken sich die schlauen Elfen Folgendes: *„Wir müssten die Stege so bauen, dass man vom Meer aus jede Stelle unseres Landes mit dem Boot erreichen kann.“* Das heißt, es sollte kein Gebiet durch einen Kreis von Stegen eingeschlossen werden. Und so fangen die Elfen an zu bauen. Schon nach wenigen Tagen ist die Verbindung aller Häuser mit Stegen vollbracht. Die Lösung der Elfen ist in der Abbildung 11 skizziert.

Doch gerade als sie fertig sind, merken die Elfen, dass sie etwas Wichtiges nicht bedacht haben: Für die Elfenkinder, die noch nicht alleine mit den Booten fahren dürfen, sind die Stege die einzige Möglichkeit, um die Häuser ihrer Freunde zu erreichen. Mit der jetzigen Konstruktion sind viele dieser Wege sehr, sehr lang!

Die meisten Elfenkinder haben sich vor der Überschwemmung mit den Nachbarkindern angefreundet. Und jetzt führt zum Beispiel der Weg von Elfriede aus dem grünen Haus zu Elvira im gelben Haus, die vorher direkt benachbart waren, über 23 Stege. Das gefällt den Elfen nicht! Sie beschließen, die Stege noch einmal neu zu platzieren, diesmal jedoch besser:

Für Elfenfamilien, die horizontal oder vertikal direkt nebeneinander wohnen, soll die durchschnittliche Entfernung zwischen ihren Häusern, gemessen in der Anzahl der Stege, möglichst klein werden. Zwei Häuser, die durch einen Steg verbunden sind, haben zum Beispiel Entfernung 1. Die Entfernungen zwischen den Häusern aller anderen Familien, also zwischen solchen, die „Diagonalnachbarn“ oder gar keine Nachbarn sind, sollen nicht berücksichtigt

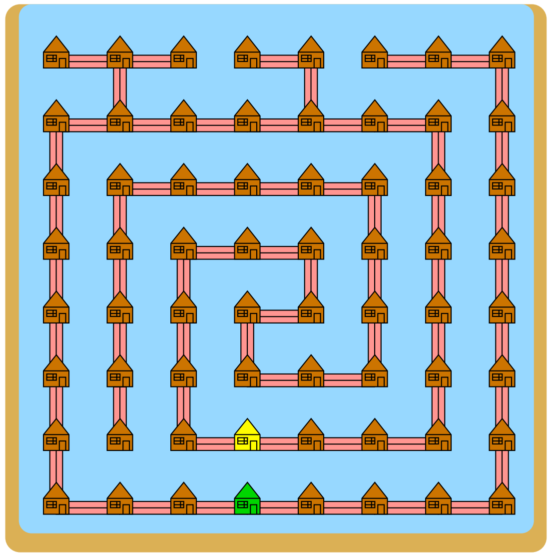


Abbildung 11: Das Elfenreich mit 64 Familien.

werden.
In einer kleineren Elfenstadt sähe die Stegkonstruktion vielleicht so aus wie in Abbildung 12. Die relevanten Entfernungswerte ergeben eine Summe von 22. *Tipp:* Die angegebene Konstruktion ist nicht optimal!

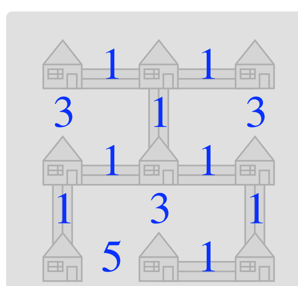


Abbildung 12: Ein kleines Beispiel.

Kannst du den Elfen helfen, die beste Möglichkeit für die Konstruktion der Stege zu finden? *Achtung:* Stege können nur horizontal oder vertikal zwischen benachbarten Häusern gebaut werden; diagonal benachbarte Häuser können nicht direkt verbunden werden. Man kann sich leicht überlegen, dass es gleichbedeutend ist, die durchschnittliche Entfernung oder die Summe der Entfernungen zu minimieren. Welches ist die kleinste der unten stehenden Summen von Entfernungen, die die Elfen erreichen können?

Antwortmöglichkeiten:

1. 273
2. 294
3. 280
4. Die erste Lösung der Elfen war schon optimal.
5. 251
6. 210
7. 336
8. 230
9. 276
10. 217

Tipp: Hilft es, die Entfernungen der Häuser zum offenen Meer per Boot zu minimieren?

Projektbezug:
Zum einen handelt es sich bei der Suche nach den beschriebenen Strukturen um ein spannendes Forschungsthema (aufspannende Bäume in Gittergraphen, die eine minimale strikt fundamentale Kreisbasis induzieren). So ist aktuell nicht einmal bekannt, ob überhaupt erwartet werden darf, dass es ein effizientes Verfahren geben kann, mit dem für ein Gitter beliebiger (aber fester) Größe der beste solche Baum konstruiert werden kann.
Zum anderen haben sich derartige Kreisbasen in der Vergangenheit als sehr hilfreich bei der Berechnung von Taktfahrplänen mit minimaler netzweiter

Umsteigewartezeit erwiesen, vgl. MATHEON-Projekt B15: Je kürzer die Summe aller “Pfade auf Stegen”, desto weniger Möglichkeiten sind bei der Suche nach dem besten Fahrplan zu betrachten.
Nun mögt ihr einwenden, dass Verkehrsnetze im Allgemeinen deutlich anders aussehen als im Elfenland. Dann werft aber am besten einfach ’mal einen Blick auf `http://www.mta.nyc.ny.us/nyct/maps/subwaymap.pdf`, wo ihr zumindest für Teilbereiche ganz ähnliche Strukturen entdecken werdet.

18.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9

Beherzigt man den in der Aufgabenstellung gegebenen Tipp und versucht zunächst, ein Netzwerk von Stegen zu bauen, das möglichst kurze Wege vom Inneren der Stadt zum offenen Meer auf dem Bootsweg ermöglicht, so kommt man auf die Lösung in Abbildung 13. Diese hat einen Wert von 280. Wir können also jetzt schon die beiden schlechteren Antworten 2 (294) und 7 (336) ausschließen. Genauso ist Antwort 4 natürlich schlechter, hier ergibt sich eine Gesamtsumme von 1028!

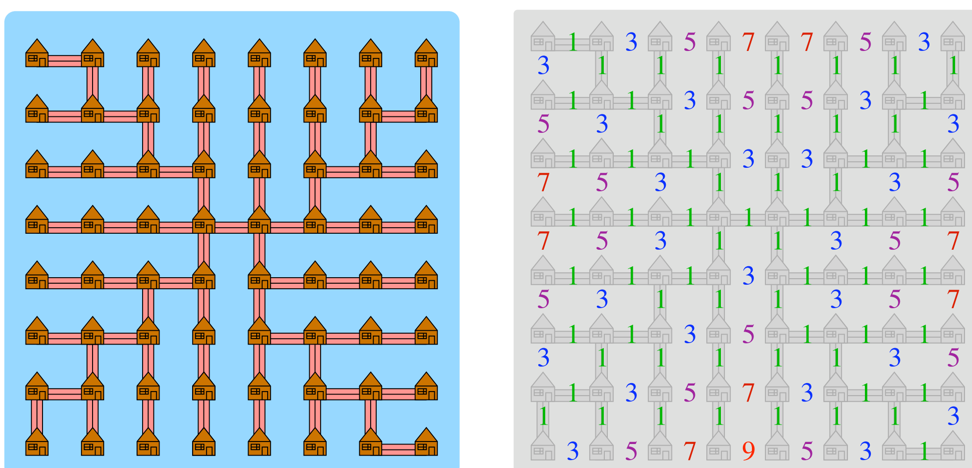


Abbildung 13: Eine Lösung mit kürzesten Wasserwegen zum offenen Meer. Wert: $63 \cdot 1 + 24 \cdot 3 + 16 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 1 \cdot 9 = 280$

Hätten wir es mit einer kleineren Elfenstadt zu tun, etwa mit $6 \times 6 = 36$ Familien, wäre eine entsprechende Lösung auch schon optimal gewesen. Hier aber kann man durch einiges Knobeln noch eine bessere Lösung finden. Zwei Möglichkeiten haben wir in Abbildungen 14 und 15 gegeben; beide ergeben eine Gesamtsumme der Distanzen von 276. Auf diese Lösungen kann man nur durch geschicktes Ausprobieren oder Knobeln kommen. Es ist schon erstaunlich, dass es Möglichkeiten gibt, das in Abbildung 13 gefundene Ergebnis um 4 Längeneinheiten zu verbessern!

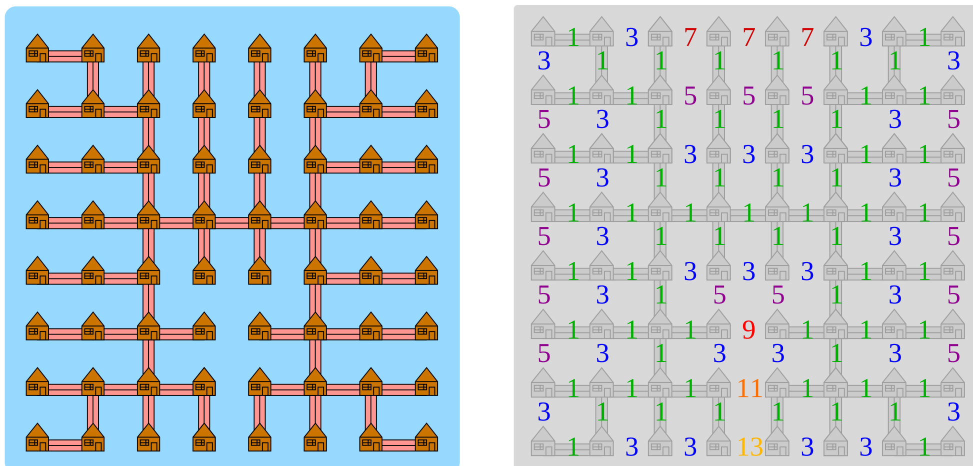


Abbildung 14: Eine Stegkonstruktion mit Wert $63 \cdot 1 + 28 \cdot 3 + 15 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 13 = 276$

Wie zeigt man nun, dass Antwort 9 mit dem Wert von 276 die beste Antwort ist und es nicht vielleicht noch eine bessere Stegkonstruktion gibt?

