

Digitaler Adventskalender 2004

www.mathekalender.de

– Lösungsheft –



DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

www.matheon.de

Das DFG-Forschungszentrum MATHEON veranstaltete in Dezember 2004 den Jugendwettbewerb: „Digitaler Adventskalender 2004“. Insgesamt knobelten 6000 Teilnehmer, davon 3800 Schüler, an den täglich neu erscheinenden Aufgaben. Das vorliegende Heft inhaltet die Aufgaben und Lösungen dieses Adventskalenders.

Das Copyright liegt beim den Autoren. Der Leser ist berechtigt, persönliche Kopien für wissenschaftliche oder nichtkommerzielle Zwecke zu erstellen. Jede weitergehende Nutzung bedarf der ausdrücklichen vorherigen schriftlichen Genehmigung der Autoren.

Das DFG-Forschungszentrum MATHEON möchte die angewandete Mathematik Schülern in verschiedenartigen Aktionen näher bringen. Informationen dazu findet man unter

<http://www.matheducates.de>

<http://www.matheon.de>

Viel Spaß beim Nachrechnen der Aufgaben wünscht das Mathekalender-Team.

Berlin, Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Der Aktienindex	4
2	Moleküle	5
3	Neues aus Zellularen	6
4	Geschenkelogistik	8
5	Neuronen	9
6	Tennis	11
7	Stein–Schere–Papier	13
8	Taschenrechner	15
9	Pferderennen	17
10	Der Schneeball	19
11	Laufen und Radeln	20
12	Stochastisches Scheduling	23
13	Quadratstadt	24
14	Altersversorgung	27
15	Autopanne	28
16	Hüte	36
17	Störrische Rentiere	38
18	Forsch–Frosch	39
19	Die verflixte Drei	41
20	Deformierter Würfel	42
21	Schaltplan	44
22	Theater	47
23	Laser	49
24	Zahlenrätsel	50

1 Der Aktienindex

Der Aktienindex gibt an, wie sich der Wert einer ganzen Gruppe von Aktien im Vergleich zu einem Startzeitpunkt verändert. Der bekannteste Index des deutschen Aktienmarktes ist der Deutsche Aktienindex (DAX). Er umfasst die 30 Aktienwerte mit dem größten Börsenumsatz. Die Deutsche Börse führte den DAX Ende 1987 mit einem Anfangsstand von 1000 Punkten ein. Die Zusammensetzung verändert sich im zeitlichen Ablauf: Einmal jährlich im September werden die Aktien geprüft und bei gegebenem Anlass gegen andere Aktien ausgetauscht. Im Aktienkorb eines Aktionärs befanden sich am 01.09.2003 genau 120 Adidas-Salomon-Aktien, 85 Volkswagenaktien und 75 Borussia-Dortmund-Aktien. Ein Jahr später soll geprüft werden, wie sich der Aktienbestand entwickelt hat. Dazu wird der Aktienindex seines Aktienkorbes berechnet, indem das Verhältnis zwischen dem Gesamtwert des Aktienkorbes am 01.09.2004 und dem Gesamtwert des Aktienkorbes am 01.09.2003 gebildet und dieses Verhältnis mit dem Wert des Aktienindexes am 01.09.2003 (1000 Punkte) multipliziert wird. Die folgende Tabelle enthält die Aktienkurse der entsprechenden Aktien und die Dividendenzahlungen (d.h. Zahlungen an den Aktionär, die als Gewinnbeteiligung betrachtet werden können), die innerhalb des einen Jahres an den Aktionär gezahlt wurden.

Aktie	Aktienkurs 01.09.2003	Aktienkurs 01.09.2004	Dividendenzahlung pro Aktie	Aktienkurs bei Dividendenausschüttung
Adidas S.	76,66 €	106,34 €	1,25 €	92,79 €
Volkswagen	46,00 €	31,82 €	1,62 €	38,60 €
Borussia D.	3,33 €	2,53 €	–	–

Bestimme den Aktienindex am 01.09.2004, wenn davon ausgegangen wird, dass der Aktionär die Dividendenzahlung sofort wieder in die gleichen Aktien investiert. Dabei ist der Kauf von Bruchteilen von Aktien möglich.

Antwortmöglichkeiten:

1. 899 Punkte
2. 1193 Punkte
3. 2704 Punkte
4. 1172 Punkte
5. 853 Punkte
6. 1116 Punkte
7. 838 Punkte
8. 2901 Punkte
9. 831 Punkte
10. Keine der gegebenen Antworten ist richtig.

Autorin: Peggy Daume

Die Bestimmung von Aktienindizes ist eine Routineaufgabe im alltäglichen Börsengeschäft. Es gibt jedoch noch eine Reihe ungelöster Probleme der Finanzwelt, denen sich die Wissenschaftler des DFG-Forschungszentrums MATHEON stellen. Ein Problem ist beispielsweise

die mathematische Modellierung „Risiko“. Hierzu werden Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik benutzt, um verschiedene Formen von dem, was wir normalerweise mit Risiko bezeichnen, zu analysieren. Es geht uns dabei nicht darum, durch Spekulation reich zu werden, sondern z. B. um die Aufgabe, einen „fairen“ Preis für eine Versicherungspolice oder eine Aktienoption zu bestimmen.

Lösung: Antwort 2 ist richtig. (Anmerkung: Der Aufgabentext spezifiziert nicht klar genug, ob das Verhältnis 2003 zu 2004 oder 2004 zu 2003 gebildet werden soll. Beide Varianten wurden als richtig gewertet. Deshalb wurde auch Antwortoption 7. als richtig gewertet.)

Der Gesamtwert eines Aktienkorbes wird bestimmt, indem man die Summe aus den Produkten der Anzahl der sich im Aktienkorb befindlichen Aktien und dem Aktienkurs bildet. Folglich beträgt der Wert des Aktienkorbes am 01.09.2003:

$$120 \cdot 76,66 \text{ €} + 85 \cdot 46,00 \text{ €} + 75 \cdot 3,33 \text{ €} = 13358,95 \text{ €}.$$

Die Berechnung des Gesamtwertes des Aktienkorbes am 01.09.2004 erfolgt analog, wobei die Dividendenzahlung berücksichtigt werden muss. Für den Wert des Aktienkorbes am 01.09.2004 gilt somit:

$$\left(120 + \frac{1,25 \text{ €} \cdot 120}{92,79 \text{ €}}\right) \cdot 106,34 \text{ €} + \left(85 + \frac{1,62 \text{ €} \cdot 85}{38,60 \text{ €}}\right) \cdot 31,82 \text{ €} + 75 \cdot 2,53 \text{ €} = 15941,12 \text{ €}.$$

Der Aktienindex wird berechnet, indem das Verhältnis des Gesamtwertes am 01.09.2003 und dem Gesamtwert des Aktienkorbes am 01.09.2004 gebildet und dieses Verhältnis mit dem Wert des Aktienindexes am 01.09.2003 (1000 Punkte) multipliziert wird. Damit gilt für den Aktienindex:

$$\frac{15941,12 \text{ €}}{13358,95 \text{ €}} \cdot 1000 \text{ Punkte} = 1193 \text{ Punkte}$$

2 Moleküle

Moleküle spielen in unserem täglichen Leben — meist unbemerkt — eine wichtige Rolle. Dabei ist es bei vielen biologischen Prozessen von entscheidender Bedeutung, dass Moleküle keine starren Gebilde sind, sondern flexibel ihre Form ändern können.

Betrachten wir eine sehr große Anzahl eines gewissen Moleküls, das in zwei Formen vorkommen kann: einer aktiven (A) und einer inaktiven (I). Nehmen wir an, dass zu Beginn alle Moleküle in der inaktiven Form vorliegen. An jedem Tag gehen aufgrund ihrer Flexibilität 30% der inaktiven Moleküle in die aktive Form über, während gleichzeitig 10% der aktiven Moleküle wieder in die inaktive Form zurückwechseln.

Welcher Anteil der Moleküle befindet sich nach sehr, sehr langer Zeit in der aktiven Form? Antwortmöglichkeiten:

1. ein Viertel
2. zwei Drittel
3. drei Viertel
4. ein Drittel
5. zwei Fünftel

- 6. ein Neuntel
- 7. drei Zehntel
- 8. zwei Zehntel

Autor: Dr. Wilhelm Huisinga, Projektgruppe A6

Diese Aufgabe zeigt anhand eines sehr einfachen Beispiels, wie Mathematik bei der Modellierung und Analyse komplexer Prozesse etwa in den sogenannten Lebenswissenschaften eingesetzt werden kann. Auch hier gibt es noch viele ungelöste Probleme, die eine mathematische Herausforderungen darstellen. Hiermit beschäftigen sich Wissenschaftler am DFG-Forschungszentrum MATHEON.

Die korrekte Antwort ist Nummer 3: drei Viertel.

Vier Lösungswege sind ein:

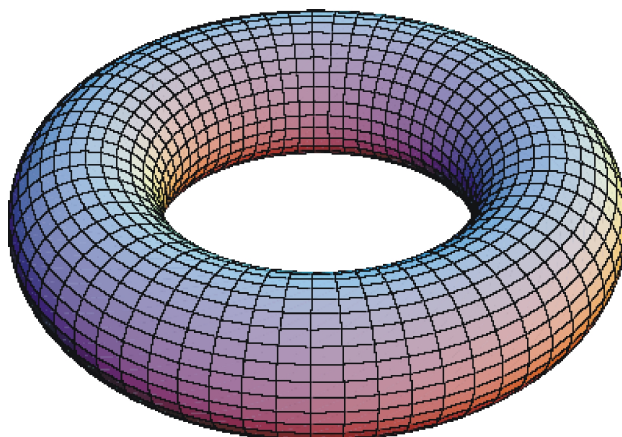
1. Lösen eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten. Die beiden Gleichungen beschreiben die Gleichgewichtslage des System.

$$0,7 \cdot I + 0,1 \cdot A = I \quad \text{und} \quad 0,3 \cdot I + 0,9 \cdot A = A$$

2. Lösen einer Gleichung mit einer Unbekannten. $10 \cdot A = 30 \cdot (1 - A)$
3. Ein kleines Computer-Programm schreiben und simulieren, Probe
4. Gekonntes Raten, Probe

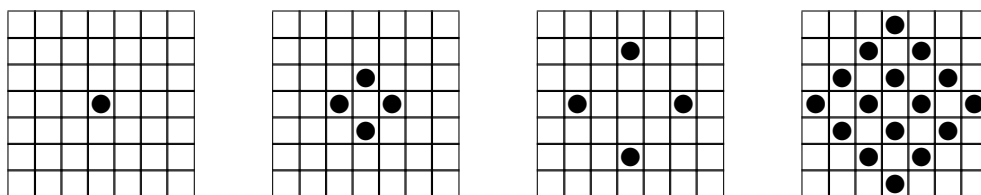
3 Neues aus Zellularien

Der Planet „Zellularien“ ist anders als die Erde keine kugelförmige, sondern eine „kringelförmige“ Welt, die ähnlich einem Autoreifen aussieht (siehe Bild). Weil seine Bewohner praktisch orientiert sind, haben sie ihren Globus in lauter kleine Zellen eingeteilt, jeweils entlang der Kanten von 1024 Längen- und 1024 Breitengraden, so dass jeder der $1024 \cdot 1024 = 1048576$ Einwohner genau vier Nachbarn hat: einen nördlichen, einen südlichen, einen nach Osten und einen nach Westen. Wenn man etwa einen Atlas von Zellularien auf Karopapier zeichnet, so hätte ein Kästchen am linken Rand des Karopapiers die Zelle auf der gleichen Höhe am rechten Rand als westlichen Nachbarn.



Leider hat nun ein Zellularier bei einem Besuch von einem Nachbarplaneten einen extrem gefährlichen und gefräßigen Kroll mitgebracht. Diese eigentlich possierlichen Tierchen vermehren sich rasend und fressen Massen, und sogar sich gegenseitig. Innerhalb eines Monats werden aus einem Kroll in einer Zelle genau vier, die dann in die vier Himmelsrichtungen auswandern und die Zelle leer hinterlassen. Stoßen sie dabei auf andere Krolle, so fressen sich je zwei Krolle gegenseitig auf, so dass entweder immer nur ein oder gar kein Kroll eine Zelle bewohnen kann — bis er sich wieder vermehrt und seine drei Nachkommen und er in die vier Himmelsrichtungen auswandern.

Die Kroll-Populationen nach den ersten vier Monaten sehen also so aus (leere Zellen nicht gekennzeichnet, solche mit einem Kroll mit einem Punkt):



Im zweiten Monat wandert etwa von den je vier Krollen je einer in das Zentrum. Da dann aber dort vier bleiben, fressen sich dort alle gegenseitig, und das Feld bleibt leer.

Frage: Werden die Zellularier jemals von der Krollplage befreit?

1. Ja, nach zehn Monaten
2. Ja, nach 511 Monaten
3. Ja, nach 512 Monaten
4. Ja, nach 1023 Monaten
5. Ja, nach 1024 Monaten
6. Ja, nach 2048 Monaten
7. Ja, nach 1048576 Monaten
8. Nein, niemals

Tipp: Probiere das Ganze erstmal auf einem kleinen Feld von $4 \cdot 4$, $8 \cdot 8$ oder $16 \cdot 16$ Kästchen. Sieh dir insbesondere die Krollverteilung nach 3, 7 und 15 Monaten an.

Wichtig ist, dass die Länge und Breite Zellulariens eine Zweierpotenz ist ($2^{10} = 1024$) und dass die Kanten miteinander verbunden sind, das heißt, ein Kroll ganz außen links hat einen Nachfahren, der nach ganz rechts auswandert.

Lösung:

Die richtige Lösung lautet: "Ja, nach 512 Monaten", also Lösungsmöglichkeit 3.

Am besten überlegt man sich Folgendes (mit Bleistift und Papier zum Nachspielen. Man braucht sich nur die ersten vier Generationen zu überlegen):

Nach drei Schritten bekommt man eine schachbrettartig gefüllte Raute von Krollen. Nach

vier Schritten bekommt man dann vier isoliert stehende Krolle jeweils mit dem Abstand vier vom Zentrum (auf der Karte). Was passiert nach weiteren drei Schritten?

Da die Krolle sich jeweils maximal ein Feld pro Schritt ausbreiten können, können sich diese vier jeweils gar nicht beeinflussen und verhalten sich genauso wie der ursprüngliche Kroll — nach drei weiteren Schritten entstehen also vier Kopien der schachbrettartig gefüllten Raute. Da sie genau nebeneinander passen, entsteht somit eine große Raute der doppelten „Seitenlänge“ (Anzahl der Krolle am Rand, Ecken jeweils mitgezählt). Noch einen Schritt weiter, also im Zeitschritt acht, bleiben wieder nur die Krolle an den Eckpunkten übrig, vier Stück, jeweils mit Abstand acht zum Zentrum.

Ab jetzt sollte es klar sein, wie das Spiel weitergeht: Nach jeweils $2^k - 1$ Schritten entsteht eine Raute der „Seitenlänge“ 2^k . Ein Schritt weiter entstehen vier Krolle jeweils mit Abstand 2^k zum Zentrum.

Jetzt wird es interessant: Da die Kroll-Welt genau $1024 = 2^{10}$ Kästchen „groß“ und wie ein Kringel gekrümmt ist, entsteht nach $2^{10-1} - 1 = 511$ Schritten eine wirklich riesige Raute der „Seitenlänge“ 2^9 , die bis auf einen kleinen Rand von einem Kästchen genau den Planeten überdeckt. Davon überleben einen Schritt später nur die vier Krolle an den Eckpunkten (jeweils im Abstand 2^9 zum Zentrum), aber die entstehen genau übereinander im verbleibenden Rand ($2 \cdot 2^9 = 2^{10} = 1024$), da der Planet ja „kringelförmig“ geschlossen ist. Also fressen sich die vier auf, und die Krolle sind weg nach $2^9 = 512$ Schritten!

4 Geschenkelogistik

Der Weihnachtsmann muss die Kinder A, B, C, ..., K beglücken, welche alle in der Marzipankartoffelstraße wohnen. Wegen seines hohen Alters möchte er dazu ein Geschenkelager in der Marzipankartoffelstraße einrichten, welches von den Wohnungen der Kinder möglichst wenig entfernt ist. Es sind noch jede Menge Wohnungen für ein Geschenkelager frei.

A—B—C—D—E—F—G—H—I—J—K

Frage: Wohin sollte er ziehen?

Antwortmöglichkeiten:

1. zu F
2. in die Mitte zwischen F und G
3. an eine beliebige Stelle zwischen F und G
4. Da alle Wohnungen auf einer Geraden liegen, ist die Summe der Entfernungen überall gleich.
5. Ohne die genauen Entfernungen zu kennen, ist die Aufgabe nicht lösbar.
6. Betrachtet man die Entfernungen der anderen Wohnungen von einem Ursprungspunkt am Anfang der Straße, dann sollte der Weihnachtsmann am arithmetischen Mittel dieser Entfernungen einziehen.
7. Er soll sein Lager am Nordpol ausbauen, weil die Grundstückspreise in dieser Gegend einfach zu hoch sind.

Autor: Falk Ebert

Lösung:

Die richtige Lösung ist 1.: „zu F“.

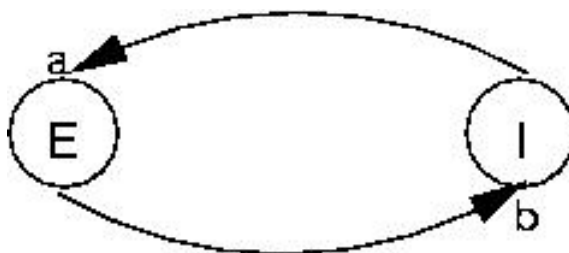
Der Grundgedanke ist sehr einfach:

Wenn es nur darum ginge, eine Wohnung zu finden, die von zwei Kindern auf der Straße (A, K) denselben Abstand hat, dann ist jeder Punkt zwischen A und K gleich gut, da die Summe der Abstände immer die gleiche ist. Bezieht man die nächsten beiden Punkte ein, dann folgt, dass der optimale Wohnort auch zwischen B und J liegen muss. Treibt man dieses Spiel weiter und schachtelt die Intervalle immer weiter, dann bleibt als letztes Intervall E bis G , in dem sich das Geschenkelager befinden sollte. Und der minimale Abstand zum übrigbleibenden F ist offensichtlich dann erreicht, wenn man direkt bei F einzieht.

5 Neuronen

Es war einmal ein kleines Häuschen in einem kleinen Wald nahe der Stadt Hintertupfingen im Landkreis Jotweedee, in dem die Großmutter namens Weißalles und ihr Mann Rudi lebten. Immer am Weihnachtsabend versammelten die Großmutter und der Großvater die Familie um sich, um Weihnachten zu feiern und Geschenke zu verteilen. Die Familie bestand aus ihrem Sohn, der Schwiegertochter und ihren sieben Enkeln. Die Großmutter hatte jedoch die in der Familie eher unbeliebte Angewohnheit, nur demjenigen etwas zu schenken, der eine wissenschaftliche Frage richtig beantwortete.

Einmal, im Jahr 2004, war die Frage besonders knifflig: „Es ist ja allgemein bekannt“, so Großmutter Weißalles, „dass Gehirnströme unter manchen Bedingungen gleichmäßig schwingen, und zwar dauert eine dieser Schwingungen ungefähr 24 Millisekunden, das sind 24 Tausendstel Sekunden. Diese Gehirnaktivität nennt man auch Gamma-Aktivität. Dies kann man ganz einfach mit zwei Neuronen erklären, die ich mal E und I nenne. Diese Neuronen sind miteinander verbunden.“ Dann teilte sie gleiche Skizzen aus:



Die Großmutter fuhr fort: „Wie ihr ja wisst, können Neuronen aktiv und nicht aktiv sein. Beispielsweise bedeutet $E = 1,3$ und $I = -0,5$, dass Neuron E aktiv ist mit dem Aktivierungswert $1,3$ und Neuron I aktiv ist mit dem Wert $-0,5$. Ist dagegen beispielsweise $E = 0$, so ist Neuron E nicht aktiv. Die Neuronen auf der Skizze haben nun folgende Eigenschaften: Neuron E sendet seinen Aktivierungswert an Neuron I (unterer Pfeil in der Skizze). Dieses Neuron I ändert sofort nach Empfang des Signals seinen Wert, indem es den Wert von Neuron E nimmt, diesen Wert mit einer Zahl b multipliziert und das Ergebnis zu seinem eigenen Wert addiert. Dann sendet Neuron I seinen Aktivierungswert an Neuron E zurück (oberer Pfeil in der Skizze). Neuron E nimmt sofort nach Empfang des Signals den Wert von Neuron I , multipliziert diesen Wert mit der Zahl a und zählt das Ergebnis zu seinem eigenen Wert dazu. Dann sendet Neuron E wieder seinen Wert an Neuron I , und alles beginnt von vorn. Wichtig dabei ist, dass beide Neuronen für die Berechnung ihres neuen Wertes immer die gleiche Zeit T benötigen, die Übergabe des eigenen Wertes an das andere Neuron jedoch keine Zeit benötigt.“ Alle folgten der Großmutter

aufmerksam. „Nun die Frage: Wie groß müssen denn a und b sein, damit beide Neuronen nach mehreren Neuberechnungen ihres Wertes erstmalig wieder nach 24 Millisekunden denselben Wert annehmen, also eine Schwingung ausführen? Als Anfangswerte sollt ihr $E = 1$ und $I = -1$ nehmen. Wie viel Zeit T vergeht dabei jeweils für eine Berechnung des eigenen neuen Wertes?“

Dies war wirklich eine schwere Frage, und alle schauten etwas ratlos. Doch die Großmutter gab ein Beispiel. Eine Schwingung sei so etwas wie: Erst ist $E = 1$ und $I = 0$, dann $E = 2$ und $I = 0$, dann $E = 2$ und $I = 1$, dann $E = 1$ und $I = 1$ und wieder $E = 1$ und $I = 0$. In diesem Fall braucht eine Neuberechnung $T = \frac{24\text{ms}}{4} = 6\text{ms}$.

Nach zehn Minuten hatten die Enkelkinder, der Sohn, die Schwiegertochter und der Großvater Antworten, die wir hier wiedergeben. Nur: Welche Antwort ist richtig?

1. Enkel Gert meinte $a = 0$, $b = -1$ und $T = 2\text{ms}$.
2. Enkelin Angela meinte $a = 2$, $b = -2$ und $T = 6\text{ms}$.
3. Enkel Joschka war sich sicher mit $a = -1$, $b = -1$ und $T = 6\text{ms}$.
4. Enkelin Christina war für $a = -2$, $b = -2$ und $T = 6\text{ms}$.
5. Enkel Peter hat geraten $a = -1$, $b = 1$ und $T = 12\text{ms}$.
6. Enkelin Mia hatte errechnet $a = -2$, $b = 2$ und $T = 6\text{ms}$.
7. Enkel Martin legte sich fest auf $a = 2$, $b = 2$ und $T = 4\text{ms}$.
8. Schwiegertochter Inga errechnete $a = -1$, $b = 1$ und $T = 6\text{ms}$.
9. Sohn Jürgen meinte $a = 1$, $b = 1$ und $T = 6\text{ms}$.
10. Großvater Rudi schätzte $a = 1$, $b = -2$ und $T = 4\text{ms}$.

Autor: Axel Hutt

Diese Aufgabe zeigt anhand eines einfachen Beispiels, wie Mathematik bei der Modellierung und Analyse sehr komplexer Prozesse im Gehirn helfen kann. Hier gibt es noch viele ungelöste Probleme, die wirkliche mathematische Herausforderungen darstellen.

<http://www.wias-berlin.de/people/hutt/project/project.html>

Lösung:

Schaltung der Neuronen:

Schritt $E \rightarrow I$: $I_{\text{neu}} = b \cdot E_{\text{alt}} + I_{\text{alt}}$ braucht Zeit T ,

Schritt $I \rightarrow E$: $E_{\text{neu}} = a \cdot I_{\text{neu}} + E_{\text{alt}}$ braucht Zeit T .

Der Fall 6 ist richtig! Alle anderen Fällen führen entweder zu Schwingungen (periodischem Verhalten) oder zu falschen Zeiten T .

Startwerte: $E = 1$, $I = -1$

1. Schritt: $I_{\text{neu}} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ führt zu $E = 1$, $I = +1$
2. Schritt: $E_{\text{neu}} = (-2) \cdot 1 + 1 = -1$ führt zu $E = -1$, $I = +1$
3. Schritt: $I_{\text{neu}} = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$ führt zu $E = -1$, $I = -1$
4. Schritt: $E_{\text{neu}} = (-2) \cdot (-1) - 1 = 1$ führt zu $E = 1$, $I = -1$.

Da der 4. Schritt zum Ausgangszustand zurückführt und weitere Schritte zu periodischem Verhalten führen, zeigen die Neuronen für die gegebenen Parameter eine Schwingung. Da eine Schwingung vier Berechnungsschritte benötigt, ist die Einzelzeit $T = \frac{24\text{ms}}{4} = 6\text{ms}$.

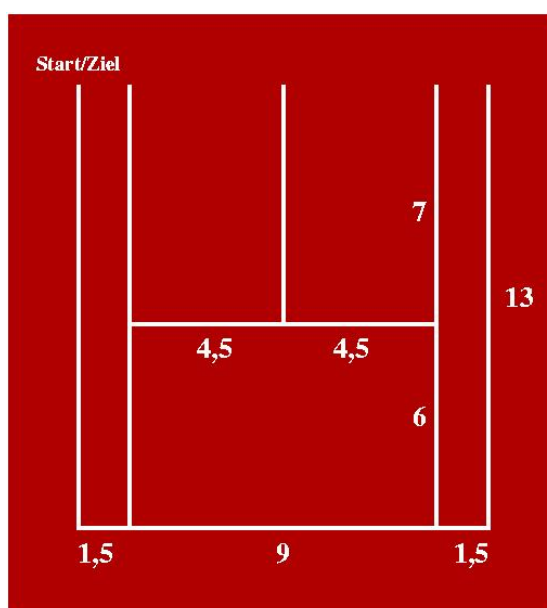
6 Tennis

Ein Balljunge soll die weißen Linien eines halben Tennisfeldes kehren: Die Maße des Tennisfeldes sind in Yards angegeben ($1\text{ Yard} = 0,9144\text{ m}$). Dabei will er das Feld am gleichen Punkt am Netz verlassen, an dem er zu kehren begonnen hat. Welche Entfernung muss er dabei mindestens zurücklegen?

Hinweis: Finde die Wege, die der Balljunge doppelt gehen muss oder bei denen er die Linien verlässt.

Antwortmöglichkeiten:

1. 94 Yards
2. 97,5 Yards
3. 102 Yards
4. 104,82 Yards
5. 108 Yards



Unsere Aufgabe ist eine Variante vom „chinese postman problem“ (CPP):

Finde in einem gegebenen (ungerichteten) Graphen G die kürzeste Rundreise, die alle Kanten besucht! (vgl. „traveling salesman problem“ bei dem man auf einer Rundreise alle *Knoten* besuchen muß)

Unsere Aufgabe entspricht nicht genau dem CPP, denn wir müssen ja nur die Linien kehren, können aber quer über das Feld gehen. Wenn man sich allerdings den Algorithmus zur Lösung des CPP anschaut, bemerkt man, daß er genauso unser Tennisproblem löst. Die Strategie des allgemeinen Algorithmus ist die folgende: Verwandle G durch Ergänzung von Kanten in einen „Euler-Graphen“ G' , also einen Graphen, in dem jedem Knoten eine gerade Anzahl von Kanten zugeordnet ist. Dann berechne einen „Euler-Pfad“ (eine Rundreise, die jede Kante genau einmal besucht) in G' . Ein Euler-Pfad existiert in jedem Euler-Graphen

und es gibt schnelle Algorithmen um einen solchen zu finden. Alle Euler-Pfade haben natürlich die gleiche Länge. Wie ergänzt man nun die richtigen Kanten? Man markiert alle Knoten, denen eine ungerade Anzahl von Kanten zugeordnet ist (das sind ja die Kanten, die „stören“) und verbindet sie paarweise (die Anzahl dieser Kanten ist nämlich immer gerade), so daß die Summe der Längen ihrer Verbindungsstrecken minimal ist. Man spricht von einem „minimalen (perfekten) Matching“. Auch dafür gibt es schnelle Algorithmen. Hier unterscheidet sich unser Problem vom originalen CPP. Im CPP sucht man ein minimales Matching in G . Bei unserem Problem sucht man ein minimales Matching in dem Graphen, der entsteht wenn man alle markierten Knoten mit Geraden untereinander verbindet.

Zusammengefasst der Algorithmus in Kurzform:

- markiere alle ungeraden Knoten
- berechne ein minimales Matching für diese Knoten
- ergänze die dabei gefundenen Kanten zum Graphen, der damit zu einem Euler-Graphen wird
- finde einen Euler-Pfad in diesem Graphen

Es gibt auch Web-Seiten zum „chinese postman problem“. Zwei Links (von vielen) dazu. Beim ersten Link heißt unser Problem „route inspection problem“:

<http://people.bath.ac.uk/ma3mb/route.htm>
<http://www.mymathsteacher.com/discrete/postman.pdf>

Im DFG-Forschungszentrum MATHEON beschäftigt sich Frau Lutz-Westphal im Projekt „Visualisierung von Graphenalgorithmen“ unter anderem mit dem „chinese postman problem“. Links zu Ihrer Webseite:

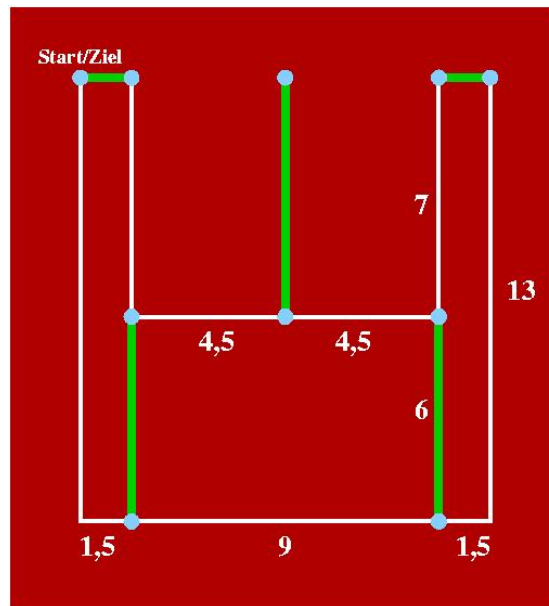
<http://www.math.tu-berlin.de/~westphal/>
<http://www.math.TU-Berlin.DE/~westphal/projekt/>
http://www.math.tu-berlin.de/~westphal/projekt/urania_jan_2004.pdf

Insbesondere der dritte Link führt zu einem Vortrag in dem sehr schön das „chinese postman problem“ und dessen Lösung erklärt wird.

Lösung: Die richtige Lösung ist 3.: 102 Yards.

Man erhält sie, indem man sich folgendes überlegt:

Auf jeden Fall muss der Balljunge die weißen Linien kehren. Das sind 80 Yards. Wie viel muss er zusätzlich gehen? Immer wenn sich drei Linien kreuzen oder wenn eine Linie am Netz endet, muss er einen Weg zusätzlich gehen, um von diesem Punkt auch wieder wegzukommen. Diese Punkte sind blau auf der Lösungsgrafik eingezeichnet. Wenn ich es schaffe, die blauen Punkte paarweise so zu verbinden, dass die Gesamtlänge der Verbindungen möglichst kurz ist, kann ich mir daraus den kürzesten Weg konstruieren. Durch Probieren kommen die Verbindungen heraus, die in der Grafik grün eingezeichnet sind (Länge: 22 Yards). Lösungen 1 und 2 sind nachweislich zu kurz und Lösungen 4 und 5 gehören zu Wegen, die nicht optimal sind.



7 Stein–Schere–Papier

Der Weihnachtsmann und der Osterhase spielen gern Stein–Schere–Papier. Wer ein Spiel gewinnt, erhält vom Verlierer eine Marzipankartoffel. Allerdings kann der Osterhase mit seinen Pfoten nur Stein und Papier, aber nicht Schere machen. Beide wissen das, reden aber nicht darüber. Der Weihnachtsmann ist also im Vorteil, weil er die Wahl zwischen Stein, Schere und Papier hat. Die Frage ist: Wie groß ist dieser Vorteil? Genauer: Wie viele Marzipankartoffeln macht der Weihnachtsmann im Durchschnitt pro Spiel plus, wenn beide (für sich) optimal spielen?

HINWEIS: Hier sind noch einmal zur Erinnerung die Spielregeln von Stein–Schere–Papier: Die beiden Spieler entscheiden sich für ein Element *Stein*, *Schere* oder *Papier* und bilden dies mit ihren Händen nach. Der Gewinn richtet sich nach folgenden Regeln: *Stein* schlägt *Schere*, *Schere* schlägt *Papier*, und *Papier* schlägt *Stein*. Wenn beide Spieler die gleiche Figur bilden, geht diese Runde unentschieden aus.

Lösungsmöglichkeiten:

1. $\frac{1}{2}$
2. 1
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{2}{3}$
5. $\frac{1}{4}$
6. $\frac{3}{4}$
7. $\frac{1}{6}$
8. $\frac{5}{6}$
9. $\frac{1}{9}$

10. $\frac{2}{9}$

Autor: Boris Springborn

In der heutigen Aufgabe geht es um ein spezielles Optimierungsproblem: Beide Spieler wollen ihren Gewinn maximieren bzw. ihren Verlust minimieren. Viele Probleme, die Mathematiker am DFG–Forschungszentrum MATHEON behandeln, sind Optimierungsprobleme verschiedenster Art. Im Projekt „Diskrete Differentialgeometrie“, das sich die heutige Aufgabe ausgedacht hat, geht es unter anderem um gekrümmte Flächen im Raum, die bei gegebenem Rand den geringsten Flächeninhalt haben (sogenannte Minimalflächen), und um solche, die so kugelrund wie möglich sind (sogenannte Willmore–Flächen).

Lösung:

Die richtige Lösung ist Nummer 3: Der Weihnachtsmann gewinnt im Schnitt $1/3$ Marzipankartoffel pro Spiel. Die optimale Strategie des Weihnachtsmanns besteht darin, sich bei jedem Spiel zufällig mit den Wahrscheinlichkeiten $1/3$ für Schere und $2/3$ für Papier zu entscheiden. Die optimale Strategie des Osterhasen ist, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ Stein und $2/3$ Papier zu spielen.

Der Ausgang eines Spiels hängt nicht von den vorherigen Spielen ab; jedes Spiel ist also unabhängig zu betrachten. Deshalb sollte eine vernünftige Strategie in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bestehen, mit der man unter den möglichen Spielzügen einen auswählt. Die folgenden Überlegungen werden etwas einfacher, wenn wir von vornherein feststellen, dass es für den Weihnachtsmann unsinnig ist, Stein zu spielen, weil er damit nicht gewinnen kann. Nehmen wir an, die Strategie des Weihnachtsmanns bestehe darin, mit den Wahrscheinlichkeiten p_{Schere}^W und p_{Papier}^W Schere bzw. Papier zu spielen; der Hase spiele Stein und Papier mit den Wahrscheinlichkeiten p_{Stein}^O und p_{Papier}^O . Dann ist der zu erwartende Gewinn (in Marzipankartoffeln) für den Weihnachtsmann

$$E^W = -1 \cdot p_{Schere}^W p_{Stein}^O + 1 \cdot p_{Schere}^W p_{Papier}^O + 1 \cdot p_{Papier}^W p_{Stein}^O + 0 \cdot p_{Papier}^W p_{Papier}^O.$$

Der zu erwartende Gewinn für den Osterhasen ist $E^O = -E^W$. Für die Wahrscheinlichkeiten gilt

$$p_{Schere}^W + p_{Papier}^W = p_{Stein}^O + p_{Papier}^O = 1.$$

Damit können wir aus der Gleichung für E^W die Wahrscheinlichkeiten p_{Schere}^W und p_{Stein}^O eliminieren und erhalten

$$E^W = -1 + 2p_{Papier}^W + 2p_{Papier}^O - 3p_{Papier}^W p_{Papier}^O$$

oder, wenn wir p_{Papier}^O ausklammern,

$$E^W = -1 + 2p_{Papier}^W + p_{Papier}^O(2 - 3p_{Papier}^W).$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $p_{Papier}^W < 2/3$. Dann ist $2 - 3p_{Papier}^W > 0$; und die beste Gegenstrategie des Osterhasen (der ja den Gewinn des Weihnachtsmanns minimieren will) ist $p_{Papier}^O = 0$, also immer Stein zu spielen. Wenn der Osterhase optimal spielt, ist also

$$E^W = -1 + 2p_{Papier}^W < 1/3.$$

2. $p_{\text{Papier}}^W > 2/3$. Dann ist $2 - 3p_{\text{Papier}}^W < 0$; und die beste Gegenstrategie des Osterhasen ist $p_{\text{Papier}}^O = 1$, also immer Papier zu spielen. Wenn der Osterhase optimal spielt, ist also

$$E^W = -1 + 2p_{\text{Papier}}^W + 2 - 3p_{\text{Papier}}^W = 1 - p_{\text{Papier}}^W < 1/3.$$

3. $p_{\text{Papier}}^W = 2/3$. Dann ist $2 - 3p_{\text{Papier}}^W = 0$; und somit

$$E^W = -1 + 2 \cdot 2/3 = 1/3,$$

egal, welche Strategie der Osterhase hat.