Zunächst kann man sich davon überzeugen, dass die Summe der Weglän-gen immer eine gerade Zahl ergeben muss. Dafür macht man sich als erstes folgendes klar: Es gibt genau 112 ($= 2 \cdot 7 \cdot 8$) Paare von benachbarten Häusern, wovon die eine Hälfte horizontale Nachbarn und die andere Hälfte vertikale Nachbarn sind. Das bedeutet, dass sich die Gesamtlänge einer *beliebigen* Stegkonstruktion aus 112 Summanden zusammensetzt.
Desweiteren beobachtet man, dass jeder Weg zwischen benachbarten Häusern entlang der Stege eine ungerade Länge hat. Um dies zu sehen, stellen wir uns einmal vor, wir liefen von einem beliebigen Elfenhaus H_1 zu seinem Nachbarhaus H_2 direkt rechts daneben. Da die beiden Häuser vertikal auf einer Höhe liegen, muss die Anzahl der Stege, die wir nach oben durchlaufen, *gleich* der Anzahl der Stege sein, die wir nach unten durchlaufen. Das heisst, die Anzahl der vertikalen Stege (nach oben oder nach unten durchlaufen) auf dem Weg zwischen H_1 und H_2 ist immer gerade. Andererseits muss es, weil H_2 rechts neben H_1 liegt, genau einen nach rechts durchlaufenen Steg mehr geben als nach links durchlaufene. Das bedeutet, dass die Anzahl der horizontalen Stege entlang des Weges zwischen den beiden Häusern ungera-

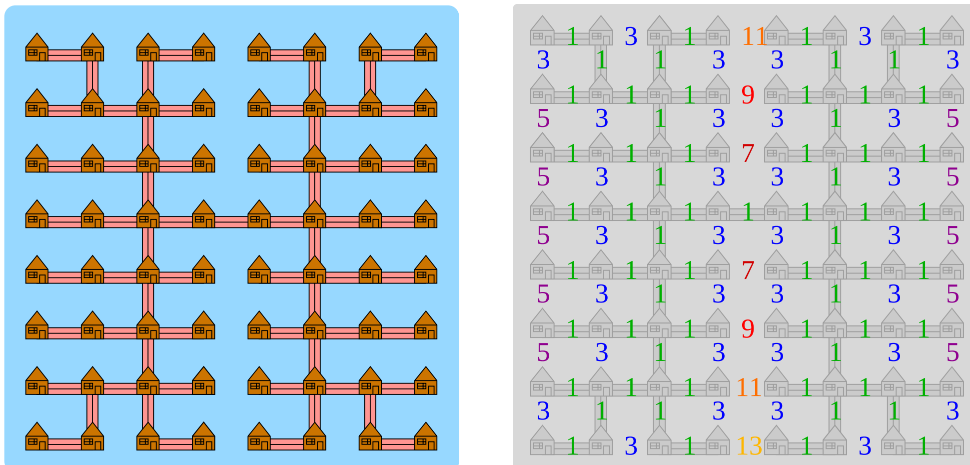


Abbildung 15: Eine alternative Stegkonstruktion mit Wert $63 \cdot 1 + 32 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 13 = 276$

de ist. Somit ist die Gesamtanzahl der Stege auf dem Weg ungerade (*„gerade + ungerade = ungerade“*). Bei einer anderen Lage der Nachbarhäuser (z.B. „übereinander“) ist eine sehr ähnliche Argumentation zu führen, bei der lediglich die Richtungen der Stege angepasst werden müssen.
Insgesamt hat die Gesamtlänge einer beliebigen Stegkonstruktion also eine gerade Anzahl von Summanden, die jeweils ungerade sind. Also muss die Gesamtlänge gerade sein (*„gerade · ungerade = gerade“*). Diese Überlegungen ermöglichen es, die Antworten 1, 5 und 10 auszuschließen, da alle drei ungerade Werte sind.

Es bleiben also noch Antworten 6 (210), 8 (230) und 9 (276, was unserer gefundenen Lösung entspricht). Um die beiden kleineren Lösungen auszuschließen, bestimmen wir Mathematiker sogenannte „untere Schranken“. Das heißt, wir stellen Überlegungen an, mithilfe derer wir zeigen können, dass eine Lösung nie besser als ein bestimmter Wert werden kann. Im Folgenden beschreiben wir, wie man sich überlegen kann, dass 232 eine untere Schranke ist.
Zuerst sollte man sich noch einmal vor Augen führen, was man überhaupt erreichen möchte. In diesem Fall wollen wir eine Stegkonstruktion so bauen, so dass zwar jede Wasserzelle noch vom offenen Meer aus erreichbar ist, aber

die Gesamtsumme der Entfernungen zwischen vorher benachbarten Häusern möglichst klein ist. Dafür ist es natürlich gut, wenn jede einzelne Entfernung klein ist. Man findet jedoch schnell heraus, dass nicht alle ehemaligen Nachbarhäuser Abstand eins haben, also direkt verbunden sein können. Sonst könnte man mit dem Boot gar nicht mehr in die Stadt fahren, und es gäbe viele kleine abgeschnittene Wasserzellen.
Egal wie man die Stege verteilt, man kann immer höchstens 63 Stege bauen, ohne einen Kreis aus Stegen zu konstruieren, der ein Stück Wasser von der Außenwelt abschneiden würde. Das kann man sich so überlegen: Um zwei Häuser zu verbinden, braucht man genau einen Steg. Mit jedem weiteren Steg kann man genau ein neues Haus an die bereits verbundenen Häuser anschließen. Zwei neue Häuser kann man nicht auf einmal anschließen, da ein Steg immer nur zwischen zwei Häusern verläuft, wovon eines schon angeschlossen ist. Und würde man gar kein neues Haus anschliessen, aber von einem angeschlossenen Haus ausgehen, dann würde man ein bereits verbundenes zum zweiten Mal anschließen und damit einen Kreis erzeugen! Also können wir ausrechnen, wie viele Stege man genau verbauen kann: Einen Steg für jedes Haus außer das erste, also $64 - 1 = 63$ Stege. Damit ist schon mal klar, dass *genau* 63 vorher benachbarte Familien auch hinterher direkte Nachbarn sein werden.
Hieraus können wir schon eine erste untere Schranke berechnen. Wenn nämlich nur 63 Wege die Länge eins haben können, und alle Wege ungerade Länge haben, ergibt sich, dass die restlichen $112 - 63 = 49$ Weglängen jeweils mindestens 3 betragen müssen. Also ergibt sich als Gesamtsumme mindestens

$$63 \cdot 1 + 49 \cdot 3 = 210.$$

Allerdings können auch nicht alle 49 restlichen Abstände nur 3 Stege lang sein. Um einen Abstand von 3 zu bilden, müssen drei Stege um eines der „Einheitskästchen“ herumführen, so wie zum Beispiel in Abbildung 16. Da jeder Steg höchstens zu zwei Einheitskästchen gehört, kann er auf höchstens zwei „Dreier-Pfaden“ liegen. Außerdem besteht jeder Dreier-Pfad aus drei Stegen. Mit 63 Stegen kann man also höchstens $(63*2)/3 = 42$ Dreier-Abstände konstruieren. Dann müsste aber auch jeder Steg an zwei dieser Kästchen beteiligt sein. Da man irgendwann an den Rand stößt und dort sicher mindestens eine Kante nur für einen Dreier-Pfad benutzen kann, können wir getrost davon ausgehen, dass es höchstens 41 Dreier-Abstände gibt.

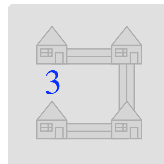


Abbildung 16: Ein Abstand von drei Stegen umschließt immer ein „Kästchen“

Das wiederum heißt, dass es mindestens $112-63-41 = 8$ Abstände gibt, die länger als 3, also mindestens 5 sind. Wir erhalten eine neue untere Schranke von

$$63 \cdot 1 + 41 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 226.$$

Gleichzeitig wissen wir, dass es auch von dem Wasserfeld ganz in der Mitte einen Bootsweg zum offenen Meer geben muss. An der Stelle, wo dieser Bootsweg die Stadt verlässt, muss er zwischen zwei ehemals benachbarten Familien hindurch, die jetzt um das mittlere Wasserfeld herumlaufen müssen, um sich gegenseitig zu besuchen. Dieser Weg ist mindestens 9 Stege lang! Genauso ist

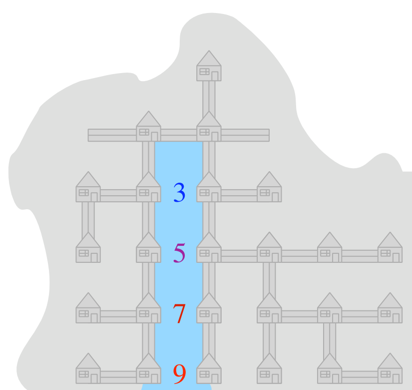


Abbildung 17: Der Ausweg vom mittleren Wasserfeld erzwingt weite Wege

der Abstand zwischen dem vorletzten Häuserpaar, das der Bootsweg durchtrennt, mindestens 7. Würde die Verbindung des mittleren Wasserfeldes zum Meer anders aussehen, wären die Entfernungen sogar noch größer. Wir haben also mindestens einen Abstand der Länge mindestens 7, und mindestens einen der Länge mindestens 9. Zusammen haben wir jetzt die benötigte untere Schranke:

$$63 \cdot 1 + 41 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 9 = 232.$$

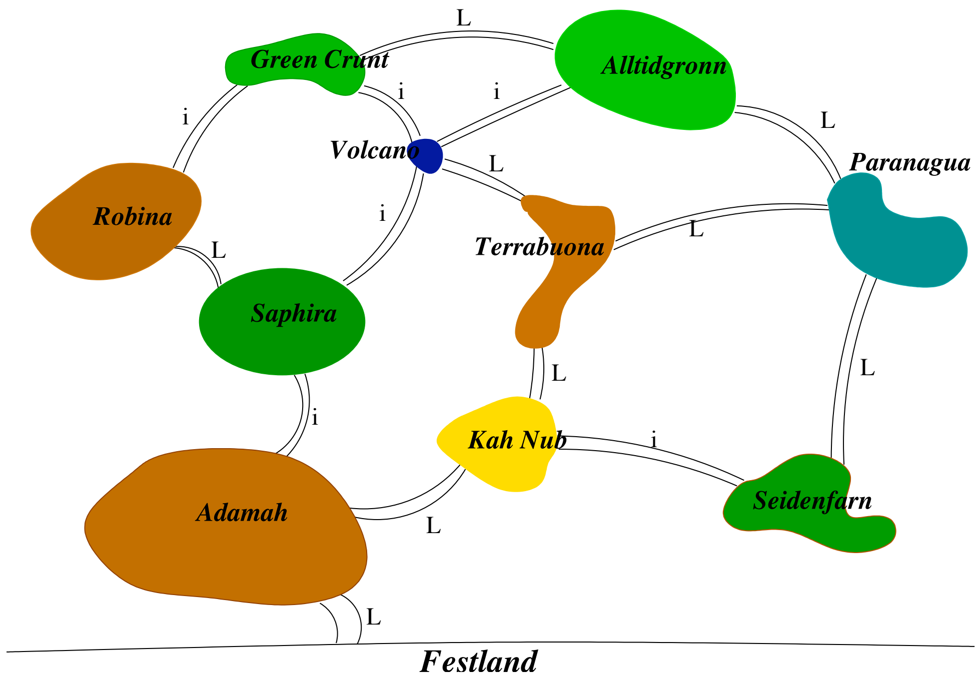
Damit können wir auch Antworten 6 und 8 ausschließen, deren Werte von 210 bzw. 230 nie erreicht werden können, wie wir uns hier überlegt haben. Also ist Antwort 9 die bestmögliche angegebene Lösung.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist unter allen Mathekalender-Aufgaben besonders nah an der aktuellen Forschungsarbeit von Matheon-Mitarbeitern. Wie ihr schon in der Aufgabenstellung gelesen habt, ist das Finden von „möglichst kurzen Stegkonstruktionen“, oder in der Fachsprache *Kreisbasen*, wichtig für die Erstellung von guten U-Bahnfahrplänen. Deshalb untersuchen Forscher an der Technischen Universität Berlin diese Frage zur Zeit intensiv. Dabei sind sie auf die erstaunliche Tatsache gestoßen, dass auf rechtwinkligen Gittern (wie die Elfenstadt) kleinste Kreisbasen eine einfache Struktur haben, solange das Gitter bis zu 6×6 Knotenpunkte hat, auf größeren Gittern jedoch auf einmal ganz andere Konstruktionen besser sind. Auf größeren Gittern können wir noch nicht beweisen, welches die (bezüglich Weglängensumme) kleinstmöglichen Stegkonstruktionen sind!
Wie ihr seht, sind in der Mathematik noch viele Fragen und Probleme offen. Manche lassen sich sehr einfach beschreiben, und doch ist es sehr schwer, eine Lösung zu finden! Vielleicht könnt ihr uns ja helfen. Viel Erfolg!