Die optimale Strategie für den Weihnachtsmann ist also, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ Scheitern und mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ Papier zu spielen, weil der zu erwartende Gewinn dann $1/3$ beträgt und sonst weniger.

Eine entsprechende Überlegung für den Osterhasen ergibt, dass seine beste Strategie ist, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ Stein, sonst Papier zu spielen. Für jede andere Strategie hat der Weihnachtsmann eine Gegenstrategie, mit der er mehr als durchschnittlich $1/3$ Marzipankartoffel gewinnt.

8 Taschenrechner

Klaus hat einen neuen Taschenrechner zum Nikolaus bekommen. Begeistert löst er sofort die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2 \cdot 10^{10} \cdot x + 1 = 0$$

mit der abc (bzw. pq) – Formel ($a = 1$, $b = p = -2 \cdot 10^{10}$, $c = q = 1$) und erhält als Lösungen

$$x_1 = 2 \cdot 10^{10} \quad \text{und} \quad x_2 = 0.$$

Welche Aussage ist korrekt?

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Taschenrechner ist defekt und muss umgetauscht werden.
2. Das Ergebnis ist korrekt.
3. x_1 ist falsch, x_2 richtig.
4. x_2 müsste negativ sein.
5. Der Fehler in x_2 ist größer als 1.
6. Der Fehler in x_2 liegt zwischen 2% und 10%.
7. Bei der Berechnung von $b^2 - 4c$ ist alle Information über x_2 verschwunden.
8. Der Fehler in x_1 liegt zwischen 2% und 10%.
9. Bei der Addition $-b + \sqrt{b^2 - 4c}$ ist alle Information über x_1 verschwunden.

Autor: Martin Weiser

Beim tatsächlichen Ausrechnen von Lösungen verschiedenster Gleichungen mit dem Computer stellt man fest, dass theoretisch ganz einfache Aufgaben in der Praxis recht knifflig

sein können. Insbesondere muss man darauf achten, dass Rundungsfehler die Verlässlichkeit der Lösung nicht beeinträchtigen.

Auf solche Widrigkeiten stoßen wir auch bei unserer Arbeit im DFG-Forschungszentrum MATHEON immer wieder, z. B. bei der Simulation und Optimierung von Krebstherapien. <http://www.zib.de/Numerik/optimization/DFG-FZT86-A1/>

Lösung:

Die korrekte Antwort ist 7.

Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2 \cdot 10^{10}x + 1 = 0.$$

Gemäß der abc-Formel aus unserer Formelsammlung gilt für die zwei Lösungen x_1, x_2

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2 \cdot 10^{10} \pm \sqrt{4 \cdot 10^{20} - 4}}{2} \\ &= 10^{10} \pm \sqrt{10^{20} - 1} \\ &= 10^{10} \left(1 \pm \sqrt{1 - 10^{-20}} \right). \end{aligned}$$

Ebenfalls aus der Formelsammlung entnehmen wir die Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ für kleine $|x|$, und 10^{-20} ist nun *wirklich* klein, sodass wir den dadurch entstehenden Fehler tatsächlich guten Gewissens vernachlässigen dürfen. Wir ersetzen also

$$x_{1,2} \approx 10^{10} \left(1 \pm \left(1 - \frac{1}{2} 10^{-20} \right) \right)$$

und erhalten

$$x_1 \approx 10^{10} \left(1 + 1 - \frac{1}{2} 10^{-20} \right) \approx 2 \cdot 10^{10}$$

sowie

$$x_2 \approx 10^{10} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} 10^{-20} \right) = \frac{1}{2} 10^{-10}.$$

Der relative Fehler dieser Werte liegt in der Größenordnung von $10^{-8} \%$.

Der Wert für x_1 , den der Taschenrechner von Klaus ausgerechnet hat, ist also völlig korrekt. Mit x_2 hat er aber offenbar viel größere Probleme, denn der Fehler liegt dort bei satten 100%. Was ist passiert?

Taschenrechner und auch sonstige Computer können im allgemeinen Zahlen nur mit einer begrenzten Anzahl von Ziffern arbeiten. Um dennoch auch sehr große Zahlen überhaupt darstellen zu können (z. B. das Haushaltsdefizit des Bundes), hat man sich die Gleitkommazahlen ausgedacht. Dabei werden die Zahlen als

$$a \cdot 10^e$$

dargestellt, wobei $0 \leq a < 10$ eine feste Anzahl von Ziffern hat und der Exponent e die Größenordnung festlegt. So kann man auch große Zahlen wie etwa

$$z = 12.345.678.901.234.567.890$$

mit wenigen Ziffern darstellen, z. B.

$$z \approx 1,23457 \cdot 10^{19}$$

mit nur sechs Ziffern — allerdings handelt man sich durch das Abschneiden der hinteren Ziffern einen (kleinen) Fehler ein.

Sehen wir uns an, was bei der Berechnung von x_2 geschieht. Zunächst wird die Differenz unter der Wurzel ausgerechnet, also $4 \cdot 10^{20} - 4$. Nehmen wir an, dass der Taschenrechner von Klaus Zahlen mit zehn Ziffern darstellt. Um die Differenz bilden zu können, muss er sie zunächst mit dem gleichen Exponenten darstellen, und zwar mit dem größeren. Die

$$4 = 0,000.000.000.000.000.000.04 \cdot 10^{20}$$

wird zur Ausführung der Subtraktion im Taschenrechner auf zehn Stellen genau dargestellt, und zwar als

$$0,000.000.000 \cdot 10^{20} = 0. \quad (1)$$

Zugegeben, der dadurch entstehende Fehler ist klein (etwa $10^{-17}\%$), aber er rächt sich bitter. Der Taschenrechner rechnet jetzt nämlich

$$4.000.000.000 \cdot 10^{20} - 0,000.000.000 \cdot 10^{20} = 4.000.000.000 \cdot 10^{20}.$$

Die Wurzel daraus ist eine einfache Übung, selbst für einen Taschenrechner. Das (völlig korrekte) Resultat lautet

$$2.000.000.000 \cdot 10^{10}.$$

Nun muss wieder eine Differenz gebildet werden:

$$2.000.000.000 \cdot 10^{10} - 2.000.000.000 \cdot 10^{10} = 0. \quad (2)$$

Die abschließende Halbierung des Wertes ändert nichts mehr, es bleibt bei 0. Der kritische Informationsverlust trat im Rechenschritt (1) auf, dort ist die Genauigkeit „gestorben“. Der Rechenschritt (2) mit dem katastrophalen Ergebnis hat nur noch den „Totenschein“ ausgestellt.

Dies ist ein besonders drastisches Beispiel dafür, wie schon kleinste Fehler ($10^{-17} \%$) das Endergebnis einer Rechnung völlig unbrauchbar machen können (Fehler 100 %).

9 Pferderennen

Ein Wettbüroinhaber nimmt Wetten auf ein Pferderennen in einem kleinen Ort an, an dem zwei Pferde teilnehmen. Nach gründlicher Recherche der Leistungsfähigkeit beider Pferde findet er heraus, dass Pferd 1 doppelt so hohe Siegchancen hat wie Pferd 2. Üblicherweise verkauft ein Buchmacher mehr als 100% des Rennens, um selbst Profit zu machen. Wir nehmen an, unser Buchmacher verkauft 108% des Rennens (siehe Hinweis). Im Einklang mit den recherchierten Fähigkeiten setzt er die folgenden Quoten fest: Bei Sieg von Pferd 1 erhält man bei einem Einsatz von 18 Euro zusätzlich zum Einsatz 7 Euro ausgezahlt (insgesamt also 25 Euro). Dies wird mit 7–18 notiert. Die Quote für Pferd 2 beträgt 16–9.

Pferd 2 stammt aus dem kleinen Ort und ist damit ein ympathieträger. Deshalb werden, ungeachtet der Fähigkeiten beider Pferde, insgesamt 10 000 Euro auf Pferd 1 und 8 000 Euro auf Pferd 2 gesetzt.

Mit welchen Quoten hätte der Verdienst des Buchmachers nicht vom Ausgang des Rennens abgehangen? (Die erste Quote bezieht sich auf das erste Pferd, die zweite auf das zweite).

Antwortmöglichkeiten:

1. 7–18, 16–9
2. 6–19, 17–8
3. 11–14, 12–13
4. 2–3, 13–12
5. 12–13, 11–14
6. 3–22, 4–1
7. 1–4, 18–7
8. 8–17, 3–2
9. 4–21, 19–6
10. 9–16, 14–11

Hinweis: Quoten vermitteln sog. implizite Wahrscheinlichkeiten (Einsatz dividiert durch Gesamtauszahlung). Die Quote 7-18 gibt $18/25$ als implizite Wahrscheinlichkeit, die Quote 16-9 gibt $9/25$. Dass der Buchmacher 108% des Rennens verkauft, bedeutet, dass sich die impliziten Wahrscheinlichkeiten für Pferd 1 und Pferd 2 auf 108% (und nicht wie üblich auf 1) summieren.

Autor: Christian Bender

Der Wechsel von tatsächlich vorliegenden Wahrscheinlichkeiten zu „risikoneutralen“ Wahrscheinlichkeiten spielt eine zentrale Rolle in der modernen Finanzmathematik: Er ist der Schlüssel zur Bewertung von komplizierten Produkten in Finanzmärkten. Hiermit beschäftigen sich Forscher DFG-Forschungszentrum MATHEON im Schwerpunkt „Risiken der Finanzmärkte“.

Lösung:

Die richtige Lösung ist Nummer 4: 2–3, 13–12.

Wir nehmen an, die gesuchten Quoten seien $a - b$ auf Pferd 1 und $c - d$ auf Pferd 2. Also betragen die impliziten Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} x &= \frac{b}{a+b} \\ y &= \frac{d}{c+d} \end{aligned}$$

Da 108% des Rennens verkauft werden, gilt:

$$x + y = \frac{27}{25} \quad (3)$$

Bei Sieg von Pferd 1 muss der Buchmacher den Betrag

$$10000 \frac{a+b}{b} = 10000 x^{-1}$$

auszahlen. (Beachte, dass x^{-1} die Gesamtauszahlung pro Einsatz ist.) Die analoge Überlegung bei Sieg von Pferd 2 und Gleichsetzen ergibt:

$$10000 x^{-1} = 8000 y^{-1} \quad (4)$$

Einsetzen von (1) in (2) liefert

$$10000 \left(\frac{27}{25} - y \right)^{-1} = 8000 y^{-1}.$$

Nach Multiplikation mit $(27/25 - y)$ und einfachen Termumformungen ergibt sich:

$$y^{-1} = \frac{18000 \cdot 25}{8000 \cdot 27} = \frac{25}{12}$$

Somit ist die Quote auf Pferd 2 $13 - 12$. Andererseits ist wegen (1)

$$x = \frac{27}{25} - \frac{12}{25} = \frac{3}{5}.$$

Also ist die Quote auf Pferd 1 $2 - 3$.

10 Der Schneeball

Es ist Freitag, der 10. Dezember 2004. In der letzten Nacht hat es stark geschneit. Der Weihnachtsmann sitzt zufrieden beim Frühstück vor seiner kleinen Hütte auf dem Berg. Im vergangenen Jahr hat er die Geschenke für alle Kinder zusammengetragen und in einer Höhle in seinem Berg gesammelt. Das letzte Geschenk liegt vor ihm auf dem Tisch; das wird er gleich mit dem Schlitten hinunterbringen. Er ist entspannt und nicht mehr in Eile. „Was tun die Kinder bei solch weihnachtlichem Wetter?“ fragt er sich. Er lächelt und formt in seinen Händen einen Schneeball. „Schneeballschlachten!“ denkt er und wirft den Ball, so weit er kann. Doch der Schneeball rollt immer weiter den Berg hinab und wird dabei immer größer. „Da wird doch hoffentlich nichts passieren!“

Als er das letzte Geschenk in die Höhle bringen will, sieht er die Katastrophe: Ein riesiger Schneeball versperrt den Eingang zur Höhle. In heller Aufregung beginnt der Weihnachtsmann zu graben. Nach 60 durcharbeiteten Stunden ist er der Höhle kaum dichter gekommen. Doch zu seiner Verwunderung stellt er fest, dass sich das Volumen des Schneeballs halbiert hat. Es hat schon seit Freitag getaut, und laut Wetterbericht soll das Tauwetter bis nach Weihnachten anhalten. Der Weihnachtsmann überlegt: Das Volumen $V(t)$ eines Schneeballs vermindert sich beim Abschmelzen mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu der jeweils noch vorhandenen Oberfläche $F(t)$ ist: $V'(t) = -\lambda F(t)$, $\lambda > 0$. Der Weihnachtsmann schätzt: Wenn der Schneeball nur noch ein Zehntel seines Ausgangsradius besitzt, kann er die Höhle wieder betreten. Wie groß ist der Radius $r(t)$ des Schneeballs zur Zeit t ? An welchem Tag kann der Weihnachtsmann nur durch das Abschmelzen des Schneeballs — der Einfluss des Buddelns zu Beginn wird hier nicht berücksichtigt — die Höhle erstmals wieder betreten?

Hinweis: Volumen und Oberfläche einer Kugel sind durch folgende Formeln gegeben: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $F = 4\pi r^2$.

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt zu wenig Informationen. Das ist nicht eindeutig.
2. $r(t) = r_0 e^{-\lambda t}$, So 26.12.
3. $r(t) = r_0 e^{-\lambda t}$, Di 21.12.
4. $r(t) = r_0 - \lambda t$, So 26.12.

5. $r(t) = r_0 - \lambda t$, Di 21.12.

6. $r(t) = r_0 + \lambda t$, So 26.12.

7. $r(t) = r_0 + \lambda t$, Di 21.12.

8. $r(t) = r_0 e^{\lambda t}$, So 26.12.

9. $r(t) = r_0 e^{\lambda t}$, Di 21.12.

10. $r(t) = r_0 \lambda t$, Mi 22.12.

Autoren: Matthias Ehrhardt, Andreas Zisowsky

$V' = -\lambda F$ ist eine sog. *Differentialgleichung*. Mit der Formulierung und exakten oder numerischen Lösung sehr viel komplexerer Differentialgleichungen, die bei der Modellierung physikalischer Vorgänge wie z. B. Schaltvorgänge in Halbleiterbauelementen auftreten, beschäftigen sich Wissenschaftler am DFG-Forschungszentrum MATHEON.

Lösung:

Die richtige Antwort ist 5.: $r(t) = r_0 - \lambda t$, Di 21.12.

Man findet Sie wie folgt:

- Einsetzen in DGL ergibt: $\frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 r' = -\lambda 4\pi r^2$, d.h. $r' = -\lambda$.
- λ läßt sich aus $V(60) = \frac{1}{2}V(0)$ bzw. $(r_0 - 60\lambda)^3 = \frac{r_0^3}{2}$ bestimmen zu $\lambda(r_0) = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{60\sqrt[3]{2}}r_0$.
- Aus $r(t_{\text{open}}) = \frac{1}{10}r_0$ ergibt sich $t_{\text{open}} = \frac{9r_0}{10\lambda} \approx 261,8\text{h}$, also etwa 10,9 Tage.

Wenn man Differentialgleichungen noch nicht kennengelernt hat, kann man diese Aufgabe auch mit physikalischer Intuition und Eliminierung der Antwortmöglichkeiten lösen. Im ersten Schritt können alle Lösungsmöglichkeiten eliminiert werden, bei denen der Radius mit der Zeit steigt. Dann bleiben nur noch die Antworten (2) - (5) übrig. An dieser Stelle muß man sich generell für das lineare oder das exponentielle Schrumpfen des Schneeballs entscheiden. Wenn man sich im Frühling einen Schnellball vorstellt, der am Vormittag noch ansehnlich war, so ist er am späten Nachmittag faß verschwunden. Ein exponentielles Abklingen steht dieser Beobachtung entgegen. Somit bleiben die linearen Radiusgleichungen in (4) und (5) übrig. Verdeutlicht man sich noch einmal die Zeiträume, in denen der Schneeball schmelzen soll, dann muß (5) die richtige Lösung sein.

11 Laufen und Radeln

Drei Personen möchten von einem Ort A zu einem Ort B gelangen. Sie haben ein Fahrrad zur Verfügung, das zeitgleich nur von einer Person gefahren werden kann, und sie können zu Fuß gehen. Natürlich kann auch eine Person ein Stück Fahrrad fahren, dann zu Fuß weiter- oder zurücklaufen und das Fahrrad einer anderen Person überlassen, die es auch wieder nur ein Stück nutzt, usw.

Die jeweiligen Geschwindigkeiten sind in untenstehender Tabelle angegeben. Die Entfernung von A zu B beträgt 20km. Welches ist die minimale Zeit, die sie brauchen, bis auch der letzte in B angekommen ist?

Person	Gehen	Radfahren
1	4 km/h	24 km/h
2	4 km/h	24 km/h
3	8 km/h	32 km/h

Antwortmöglichkeiten:

1. 2h 55min
2. 2h 45min
3. 3h 20min
4. 2h 30min
5. 2h
6. 3h 10min
7. 2h 20min
8. 4h
9. 2h 10min
10. 3h

Autoren: Gruppe „Kombinatorische Optimierung und Graphenalgorithmen“ (TU Berlin)

Lösung:

Die richtige Antwort ist 2.: 2h 45min.

Der Clou der Aufgabe besteht darin, sich klar zu machen, dass es sinnvoll sein kann, mit dem Fahrrad ein Stück zurück zu *fahren*, um einer Person, die sich noch weit hinten befindet, die frühere Benutzung des Rades zu ermöglichen. Es hat keinen Sinn, in Rückrichtung zu *laufen*. Dadurch kann sich die Gesamtzeit nicht verringern. Intuitiv glaubt man, dass es sinnvoll ist, nur Person 3 zurückfahren zu lassen. Durch Ausprobieren kommt man dann sehr schnell auf eine Lösung, z. B. auf die hier angegebene:

Sie können alle nach 2 h 45 min am Ziel sein.

Dazu fährt Person 1 mit dem Fahrrad 10,8 km, lässt das Fahrrad dort und läuft die verbleibenden 9,2 km. Person 3 läuft 10,8 km, nimmt dort das Fahrrad, fährt zurück zu 9,2 km und läuft dann zum Ziel. Person 2 läuft 9,2 km, nimmt dort das von Person 3 zurückgebrachte Fahrrad und fährt bis zum Ziel.

Es ergeben sich folgende Zeiten:

$$\text{Person 1: } \frac{10,8\text{km}}{24\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{9,2\text{km}}{4\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 2,75 \text{ h} = 2 \text{ h } 45 \text{ min}$$

$$\text{Person 2: } \frac{9,2\text{km}}{4\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{10,8\text{km}}{24\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 2,75 \text{ h} = 2 \text{ h } 45 \text{ min}$$

$$\text{Person 3: } \frac{10,8\text{km}}{8\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{1,6\text{km}}{32\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{10,8\text{km}}{8\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 2,75 \text{ h} = 2 \text{ h } 45 \text{ min}$$

Man muss sich noch überlegen, dass Person 3 tatsächlich rechtzeitig das Rad am Ort 9,2 km ablegt, damit Person 2 es sich dort nehmen kann. Person 3 ist nach $1,4 \text{ h} = 1 \text{ h } 24 \text{ min}$ wieder bei 9,2 km. Person 2 ist nach $2,3 \text{ h} = 2 \text{ h } 18 \text{ min}$ dort und kann also das Fahrrad bei 9,2 km aufnehmen.



Für die Leute, denen die Intuition nicht genügt, beweisen wir im folgenden, dass es keine bessere Lösung geben kann. Dazu führen wir folgende Variablen ein ($i \in \{1, 2, 3\}$):

- x_i : Zeit, die Person i läuft
- y_i : Zeit, die Person i in Richtung des Ziels fährt
- $\bar{y}_i$: Zeit, die Person i in Richtung Start zurückfährt
- t : Zeit, zu der alle drei Personen am Ziel sind

Wir betrachten die Personen 1 und 2. Beide stehen am Ende 20 km vom Start entfernt. Das heißt für $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} 4 \frac{\text{km}}{\text{h}} x_i + 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_i - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_i &= 20 \text{km} \\ \Rightarrow x_i &= \frac{20 \text{km} - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_i + 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_i}{4 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 5\text{h} - 6y_i + 6\bar{y}_i \end{aligned}$$

Dazu braucht man nicht mehr als t Zeiteinheiten:

$$\begin{aligned} x_i + y_i + \bar{y}_i &\leq t \\ \Rightarrow 5\text{h} - 6y_i + 6\bar{y}_i + y_i + \bar{y}_i &\leq t \\ \Rightarrow 5y_i - 7\bar{y}_i &\geq 5\text{h} - t \\ \Rightarrow y_i - \frac{7}{5}\bar{y}_i &\geq 1\text{h} - \frac{t}{5} \quad (1) \end{aligned}$$

Analog kann man für Person 3 nachrechnen, dass gilt:

$$\begin{aligned} 3y_3 - 5\bar{y}_3 &\geq 2, 5\text{h} - t \\ \Rightarrow -\bar{y}_3 &\geq \frac{1}{2}\text{h} - \frac{t}{5} - \frac{3}{5}y_3 \quad (2) \end{aligned}$$

Das Fahrrad wird sich am Ende an einem Ort zwischen Start und Ziel befinden. Darum gilt für den Aufenthaltsort des Rades:

$$24 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_1 - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_1 + 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_2 - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_2 + 32 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_3 - 32 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_3 \leq 20 \text{km} \quad (3)$$

Wegen (1) und (2) und der Nichtnegativität der Variablen gilt folgendes:

$$\begin{aligned} &24 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_1 - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_1 + 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_2 - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_2 + 32 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_3 - 32 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_3 \\ &\geq 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} (1\text{h} - \frac{t}{5} + \frac{7}{5}\bar{y}_1) - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_1 + 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} (1\text{h} - \frac{t}{5} + \frac{7}{5}\bar{y}_2) - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_2 + \\ &\quad 32 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_3 + 32 \frac{\text{km}}{\text{h}} (\frac{1}{2}\text{h} - \frac{t}{5} - \frac{3}{5}y_3) \\ &= 64\text{km} - 16 \frac{\text{km}}{\text{h}} t + (\frac{24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 7}{5} \bar{y}_1 - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_1) + (\frac{24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 7}{5} \bar{y}_2 - 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \bar{y}_2) + \\ &\quad (32 \frac{\text{km}}{\text{h}} y_3 - \frac{32 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3}{5} y_3) \\ &\geq 64\text{km} - 16 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t \end{aligned}$$

Die Ungleichung (3) impliziert dann:

$$64\text{km} - 16 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t \leq 20\text{km} \Rightarrow 44\text{km} \leq 16 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t \Rightarrow t \geq 2,75 \text{ h} = 2 \text{ h } 45 \text{ min} \quad (4)$$

Es kann also keine Lösung geben, die alle 3 Personen zum Ziel bringt und weniger als 2 Stunden und 45 Minuten benötigt. Die angegebene (intuitive) Lösung ist eine bestmögliche.

ZUSATZ: Obige Argumentation kann man auch benutzen, um eine optimale Lösung direkt auszurechnen, also auf Intuition gänzlich zu verzichten. Dazu rechnet man wie oben ab ♣♠♥♦ und schließt dann:

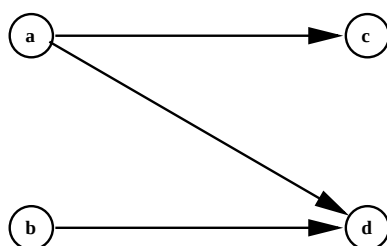
Wegen (4) kann es keine Lösung geben, die alle 3 Personen zum Ziel bringt und weniger

als 2 Stunden und 45 Minuten benötigt. Man kann nun eine Lösung mit diesem Wert errechnen, indem man die Ungleichungskette zurückverfolgt und anstelle von Ungleichungen Gleichheit fordert.

Sei $t = 2,75\text{h}$. Dann müssen, damit überall Gleichheit gilt, y_3 , $\bar{y}_1$ und $\bar{y}_2$ den Wert 0 haben. Weiterhin muss $1\text{h} - \frac{t}{5} + \frac{7}{5}\bar{y}_1 = y_1$ gelten und damit $y_1 = 0,45\text{h}$ und ebenso $y_2 = 0,45\text{h}$. Für $\bar{y}_3$ muss gelten $\frac{1}{2}\text{h} - \frac{t}{5} - \frac{3}{5}y_3 = \bar{y}_3$, also $\bar{y}_3 = 0,05\text{h}$. Damit stehen auch die Werte $x_1 = x_2 = 2,3\text{h}$ und $x_3 = 2,7\text{h}$ fest. Man kann nun die Strecken berechnen, die die Personen mit den beiden Fortbewegungsarten zurücklegen, und muss dann nur noch die einzelnen Strecken so kombinieren, dass das Fahrrad korrekt benutzt wird. Naheliegenderweise ergibt sich obige Lösung.

12 Stochastisches Scheduling

In einem Bauprojekt müssen die Arbeitsschritte (Vorgänge) a, b, c und d durchgeführt werden, die durch Kreise (Knoten) im abgebildeten Projektnetz dargestellt sind.



Die Pfeile im Projektnetz geben Reihenfolgebeziehungen an. So kann Arbeitsschritt c erst dann beginnen, wenn Arbeitsschritt a beendet ist, während Arbeitsschritt d auf Arbeitsschritte a und b warten muss.

Die Arbeitsschritte sind durch Bearbeitungsdauern charakterisiert, von denen man vor der Ausführung aber nicht genau weiß, wie lang sie sind. Jeder Arbeitsschritt kann 1, 2 oder 3 Zeiteinheiten dauern. Diese Dauern sind alle gleich wahrscheinlich und unabhängig von den Dauern anderer Vorgänge.

Bei der Planung des Projektes möchte man vorab Information über die kürzeste Projektdauer PD ermitteln. Dies ist der früheste Zeitpunkt, zu dem alle Vorgänge beendet sind.

Folgende Fragen sind zu beantworten:

1. Was ist die kürzeste Projektdauer auf Basis der mittleren Bearbeitungsdauern, also die kürzeste Projektdauer, die man erwarten würde?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die kürzeste Projektdauer $PD \leq 4$ ist?
Tipp: Die Wahrscheinlichkeit für $PD \leq 4$ ist die Anzahl der Kombinationen von Bearbeitungsdauern (z. B. (2, 1, 3, 2) für die Vorgänge a, b, c, d), die $PD \leq 4$ erfüllen, dividiert durch die Anzahl aller möglichen Kombinationen von Bearbeitungsdauern.
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die kürzeste Projektdauer $PD \geq 5$ ist?

Antwortmöglichkeiten:

Nr.	Aufgabenteil 1	Aufgabenteil 2	Aufgabenteil 3
1)	3	$\frac{23}{81}$	$\frac{29}{81}$
2)	6	1	0
3)	4	$\frac{31}{81}$	$\frac{50}{81}$
4)	3	$\frac{8}{81}$	$\frac{72}{81}$
5)	4	$\frac{23}{81}$	$\frac{58}{81}$
6)	2	$\frac{1}{81}$	$\frac{80}{81}$
7)	6	$\frac{60}{81}$	$\frac{21}{81}$
8)	5	$\frac{23}{81}$	$\frac{29}{81}$
9)	4	$\frac{31}{81}$	$\frac{29}{81}$
10)	6	$\frac{31}{81}$	$\frac{50}{81}$

Autoren: Gruppe „Kombinatorische Optimierung und Graphenalgorithmien (TU Berlin)“

Die Arbeitsgruppe „Kombinatorische Optimierung und Graphenalgorithmien“ ist an der Technischen Universität Berlin angesiedelt. Unter der Leitung von Professor Möhring arbeiten ungefähr zehn Wissenschaftliche Mitarbeiter und einige Studenten an aktuellen Fragestellungen aus der Industrie und Wirtschaft und versuchen, diese mit Mitteln der Kombinatorischen Optimierung zu lösen. Viele Fragestellungen kommen aus der Verkehrsplanung: „Wie kann man mit intelligenten Navigationssystemen Staus reduzieren?“ „Wie kann ein Fahrplan der S-Bahn mit möglichst wenig Zügen realisiert werden?“ „Wie schaltet man Ampeln, damit die durchschnittliche Wartezeit der Verkehrsteilnehmer minimiert wird?“. Weitere Aufgaben kommen aus der Logistik, der Planung von Telekommunikationsnetzen, der Produktions- und Ablaufplanung, der Personaleinsatzplanung und auch aus theoretisch motivierten Optimierungsproblemen. Außerdem werden in jedem Semester Lehrveranstaltungen für Studenten durch die Gruppe betreut. Drei Mitarbeiter der Gruppe gehören dem DFG-Forschungszentrum MATHEON an. Detailliertere Informationen zu Forschungsthemen und den Mitarbeitern kann man unter <http://www.math.tu-berlin.de/coga/> finden.

Lösung:

Antwort (3) ist richtig.

Also zu Aufgabenteil 1: 4, Aufgabenteile 2 und 3:

PD hat folgende Verteilung:

Wert 2 mit Wahrscheinlichkeit $1/81$

Wert 3 mit Wahrscheinlichkeit $7/81$

Wert 4 mit Wahrscheinlichkeit $23/81$

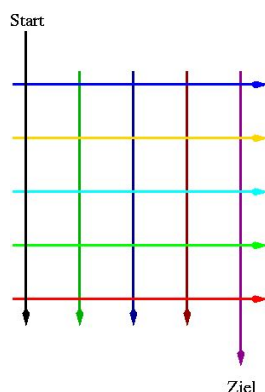
Wert 5 mit Wahrscheinlichkeit $29/81$

Wert 6 mit Wahrscheinlichkeit $21/81$

Daher ist $PD \leq 4$ nur mit Wahrscheinlichkeit $31/81 = 37\%$ und $PD \geq 5$ mit Wahrscheinlichkeit $50/81 = 61,7\%$.

13 Quadratstadt

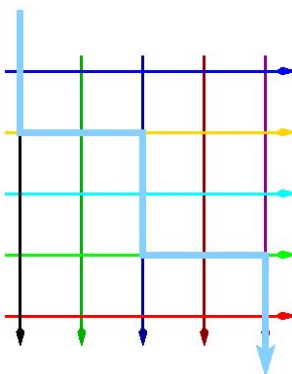
Herr Q kommt bei einer seiner Reisen auch nach Quadratstadt, welche ihren Namen vermutlich ihrem Aussehen zu verdanken hat:



Selbstverständlich benutzt Herr Q den ÖPNV. Weil der Bürgermeister von Quadratstadt einen Freund bei dem Busersteller Gerade-Aus hat und der Vorstandsvorsitzende des örtlichen Verkehrsunternehmens QVG dem Bürgermeister noch etwas schuldet, wurden alle Busse in Quadratstadt bei Gerade-Aus bestellt. Leider können die Busse von Gerade-Aus auch nur so fahren, wie die Firma heißt. Dafür durfte der Vorstandsvorsitzende von QVG die Busse individuell ausgestalten, so dass jede Linie in Quadratstadt unterschiedlich aussieht. Nach einer Wahlschlappe bei der nächsten Bürgermeisterwahl fand der Ex-Bürgermeister dann auch einen guten Job bei QVG, die Firma Gerade-Aus jedoch ging Pleite — aber das ist eine ganz andere Geschichte.

Herr Q jedenfalls möchte Quadratstadt mit Bussen möglichst schnell durchqueren. Er startet im Nordwesten und möchte nach Südosten (siehe Skizze). Wegen der oben angesprochenen Geschichte fahren die Busse nur von Norden nach Süden und von Westen nach Osten; dafür fahren sie immerhin auf allen 10 Straßen. Nachdem sie einen Durchlauf beendet haben, fahren sie zur nagelneuen Waschanlage (wiederum eine ganz andere Geschichte) außerhalb der Stadt und von dort aus wieder von Norden nach Süden bzw. von Westen nach Osten. Herr Q möchte auf der einen Seite einiges von der Stadt und den verschiedenen Bussen sehen, auf der andere Seite liebt Herr Q die Bequemlichkeit. Daher hat er sich vorgenommen, genau sechsmal umzusteigen. Nun möchte Herr Q wissen, wie viele Möglichkeiten er hat, von seinem Ausgangspunkt zu seinem Ziel zu gelangen.

Im zweiten Bild ist ein Weg mit vier Umstiegen zu sehen:



Zu beachten ist, dass Herr Q am Anfang bereits im Bus sitzt und das Ziel in einem Bus erreicht (Ein- und Ausstieg zählen also nicht als Umstiege).

Wie viele Wege vom Start zum Ziel mit genau sechs Umstiegen gibt es?

Antwortmöglichkeiten:

1. gar keinen
2. 15
3. 98
4. 37
5. 42
6. 29
7. 30
8. 28
9. 2
10. 34

Autoren: Marc Pfetsch, Ralf Borndörfer

Linienplanung in der Realität:

Für Städte, die nicht mit den technischen Problemen von Quadratstadt zu kämpfen haben, wird die Planung des Liniennetzes im öffentlichen Nahverkehr vielfältiger: Abbiegen ist möglich. Wo sollen Linien langführen, wo starten sie, und wo enden sie? Wie oft soll eine Linie bedient werden?

Natürlich hat die Planung eines Liniennetzes Auswirkungen auf die Wege der Passagiere, die es benutzen. Genau wie in Quadratstadt ist es wichtig, dass jeder Passagier überall schnell und mit möglichst wenig Umstiegen hinkommt. Auf der anderen Seite ist ein Liniennetz sehr teuer, und man muss bei der Planung abwägen, ob Investitionen ihr Geld für die Passagiere wert sind. Außerdem spielen noch viele andere Faktoren eine Rolle: Gibt es genügend Sitzplätze? Sind die Busse oder Straßenbahnen sauber? Sind sie behindertengerecht? ...

In Rahmen des Projekts „Strategische Planung im Öffentlichen Nahverkehr“ versuchen wir in Zusammenarbeit mit der „Verkehrsbetrieb Potsdam GmbH“ (ViP) und der Stadt Potsdam, ein Liniennetz optimal zu berechnen, wobei sowohl die Passagierinteressen als auch die Kosten berücksichtigt werden sollen.

Mehr Informationen gibt es unter

<http://www.zib.de/Optimization/Projects/Traffic/FZT86-B1/>.

Lösung:

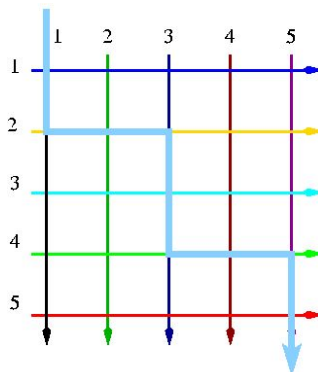
Die richtige Antwort ist Möglichkeit 7.: 30.

Wenn n die Anzahl der Straßen/Linien in horizontaler und vertikaler Richtung ist und $2 \cdot k$ die Anzahl der Umstiege (in der Aufgabe also $n = 5$, $k = 3$), dann ist die Anzahl der Wege $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-2}{k-1}$. Für die Aufgabe also $(5 \cdot 2) \cdot 3 = 30$.

Begründung:

Zunächst muss es eine gerade Anzahl von Umstiegen sein, weil wir vertikal starten und enden müssen. Dabei ist die horizontale Bewegung unabhängig von der vertikalen.

Die wesentliche Idee ist folgende: Die horizontalen Linien werden von oben nach unten und die vertikalen von links nach rechts durchnummeriert. Ein Weg ist nun eindeutig durch die benutzten Linien beschrieben. Im Beispielbild



ist der Weg vertikal durch 1, 3, 5 und horizontal durch 2, 4 beschrieben.

Für die horizontalen Linien müssen nun k Linien aus den n möglichen ausgewählt werden. Weil jede horizontale Linie einen Ein- und einen Ausstieg erzeugt, ergibt dies dann genau $2 \cdot k$ Umstiege. Man muss also k Linien aus n ziehen, wofür es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt.

Für die vertikalen Linien geht das genauso, aber man muss zwei Dinge beachten. Erstens müssen die Linien 1 und n gewählt werden (weil Herr Q am Anfang und Ende im Bus sitzen soll). Zweitens müssen nur $k - 1$ Linien gezogen werden: Diese ergeben nämlich $2 \cdot (k - 1)$ Umstiege. Mit den zwei Umstiegen von Linie 1 und n ergibt dies dann $2 \cdot k$ Umstiege (zur Erinnerung: Start und Ende wurden nicht als Umstieg gezählt). Also müssen $(k - 1)$ Linien aus $(n - 2)$ Linien ausgewählt werden, wofür es $\binom{n-2}{k-1}$ Möglichkeiten gibt. Zusammen ergibt dies die angesprochene Formel.

Spezielle Lösung:

Wenn man etwas herumprobiert, so stellt man fest, dass die möglichen Wege immer in Paaren kommen. Es müssen also gerade viele Wege sein. Damit sind als Antworten nur noch 98, 42, 30, 28, 2, 34 möglich. Die 2 und 98 kann man durch etwas herumprobieren ausschließen. Man muss sich also nur noch zwischen 28, 30, 34 und 42 entscheiden. Mit etwas Herumtüteln bekommt man auch dies hin ... (oder kann zumindest einen guten Tipp abgeben). Vermutlich kann man sogar alle 30 Lösungen in akzeptabler Zeit finden.

14 Altersversorgung

Sie sparen 45 Jahre lang jährlich 1.000 Euro für Ihre Altersversorgung. Das angelegte Kapital wird jährlich mit 5% verzinst. Wie hoch ist das angesparte Kapital (gerundet auf ganze Euro) am Ende der 45 Jahre?