19 Neue Brücken

Autoren: Falk Ebert, Anita Liebenau
Projekt: D13

19.1 Aufgabe



Im Weihnachtswunderland ist der Notstand ausgebrochen. Auf den 10 Inseln Adamah, Kah Nub, Seidenfarn, Saphira, Terrabuona, Paranagua, Robina, Volcano, Green Crunt und Alltidgrønn packen die kleinen Weihnachtswichtel eigentlich immer die vielen Geschenke ein. Nun wurde aber kurz vor dem Heiligen Abend festgestellt, dass die Verbindungsbrücken zwischen den Inseln entweder labil (L) oder instabil (i) sind. Bevor die Rentiere die vielen Geschenke zu ihren Bestimmungsorten bringen können (über dem Inselatoll darf nicht geflogen werden!), müssen die alten Brücken durch stabile ersetzt werden.

Dabei sind nun einige Regeln zu beachten:

I Da man instabile Brücken gar nicht mehr betreten kann, können an solchen Stellen auch keine stabilen gebaut werden.

II Wird eine labile Brücke durch eine stabile ersetzt, so muss eine Schnittlinie durchs Atoll gezogen werden, die die Inselgruppe in zwei Teile zerlegt (das Festland darf als Insel betrachtet werden). Diese Schnittlinie muss durch die Brückenverbindung laufen, die ersetzt werden soll und darf keine andere Schnittlinie schneiden.

III Aus Gründen des Denkmalschutzes dürfen keine (labilen) Brücken ersetzt werden, durch die schon eine Schnittlinie verläuft.

Beispiel:

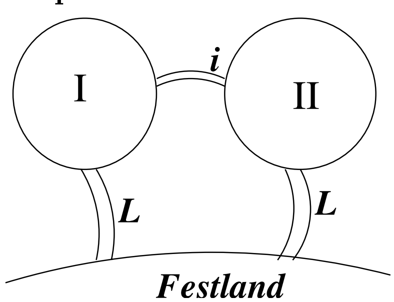


Abb.2

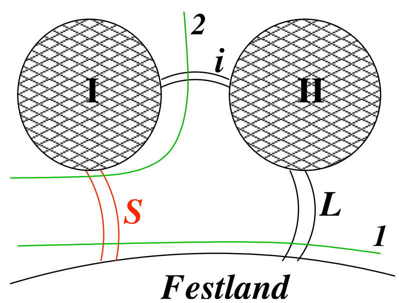


Abb.3

Ersetzt man im Beispiel die labile Brücke zwischen Insel I und dem Festland, so stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung, eine Schnittlinie zu ziehen. Nach Möglichkeit 1 kann man dann nicht mehr Insel II mit dem Festland durch eine stabile Brücke verbinden. Möglichkeit 2 verbietet lediglich, die instabile Brücke zwischen Insel I und Insel II zu ersetzen (was ohnehin nicht erlaubt wäre).

Befolgt man die vorstehenden Regeln, welche Inseln können dann nicht durch stabile Brücken mit dem Festland verbunden werden?

Antwortmöglichkeiten:

1. Keine - Jede Insel lässt sich vom Festland aus über stabile Brücken erreichen.

2. Seidenfarn
3. Alltidgrånn
4. Robina
5. Alltidgrånn und Green Crunt
6. Saphira und Robina
7. Paranagua und Alltidgrånn
8. Green Crunt, Robina und Saphira
9. Robina, Seidenfarn und Alltidgrånn
10. Robina, Alltidgrånn und Saphira

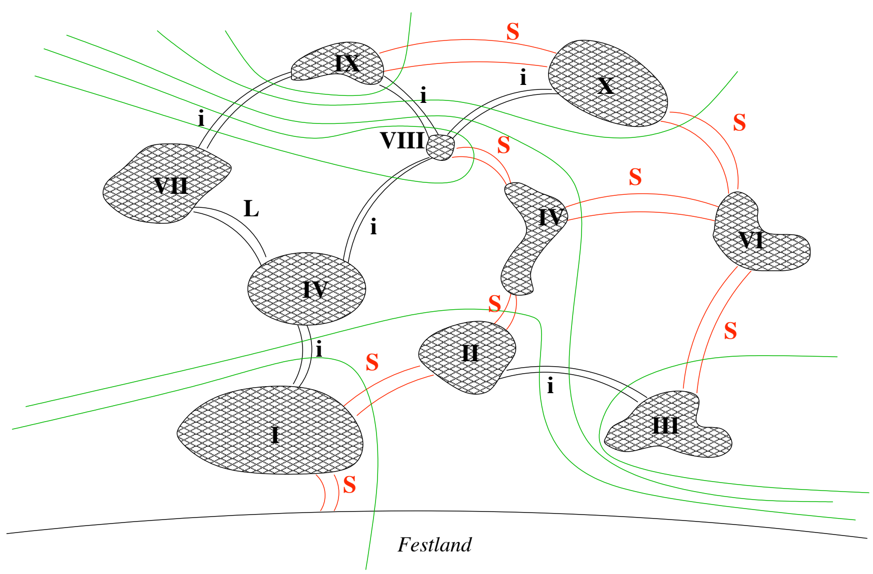
Projektbezug:
Ob man es glaubt oder nicht, die ganze Brückenbauerei hat einen Hintergrund in der Elektrotechnik. Konkret geht es dabei um Schaltkreissimulation. Dabei werden Gleichungen aufgestellt, die das physikalische Verhalten eines elektrischen Schaltkreises beschreiben. Anschließend werden diese Gleichungen auf dem Computer mit entsprechenden Programmen gelöst. Da ein Computer prinzipiell dumm ist, passiert es, dass er Probleme mit dem automatischen Lösen gewisser Gleichungen bekommt. Zum Beispiel können genau solche Gleichungen entstehen, wenn ein Schaltkreis sogenannte *LI-Schnittmengen* enthält. Dabei ist L typischerweise die Bezeichnung für eine Induktivität (z.B. eine Spule) und I steht für eine Stromquelle. Eine LI-Schnittmenge ist eine Menge von solchen Schaltelementen, die, wenn man sie aus dem Schaltkreis entfernt, diesen in zwei nicht mehr verbundene Teile trennen - allerdings so, dass, sobald man eines der Elemente wieder einfügt, wieder alle Teile verbunden sind. Prinzipell entspricht das einer Schnittlinie durch das Atoll. Man kann aber die Gleichungen für den Computer wieder einfacher lösbar machen, wenn man eine Spule aus dieser Schnittmenge auswählt und durch eine spezielle Stromquelle ersetzt. Diese Stromquelle hängt von den anderen Elementen der LI-Schnittmenge ab und damit dürfen die dann nicht mehr verändert werden. Diese Elementersetzung entspricht der Restaurierung einer labilen Brücke nach allen Regeln des Denkmalschutzes. Das Ziel ist es,

sämtliche Schnittmengen im Schaltkreis so zu verändern, damit letztendlich die Gleichungen für den Computer einfach lösbar sind. Und genau das war ein Teilproblem, mit dem wir uns in den Projektgruppen D2 und D13 in den letzen beiden Jahren herumgeschlagen haben.

19.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6

Da sich die instabilen Brücken gar nicht durch stabile ersetzen lassen, werden Inseln, von denen jeder Weg zum Festland über mindestens eine instabile Brücke führt, nie komplett über stabile Brücken vom Festland aus erreichbar sein. Zwischen Robina und Saphira besteht zwar eine labile Brücke, die ersetzt werden könnte. Aber alle anderen Brücken, die von den beiden Inseln ausgehen, sind instabil. Damit sind die beiden Inseln vom Festland abgeschnitten. Durch eine günstige Zerlegung sind tatsächlich alle anderen Inseln über stabile Brücken erreichbar:



Die richtige Antwort lautete also 6.

20 Das Geschenkpapierproblem

Autoren: Brigitte Lutz-Westphal, Marc Pfetsch
Projekte: Z1.3, B12

20.1 Aufgabe

Pech für Fridolin! „Fridolin, Sie verpacken dieses Jahr die Geschenke für unsere besten Kunden!“ hatte ihm seine Chefin am Morgen mitgeteilt. Seitdem hat er furchtbar schlechte Laune. Das Schlimmste ist jedoch, dass er die Geschenke nicht so verpacken darf, wie er Lust hat. Die Chefin hatte gar nicht mehr aufgehört, noch weitere Anweisungen zu geben: „Denken Sie daran, dass Sie nur Geschenkpapier in den Farben unseres Logos verwenden dürfen!“ (Das Logo der Firma verwendet die Farben Rot, Blau, Gelb und Grün.) „Wir konnten aus Gründen der Sparsamkeit nur einfarbiges Geschenkpapier besorgen.“ (Die Firma ist in Berlin.) „Auch in diesem Jahr müssen wir darauf achten, dass befreundete Firmenchefs keine gleich aussehenden Geschenke bekommen!“ (Wie überall gibt es auch hier jede Menge Eitelkeiten und Konkurrenzkämpfe.) Sie ratterte in Windeseile herunter, welche Firmen nicht die gleiche Farbe bekommen dürfen (Nennen wir die Firmen – der Diskretion wegen – A, B, . . . bis H.):

A und D	B und G	D und G
A und E	C und D	D und H
A und G	C und E	E und G
A und H	C und F	F und G
B und C	C und G	F und H
B und E	D und F	G und H

Fridolin ist noch ganz schwindelig von diesen vielen Anweisungen. 18 Vorschriften muss er bei der Wahl des Geschenkpapiers beachten! „Das ist ja wohl etwas übertrieben!“ denkt er für sich, setzt sich dann aber doch an seinen Schreibtisch und fängt an nachzudenken. Verschiedene Dinge fallen ihm auf, als er sich das Problem genauer ansieht. Leider hat er gar keinen klaren Kopf vor lauter schlechter Laune. Er wollte doch heute etwas früher Feierabend machen . . .

Welche seiner Überlegungen ist richtig?

1. Es gibt 5 Firmen, so dass je zwei davon nicht dieselbe Farbe bekommen dürfen. Deshalb reichen 4 verschiedene Geschenkpapiere nicht aus, wenn alle Vorschriften eingehalten werden.

2. Es gibt 8 Firmen, also braucht man höchstens $\frac{8}{4} = 2$ verschiedene Farben um die Geschenke zu verpacken (wenn alle Vorschriften erfüllt werden).

3. Die Geschenke von Firma A und C müssen die gleiche Farbe erhalten, wenn alle Vorschriften eingehalten werden.

4. Es gibt keine Vorschriften zwischen Firmen A und B, zwischen Firmen B und F und zwischen Firmen F und A, also braucht man höchstens 3 verschiedene Geschenkpapiere, wenn man alle Vorschriften befolgt.

5. Wenn man das Geschenk von Firma A rot verpackt und alle Vorschriften einhält, dann gibt es nur eine Möglichkeit die Geschenke zu verpacken.

6. Firma G ist an 7 Vorschriften beteiligt, deshalb braucht man mindestens $7 + 1 = 8$ Farben, wenn alle Vorschriften befolgt werden.

7. Wenn alle Vorschriften eingehalten werden, dann gibt es genau 25 verschiedene Möglichkeiten, die Geschenke zu verpacken.

8. Wenn die Geschenke von Firmen A, C, E, G und H rot eingepackt werden und die von B, D, F und H grün, dann werden alle Vorschriften erfüllt.

9. Wenn man die Firmen in der Reihenfolge A, B, C, ..., H betrachtet, dann gibt es Vorschriften zwischen B und C, zwischen C und D, zwischen F und G, zwischen G und H. Es gibt aber keine Vorschriften zwischen A und B, zwischen D und E, sowie zwischen E und F. Deshalb benötigt man nur drei verschieden Geschenkpapiere, wenn alle Vorschriften eingehalten werden.

10. Wenn alle Vorschriften erfüllt werden, dann können die Geschenke von Firma E und F nicht die gleiche Farbe erhalten.

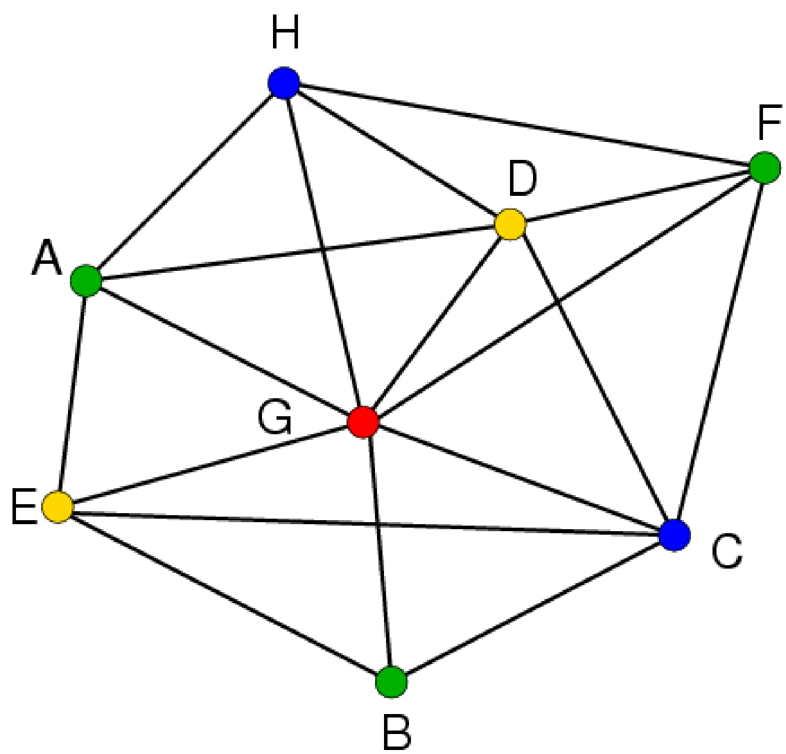
Projektbezug:

Graphenfärbungen spielen z. B. eine Rolle, wenn es um die Frequenzzuweisung in Mobilfunknetzen geht (MATHEON-Projekt B4). Hierbei entsprechen Mobilfunkteilnehmer den Firmen und die Farben der Geschenkpapiere möglichen Frequenzen, auf denen die Handys senden. Die Vorschriften ergeben sich dadurch, dass die benutzten Frequenzen bestimmter Teilnehmer nicht gleich sein dürfen, sonst stören sich die Gespräche.
Im Geschenkpapierproblem spielen Symmetrien eine Rolle. Ähnliche Symmetrien kommen in vielen praktischen Aufgabenstellungen vor. Um mit Hilfe des Computers schnell Lösungen berechnen zu können, müssen die Symmetrien bei der Entwicklung von Lösungsmethoden berücksichtigt werden. Dies wird in MATHEON-Projekt B12 untersucht.
Themen der kombinatorischen Optimierung haben in Berlin durch MATHEON-Projekte den Weg in den Lehrplan gefunden. Im Projekt Z1.3 wird derzeit eine Unterrichtssoftware entwickelt, mit der an Graphen und Graphenalgorithmen experimentiert werden kann.

20.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 10

Wenn man die Firmen als Punkte auf ein Blatt Papier malt und eine Linie zwischen den Firmen zieht, die nicht die gleiche Farbe bekommen dürfen (für die eine Vorschrift existiert), dann bekommt man ein Gebilde, das ungefähr so aussieht:



In der Abbildung wurden den Firmen Geschenkpapierfarben zugeordnet. Dass die Vorschriften erfüllt sind, erkennt man daran, dass zwischen zwei gleichen Farben keine Linie gezeichnet ist.

Zu den Antworten im Einzelnen:

1. *Es gibt 5 Firmen, so dass je zwei davon nicht dieselbe Farbe bekommen dürfen. Deshalb reichen 4 verschiedene Geschenkpapiere nicht aus, wenn alle Vorschriften eingehalten werden.*
   Diese Antwort ist *falsch*. Die Zuordnung von oben erfüllt alle Vorschriften und braucht nur vier Farben.

2. *Es gibt 8 Firmen, also braucht man höchstens* $\frac{8}{4} = 2$ *verschiedene Farben um die Geschenke zu verpacken (wenn alle Vorschriften erfüllt werden).*
   Diese Antwort ist *falsch*. Die Firmen A, D, G und H brauchen vier verschiedene Farben, also benötigt man mindestens 4 Farben.

3. *Die Geschenke von Firma A und C müssen die gleiche Farbe erhalten,wenn alle Vorschriften eingehalten werden.*
   Diese Antwort ist *falsch*. Die Zuordnung oben erfüllt alle Vorschriften und das Geschenk von Firma A ist grün und das von C ist blau eingepackt.

4. *Es gibt keine Vorschriften zwischen Firmen A und B, zwischen Firmen B und F und zwischen Firmen F und A, also braucht man höchstens 3 verschiedene Geschenkpapiere, wenn man alle Vorschriften befolgt.*
   Diese Antwort ist *falsch*. Oben ist schon beobachtet worden, dass man mindestens 4 verschiedene Farben braucht.

5. *Wenn man das Geschenk von Firma A rot verpackt und alle Vorschriften einhält, dann gibt es nur eine Möglichkeit die Geschenke zu verpacken.*
   Diese Antwort ist *falsch*. Die Zuordnung oben erfüllt alle Vorschriften und das Geschenk von Firma A ist grün eingepackt.

6. *Wenn man die Firmen in der Reihenfolge A, B, C, ..., H betrachtet, dann gibt es Vorschriften zwischen B und C, zwischen C und D, zwischen F und G, zwischen G und H. Es gibt aber keine Vorschriften zwischen A und B, zwischen D und E, sowie zwischen E und F. Deshalb benötigt man nur drei verschieden Geschenkpapiere, wenn alle Vorschriften eingehalten werden.*
   Diese Antwort ist *falsch*. Wissen Sie warum?

7. *Firma G ist an 7 Vorschriften beteiligt, deshalb braucht man mindestens* $7 + 1 = 8$ *Farben, wenn alle Vorschriften befolgt werden.*
   Diese Antwort ist *falsch*. Man benötigt ja nur vier verschiedene Farben (s.o.).

8. *Wenn alle Vorschriften eingehalten werden, dann gibt es genau 25 verschiedene Möglichkeiten, die Geschenke zu verpacken.*

Diese Antwort ist *falsch*. Tatsächlich gibt es 24 verschiedenen Möglichkeiten. Diese Zahl erhält man, wenn man in der obigen Zuordnung die Farben vertauscht. Dafür gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten. Probieren Sie es aus!

9. *Wenn die Geschenke für die Firmen A, C, E, G und I rot eingepackt werden und die von B, D, F und H grün, dann werden alle Vorschriften erfüllt.*
   Diese Antwort ist *falsch*. Es sind nicht alle Vorschriften erfüllt: Z. B. bekommen die Geschenke der Firmen A und G die gleiche Farbe.

10. *Wenn alle Vorschriften erfüllt werden, dann können die Geschenke von Firma E und F nicht die gleiche Farbe erhalten.*
    Diese Antwort ist *richtig*. Wie oben schon bemerkt, müssen die Geschenke der Firmen A, D, G, und H mit vier verschiedenen Farben eingepackt werden. Das Geschenk für Firma F muss anders eingepackt werden als das der Firmen D, G und H. Weil nur vier Farben verfügbar sind, muss F also mit der gleichen Farbe eingepackt werden wie das von Firma A. Weil das Geschenk für Firma E nicht gleich eingepackt werden darf wie das für Firma A, ist die Antwort also richtig.

21 Das Schmücken des Weihnachtsbaums

Autoren: Janina Brenner, Guido Schäfer
Projekt: B 16

21.1 Aufgabe

Dieses Jahr haben sich die Seebären in Heiligenhafen ein ganz besonderes Projekt ausgedacht. Sie wollen einen großen Weihnachtsbaum aufstellen, der von allen Schiffen draußen auf dem Meer zu sehen ist. Dazu bauen sie ein großes Stahlgerüst aus lauter Dreiecken mit der Grundseite ein Meter. An den Eckpunkten der Dreiecke möchten sie große strahlende Lichter befestigen. Dafür stehen Glühbirnen in drei Farben zur Verfügung: weiße, rote und blaue.

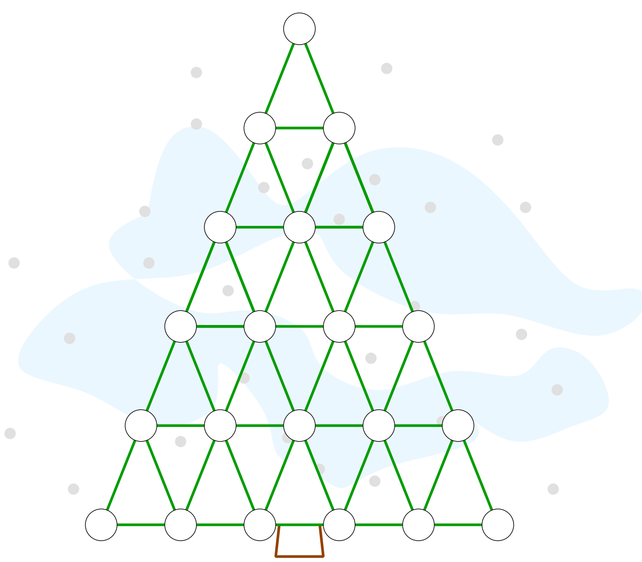


Abbildung 18: Ein Weihnachtsbaumgerüst

1. Ties, der für das Aussehen des Weihnachtsbaums verantwortlich ist, hat sich überlegt, dass es schön wäre, wenn die Spitze und die Seiten des Baumes mit weißen Lampen geschmückt würden. Die untere Kante möchte er abwechselnd mit roten und blauen Birnen versehen. In

Abbildung 19 könnt ihr ein Beispiel für einen zugegebenermaßen noch sehr kleinen Weihnachtsbaum sehen. Für die restlichen, im Bild grauen Lampen, lässt Ties den Bauingenieuren freie Farbwahl.