1. 97.458 Euro
2. 99.625 Euro
3. 101.696 Euro
4. 115.967 Euro
5. 126.520 Euro

6. 167.685 Euro
7. 172.985 Euro
8. 178.640 Euro
9. 186.487 Euro
10. 191.531 Euro

Autoren: Mesrop Janunts, Alexander Schied

Eine wichtige Dienstleistung von Kreditinstituten besteht in der Übernahme finanzieller Risiken, die sich für Unternehmen und Privatpersonen aus Schwankungen von Wechselkursen, Zinsen oder Aktienwerten ergeben. Auf Seite der Banken können sich hieraus überaus komplexe Positionen ergeben, die mit einem großen Risiko behaftet sind. Die Komplexität dieser Positionen wird dadurch erhöht, dass die Übernahme von Risiken häufig auf der Grundlage von sogenannten Optionen oder Derivaten geschieht. Das sind Verträge, deren Auszahlungen in nichtlinearer Art und Weise vom Kursverlauf der zugrunde liegenden Wertpapiere abhängen können. So erlaubt zum Beispiel eine „Lookback–Put–Option“ den Verkauf eines Wertpapiers zum maximalen Preis, den das Papier im Rückblick während einer bestimmten Zeitspanne angenommen hat.

Im Teilprojekt E4 des DFG-Forschungszentrum MATHEON beschäftigen wir uns zum einen mit der Frage nach einer geeigneten Bewertung solcher Risiken. Eine solche Bewertung wird zum Beispiel benötigt, um die Höhe der nötigen Sicherheitsreserven und Kapitalrückstellungen zu berechnen. Eine weitere Fragestellung betrifft die Konstruktion dynamischer Absicherungsstrategien, mit deren Hilfe das Risiko einer Position verringert werden kann. Mehr über uns und unser Teilprojekt finden Sie hier:

http://www.math.tu-berlin.de/%7Ejanunts/project_e4.html

Lösung:

Die richtige Lösung ist 6.: 167.685.

$$\sum_{k=1}^{45} \left(1000 \cdot (1 + 0,05)^k \right) = 1000 \cdot \sum_{k=1}^{45} (1 + 0,05)^k = 1000 \cdot \frac{1,05 \cdot (1 - 1,05^{45})}{1 - 1,05} \approx 167.685$$

15 Geht es noch viel besser? Wie kommt das Hilfefahrzeug zur Autopanne?

Der Automobilclub ACN des kleinen, vielerorts noch unbekannten Staates Noetham unterhält eine Hilfezentrale, in der Autofahrer, die eine Panne haben, — wir nennen sie „Havaristen“ — anrufen können. In der Hilfezentrale ordnet der amtliche „Dispatcher“ Nitram Leschtörg jedem Havaristen ein Hilfefahrzeug zu, das dem Havaristen zur Weiterfahrt verhelfen soll. In der Regel sind genug Hilfefahrzeuge für die gemeldeten Havaristen vorhanden. (Hierdurch unterscheidet sich Noetham deutlich vom Allgemeinen Deutschen Automobilclub ADAC, der einen ähnlichen Dienst in Deutschland anbietet.)

Noetham ist ein sehr gemeinwohlorientierter Staat, und somit soll die Zuordnung von Hilfefahrzeugen zu Havaristen zu jedem Planungszeitpunkt so erfolgen, dass die Summe der Wartezeiten der Havaristen möglichst klein ist. Dazu muss man sagen, dass in Noetham so wenig Verkehr ist, dass man Fahrzeiten genau vorhersagen kann.

Nehmen wir z. B. an, dass zu einem Zeitpunkt zwei Havaristen A und B gemeldet und zwei Hilfefahrzeuge 1 und 2 im Dienst sind. Die Fahrzeiten (in Minuten) seien bekannt gemäß der folgenden Tabelle:

Hilfefahrzeug\Havarist	A	B
1	10	20
2	5	10

(5)

Die Aufgabe besteht darin, für die Zuordnungsaufgabe eine sogenannte *gültige Lösung* anzugeben, die möglichst kleine *Kosten* produziert. Eine *Lösung* ist dabei eine Zuordnung von Hilfefahrzeugen auf Havaristen. *Gültig* ist eine Lösung, die jedem Havaristen genau ein Hilfefahrzeug und jedem Hilfefahrzeug genau einen Havaristen zuordnet. Die *Kosten* einer Lösung sind gegeben durch die Gesamtwarezeit aller Havaristen. Eine gültige Lösung heißt *optimal*, wenn keine andere gültige Lösung kleinere Kosten produziert. Der *Optimalwert* der Aufgabe sind die Kosten einer optimalen gültigen Lösung.

Somit würde in Noehtam in dieser Situation Hilfefahrzeug 1 zu Havarist A und Hilfefahrzeug 2 zu Havarist B geschickt, da dies eine gültige Lösung ist und Kosten von 20 Minuten bedeutet. Demgegenüber stehen nämlich größere Kosten von 25 Minuten für die andere mögliche gültige Lösung. Bei zwei Havaristen und zwei Hilfefahrzeugen gibt es also nur zwei gültige Lösungen. Es gibt noch eine Zuordnung, die beiden Havaristen A und B Hilfefahrzeug 2 zuordnet. Diese produziert nur Kosten von 15 Minuten, ist aber nicht gültig und kann daher nicht umgesetzt werden. Trotzdem sind solche ungültigen Lösungen durchaus interessant, wie wir noch sehen werden.

Bei zwei Havaristen und zwei Hilfefahrzeugen ist die Aufgabe also leicht zu lösen: Nitram Leschtörg nimmt bei zwei Havaristen und zwei Hilfefahrzeugen einfach immer die kostengünstigere der beiden gültigen Lösungen.

In der Regel schafft Leschtörg seine Arbeit recht gut, so dass im Schnitt die Havaristen etwa 12 Minuten warten müssen.

An einem kalten Wintertag findet sich nun Nitram Leschtörg in der folgenden Situation wieder: sechs Havaristen sind gemeldet und sechs Hilfefahrzeuge sind im Einsatz. Mehr als sonst. Wieder muss zu jedem Havaristen ein Hilfefahrzeug, und jedes Hilfefahrzeug kann natürlich höchstens einem Havaristen gleichzeitig helfen. Die Fahrzeiten (in Minuten) entnimmt er seinem Routing-Programm. Sie lauten:

Hilfefahrzeug\Havarist	A	B	C	D	E	F
1	10	13	20	25	30	25
2	8	10	9	20	25	30
3	10	12	10	12	20	25
4	8	20	9	10	9	20
5	10	25	20	12	10	12
6	8	30	25	20	9	10

(6)

Er bemerkt, dass es nun ziemlich viele Möglichkeiten gibt. Seine Idee ist nun, sich die Havaristen $A, B, \dots, F$ nacheinander vorzunehmen und ihnen immer das beste, jeweils

noch verfügbare Hilfefahrzeug zuzuordnen. Er erhält:

Havarist	Zugeordnetes Hilfefahrzeug
<i>A</i>	2
<i>B</i>	3
<i>C</i>	4
<i>D</i>	5
<i>E</i>	6
<i>F</i>	1

(7)

Die Gesamtwartezeit für diese Lösung beträgt in Minuten

$$8 + 12 + 9 + 12 + 9 + 25 = 75. \quad (8)$$

Er will gerade die Zuordnung an die Hilfefahrzeuge weitergeben, da schaut sein Chef herein. „Leschtörg“, ruft er, „Das kann doch nicht gut sein. Havarist *F* muss 25 Minuten warten. Da wird Ihnen doch etwas Besseres einfallen! Ich will nichts sehen, das mehr als 10 % über der optimalen Gesamtwartezeit liegt! Sie haben zehn Minuten! Sie wissen ja, wir müssen hier in Echtzeit handeln!“ Leschtörg ist in Erklärungsnot. Er weiß nicht recht, wie er herausfinden soll, ob es eine wesentlich bessere Lösung gibt. Hat er vielleicht die 10 % schon erreicht? Er weiß, er muss unbedingt die Wahrheit sagen, denn sein Chef hat einen Berater, der unwahre Aussagen der Mitarbeiter sofort aufdecken kann.

Da fällt ihm sein Bekannter und Mathematiker Nevs Ekmurk ein, der solche Fragen bisher immer pfiffig beantworten konnte. Er ruft ihn an, schildert den Fall und fragt um Rat. „Nevs, soll ich nochmal nach einer besseren Lösung suchen? Aber komm mir als alter Genauigkeitsfanatiker nicht damit, dass ich noch eine Minute sparen kann! Was kann ich noch Substantielles herausholen? Bei welcher Gesamtwartezeit bin ich auf jeden Fall höchstens 10 % über dem Optimalwert? Ich will nämlich möglichst schnell die Fahrzeuge losschicken.“

Was antwortet Herr Ekmurk? Es ist eine der folgenden Argumentationen. Beachte: Ekmurk sagt nichts Unkorrektes, und nur eine der folgenden Aussagen ist komplett korrekt; alle anderen Aussagen enthalten wenigstens ein unkorrektes Argument.

1. „Dein Verfahren findet auf jeden Fall immer eine optimale Lösung, da du ja für jeden Havaristen in jedem Schritt das Bestmögliche tust. Du kannst dem Chef sagen, es gibt keine bessere Zuordnung.“
2. „Es gibt eine bessere gültige Lösung mit Kosten von unter 70 Minuten. Aber möglicherweise kann man die auch noch auf 50 Minuten reduzieren. Du musst also weitersehen, bis du etwas unter 55 Minuten hast.“
3. „Es kann keine gültige Zuordnung mit Kosten kleiner als 58 Minuten geben. Daher kannst du aufhören, sobald du eine gültige Lösung mit Kosten 63 Minuten gefunden hast. Diese Lösung verwendest du dann, denn sie hat höchstens 10 % höhere Kosten als eine optimale Lösung.“
4. „Es gibt sicher keine gültige Lösung mit wesentlich kleineren Kosten als 72 Minuten, da ja nach Erfahrung die Havaristen im Schnitt 12 Minuten warten müssen. Du bist also dicke höchstens 10 % vom Optimalwert entfernt. Nimm deine momentane Lösung!“

5. „Es kann keine gültige Lösung mit Kosten kleiner als 54 Minuten geben, denn das wäre die Summe der Wartezeiten, wenn man für jedes Hilfefahrzeug den bestgelegenen Havaristen nähme. Wenn du eine Lösung mit einer Gesamtwartezeit von 60 Minuten findest, kannst du diese schon aus diesem Grunde nehmen, da 10 % von 60 Minuten gerade 6 Minuten sind und somit 60 Minuten höchstens 10 % über 54 Minuten liegen.“
6. „Es kann keine gültige Lösung mit Kosten kleiner als 56 geben, denn das wäre die Summe der Wartezeiten, wenn man für jeden Havaristen das bestgelegene Hilfefahrzeug nähme. Du musst unbedingt weitersuchen, bis du eine Lösung mit 61 Minuten findest, sonst hast du in jedem Fall mehr als 10 % höhere Kosten als der Optimalwert!“
7. „Es gibt sicher eine gültige Lösung, in der jedes Hilfefahrzeug höchstens die aufgerundete durchschnittliche Fahrzeit zu allen Havaristen braucht. Das ergibt eine Gesamtwartezeit von $22 + 17 + 15 + 13 + 15 + 17 = 99$ Minuten. Da bist du mit Deiner Lösung schon soviel besser, dass du sicher höchstens 10 % vom Optimalwert entfernt bist. Du kannst deine Lösung nehmen.“
8. „Die Lösung, in der jeder Havarist höchstens die aufgerundete durchschnittliche Fahrzeit aller Hilfefahrzeuge zu ihm warten muss, ist optimal. Sie hat Kosten von $9 + 19 + 16 + 17 + 18 + 22 = 101$ Minuten. Deine Lösung kann nicht gültig sein.“
9. „Es gibt eine Zuordnung mit Kosten von 57 Minuten. Suche, bis du sie findest!“
10. Von allen 36 möglichen gültigen Lösungen verursacht keine Kosten kleiner als 60 Minuten. Aus diesem Grund muss zwingend 60 Minuten der Optimalwert sein. Ich habe mir dummerweise die zugehörige Zuordnung nicht gemerkt. Du musst daher suchen, bis du eine Lösung mit Kosten höchstens 66 Minuten gefunden hast.“

Autor: Jörg Rambau

Projekthintergrund:

Das ZIB hat für den Allgemeinen Deutschen Automobilclub (ADAC) einen Algorithmus zur automatischen Disposition von Hilfefahrzeugen entwickelt, der im MATHEON und an der TU Kaiserslautern nun weiterentwickelt wird.

Im ADAC-Projekt besteht die Schwierigkeit darin, dass i. d. R. weniger Hilfefahrzeuge als Havaristen vorhanden sind, so dass man für jedes Hilfefahrzeug auch noch eine gute Tour durch alle ihm zugeordneten Aufträge finden muss. Dies ist dann plötzlich ein Problem an vorderster Front aktueller Forschung. Eine optimale gültige Lösung lässt sich nicht mehr durch Probieren aller gültigen Lösungen ermitteln, da es ungefähr so viele gültige Lösungen wie Atome im Universum gibt.

Die Rettung sind in einem solchen Fall mathematische Methoden, um *untere und obere Schranken* für den Optimalwert abzuschätzen. Eine *obere Schranke* erhält man i. d. R. durch Konstruktion einer gültigen Lösung: Der Optimalwert kann nicht größer sein als deren Kosten, denn die gültige Lösung nimmt ja am Wettbewerb aller gültigen Lösungen um die kleinsten Kosten teil. Eine *untere Schranke* ermittelt man im ADAC-Beispiel mit sehr anspruchsvollen mathematischen Methoden. Die Denkweise ist aber immer wie in der Aufgabe: Beschränkt man sich bei der Minimierung nicht auf gültige Lösungen, sondern lässt auch „fast“ gültige Lösungen zu, so erhält man ein anderes Optimierungsproblem, dessen Optimalwert man vielleicht finden kann. Dieser Wert kann höchstens kleiner sein

als der Optimalwert des Originalproblems, da nun *zusätzliche* Lösungen – aber immer auch noch alle gültigen Lösungen – am Wettbewerb um die minimalen Kosten teilnehmen. Der im ADAC-Projekt in diesem Sinne vom ZIB-Team entwickelte Algorithmus ist in der Lage, die beim ADAC auftretenden Probleme mit etwa 200 Havaristen und etwa 100 Hilfefahrzeugen in Sekundenschnelle beweisbar bis auf 1% optimal zu lösen. Die in der korrekten Lösung der Kalenderaufgabe angedeutete Argumentationsweise mit unteren und oberen Schranken für Optimallösungen eines Optimierungsproblems ist grundlegend für den Erfolg im ADAC-Projekt.

Man sieht: In der angewandten Mathematik geht es oft gerade nicht darum, wie man eine Lösung auf möglichst viele Stellen hinter dem Komma ausrechnet, sondern häufig auch darum, wie man mit Argumenten das Ergebnis umzingeln kann, so dass man weiß, wann man nicht mehr weiterrechnen muss.

Man sieht ferner: Die (Nicht-) Existenzaussagen der Mathematiker („Es gibt eine/keine Lösung, die besser als x ist.“) — manchmal Gegenstand von vergnüglichen Mathematiker-Witzen — sind sehr wohl in der Praxis interessant. Denn wenn es z. B. keine Lösung gibt, die wesentlich besser ist als die bereits gefundene, hat man eine mathematisch bewiesene Qualitätsgarantie. Der ADAC hat z. B. solche Qualitätsgarantien in seiner Projekt-Ausschreibung explizit verlangt.

Links:

<http://www.zib.de/Optimization/Projects/Online/ADAC-Dispatch>

<http://www.zib.de/koch/zimpl>

<http://www.zib.de/Optimization/Software/Soplex>

Lösung:

Antwort 3 ist die einzige vollständig korrekte Argumentation von den zehn gegebenen:

Man kann sich eine realisierbare Zuordnung in der Fahrzeittabelle so vorstellen: Man kreist sechs Zahlen in der Tabelle ein, so dass sowohl in jeder Spalte als auch in jeder Zeile genau eine Zahl eingekreist ist. In jeder Spalte, die ja zu einem Havaristen gehört, gibt die Zeile der eingekreisten Zahl an, welches Hilfefahrzeug zu diesem Havaristen fahren soll. In jeder Zeile, die ja zu einem Hilfefahrzeug gehört, gibt die Spalte der eingekreisten Zahl an, zu welchem Havaristen dieses Hilfefahrzeug fahren soll.

Kreist man die Zahlen auf der Hauptdiagonalen der Tabelle ein, welche der Zuordnung $1 \rightarrow A, 2 \rightarrow B, \dots, 6 \rightarrow F$ entsprechen, so erhält man eine Lösung mit einer Gesamtwar-tezeit von 60 Minuten.

Wir gehen der Reihe nach durch die Aussagen und begründen, warum alle Antworten außer Antwort 3 einen Denkfehler enthalten. Da alle Zuordnungen ganzzahlige Gesamt-wartezeiten haben (in Minuten), kann man sich in der Argumentation auf ganzzahlige Wartezeiten beschränken.

1. Diese Antwort ist falsch. Das angegebene Verfahren — man spricht von dem sogenannten *Greedy-Algorithmus* (von engl. *greedy*: gierig) — liefert nicht immer eine optimale Lösung. Ein Beispiel ist genau diese Aufgabe, da es ja eine Lösung mit Kosten 60 gibt. Diese Antwort würde der Berater des Chefs also sofort als unwahr aufdecken.
2. Diese Antwort ist falsch. Es gibt zwar eine Zuordnung mit Kosten unter 70 Minuten.

Dass man jedoch eine Lösung von 50 Minuten finden kann, ist nur eine Vermutung, die obendrein noch falsch ist. Da Antwort 3 korrekt ist (s. u.) und man dementsprechend keine Lösung unter 58 Minuten finden kann, kann man erst recht keine Lösung unter 55 Minuten finden. Dieser Tipp würde also bei Leschtörg nur zur Verzweiflung führen.

3. Diese Antwort ist richtig. Zunächst kann es, wie in Antwort 5 (s. u.) begründet, keine gültige Lösung mit Kosten von weniger als 54 Minuten geben. Ferner kann es sogar, wie in Antwort 6 (s. u.) begründet, keine gültige Lösung mit Kosten von weniger als 56 Minuten geben.

Aber wir können noch weiter argumentieren. Um die 56-Minuten-„Untere-Schranke“ zu erhalten, haben wir die Minima einer jeden Spalte der Fahrzeittabelle aufsummiert. Das entspricht der Zuordnung eines bestgelegenen Hilfefahrzeug zu jedem Havaristen, wobei zunächst absichtlich außer Acht gelassen wird, dass jedes Hilfefahrzeug nur zu einem Havaristen fahren kann. Wir haben also absichtlich auch ungültige Lösungen mit in Betracht gezogen, um etwas über gültige Lösungen zu erfahren.