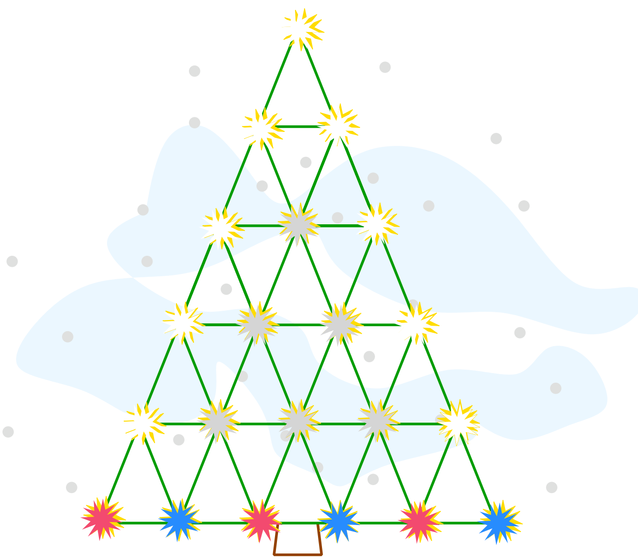


Abbildung 19: Ties Farbvorgaben

Ties stellt sich die Frage, bei wie vielen der kleinen Dreicke (mit einer Grundseite von einem Meter) wohl alle drei Ecken mit verschiedenfarbigen Lampen versehen werden. Wie viele sind es mindestens?

2. Aus mathematischer Sicht ist auch das folgende Problem interessant: Angenommen, die 3 Außenecken eines solchen Gerüstes sind wie bisher weiß, blau und rot gefärbt. Alle anderen Glühbirnen dürfen frei gewählt werden; mit der Einschränkung, dass für die Lampen auf den Außenseiten des Gerüstes jeweils nur die Farben der beiden angrenzenden Außenecken gewählt werden dürfen. Wie viele kleine Dreiecke, deren Ecken mit drei verschiedenen Farben gefärbt sind, gibt es dann mindestens?

Frage:
Wenn das Gerüst $k \geq 3$ Meter breit ist, wie viele dreifarbige Dreiecke kommen dann in den beiden Fällen (1. und 2.) mindestens vor? (Wie ihr leicht

merkt, muss k für Ties Farbwahl ungerade sein. Bitte setzt dies für die Beantwortung der ersten Frage voraus.)

Antwortmöglichkeiten:

1. 2 und 0
2. 2 und 1
3. jeweils 2
4. $k-2$ und $k-3$
5. 3 und 0
6. 3 und 1
7. k und 2
8. jeweils $\lfloor\sqrt{k}/2\rfloor$
9. k^2-2k+1 und k^2-2k
10. 4 und 2

Projektbezug:
Im Projekt B 16 beschäftigen wir uns mit mathematischen Problemen aus dem Bereich der Spieltheorie. Die Spieltheorie befasst sich mit der Analyse von Situationen, in denen eine Vielzahl von Nutzern (sog. Spielern) miteinander interagieren und sich durch ihr Handeln gegenseitig beeinflussen. Ein wichtiges Konzept in diesem Zusammenhang ist das *Nash-Gleichgewicht*. Grob gesagt ist ein Nash-Gleichgewicht ein Zustand, in dem alle Spieler zufrieden sind (keiner möchte von dem Zustand abweichen). Ein fundamentaler Satz der Spieltheorie besagt, dass es für eine große Klasse von Spielen immer ein Nash-Gleichgewicht gibt. Der Beweis dieses Satzes beruht unter anderem auf dem im zweiten Teil der Aufgabe gestellten Färbungsproblem.

21.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6

Betrachten wir zunächst das allgemeinere Problem, bei dem nur die Färbung der Ecken des Weihnachtsbaumgerüsts vorgegeben ist. Hier gibt es immer mindestens *ein* kleines Dreieck, dessen Ecken alle unterschiedlich gefärbt sind. Um dies zu beweisen, wählt man sich ein beliebiges Paar von Farben, zum Beispiel rot und weiß. Um den Beweis zu vereinfachen, fügen wir an der rot-weißen Seite k Verbindungen zu dem Gerüst hinzu, wie in Abbildung 20 skizziert. Nun kann man sich das Weihnachtsbaumgerüst als La-

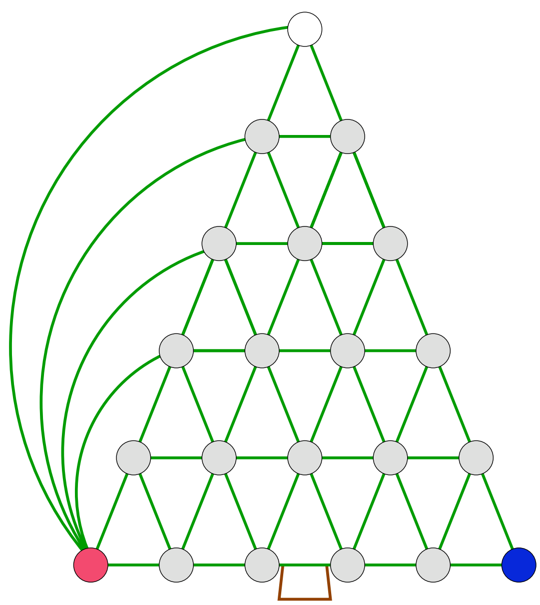


Abbildung 20: Das Weihnachtsbaumgerüst mit k Extra-Kanten

byrinth vorstellen, in dem die grünen Verbindungslinien Wände darstellen. Betrachten wir eine beliebige zulässige Färbung. Wir nehmen an, dass genau in die Wände, die zwischen Glühbirnen in den von uns gewählten Farben rot und weiß verlaufen, Türen eingebaut sind. In Abbildung 21 haben wir diese Wände durch ein helleres grün gekennzeichnet. Jetzt kann man folgende interessante Beobachtung machen: Wenn wir versuchen, von außen so weit wie möglich in das Labyrinth hineinzulaufen, so enden wir immer in einem dreifarbig gefärbten „Zimmer“, egal wie groß k ist, und egal wie die Bauingenieure, unter Einhaltung der Regeln, die restlichen Glühbirnen gewählt haben. Aber wieso ist das so?Betrachte Abbildung 21. Die äußerste der gebo-

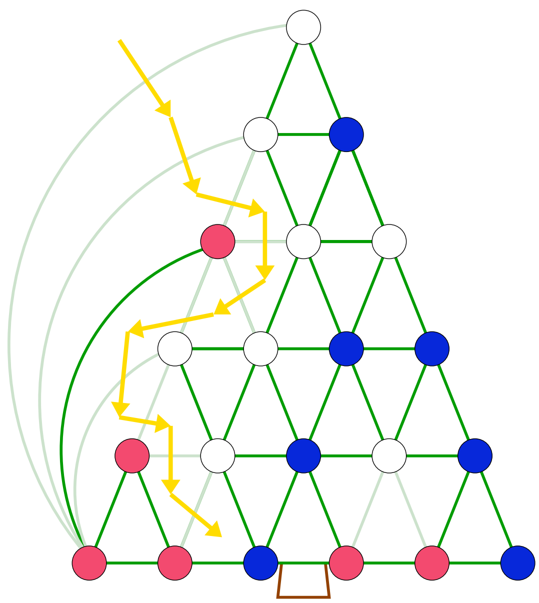


Abbildung 21: Ein Weg von draußen zu einem dreifarbigen Dreieck

genen Wände verläuft zwischen der oberen und der linken Ecke des Gerüsts, die weiß bzw. rot gefärbt sind. Hier können wir also das Labyrinth betreten. Klar ist, dass jedes Dreieck, das man betreten hat, eine rote und eine weiße Ecke besitzt. Jetzt können zwei Fälle auftreten: Entweder, die dritte Ecke ist blau – dann sind wir in einem dreifarbigen Dreieck angekommen, und wir sind fertig – oder, die Ecke ist nicht blau – dann gibt es noch genau eine zweite Tür, die aus dem Dreieck wieder hinaus in ein neues Dreieck führt. Da wir offensichtlich nicht wieder aus dem Gerüst herauskommen, es sei denn, wir laufen den gleichen Weg zurück, kommen wir irgendwann an ein Ende des Weges und haben ein dreifarbiges Dreieck gefunden. Damit ist bewiesen, dass immer *mindestens* ein dreifarbiges Dreieck existiert. Um zu beweisen, dass es eine Färbung gibt, die nur ein dreifarbiges Dreieck enthält, reicht es, eine solche Färbung für ein beliebiges $k \geq 3$ anzugeben. Das schafft ihr bestimmt ganz leicht.

Wie steht es mit der Färbung von Ties Weihnachtsbaumgerüst? Ties hatte die Färbung der drei äußeren Kanten vorgegeben. Dies ist ein Spezialfall des vorherigen Problems, da Ties alle Regeln einhält und lediglich neue Einschränkungen hinzufügt. Also wissen wir schon, dass es mindestens ein dreifarbiges Dreieck gibt. Allerdings kann *eins* nicht die richtige Antwort sein, da allein schon durch Ties Vorgaben zwei dreifarbige Dreicke an den unteren beiden Ecken entstehen (siehe Abbildung 22). In Abbildung 22 gibt

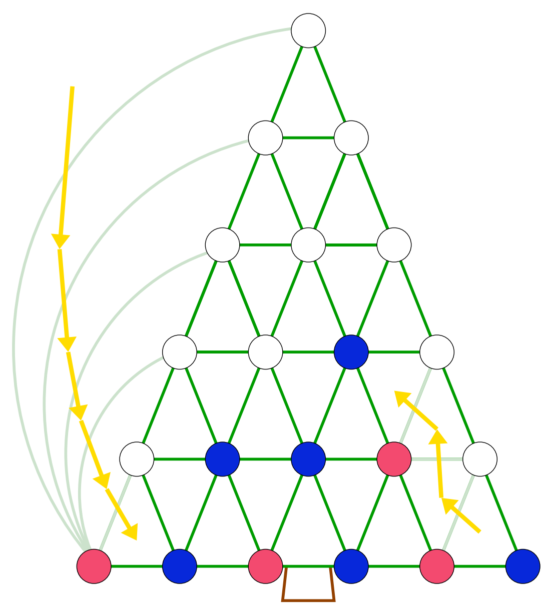


Abbildung 22: Bei Ties Färbung gibt es mindestens zwei Wege

eine Färbung mit genau drei dreifarbigen Dreiecken an. Also müssen wir nur noch entscheiden, ob immer mindestens drei solche Dreiecke existieren, oder ob es eine Färbung mit zwei dreifarbigen Dreicken gibt. Dazu kann man sich folgendes überlegen: Angenommen, wir versuchen wieder, von außen so weit wie möglich ins Labyrinth hineinzugehen. Dann endet unser Pfad in einem dreifarbigen Dreieck. Da sich der Pfad aber nicht verzweigen kann und er endet, sobald er in einem dreifarbigen Zimmer angekommen ist, kann nur eines der beiden vorher identifizierten dreifarbigen Dreiecke auf dem Pfad liegen. Was passiert, wenn wir von dem anderen dreifarbigen Dreieck loslaufen? Da wir weder den ersten Pfad noch das Äußere des Labyrinths erreichen können, muss dieser Weg wieder in einem dreifarbigen Dreieck enden; die richtige Antwort lautet also *drei*.