Schauen wir in Spalte *A* und versuchen wir, eine Zuordnung mit Wartezeit 8 (dem Minimum entsprechend) vorzunehmen. Angenommen, wir schicken Hilfefahrzeug 2 zu Havarist *A*. Dann kann aber das Minimum 10 in Spalte *B* in einer realisierbaren Zuordnung nicht mehr erreicht werden, da wir dann zu Havarist *B* ebenfalls Fahrzeug 2 schicken müssten. Schicken wir Fahrzeug 4 zu Havarist *A*, so gibt es das analoge Problem in Spalte *D*. Ähnlich kann auch bei Zuordnung von Fahrzeug 6 zu Havarist *A* wegen des Konflikts mit Spalte *F* nicht jede minimale Fahrzeit wirklich realisiert werden. Also muss man in wenigstens in einer der beteiligten Spalten, also für wenigstens einen der Havaristen *A*, *B*, *D* oder *F*, wenigstens die zweitgrößte Fahrzeit akzeptieren, die um 2 Minuten höher liegt. Daher gibt es auch keine gültige Lösung mit Kosten von weniger als 58 Minuten.

Innerhalb von 10 % über 58 Minuten ist so gerade $63 < 58 + 5.8$ Minuten Gesamtwartezeit. Also hat man mit einer gültigen Lösung von 63 Minuten Gesamtwartezeit die Vorgaben des Chefs erfüllt. Insbesondere liegt natürlich auch die oben angegebene Lösung von 60 Minuten Gesamtwartezeit weniger als 10 % über dem Optimalwert.

4. Diese Antwort ist falsch. Selbst wenn alle Havaristen Erfahrung nach mindestens 12 Minuten lang warten müssen, heißt das noch lange nicht, dass sie das in dieser Situation auch müssen. Das sieht man daran, dass es eine gültige Lösung mit 60 Minuten Gesamtwartezeit gibt.
5. Diese Antwort ist als Ganzes betrachtet falsch, obwohl die resultierende Empfehlung okay ist. Zwar stimmt die Argumentation, dass keine Zuordnung weniger als 54 Minuten Gesamtwartezeit produzieren kann. Aber 60 Minuten liegt echt mehr als 10 % über 54 (nämlich $6/54 > 1/10$), obwohl 54 genau 10 % unter 60 liegt. Damit kann man eine gültige Lösung von 60 Minuten Gesamtwartezeit nicht allein schon aus dem Grunde nehmen, weil keine gültige Lösung besser als 54 Minuten sein kann. Tatsächlich ist natürlich eine gültige Lösung von 60 Minuten ausreichend, wie die Korrektheit von Antwort 3 zeigt.

Diese Antwort ist ein Beispiel dafür, wie ein Endresultat richtig, die Argumentation dazu aber falsch sein kann. Wenn man solch eine Argumentation regelmäßig anwendet, könnte in einem anderen Fall auch mal eine falsche Empfehlung herauskommen.

6. Diese Antwort ist falsch. Zwar stimmt die Argumentation, dass keine Zuordnung weniger als 56 Minuten Gesamtwartezeit produzieren kann. Das heißt aber nicht, dass

es auch eine solche Zuordnung gibt. Also muss man nicht *unbedingt* weitersuchen, bis man eine Zuordnung innerhalb von 10 % von 56 Minuten hat (das sind 61 Minuten). Man könnte auch mit einer schlechteren gültigen Lösung schon innerhalb von 10 % Abstand vom Optimalwert sein.

Hier ist es in der Tat so: Wegen der Korrektheit von 3 reicht es ja, eine gültige Lösung zu finden, die 63 Minuten Gesamtwartezeit produziert, um sicher innerhalb von 10 % vom Optimalwert zu landen. Der Antwort 3 könnte man übrigens auch nicht hinzufügen, dass man unbedingt so lange suchen muss, bis man eine Lösung mit 63 Minuten Wartezeit gefunden hat: Kann man nämlich z. B. beweisen, dass keine Zuordnung weniger als 60 Minuten Gesamtwartezeit produziert (und mit fortgeschrittenen mathematischen Methoden kann man das), so ist auch eine Lösung mit Kosten von 66 Minuten schon beweisbar höchstens 10 % vom Optimalwert entfernt.

7. Die Antwort ist falsch. Der Durchschnitt der Fahrzeiten hat mit dem Optimalwert nichts zu tun. Dass Leschtörigs Lösung nicht optimal ist, wissen wir ja schon durch die Lösung mit Gesamtwartezeit 60 Minuten.
8. Die Antwort ist falsch. Leschtörigs Lösung ist offensichtlich eine gültige Lösung. Also kann die optimale Gesamtwartezeit nicht größer sein als deren Gesamtwartezeit von 75 Minuten.
9. Die Antwort ist falsch. Es gibt keine solche gültige Lösung, wie die Korrektheit von Antwort 3 zeigt.
10. Die Antwort ist als Ganzes betrachtet falsch, obwohl die resultierende Empfehlung für sich betrachtet sogar die beste ist. Zwar ist 60 Minuten wirklich die optimale Gesamtwartezeit, es gibt aber weit mehr als 36 Zuordnungen, die man prüfen muss. Nur durch Probieren von 36 Möglichkeiten (ohne weitere Argumente) kann man die Optimalität von 60 nicht begründen. Zur Information: Durch Probieren kann man natürlich die Optimalität von 60 nachweisen. Man muss dazu aber $6! = 720$ Möglichkeiten prüfen.

Diese Antwort ist ein weiteres Beispiel dafür, wie ein Endresultat richtig, die Argumentation dazu aber falsch sein kann. Wenn man solch eine Argumentation regelmäßig anwendet, könnte in einem anderen Fall auch mal eine falsche Empfehlung herauskommen.

Ergänzung: Ein mathematisches Modell für das lineare Zuordnungsproblem

Die Entscheidungen über Zuordnungen von $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ zu $j \in \{A, B, \dots, F\}$ kann man als Variablen x_{ij} auffassen, deren Werte nur Null oder Eins sein können. Dabei bedeutet z. B. $x_{2D} = 1$, dass die Zuordnung $2 \rightarrow D$ vorgenommen wird.

So kann man jede gültige Lösung als Variablenbelegung auffassen. Umgekehrt ist aber nicht jede Variablenbelegung eine gültige Lösung.

Da jeder Havarist genau ein Hilfefahrzeug und jedes Hilfefahrzeug genau einen Havaristen zugeordnet bekommt, muss gelten:

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} + x_{5A} + x_{6A} = 1 \quad (9)$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} + x_{5B} + x_{6B} = 1 \quad (10)$$

$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C} + x_{5C} + x_{6C} = 1 \quad (11)$$

$$x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} + x_{4D} + x_{5D} + x_{6D} = 1 \quad (12)$$

$$x_{1E} + x_{2E} + x_{3E} + x_{4E} + x_{5E} + x_{6E} = 1 \quad (13)$$

$$x_{1F} + x_{2F} + x_{3F} + x_{4F} + x_{5F} + x_{6F} = 1 \quad (14)$$

sowie

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} + x_{1E} + x_{1F} = 1 \quad (15)$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} + x_{2E} + x_{2F} = 1 \quad (16)$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} + x_{3E} + x_{3F} = 1 \quad (17)$$

$$x_{4A} + x_{4B} + x_{4C} + x_{4D} + x_{4E} + x_{4F} = 1 \quad (18)$$

$$x_{5A} + x_{5B} + x_{5C} + x_{5D} + x_{5E} + x_{5F} = 1 \quad (19)$$

$$x_{6A} + x_{6B} + x_{6C} + x_{6D} + x_{6E} + x_{6F} = 1 \quad (20)$$

Alle Variablenbelegungen mit Nullen und Einsen, die diese Gleichungen erfüllen, entsprechen einer gültigen Lösung.

Sind nun c_{ij} die Fahrzeiten, so berechnet sich die Gesamtwarezeit einer durch eine Variablenbelegung x_{ij}^* gegebenen Zuordnung durch

$$c_{1A}x_{1A} + c_{2A}x_{2A} + c_{3A}x_{3A} + c_{4A}x_{4A} + c_{5A}x_{5A} + c_{6A}x_{6A} \quad (21)$$

$$c_{1B}x_{1B} + c_{2B}x_{2B} + c_{3B}x_{3B} + c_{4B}x_{4B} + c_{5B}x_{5B} + c_{6B}x_{6B} \quad (22)$$

$$c_{1C}x_{1C} + c_{2C}x_{2C} + c_{3C}x_{3C} + c_{4C}x_{4C} + c_{5C}x_{5C} + c_{6C}x_{6C} \quad (23)$$

$$c_{1D}x_{1D} + c_{2D}x_{2D} + c_{3D}x_{3D} + c_{4D}x_{4D} + c_{5D}x_{5D} + c_{6D}x_{6D} \quad (24)$$

$$c_{1E}x_{1E} + c_{2E}x_{2E} + c_{3E}x_{3E} + c_{4E}x_{4E} + c_{5E}x_{5E} + c_{6E}x_{6E} \quad (25)$$

$$c_{1F}x_{1F} + c_{2F}x_{2F} + c_{3F}x_{3F} + c_{4F}x_{4F} + c_{5F}x_{5F} + c_{6F}x_{6F} \quad (26)$$

Veranschaulichen kann man sich diese Aufgabe an einem sogenannten Graphen. Dieser besteht aus je einem roten Knoten für jeden Havaristen und je einem blauen Knoten für jedes Hilfefahrzeug. Jeder rote Knoten ist mit jedem blauen Knoten durch eine Kante verbunden, an die wir die entsprechende Fahrzeit schreiben (das Gewicht der Kante). Gesucht ist eine Menge von paarweise disjunkten (nicht benachbarten) Kanten mit minimalem Gesamtgewicht. So etwas heißt in der Graphentheorie ein Matching. Und da hier keine Kanten nur blaue oder nur rote Knoten verbindet, spricht man von einem bipartiten Matching. Das Optimierungsproblem läßt sich nun wie folgt etwas kompakter formulieren:

$$\min \sum_{i \in \{1, \dots, 6\}, j \in \{A, \dots, F\}} c_{ij} x_{ij} \quad (27)$$

... unter der Bedingung, dass ...

$$\sum_{i \in \{1, \dots, 6\}} x_{ij} = 1 \text{ für alle } j \in \{A, \dots, F\} \quad (28)$$

$$\sum_{j \in \{A, \dots, F\}} x_{ij} = 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, 6\} \quad (29)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (30)$$

So ein mathematisches Modell heißt *binäres lineares Programm* (BLP). Obwohl BLPs im Allgemeinen schwer zu lösen sind, ist dieses spezielle Problem, das sogenannte lineare Zuordnungsproblem, leicht zu lösen. Für die Beispielaufgabe braucht ein handelsübliches Computerprogramm zur Lösung nur Sekundenbruchteile. Selbst für 1000 Havaristen und 1000 Fahrzeuge kann man das lineare Zuordnungsproblem leicht lösen.

Eine Zimpl-Eingabedatei für das lineare Zuordnungsproblem

Das obige mathematische Modell kann man einem Computerprogramm zur Lösung übergeben. Dazu muss es aber in ein geeignetes Format gebracht werden.

Die folgenden Eingabedaten verarbeitet das Modellierungswerkzeug **Zimpl** zu einer Eingabedatei für einen sogenannten LP-Löser. LP-Löser gibt es viele. Ein Beispiel für einen frei erhältlichen Löser ist **Soplex**. Dieser LP-Löser liefert dann eine optimale Lösung des Zuordnungsproblems.

```
param k := 6;

set S := { 1 to k };

param c[S*S] :=
      | 1, 2, 3, 4, 5, 6|
      | 1 |10, 13, 20, 25, 30, 25|
      | 2 | 8, 10, 9, 20, 25, 30|
      | 3 |10, 12, 10, 12, 20, 25|
      | 4 | 8, 20, 9, 10, 9, 20|
      | 5 |10, 25, 20, 12, 10, 12|
      | 6 | 8, 30, 25, 20, 9, 10|;

var x[S*S] binary;

minimize cost: sum <i,j> in S*S: c[i,j] * x[i,j];

subto i_assignment: forall <i> in S: sum <j> in S: x[i,j] == 1;
subto j_assignment: forall <j> in S: sum <i> in S: x[i,j] == 1;
```

16 Hüte

In Berlin gibt es jetzt zwei Geschäfte, die alte Hüte verkaufen, und viele Interessenten: Ein Geschäft befindet sich am Kurfürstendamm (*K*), ein zweites hat gerade am Potsdamer Platz eröffnet (*P*). Kunden von *K* gehen nun auch zu *P* und umgekehrt. Jeder fünfte, der am Kurfürstendamm seinen letzten Einkauf getätigt hat, kauft seinen nächsten alten Hut am Potsdamer Platz. Mit dem Geschäft am Potsdamer Platz sind die Kunden jedoch weniger zufrieden: Jeder zweite, der dort eingekauft hat, geht für seinen nächsten Einkauf zum Geschäft am Kurfürstendamm.

Nach einiger Zeit hat sich die Situation so eingespielt, dass die Aufteilung der Kunden auf die beiden Geschäfte konstant ist. In welchem Zahlenverhältnis steht die Zahl der Kunden von *K* zu der von *P*?

Antwortmöglichkeiten:

1. 2 : 1
2. 7 : 3
3. 3 : 1
4. 5 : 2
5. 5 : 3
6. 5 : 1

7. 3 : 2

8. 7 : 2

9. 4 : 3

10. 7 : 4

Autor: R. Seiler

Die Aufgabe entstammt dem Forschungsschwerpunkt „Ausbildung“ des DFG-Forschungszentrums MATHEON. Hier geht es — im Unterschied zur obigen Aufgabe — um *Neues*: Ziel unseres Projektes ist es, jungen Leuten mit Visualisierungen, Computer-Experimenten und interessanten Anwendungen aus Physik, Biologie, Chemie und Ingenieurwissenschaften zu zeigen, dass auch abstrakte Mathematik mit Witz und Lust erfahren und erlebt werden kann. In unserem Team sind immer wieder auch Schüler als Praktikanten dabei. Bei Interesse wende Dich per Email an Thomas thor@math.tu-berlin.de.

Lösung:

Die richtige Lösung ist 5 : 2:

Mit $|K|$ bzw. $|P|$ wird die Zahl der Kunden des Geschäftes am Kurfürstendamm bzw. am Potsdamer Platz bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der in K gekauft hat, das nächste Mal in P kauft, ist 0,2. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass er wieder in K kauft, 0,8.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der in P gekauft hat, das nächste Mal in K kauft, ist 0,5. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass er wieder in P kauft, 0,5.

Wenn die Zahl der Kunden sich eingespielt hat, muss für die Kunden vom Geschäft am Kurfürstendamm gelten: Die Zahl der Kunden (100% von $|K|$) minus die Zahl der Abwanderungen (20% von $|K|$) plus die Zuwanderungen aus P (50% von $|P|$) muss konstant gleich $|K|$ sein. Eine analoge Beziehung gilt für die Kunden des Geschäftes am Potsdamer Platz. Dies kann in Formeln so ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}|K| &= 0,8 \cdot |K| + 0,5 \cdot |P| \\ |P| &= 0,2 \cdot |K| + 0,5 \cdot |P|\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt durch Umformung

$$0,2 \cdot |K| = 0,5 \cdot |P|.$$

Daraus ergibt sich dann die Lösung:

$$\frac{|K|}{|P|} = \frac{5}{2}$$

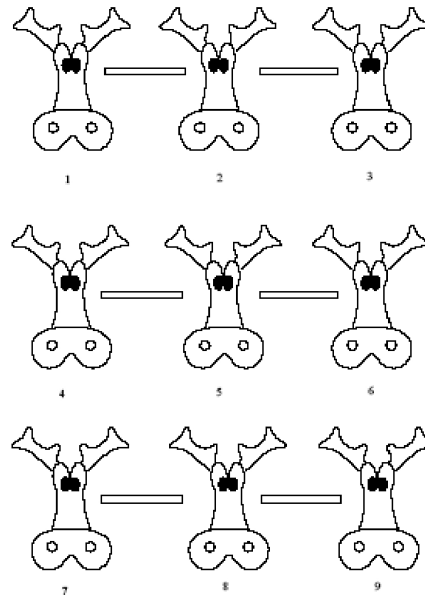
oder — was dasselbe ist — :

$$|K| : |P| = 5 : 2$$

Die zweite Gleichung ist zur ersten äquivalent und ergibt dasselbe Resultat.

17 Störrische Rentiere

Der Schlitten des Weihnachtsmanns wird von insgesamt neun Rentieren gezogen. Diese sind jeweils drei nebeneinander und drei hintereinander eingespannt:



Da Rentiere notorisch störrisch und eigensinnig sind, kann dieselbe Einspann-Anordnung nicht jedes Jahr verwendet werden, weil sich manche Tiere nicht leiden können. Dieses Jahr sind die Tiere wie auf dem Bild angeordnet.

Im nächsten Jahr dürfen keine zwei Tiere, die in diesem Jahr direkt nebeneinander liefen, wieder zusammen eingespannt werden. Das heißt, 1 darf nicht neben 2 laufen und 2 nicht neben 3, wohl aber 1 neben 3. Da Groll unter Rentieren lange anhält, kommen in zwei Jahren alle Paarungen der letzten beiden Jahre nicht in Frage und so weiter. Wenn man davon ausgeht, dass irgendwann alle solchen Einspann-Anordnungen ausgeschöpft sind, ab welchem Jahr muss der Weihnachtsmann seinen Schlitten selbst ziehen, weil seine Rentiere sich weigern, ihn zu ziehen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 2005
2. 2006
3. 2007
4. 2008
5. 2009
6. 2010
7. 2011
8. Es können ständig neue Einspann-Anordnungen gefunden werden.

Autor: Falk Ebert

Lösung: Die richtige Antwort lautet 6: 2010

Das vorliegende Problem lässt sich auf das Problem der STEINERSchen Dreiergruppen und das des KIRKMANSchen Schulmädchenproblems zurückführen. Beide waren knifflige Probleme der Kombinatorik im 19. und 20. Jahrhundert. Die Rentier-Aufgabe wurde ursprünglich mit aneinandergeketteten Häftlingen gestellt, und zwar um 1917 von HENRY ERNEST DUDENEY.

Lösungsweg:

Es lässt sich zeigen, dass die Anzahl der Einteilungen in (nicht durch Permutation ineinander überführbare) Dreiergruppen aus n Tieren ($n \in \{9, 21, 33, 45, \dots\}$), ohne dass dieselben Paare in verschiedenen Dreiergruppen der Einteilungen auftreten, gleich $\frac{1}{2}(n-1)$ ist. Für unsere $n = 9$ Rentiere zum Beispiel:

1. $\{1; 2; 3\}; \{4; 5; 6\}; \{7; 8; 9\}$
2. $\{1; 4; 7\}; \{2; 5; 8\}; \{3; 6; 9\}$
3. $\{1; 5; 9\}; \{2; 6; 7\}; \{3; 4; 8\}$
4. $\{1; 6; 8\}; \{2; 4; 9\}; \{3; 5; 7\}$

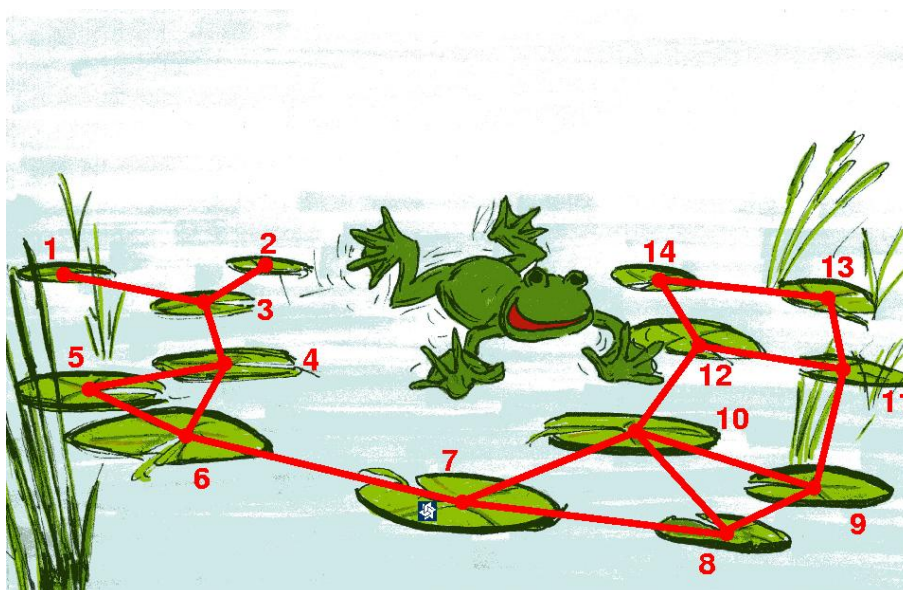
Die zusätzlichen Möglichkeiten der Reihenfolge in der Einspannung erhöht diese Anzahl auf $\frac{3}{4}(n-1)$, weil einzelne Wiederholungen doch zulässig werden: Gibt es zum Beispiel die Gruppe $(1; 2; 3)$, darf es später die Gruppe $(1; 3; 2)$ geben. Das macht bei 9 Rentieren insgesamt 6 Möglichkeiten von zulässigen Gruppierungen. Eine von 332 möglichen Lösungen ist in der Tabelle dargestellt.

	1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr	5. Jahr	6. Jahr	
vorn	4-1-3	7-4-6	1-7-9	1-2-4	4-5-7	7-8-1	Bei 6 Möglichkeiten ist
Mitte	2-7-6	5-1-9	8-4-3	7-3-9	1-6-3	4-9-6	
hinten	5-9-8	8-3-2	2-6-5	5-8-6	8-2-9	2-5-3	

die letzte also 2009 genutzt und ab 2010 muss der Weihnachtsmann den Schlitten selbst ziehen.

18 Forsch-Frosch

Die Story



Zeichnung: Jens Jordan 2004©

Der Forsch–Frosch Fred ist Mathematiker. Um so wenig wie möglich von seiner hochgeistigen Tätigkeit abgelenkt zu werden, hält er sein übriges Leben etwas monoton: Er tut nichts, als zwischen den 14 Seerosenblättern seines Teiches hin und her zu springen. Da die Natur Fred zwar mit einem großen Kopf, aber mit für einen Frosch eher dünnen Beinen ausgestattet hat, kommen für ihn nur die im Bild rot eingezeichneten Sprünge (Verbindungslinien) in Frage. Und weil er seine mathematischen Überlegungen nicht durch unwesentliche Gedanken unterbrechen möchte, springt er stets vom aktuellen Seerosenblatt zufällig zu einem der möglichen Nachbarblätter. Ein solches Forsch–Frosch–Leben mit viel Bewegung und stets an der frischen Luft ist natürlich sehr gesund, so dass Fred sehr alt wird. An seinem 20. Geburtstag überlegt er, auf welchem Blatt er wohl am häufigsten gewesen sei. Einige Sprünge später ist ihm die Antwort klar — aber er ist ja auch Profi.

Antwortmöglichkeiten

1. da, wo er gestartet ist
2. im Zentrum: Blatt 7
3. auf dem Blatt, auf das er im Bild zuspringt: Blatt 10
4. wenn er rechts startet, auf Blatt 7, wenn er links startet, auf Blatt 6
5. wenn er rechts startet, auf Blatt 6, wenn er links startet, auf Blatt 7
6. auf allen Blättern (ungefähr) gleich häufig
7. auf den hinteren Blättern 1, 2, 13 und 14 (ungefähr) gleich häufig, weil man von dort schlecht wegkommt
8. auf dem Dreieck der Blätter 4, 5, 6, weil man dort oft kreiselt
9. auf Blatt 6, weil es das größte ist
10. Das kann man nicht vorhersagen.

Autor: Volker Kaibel (B11) **Mathematischer Hintergrund**

Prozesse wie Freds Hüpfen sind in der modernen Mathematik als „Random Walks“ wohl bekannt. Mit solchen Modellen kann man zum Beispiel komplexe physikalische Systeme modellieren, die sich in (vielen) verschiedenen Zuständen befinden können und den tatsächlichen Zustand immer wieder unter Einfluss von Zufall wechseln. Die möglichen Zustände entsprechen dann den Seerosenblättern in Freds Teich, der tatsächliche Zustand des Systems zu einem festen Zeitpunkt entspricht Freds aktueller Position. Hat man sich nun ein Bild davon gemacht, wie die Übergänge zwischen den verschiedenen Zuständen zufällig passieren, so steht man danach vor der Aufgabe, die Entwicklung des Systems über eine lange Zeit zu analysieren (ähnlich der Analyse der Besuchshäufigkeiten im Seerosenteich).

Umgekehrt macht sich die moderne algorithmische Mathematik das Prinzip des Random Walks zunutze, um komplexe mathematische Objekte zufällig zu erzeugen. Im Bild des Froschteichs gesprochen ist dabei üblicherweise für jedes Seerosenblatt die Antreffwahrscheinlichkeit vorgegeben, mit der man Fred auf dem Blatt antreffen möchte, wenn man zu einem beliebigen Zeitpunkt am See vorbeikommt. Diese Antreffwahrscheinlichkeiten sind die Gleichen wie die Besuchshäufigkeiten. Nun muss man eine geeignete Nachbarschaftsstruktur (und richtig gewählte Sprungwahrscheinlichkeiten) entwerfen, die zu den gewünschten Antreffwahrscheinlichkeiten führen. Danach simuliert der Computer dann

den Random Walk eine Zeit lang. Die mathematische Kunst besteht nun darin, herauszufinden, wie viele Sprünge man den Computer simulieren lassen muss, damit die Antreffwahrscheinlichkeiten der Simulation den gewünschten Wahrscheinlichkeiten nahe genug kommen.

Mit solchen Methoden kann man z. B. komplizierte mathematische Zählprobleme (approximativ) lösen, bei denen Objekte gezählt werden müssen, deren Anzahl so groß ist, dass man sie niemals alle erzeugen kann. Das dahinter stehende Prinzip, den Zufall intelligent in Algorithmen und Computerprogrammen zu nutzen, spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen der aktuellen Algorithmenforschung und ist wichtig für zahlreiche Optimierungsprobleme, wie sie auch im DFG-Forschungszentrum MATHEON bearbeitet werden.

Lösung:

Die richtige Antwort ist 3.: Blatt 10.

Die Besuchshäufigkeit eines Blattes (das ist der Anteil der Lebenszeit des Frosches, die er auf dem Blatt verbracht hat) ist proportional zur Anzahl seiner Nachbarblätter. Das kann man sich folgendermaßen überlegen:

Es gilt z. B. für die Besuchshäufigkeit $h(4)$ des Blattes 4 und die Häufigkeiten $h(3)$, $h(5)$ und $h(6)$ seiner Nachbarn:

$$h(4) = \frac{1}{3}h(3) + \frac{1}{2}h(5) + \frac{1}{3}h(6)$$

(Wenn der Frosch auf Blatt 3 sitzt, wird er in einem Drittel der Fälle zu Blatt 4 springen, ebenso, wenn er auf Blatt 6 sitzt, und in der Hälfte der Fälle, wenn er auf Blatt 5 sitzt.) Nun kann man nachrechnen, dass

$$h(1) = \frac{1}{36}, h(2) = \frac{1}{36}, h(3) = \frac{3}{36}, h(4) = \frac{3}{36}, \dots, h(10) = \frac{4}{36}, \dots, h(14) = \frac{2}{36}$$

(36 ist die Gesamtzahl aller Sprungmöglichkeiten) alle 14 Gleichungen erfüllt. Wenn man sich jetzt noch überlegt, dass die 14 Gleichungen nur eine Lösung haben, deren Werte sich zu Eins aufsummieren, dann hat man bewiesen, dass die Besuchshäufigkeiten proportional zu den Anzahlen der Nachbarn sind.

19 Die verflixte Drei

Das Würfelspiel „Die verflixte Drei“ verläuft folgendermaßen: Reihum darf jeder Teilnehmer so lange würfeln und die Augen zusammenzählen, bis er entweder freiwillig aufhört und die Augensumme seinem Punktekonto gutschreibt oder aber eine Drei würfelt, woraufhin die Punkte dieser Runde verfallen und er den Würfel an den nächsten Spieler weiterreichen muss. Sieger ist natürlich, wer nach einer vorher festgelegten Anzahl von Runden die meisten Punkte erwürfelt hat.

Eine mögliche Spielstrategie besteht darin, das Würfeln abubrechen, sobald man mindestens n Augen zusammen hat. Wie wählt man aber n optimal?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Punktesumme hängt nicht von n ab.
2. $n = 4$

3. $n = 8$

4. $n = 13$

5. $n = 18$

6. $n = 23$

7. $n = 30$

8. Es gibt mehrere verschiedene Möglichkeiten, n optimal zu wählen.

Autor: Martin Weiser

Diese Aufgabe ist ein ganz einfacher Fall der stochastischen Optimierung, wie sie auch am DFG-Forschungszentrum MATHEON betrieben wird. Wie plant man etwa die Bewegungen eines Aufzugs, wenn nur bestimmte Wahrscheinlichkeiten der Rahmenbedingungen bekannt sind?

Lösung:

Die richtige Antwort ist 5.: 18.

Hat man n Punkte zusammen, so ist der Erwartungswert für die mit dem nächsten Wurf insgesamt erzielte Augensumme

$$E(n) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot n + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot (5n + 1 + 2 + 4 + 5 + 6) = \frac{5}{6} \cdot n + 3.$$

Für $E(n) > n$ lohnt sich also der nächste Wurf noch, also für $n < 18$. Ab einer Augensumme von 18 lässt man das Würfeln besser sein.

20 Deformierter Würfel

Gegeben sei ein Würfel, der so deformiert ist, dass er folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- Gegenüberliegende Seitenflächen sind nicht parallel.
- Die gegenüberliegenden Kanten einer Seitenfläche sind nicht parallel.

Der deformierte Würfel besitzt acht Eckpunkte. Wir werden im folgenden zwölf weitere Punkte konstruieren. Betrachte zwei gegenüberliegende Kanten einer Seitenfläche (und sieh diese jeweils als unendlich lange Geraden an). Da diese in einer Ebene (der gemeinsamen Seitenfläche) liegen und nach Voraussetzung nicht parallel sind, schneiden sie sich in einem Punkt außerhalb des Würfels. Jede Seitenfläche liefert also durch ihre zwei Kantenpaare zwei weitere Punkte. Da der Würfel sechs Seitenflächen hat, bekommt man also zwölf zusätzliche Punkte.

Wir nehmen an, dass alle diese zwölf Punkte verschieden sind.

Zusammen mit den acht Punkten des Würfels haben wir jetzt also insgesamt 20 Punkte im Raum, die alle voneinander verschieden sind.

Die Frage lautet nun: Wie viele Geraden gibt es, die durch vier dieser 20 Punkte gehen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0
2. 1
3. 5
4. 6
5. 10
6. 12
7. 15
8. 18
9. 20
10. 24

Autor: Alexander Bobenko

In der Computergrafik werden Oberflächen von Körpern durch polyedrische Flächen dargestellt. Standardmäßig benutzt man Flächen aus Dreiecken. Im DFG-Forschungszentrum MATHEON untersucht die Gruppe „Diskrete Differentialgeometrie“ die Geometrie von polyedrischen Flächen. Insbesondere entwickeln sie eine Theorie von Flächen aus Vierecken. Der Aufgabe liegt ein Inzidenzsatz aus der projektiven Geometrie zu Grunde. Dieser Inzidenzsatz spielt in den Untersuchungen von Vierecksflächen eine große Rolle.

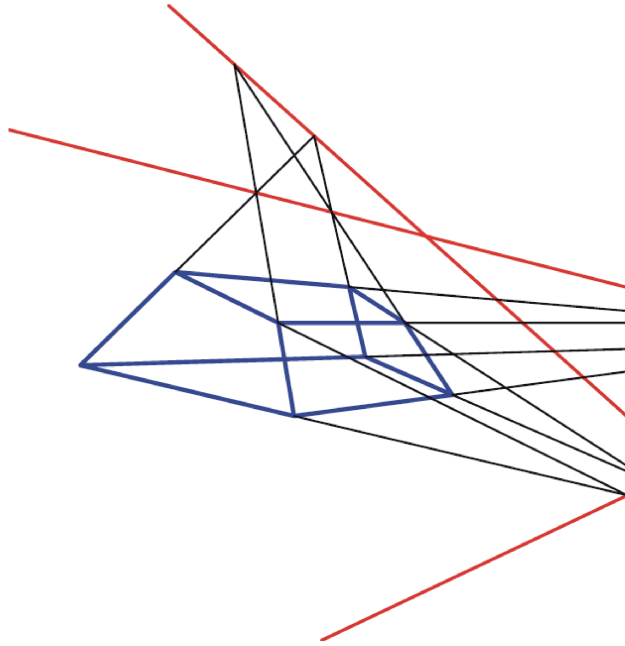
Lösung:

Die richtige Antwortsmöglichkeit ist 7.: 15

Betrachte eine Kante k des Würfels. Diese Kante hat zwei angrenzende Seitenflächen F_1 und F_2 . Pro Fläche F_1 und F_2 gibt es eine zu k gegenüberliegende Kante k_1 und k_2 . Wie schon in der Aufgabenstellung erläutert, schneiden sich k und k_1 im Punkt P_1 sowie k und k_2 im Punkt P_2 . Nach Voraussetzung sind P_1 und P_2 verschieden. Die Kante k geht also durch die beiden Eckpunkte des Würfels und durch P_1 und P_2 , also insgesamt durch vier der oben konstruierten Punkte. Der Würfel besitzt insgesamt zwölf Kanten, also haben wir schon zwölf der 15 gesuchten Geraden angegeben.

Die fehlenden drei Geraden sind folgende:

Wähle zwei gegenüberliegende Flächen F_1 und F_2 des Würfels. Da diese nicht parallel sind, schneiden sie sich entlang einer Geraden g . Wähle nun eine weitere Seitenfläche F . Diese Fläche besitzt zwei gegenüberliegende Kanten g_1 und g_2 , die auch der Fläche F_1 bzw. F_2 angehören. Diese Kanten, die wir wieder als Geraden ansehen, schneiden sich in einem Punkt P , der wiederum auf der Geraden g liegt. Außer F_1 und F_2 besitzt der Würfel noch vier weitere Seitenflächen, also liegen tatsächlich vier der 20 Punkte auf der Geraden g . Da der Würfel drei solcher Flächenpaare F_1 und F_2 besitzt, kann man noch drei weitere Geraden angeben, die durch vier der 20 Punkte gehen. Also gibt es tatsächlich insgesamt 15 solcher Geraden.

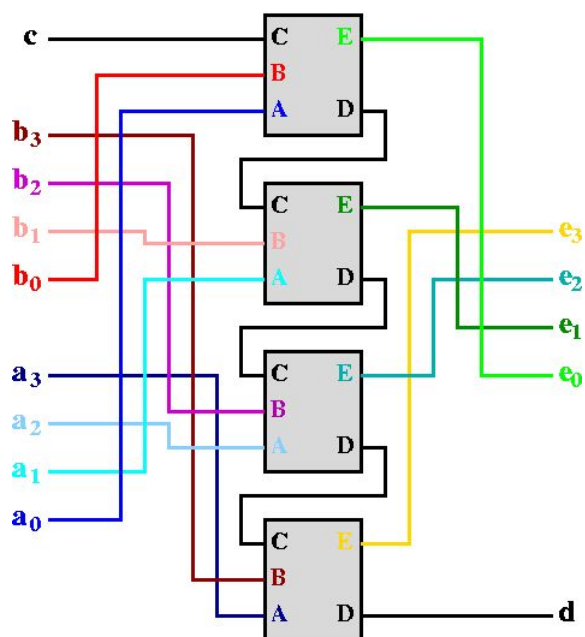


21 Schaltplan

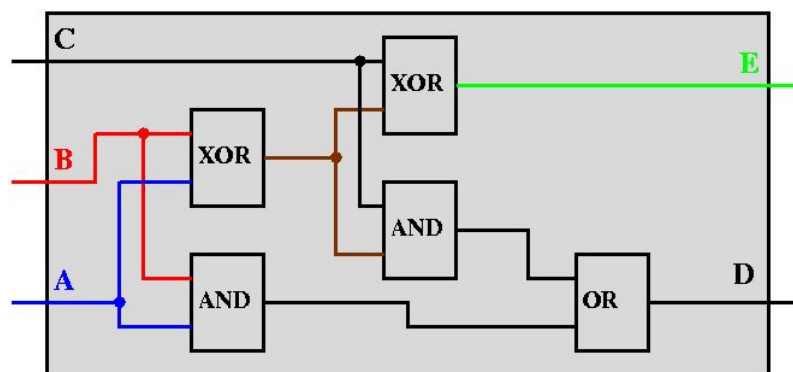
Mit Hilfe von einfachen Schaltelementen lassen sich bestimmte logische Verknüpfungen realisieren, z. B. das logische UND, ODER sowie das exklusive ODER mit den Gattern AND, OR und XOR. Die Werte in der folgenden Tabelle geben die Outputwerte *Out* in Abhängigkeit von den Inputwerten *In1* und *In2* an, wobei die Zahl 1 für den Wahrheitswert WAHR und die Zahl 0 für den Wahrheitswert FALSCH steht.