Tipp: Man kann sich auf ähnlichem Wege überlegen, daßes in beiden Fällen stets eine ungerade Anzahl von dreifarbig gefärbten Dreiecken gibt. Versucht doch einmal, einen Beweis aufzustellen! Übrigens steckt hinter diesem Problem das *Spernersche Lemma*, das unter anderem für den Beweis des Satzes von Nash, ein fundamentaler Satz der Spieltheorie, herangezogen wird.

22 Elfenfunk

Autoren: Andreas Eisenblätter und Hans-Florian Geerdes
Projekt: B4

22.1 Aufgabe

Von Jahr zu Jahr werden mehr Geschenke zu Weihnachten verschenkt. Das stellt den Weihnachtsmann vor immer größere logistische Herausforderungen. Zum Glück hat er seine Elfen, die ihm helfen – aber darüber hinaus bedient er sich auch der modernsten Technik. Wegen der vielen Geschenke wurde vor einigen Jahren ein zweiter Verladehof eingerichtet, auf dem die Elfen die Geschenke auf Schlitten packen. Da sich oft noch Änderungen in letzter Minute ergeben, kommuniziert die Wunschzettelabteilung am Nordpol mit den Elfen auf den Verladehöfen über Handys. Der Weihnachtsmann hat ein Mobilfunksystem entwickelt, das UMTS ähnlich ist, und zwei Funkantennen aufstellen lassen, für jeden Hof eine. Um solide planen zu können, muss der Weihnachtsmann wissen, wie viele Elfen in diesen beiden Funkzellen gleichzeitig telefonieren können.

Jede Zelle hat eine maximale Funkleistung von 10 W. Damit die Handys der Elfen das Netz überhaupt "sehen" können, muss 1 W von dieser Leistung auf eine Art Leuchtfeuersignal, das sogenanntes Pilot-Signal, verwendet werden. Die restlichen 9 W können in jeder Zelle für die Funkverbindungen zu den einzelnen Elfen genutzt werden.

Bei der eingesetzten Technik stören sich allerdings die Verbindungen in den einzelnen Zellen und auch die Zellen untereinander gegenseitig. Damit die Funkverbindung zu einem Handy aufrechterhalten werden kann, muss das Signal-zu-Störsignal-Verhältnis (SSV) des Handys mindestens zwei Prozent betragen. Das Signal-zu-Störsignal-Verhältnis berechnet sich als das Verhältnis der Empfangsleistungen im Handy zwischen dem Signal, das für das Handy bestimmt ist, zu der Summe aller anderen empfangenen Signale.

Wenn also nur eine Zelle betrieben würde, in der eine einzelne Elfe von der Zentrale angerufen und hierfür 0,5 W Sendeleistung aufgebracht würden, dann wäre das Signal-zu-Störsignal-Verhältnis:

$$\text{SSV} = \frac{\text{Handysignal}}{\text{Pilot}} = \frac{0,5\,\text{W}}{1\,\text{W}} = 50\,\%.$$

Das SSV wäre also größer als 2 %, und das Handy wäre versorgt. Wenn aber für die Verbindung nur 0,01 W genutzt würde, dann könnte das Handy nicht bedient werden, weil gilt:

$$\text{SSV} = \frac{0,01\,\text{W}}{1\,\text{W}} = 1\,\%.$$

Diese beiden Rechnungen machen sich zunutze, dass das gewünschte Signal und das störende Pilot-Signal von derselben Zelle abgestrahlt werden und sich auf dem Weg zum Handy in gleicher Weise abschwächen. Hier wurde das Verhältnis der Empfangsleistungen einfach aus dem Verhältnis der Sendeleistungen ermittelt. Werden zwei oder mehr Zellen betrieben, kann diese Vereinfachung nicht mehr gemacht werden.
Wenn Handys in beiden Zellen gleichzeitig benutzt werden, dann stören sich die Zellen auch gegenseitig. Allerdings erreicht das Signal den anderen Hof schwächer als den eigenen. Die Elfen haben ausgemessen, dass Signale für Hof 1 im Hof 2 fünfmal schwächer und Signale für Hof 2 in Hof 1 siebenmal schwächer ankommen.
Wenn in Hof 1 ein Handy mit 0,7 W bedient wird und in Hof 2 ein Handy mit 0,5 W, dann gilt für das SSV des Handys auf Hof 1:

$$\begin{aligned}\text{SSV Hof 1} &= \frac{\text{Handysignal 1}}{\text{Pilot 1} + 1/7\ (\text{Pilot 2} + \text{Handysignal 2})} \\ &= \frac{0,7\,\text{W}}{1\,\text{W} + (1/7)\cdot(1\,\text{W} + 0,5\,\text{W})} \simeq 57,6\,\%.\end{aligned}$$

Für das Handy auf Hof 2 gilt:

$$\begin{aligned}\text{SSV Hof 2} &= \frac{\text{Handysignal 2}}{\text{Pilot 2} + 1/5\ (\text{Pilot 1} + \text{Handysignal 1})} \\ &= \frac{0,5\,\text{W}}{1\,\text{W} + (1/5)\cdot(1\,\text{W} + 0,7\,\text{W})} \simeq 37,3\,\%.\end{aligned}$$

Es können also beide Verbindungen parallel betrieben werden.
Zunächst telefoniert keine Elfe, aber nach und nach müssen immer mehr Änderungen der Wunschzettel an die Elfen weitergeben werden. Hat die Zentrale eine Elfe erreicht, bleibt die Verbindung bestehen. Denn vielleicht ergibt sich ja gleich schon die nächste Änderung.
Wenn es für eine der beiden Zellen die Möglichkeit gibt, noch eine Elfe auf ihrem Hof zu bedienen, so wird sie das sofort tun und ihre Sendeleistung entsprechend aufteilen. Dabei geht sie davon aus, dass die andere Zelle zunächst

ihre Sendeleistung nicht ändert. Es ist der Zelle zu diesem Zeitpunkt aber nur wichtig, dass das SSV für alle Elfen auf dem eigenen Hof stimmt.
Wenn es durch die Hinzunahme der Elfe in der einen Zelle dazu kommt, dass eine oder mehrere Elfen in der anderen Zelle auf einmal ein SSV unter 2 % haben, dann versucht die andere Zelle, die Sendeleistungen so anzupassen, dass dies behoben wird – wieder nur mit Rücksicht auf die eigenen Elfen. Wenn das für eine oder mehrere Elfen nicht möglich ist, dann bricht deren Funkverbindung zusammen.
Dem Weihnachtsmann raucht bei soviel Technik der Kopf . . . aber eines muss er wissen: stellt sich irgendwann ein Zustand ein, in dem keine Elfen mehr im Gespräch unterbrochen werden? Denn nur dann kann ja die Geschenkeverteilung reibungslos klappen! Und wenn ja, wieviele Elfen telefonieren dann auf welchem Hof?

Antwortmöglichkeiten:

1. Nein, die beiden Zellen werden sich die ganze Zeit gegenseitig stören und immer wieder gegenseitig Elfen aus dem Netz werfen. Der Weihnachtsmann sollte sich besser nicht auf die Technik verlassen!
2. Ja, nach einer Weile werden beide Zellen eine maximale Anzahl von Elfen bedienen und die Situation stabilisiert sich. Auf beiden Höfen telefonieren dann 50 Elfen.
3. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 5 Elfen auf Hof 1 und 7 Elfen auf Hof 2.
4. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 45 Elfen auf Hof 1 und 47 Elfen auf Hof 2.
5. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 40 Elfen auf Hof 1 und 38 Elfen auf Hof 2.
6. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 32 Elfen auf Hof 1 und 41 Elfen auf Hof 2.
7. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 35 Elfen auf Hof 1 und 27 Elfen auf Hof 2.
8. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 36 Elfen auf Hof 1 und 34 Elfen auf Hof 2.

9. Ja, die Situation stabilisiert sich bei 36 Elfen auf Hof 1 und 33 Elfen auf Hof 2.
10. Ja, der Zustand kann sich stabilisieren. Aber wieviele Elfen dann auf welchem Hof telefonieren, hängt dann davon ab, wie sich die Situation entwickelt hat.

Projektbezug:

Das MATHEON-Projekt B4 beschäftigt sich mit der Planung und optimalen Konfiguration von UMTS-Funknetzen. Das Problem ist eine vereinfachte Fragestellung aus der Lastkontrolle. Mit Methoden, die in dem Projekt entwickelt werden, lassen sich solche Fragen unter reellen Bedingungen sofort lösen, ohne lange herumzuprobieren!

22.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 5

40 Elfen auf Hof 1 und 38 Elfen auf Hof 2 können stabil gleichzeitig mit der Zentrale telefonieren.
Wir leiten diese Lösung in drei Schritten her. Zuerst zeigen wir, dass mindestens 40 bzw. 38 Elfen bedient werden können, egal wie viele Elfen in der jeweils anderen Zelle telefonieren. Dann argumentieren wir, dass in diesem Zustand keine der beiden Zellen noch eine weitere Elfe bedienen kann. Zuletzt weisen wir nach, dass dies die einzige Konfiguration ist, in der beide Zellen gleichzeitig keine weitere Elfe bedienen können.
Bei unserer Herleitung können wir uns auf folgende Beobachtung stützen. Das Mobilfunksystem des Weihnachtsmanns garantiert zwar nicht, dass die beiden Zellen die Elfen jeweils mit der minimal möglichen Sendeleistung versorgen. Doch es ist klar, dass dann am meisten Elfen versorgt werden können, wenn die SSV-Bedingung für jede Verbindung genau erfüllt und damit überschüssige Sendeleistung vermieden wird.