In1	In2	AND Out	OR Out	XOR Out
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Verwendet man nun die Dualdarstellung natürlicher Zahlen, lassen sich Schaltungen konstruieren, die bestimmte Rechenoperationen realisieren. Ein Beispiel für eine solche Schaltung ist in der folgenden Abbildung gegeben.



Dabei sind die grauen Schaltungsteile durch folgende Teilschaltung zu ersetzen:



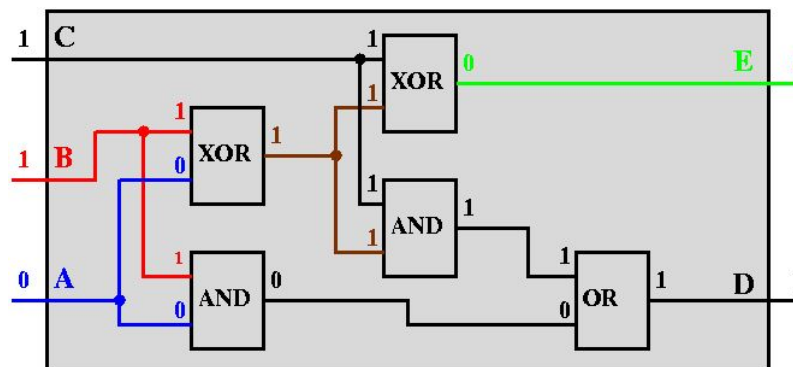
Welche Dezimalzahl erhält man für den Output e aus der obigen Schaltung, wenn e die Dualdarstellung

$$e_3e_2e_1e_0, \text{ also } e = e_3 \cdot 2^3 + e_2 \cdot 2^2 + e_1 \cdot 2^1 + e_0 \cdot 2^0,$$

hat und man als Input $a = 6$, $b = 2$ und $c = 0$ in ihrer Dualdarstellung verwendet?

Hinweis:

Für die Teilschaltung sind im folgenden Bild als Beispiel die Ergebnisse für den Input $A = 0$, $B = 1$ und $C = 1$ angegeben.



Antwortmöglichkeiten:

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4
6. 6
7. 8
8. 12
9. 16
10. 20

Autoren: Caren Tischendorf, R. Lamour.

Logische Verknüpfungen bilden die Grundlage des Funktionierens vieler technischer Geräte, z. B. von Computern. Diese Verknüpfungen werden in elektrischen Schaltungen realisiert. Um die richtige Funktionsweise der Schaltungen sicherzustellen, werden diese mit Hilfe mathematischer Modelle simuliert. Durch die Modellierung erhält man ein System von bis zu einer Million nichtlinearen Gleichungen (genauer: Algebro-Differentialgleichungen). Im DFG-Forschungszentrum MATHEON werden solche Systeme auf ihre Struktur und Lösbarkeit hin untersucht.

Lösung:

Die Antwort 7.: $e = 8$ ist richtig.

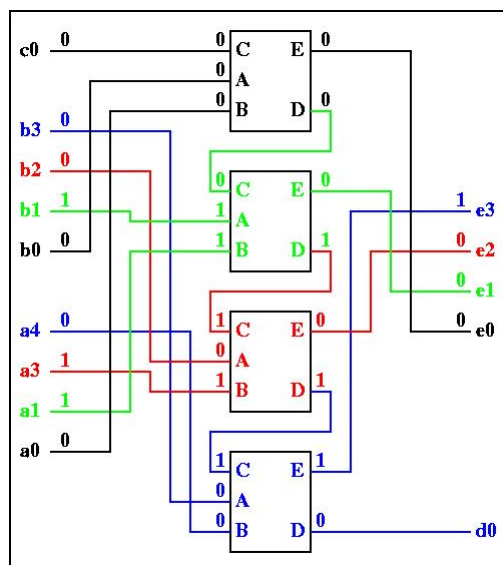
Für die Dezimalzahlen $a = 6$, $b = 2$ und $c = 0$ gilt

$$\begin{aligned} a = 6 &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ b = 2 &= 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ c = 0 &= 0 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

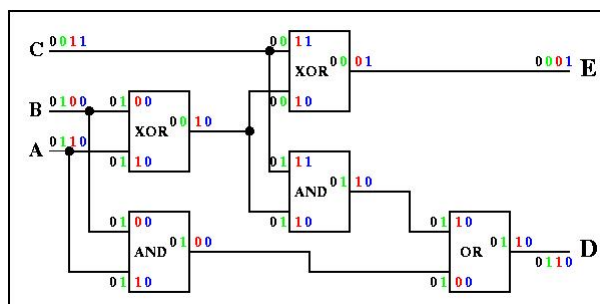
Als Dualdarstellung erhält man also $a = 110$, $b = 10$, $c = 0$, d. h.

$$\begin{array}{cccc} a_0 = 0 & a_1 = 1 & a_2 = 1 & a_3 = 0 \\ b_0 = 0 & b_1 = 1 & b_2 = 0 & b_3 = 0 \\ & & & c_0 = 0 \end{array}$$

Die Ergebnisse der Schaltung für diese Input-Daten sind im folgenden Bild dargestellt.



Dabei ergeben sich für die vier Teilschaltungen die im nächsten Bild dargestellten Ergebnisse (Daten mit gleicher Farbe gehören zu jeweils einer Teilschaltung).



Somit hat das Ergebnis die Dualdarstellung $e = 1000$. Als Dezimalzahl erhält man

$$e = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8$$

Anmerkung: Die Schaltung realisiert die Addition zweier natürlicher Zahlen a und b von 0 bis $2^4 - 1 = 15$. Die Zahl c stellt einen eventuellen Übertrag dar. Verknüpft man nicht nur vier der Teilschaltungen miteinander, sondern 32, so lassen sich damit zwei natürliche Zahlen von 0 bis $2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295$ exakt addieren. Solche Schaltungen werden bei der sogenannten 32-Bit-Arithmetik von Computerchips verwendet.

22 Theater

An der Abendkasse eines Theaters befindet sich eine Warteschlange von $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, Personen, von denen jede genau ein Ticket erwerben möchte. Von den Wartenden besitzt die eine Hälfte nur je einen 5-Euro-Schein und die andere nur je einen 10-Euro-Schein. Tickets kosten 5 Euro, und der Kartenverkäufer hat kein Wechselgeld. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass niemand auf sein Wechselgeld warten muss?

Antwortmöglichkeiten:

1. $\frac{1}{7}$
2. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{1}{n}$
5. $\frac{n}{n+1}$
6. $\frac{1}{n+1}$
7. $\frac{n-1}{n^2+n}$
8. $\frac{n-1}{n+1}$
9. $\frac{n^2-1}{n^3+1}$
10. $\frac{n-2}{n+1}$

Autor: Mesrop Janunts

Lösung:

Die richtige Antwortmöglichkeit ist 6.: $\frac{1}{n+1}$.

X_k sei $+1$, wenn die k -te Person in der Warteschlange 5 Euro besitzt, und -1 , wenn die k -te Person einen 10-Euro-Schein hat. $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$ ist die Differenz zwischen der Anzahl reicher und der Anzahl armer Wartender bis zur k -ten Person in der Schlange. Jedes $(X_1, X_2, \dots, X_{2n})$ wird durch ein Polygon (einen *Pfad*) mit den Ecken (k, S_k) , $k = 1, \dots, 2n$, dargestellt:

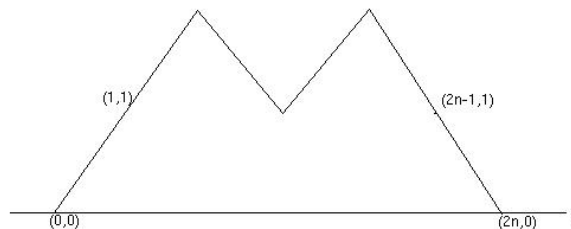


Figure 1: Path connecting $(0,0)$ to $(2n,0)$.

Gesucht ist die Anzahl N aller Pfade, die im ersten Quadranten verlaufen und $S_{2n} = 0$ erfüllen, also auf der k -Achse enden. Jeder dieser Pfade muss $(1, 1)$ durchlaufen. Die Anzahl aller Pfade von $(1, 1)$ nach $(2n, 0)$ ist gleich $\binom{2n-1}{n}$. Um die Anzahl der gesuchten Pfade zu erhalten, muss man die Anzahl aller Pfade subtrahieren, die von $(1, 1)$ nach $(2n, 0)$ und teilweise unterhalb der k -Achse verlaufen. Um deren Anzahl zu erhalten, vertauschen wir die Vorzeichen der X_k , die links vom ersten Schnitt- bzw. Berührungspunkt des Pfades und einer Parallelen zur k -Achse durch $(0, -1)$ liegen. Bis dorthin wird der Pfad also an der k -Achse gespiegelt. Danach wird der Pfad so fortgesetzt, wie er war, allerdings beginnt er dort, wo der gespiegelte Pfad endet: Dies entspricht einer Verschiebung um 2 nach oben. Siehe Figur 3, in der die k -Achse mit t gekennzeichnet ist.

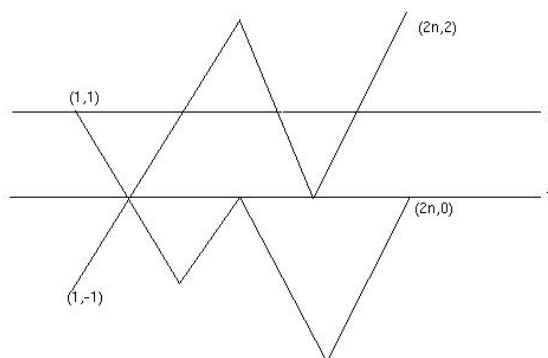


Figure 3: Reflection of the paths from $(1,1)$ to $(2n,0)$ crossing the t -axis.

So erhält man eine eindeutige Zuordnung zwischen allen Pfaden, die von $(1,1)$ nach $(2n,0)$ und teilweise unterhalb der k -Achse verlaufen, und allen Pfaden, die von $(1,-1)$ nach $(2n,2)$ laufen und deren Anzahl $\binom{2n-1}{n+1}$ ist. Somit gilt

$$N = \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

Die Anzahl aller Pfade von $(0,0)$ nach $(2n,0)$ ist $\binom{2n}{n}$, sodass die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

ist.

Die Aufgabe ist eine Version des *Ballot-Theorems* von BERTRAND:

J. Bertrand, Calcul des probabilités. Solution d'un problème.

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, vol. 105(1887), p. 369.

23 Laser

Ein Würfel der Kantenlänge 5cm soll mit Hilfe eines gebündelten Laserstrahls in mehrere kleine Würfel von ganzzahliger Kantenlänge (in cm) geschnitten werden.

Was ist die kleinste Anzahl an Würfeln, die man so herstellen kann?

Antwortmöglichkeiten:

1. 27
2. 36
3. 48
4. 50
5. 62

6. 64

7. 100

8. 125

Autor: Jörg Härterich

Laser spielen eine wichtige Rolle beim Schneiden und Bohren von Metallen, bei der Oberflächenbehandlung und in der Telekommunikation. Auch Projekte am DFG-Forschungszentrum MATHEON (D3, D8) befassen sich mit der Simulation und Analysis von Lasernmodellen.

Lösung:

Die richtige Lösungsmöglichkeit ist 4.: 50.

Wir untersuchen vier verschiedene Fälle, je nachdem, wie groß der größte ausgeschnittene Würfel ist. Falls ein Würfel mit 4 cm Kantenlänge vorhanden ist, können alle anderen Würfel nur noch die Kantenlänge 1 cm besitzen. Da der Würfel mit 4 cm Kantenlänge ein Volumen von 64 cm^3 hat, muss der Rest in 61 Würfel der Kantenlänge 1 cm geschnitten werden. Insgesamt erhält man so 62 kleine Würfel. Falls der größte Würfel die Kantenlänge 1 cm hat, dann haben natürlich alle Würfel diese Kantenlänge, und man erhält insgesamt 125 Würfel. Hat der größte Würfel die Kantenlänge 2 cm, sieht man schnell, dass höchstens acht solcher $2 \times 2 \times 2$ -Würfel in den $5 \times 5 \times 5$ -Würfel passen. Der Rest muss wieder in Würfel der Kantenlänge 1 cm geschnitten werden, was am Ende zu 69 Würfeln führt. Bleibt noch der Fall, dass der größte Würfel eine Kantenlänge von 3 cm hat. Dieser Würfel kann entweder in der Mitte des $5 \times 5 \times 5$ -Würfels ausgeschnitten werden, dann muss aber der gesamte Rest wieder in Würfel der Kantenlänge 1 cm geschnitten werden, und man bekommt $125 - 27 = 98$ Würfel der Kantenlänge 1 cm, insgesamt also 99 Würfel. Liegt der Würfel mit 3 cm Kantenlänge jedoch am Rand des ursprünglichen Würfels, so ist auf einer Seite noch Platz für vier Würfel der Kantenlänge 2 cm, auf der nächsten Seite noch Platz für zwei Würfel der Kantenlänge 2 cm und auf der letzten Seite immerhin noch Platz für einen Würfel der Kantenlänge 2 cm. Der gesamte Rest hat das Volumen $(125 - 27 - 7 \cdot 8) \text{ cm}^3 = 42 \text{ cm}^3$ und muss in Würfel der Kantenlänge 1 cm geschnitten werden. Insgesamt ergibt dies $1 + 7 + 42 = 50$ Würfel. Dies ist also die kleinste Anzahl an Würfeln, die man erhalten kann.

24 Zahlenrätsel

Die Aufgabe vom 24. Dezember geht nicht in die Wertung ein. Wer sich dennoch die Zeit bis zur Bescherung verkürzen möchte, der ersetze die Variablen in den Literaturstück mit den richtigen. Am Ende wird summiert ...

... lauter Zitate aus bekannten und unbekannten Büchern, Gedichten, Texten, Liedern:

Unmöglich

“There’s no use trying,” she said: “one *can’t* believe impossible things.”

“I daresay you haven’t had much practice,” said the Queen. “When I was your age, I always did it for half-an-hour a day. Why, sometimes I’ve believed as many as x_1 impossible things before breakfast.”

$x_1 = 6$

Lewis Carroll: "Through the Looking-Glass" (1871)

Spiele: Poker

Jetzt, in seinem begreiflichen Ärger, schlug er eine Verdoppelung des Einsatzes vor.

„Wie du willst“, sagte ich und konnte einen kleinen Triumph in meiner Stimme nur mühsam unterdrücken, weil ich mittlerweile auf eine phantastische Ziffer gekommen war: x_2 !

$x_2 = 35$

Ephraim Kishon: Jüdisches Poker; übertragen von Friedrich Torberg. In: „Drehn Sie sich um, Frau Lot!“ (1961)

Glückszahl

Seven is a popular number, and especially it was a favourite with Miss Amelia. x_3 swallows of water for hiccups, x_3 runs around the millpond for cricks in the neck, x_3 doses of Amelia Miracle Mover as a worm cure – her treatment nearly always hinged on this number. It is a number of mingled possibilities, and all who love mystery and charms set store by it. So the fight was to take place at x_3 o'clock.

$x_3 = 7$

Carson McCullers: The Ballad of the Sad Café (1951)

Kinderreich, I

Und hören Sie sich dies an, von einem Casanova aus Belmullet. „Ich bin wahnsinnig in x_4 Mädels verliebt und kann mich nicht entscheiden, welches ich heiraten soll. Können Sie mir einen Rat geben?“

Kann ich. Und nicht zu knapp. Heiraten Sie die kleine, dicke Blonde.

Das einfache Irische Volk: Woher wollen Sie wissen, daß eine kleine, dicke Blonde dabei war?

Ich: Schon jemals eine Gruppe von x_4 Mädchen gesehen, wo keine kleine, dicke Blonde dabei war?

Das einfache Irische Volk: Hmm.

Ich: Habe *ich* etwa keine kleine, dicke Blonde geheiratet?

Das einfache Irische Volk: Echt wahr? Und? Kinder?

Ich: x_5 .

Das einfache Irische Volk: Ist ja schon gut.

$x_4 = 18$, $x_5 = 9$

Flann O' Brien: Trost und Rat; übersetzt von Harry Rowohlt, Haffmanns Verlag, Zürich (1985)

Kinderreich, II

Der Nachtschelm und das Siebenschwein,
die gingen eine Ehe ein,

o wehe!

Sie hatten x_6 Kinder, und
davon war eins der Schluchtenhund,
zwei andre waren Rehe.

$x_6 = 13$

Christian Morgenstern: Der Nachtschelm und das Siebenschwein oder eine glückliche Ehe. Aus: Galgenlieder (1905)

Kindheit

We were friends, Dolly and Catherine and me. I was x_7 , then I was x_8 . Though no honors came my way, those were the lovely years.

$$x_7 = 11, x_8 = 16$$

Truman Capote: The Grass Harp (1951)

Spiele: Billard

Der Portier witterte Unheil hinter dieser Gewohnheit, morgens zwischen halb x_9 und x_{10} in Gesellschaft immer desselben Boys Billard zu spielen; Unheil oder Laster; gegen Laster gab es einen Schutz: Diskretion; die hatte ihren Preis, ihre Kurve, Diskretion und Geld waren voneinander abhängig, wie Abszisse und Ordinate;

$$x_9 = 10, x_{10} = 11$$

Heinrich Böll: Billard um halbzehn (1974)

Zu Ende, I

Als sie einander x_{11} Jahre kannten
(und man darf sagen, sie kannten sich gut),
kam ihre Liebe plötzlich abhanden.

Wie anderen Leuten ein Stock oder Hut.

$$x_{11} = 8$$

Erich Kästner: Sachliche Romanze (1929)

Zu Ende, II

“The problem is all inside your head”, she said to me

The answer is easy if you take it logically

I’d like to help you in your struggle to be free

There must be x_{12} ways to leave your lover.

$$x_{12} = 50$$

Paul Simon: Fifty Ways to Leave your Lover (1975)

Gesucht ist die Summe:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} \\ &= 6 + 35 + 7 + 18 + 9 + 13 + 11 + 16 + 10 + 11 + 8 + 50 = 194. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe wird nicht in der Gesamtwertung mitgezählt. Für alle, die sich die Wartezeit bis zur Bescherung durch das Knobeln verkürzt haben:

Richtig ist Lösungsmöglichkeit 7.: 194

Autor: Günter M. Ziegler

Günter M. Ziegler, 1963 in München geboren, ist Professor für Mathematik an der TU Berlin. Seine Arbeitsgruppe beschäftigt sich mit „Diskreter Geometrie“, besonders mit der Geometrie von Polyedern. Gemeinsam mit Martin Aigner von der FU Berlin hat er „*Das BUCH der Beweise*“ geschrieben. Im DFG-Forschungszentrum MATHEON ist er als Scientist in Charge für die Bereiche „Diskrete Mathematik und Optimierung“ und „Visualisierung“ mitverantwortlich.