Schritt 1 Wir ermitteln, wie viel Elfen je Zelle mindestens bedient werden können. Hierzu rechnen wir aus, wie viele Elfen jeweils in einer Zelle bedient werden können, wenn die andere die vollen 10 W als Störsignal abstrahlt.
Für den Hof 1 wollen wir also die Anzahl n_1 der Elfen bestimmen. Aus der Aufgabenstellung und der Vorbemerkung ergibt sich, dass für alle Funkverbindungen zu den Elfen in Hof 1 jeweils dieselbe Sendeleistung p_1 genutzt werden kann. Diese berechnet sich in Abhängigkeit von der Anzahl n_1 telefonierender Elfen in Hof 1 für ein SSV von 2 %

$$\begin{aligned}
2\,\% &= \frac{\text{Signalstärke } p_1}{\text{Störungen aus Zelle 1} + \text{Störungen aus Zelle 2}} \\
&= \frac{\text{Signalstärke } p_1}{\text{Pilot 1} + (n_1 - 1)\,\text{Signalstärke } p_1 + 1/7 \text{ Maximalleistung Zelle 2}} \\
&= \frac{p_1}{1 + (n_1 - 1)\,p_1 + 1/7 \cdot 10}
\end{aligned}$$

als

$$p_1 = \frac{17}{7\,(51 - n_1)} \qquad \text{für } 1 \leq n_1 < 51.$$

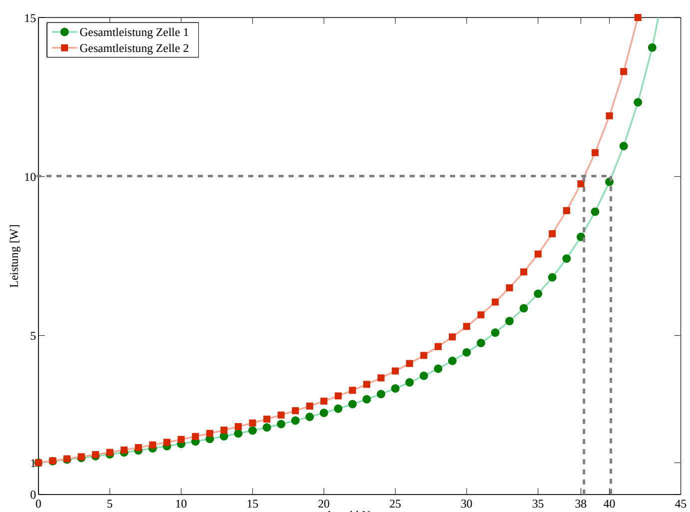
Mit steigendem n_1 wächst auch die benötigte Leistung pro Verbindung. Mehr als 50 Elfen lassen sich mit auf keinen Fall bedienen. Das ergibt sich bei der Herleitung dieser Formel. Um n_1 Verbindungen gleichzeitig zu bedienen, benötigt Zelle 1 eine geamte Sendeleistung von $1+n_1 \cdot p_1(n_1)$. Insgesamt kann sie aber nur 10 W abstrahlen. Wir suchen also das größte n_1 mit

$$1 + n_1 \cdot p_1(n_1) \leq 10$$

Die beiden Formeln zusammen ergeben $n_1 = 40$.
Mit den gleichen Argumenten und dem gleichen Rechenweg erhalten wir für die zweite Zelle die Formel

$$p_2 = \frac{15}{5\,(51 - n_2)} \qquad \text{für } 1 \leq n_2 < 51$$

und damit $n_2 = 38$. Die Gesamtleistungen von beiden Zellen in Abhängigkeit von der Anzahl der Nutzer und die maximalen Werte von n_1 und n_2 sind auf dem folgenden Bild noch einmal anschaulich gemacht:



Schritt 2 Die tatsächlichen benötigten Sendeleistungen p_1 und p_2 pro Verbindung in Zelle 1 und Zelle 2 zur Bedienung von n_1 bzw. n_2 Elfen lassen sich nur unter genauer Beachtung der Störungen zwischen den Zellen bestimmen.

Die Leistungen ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems

$$0,02 = \frac{p_1}{\underbrace{1 + (n_1 - 1)\,p_1}_{\text{Störungen aus Zelle 1}} + \underbrace{1/7(1 + n_2\,p_2)}_{\text{Störungen aus Zelle 2}}}$$

$$0,02 = \frac{p_2}{\underbrace{1/5(1 + n_1\,p_1)}_{\text{Störungen aus Zelle 1}} + \underbrace{1 + (n_2 - 1)\,p_2}_{\text{Störungen aus Zelle 2}}}$$

Wir formen dieses System elementar um und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$(357 - 7n_1)p_1 - \qquad n_2\,p_2 = 8 \tag{14}$$

$$-n_1\,p_1 + (255 - 5n_2)\,p_2 = 6 \tag{15}$$

in den Unbekannten p_1 und p_2. Für $n_1 = 40$ und $n_2 = 38$ lautet die Lösung $p_1 = 44/205$ und $p_2 = 46/205$. Als Gesamtsendeleistung ergibt sich damit für Zelle 1 ein Wert von $1965/205 \approx 9,59\,\mathrm{W}$ und für die Zelle 2 ein Wert von $1953/205 \approx 9,53\,\mathrm{W}$.
Werden diese genauen Sendeleistungen in der Analyse aus Schritt 1 jeweils – statt dem zunächst angenommenen maximalen Wert von 10 W– als Störleistung der anderen Zelle eingesetzt, so erhält man abermals $n_1 = 40$ und $n_2 = 38$. In keiner der Zellen kann also auch nur eine Elfe mehr telefonieren, wenn in der anderen bereits 38 bzw. 40 telefonieren.

Schritt 3 Schließlich ist noch nachzuweisen, dass unabhängig von der Reihenfolge, in der in beiden Zellen Telefonate zustandekommen am Ende stets 40 bzw. 38 Verbindungen gehalten werden können – ausreichend viele Verbindungsversuche vorausgesetzt.
Sollten in Zelle 1 mehr als 40 und in Zelle 2 weniger als 38 Elfen telefonieren, dann kann eine weitere Verbindung in Zelle 2 etabliert werden. Selbst wenn Zelle 1 mit ihrer maximalen Sendeleistung sendet, ist es gemäß Schritt 1 möglich, dass die Sendeleistungen pro Verbindung in Zelle 2 so angepasst werden, dass eine weitere Verbindung möglich ist. Durch die vergrößerte Störleistung in Zelle 1 können dadurch allenfalls Verbindungen in Zelle 1 abreißen.
Das gleiche Argument gilt auch umgekehrt. Damit ist gezeigt, dass in Zelle 1 stets mindestens 40 und in Zelle 2 stets mindestens 38 Elfen gleichzeitig

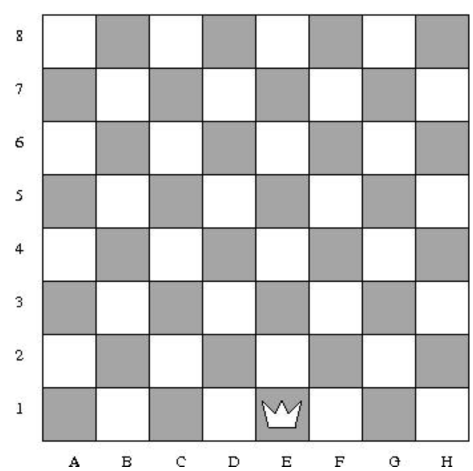
telefonieren können. Sind einmal so viele Verbindungen aufgebaut sind gemäß Schritt 2 keine weiteren möglich.

23 Der Königsweg

Autoren: Andreas Loos / Günter M. Ziegler
Projekt: F1 Discrete surface parametrization

23.1 Aufgabe

Susi, dem Schneehuhn, war stinklangweilig. Das ganze Jahr über spielte sie Schach, mal mit dem Nikolaus und mal mit Knecht Ruprecht. Doch jetzt, in der Vorweihnachtszeit, hatten die beiden keine Zeit mehr: Knecht Ruprecht polierte stundenlang die Kufen des Schlittens mit Skiwachs, um es später beim Ziehen leichter zu haben. „Ein Rentier! Dass ich nicht lache! Hier gibt's nur Rentner, keine Rentiere", schimpfte er dabei vor sich hin. Von Weihnachtslegenden hielt Ruprecht nicht viel. Und Nikolaus selbst hatte Susi schon seit Tagen nicht mehr gesehen, weil er von morgens bis abends Geschenke packte.
Susi seufzte. Vor ihr stand das Spielbrett, und darauf einsam der weiße König auf dem Feld E1:



Susi Schneehuhn ließ den König ein paar Schritte machen, nach den Regeln des Schachspiels: Immer von einem Feld ins nächste horizontal, vertikal oder diagonal benachbarte Feld. Nach einem Schritt kam der König in einem der Felder D1, D2, E2, F2 oder F1 zum Stehen. Mit sieben Schritten konnte er es zum Beispiel bis zum Eckfeld A8 schaffen. Da stutzte Susi: Es gab mehrere Wege zwischen E1 und A8!

Aufgeregt begann sie, mit dem Schnabel die Wege in den Schnee zu ritzen, die einen König in sieben Schritten von E1 nach A8 führen. Dann hüpfte Susi ein paar Schritte zurück und betrachtete ihre Zeichnung stolz. Sie konnte jetzt sogar auf Anhieb sagen, wie viele Wege den König in sieben Schritten von E1 nach A8 bringen – und dabei über das Feld B7 führen.

Wie viele der Wege sind das?
Antwortmöglichkeiten:

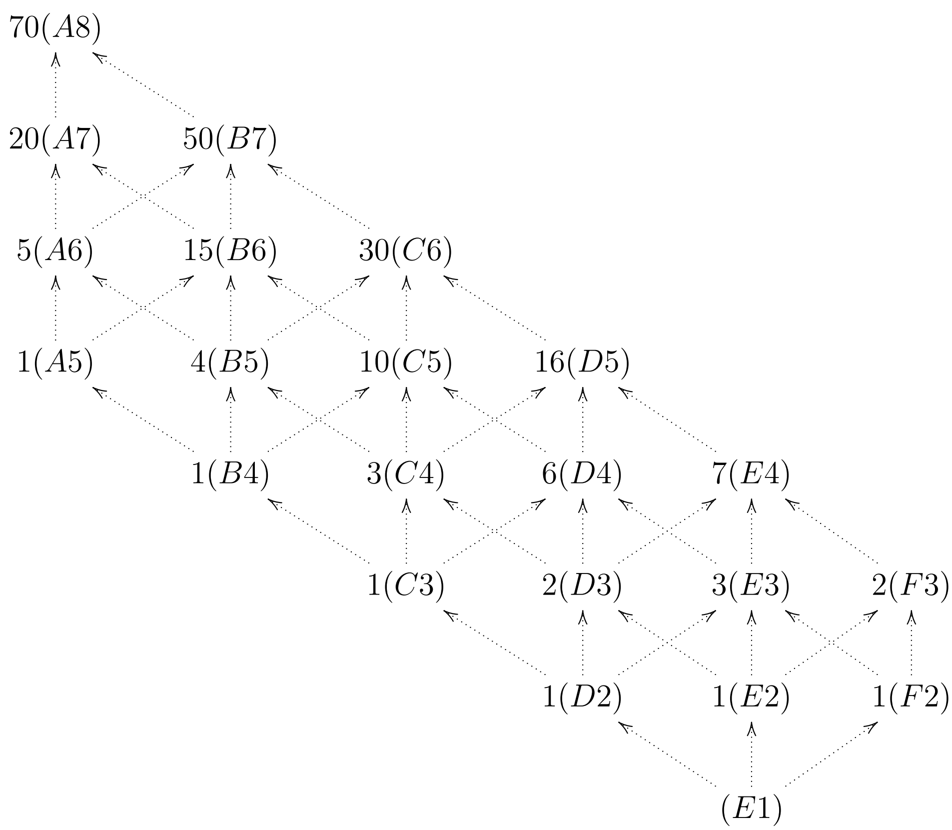
1. Gar kein Weg.
2. Genau ein Weg.
3. 2 Wege
4. 5 Wege
5. 2^3 Wege
6. 3^2 Wege
7. 32 Wege
8. 50 Wege
9. 265 Wege
10. 3^8 Wege

Projektbezug:
Die Anzahl der einfachen Wege in Graphen zu bestimmen, ist ein typisches graphentheoretisches Problem. Man kann das Problem von Susi Schneehuhn zum Beispiel als Netzwerkfluss interpretieren: Der Startpunkt E1 ist eine Quelle und der Zielpunkt A8 eine Senke. Schickt man über jeden Weg von E1 nach A8 jeweils eine Einheit Waren, dann kommen am Ziel so viele Einheiten Waren an, wie Wege zum Ziel führen. Bei Ausfall eines Knotens im Netzwerk fällt genau die Anzahl der Flüsse, die über diesen Knoten führen, weg.

23.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 8

Susi Schneehuhn zeichnet in den Schnee einen so genannten *Graphen*, dessen *Knoten* den Feldern entsprechen, die der König auf seinen sieben Schritten von E1 nach A8 besuchen kann. Benachbarte Felder werden jeweils miteinander verbunden – Mathematiker sagen: sie sind *adjazent* –, weil der König sie in einem Schritt erreichen kann.
Die Anzahl der Wege, die zu einem bestimmten Knoten K führen, ist nun die Summe der Anzahl aller Wege zu Feldern, die der König im *vorhergehenden* Schritt erreichen kann – denn von dort schafft er es ja im nächsten Schritt auf Feld K. Uns interessieren dabei allerdings nur die Wege, die den König dem Ziel A8 näher bringen. Beim Startfeld E1 beginnend, ergibt sich damit folgender gerichteter Graph; bei den Knoten sind jeweils die Anzahl der Wege dorthin und die Adresse des entsprechenden Schachfeldes notiert:



Das Feld B7 kann der König also entweder vom Feld A6, B6 oder C6 aus erreichen. Weil 5 Wege zu A6, 15 Wege zu B6 und 30 Wege zu C6 führen, gibt es insgesamt 50 Wege, die über B7 zu A8 führen.

24 Schlittenfahrt durch die Zeit

Autor: Olaf Teschke
Projekt: Z1

24.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann - dessen Schlitten sich bekanntlich auch in der Zeit bewegen kann, damit er überall pünktlich ist - soll sechs verschiedenen Mathematiker(inne)n in unterschiedlichen Jahren Weihnachtsgeschenke bringen. Leider ist der Weihnachtsmann etwas zerstreut und hat die genauen Auslieferungsjahre vergessen. Auf seinem Notizblock steht nur noch eine Prüfsumme, die aus der Summe der Quadrate der Jahreszahlen besteht, deren letzte Ziffer aber durch eine dicke Schneeflocke verwischt ist.

Zum Glück erinnert sich der Weihnachtsmann noch an einige Details. So sind fünf der Jahreszahlen Primzahlen; außerdem weiß er noch einiges aus dem Leben der Beschenkten:

Der erste Mathematiker passte im Laufe von (manchmal erzwungenen) Wohnsitzwechseln mehrfach seinen Namen dem Aufenthaltsort an. Er war auf einer Reihe von Gebieten der Mathematik tätig, von den Grundlagen bis hin zu weitreichenden Anwendungen. Leider zeitigten diese einige Nebenwirkungen - ein von ihm entworfenes Computermodell macht Viren ihre Tätigkeit besonders leicht, und er erkrankte später schwer an den Folgen von Experimenten mit seiner durchschlagendsten Anwendung. Das machte ihn freilich posthum zum Star - er war das Vorbild für den Titelhelden eines bekannten Films.
Der Weihnachtsmann bringt ihm ein Geschenk in dem Jahr, in dem seine Arbeiten zu logischen Grundlagen der Mathematik und zur Mathematisierung der Quantenmechanik veröffentlicht werden.

Die Zweite lernte Mathematik neben vielen anderen Dingen von ihrem Vater, den sie bald übertraf - vielen galt sie als die umfassendste Wissenschaftlerin ihrer Zeit, die auch in der Philosophie, Literatur und Astronomie glänzte. In ihrer Heimatstadt wurde ihr ein Lehrstuhl für Philosophie an einer der berühmtesten Universitäten der Epoche eingeräumt. Ob sie auch an der anderen Elite-Uni jener Zeit gelehrt hat, ist nicht ausreichend belegt; doch ist sie wahrscheinlich in einem späteren berühmten Renaissancegemälde dieser Bildungsstätte als einzige Frau verewigt worden. Leider nahm sie ein tragisches Ende - Anhänger eines radikalen Erzbischofs nahmen Anstoß an ihr und ermordeten sie auf grausame Weise. Der Erzbischof wurde später von der katholischen Kirche heiliggesprochen.

Der Weihnachtsmann bringt ihr ein Geschenk sechs Jahre vor ihrem Tod.

Der Dritte konstruierte in seiner Jugend ein wunderschönes (leider sehr ungenaues) Modell des Planetensystems, indem er die Umlaufbahnen der damals bekannten fünf Planeten zu den fünf platonischen Körpern in Beziehung setzte. Noch bevor die Entdeckung eines weiteren Planeten dieses harmonische Bild zerstören konnte, fand er allerdings eine wesentlich bessere Beschreibung. Eine vom ihm gestellte Frage wurde erst Jahrhunderte später beantwortet und löste unter Mathematikern einen tiefen Zwist darüber aus, was man unter einem Beweis versteht. Sein Werk über die Entstehung der Schneeflocke wird dagegen einhellig von allen Weihnachtselfen gelobt. Obwohl er riesige astronomische Berechnungen vollbrachte und äußerst genaue Planetentafeln für die Schifffahrt aufstellte, verdankte er den größten Teil seines Lebensunterhalts der angewandten Astronomie (im Sinne jener Zeit), nämlich der Erstellung von Horoskopen. Durch diese Tätigkeit erlangte er die Protektion der Mächtigen, konnte aber nicht verhindern, dass seine Mutter als Hexe angeklagt und gefoltert wurde.

Der Weihnachtsmann bringt ihm ein Geschenk in seinem Geburtsjahr - mit drei Tagen Verspätung.

Der Vierte war sehr vielseitig - neben seiner mathematischen Tätigkeit war er u.a. auch Philosoph, Redakteur, Profisportler und Landwirt. Mit seinem Bruder zusammen verfasste er auch ein Theaterstück, das allerdings nicht sehr erfolgreich war - die eigentliche literarische Berühmtheit der Familie war die erste Frau seines Bruders, die auch heute noch als herausragende Lyrikerin verehrt wird. In der Mathematik bewies er fundamentale Sätze in der Algebra - einer davon wurde zumindest teilweise nach ihm benannt, andere tragen fremde Namen. Als Außenseiter in der Wissenschaft blieb ihm trotz seiner Leistungen eine Professur verwehrt. So musste er sein Geld vor allem als (Denk-)Sportler verdienen, wobei er es bis zum Weltmeister brachte.

Der Weihnachtsmann bringt ihm ein Geschenk in dem Jahr, in dem er an der Universität Erlangen in Mathematik promovierte.

Der Fünfte hatte dieselbe Nationalität wie der erste und übertraf ihn sogar in seiner Reiselust, hatte allerdings eine deutliche Abneigung gegen dessen explosive Experimente. Berühmt ist er für die Vielzahl und Bandbreite seiner Veröffentlichungen, die oft mit Koautoren entstanden. Dies führte auch zur Definition einer berühmten nach ihm benannten Zahl. Bekannt ist auch seine Exzentrizität und Drogensucht - aufgrund einer Wette setzte er zwar einmal seinen Konsum aus, beklagte aber den dadurch entstandenen Schaden an der Mathematik. Seine Vorstellung eines göttlichen Buches der Beweise führte später zu einem mathematischen Bestseller - was ihn angesichts seiner völligen materiellen Bedürfnislosigkeit kaum gerührt hätte. Auch den Cole-Preis der American Mathematical Society, den ihm Weihnachtsmann brachte, stiftete er anderen.

Nummer sechs zeigte schon früh seine mathematische Begabung, ebenso wie seine Liebe zur Musik und für ausgedehnte Wanderungen. Nachdem er einige Jahre in gutbezahlten Positionen im Ausland tätig war, meinte er genügend Geld zu haben, um für den Rest seines Lebens in Ruhe unabhängig Mathematik treiben zu können. Er kehrte nach Hause zurück, wo er sehr zurückgezogen über eine Theorie nachdachte, mit der unter anderem ein berühmtes Jahrhundertproblem bewiesen werden konnte. Seinen Beweis dazu publizierte er im Internet, lehnte es aber ab, einen Preis für seine Leistung entgegenzunehmen - er wolle nicht Galionsfigur einer mathematischen Gemeinschaft werden, der er sich nicht mehr zugehörig fühle.
Der Weihnachtsmann bringt ihm sein Geschenk in dem Jahr, in dem er die Publikation seines Beweises im Internet abschloss.

Antwortmöglichkeiten:
Die Zahl auf dem Notizblock lautet:

1. 17792490
2. 17792491
3. 17792492
4. 17792493
5. 17792494

6. 17792495
7. 17792496
8. 17792497
9. 17792498
10. 17792499

Projektbezug:

Im Projekt Z1 - Mathematik an der Schule - werden Aufgabenstellungen erarbeitet, die die Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen aus verschiedenen Blickwinkeln motivieren soll. Ein typisches Beispiel dafür ist das Kodieren von Information und die Diskussion unterschiedlicher Lösungsmöglichkeiten für eine Aufgabe. Dabei sollen Schüler ein Gefühl dafür entwickeln, dass Mathematik nicht in der stumpfen Abarbeitung eines Algorithmus unter dem einengenden Ziel einer fixierten Anwendung besteht, sondern vor allem von kreativem und unabhängigem Denken lebt. Indem wir die Vielfalt der mathematischen Ideen - auch im Wandel der Geschichte - lebendig werden lassen, soll die Begeisterung für das Fach geweckt werden.

24.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4

Es gibt drei Lösungswege.

1) Man kann die richtigen Personen und Daten wissen, erraten oder durch geschicktes Suchen im Internet finden: John von Neumann/1931, Hypatia/409, Johannes Kepler/1571, Emanuel Lasker/1900, Paul Erdös/1951, Grigorij Perelman/2003

2) Man kann ein Programm schreiben, alle Zerlegungen der Zahlen in Quadrate berechnen und prüfen, in welchen fünf Primzahlen auftauchen.

3) Man betrachtet die möglichen Reste der Prüfsumme bei der Division durch 72. (Wem das zu viele sind, kann auch die Reste bei der Division durch 8 und 9 separat betrachten - das Ergebnis wird wegen des berühmten *Chinesischen Restsatzes* dasselbe sein). Man stellt fest, dass Quadratzahlen nur folgende Reste haben können:
$0, 1, 4, 9, 16, 25, 28, 36, 40, 49, 52, 64$.
Außerdem kommen für die Daten der Jahre weder 2 noch 3 in Frage. Die fünf Primzahlen sind damit teilerfremd zu 72 und ihre Quadrate können nur die Reste $1, 25$ oder 49 bei der Division durch 72 lassen. Durch Kombination dieser drei Möglichkeiten erhält man, dass die Summe der Quadrate der fünf Primzahlen nur den Rest $5, 29$ oder 53 lassen kann. Zusammen mit den weiteren Möglickeiten für den sechsten Summanden erhalten wir als Möglichkeiten der Prüfsumme:

$$5, 6, 9, 17, 21, 29, 30, 33, 41, 45, 53, 54, 57, 62, 65, 69.$$

Die angegebenen Zahlen von 17792490 bis 17792499 lassen die Reste $66, 67, 68, 69, 70, 71, 0, 1, 2, 3$ bei der Division durch 72. Damit kommt nur der Rest 69 in Frage, also ist (4.) richtig.