Aufgaben und Lösungen 2016

MATHEON KALENDER

4TU.AMI

Inhaltsverzeichnis

1 Knecht Ruprecht ist schlecht gelaunt

Autor: Christian Hercher

1.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht ist schlecht gelaunt. „Same procedure as last year? Same procedure as every year ... “
grmpf

„Immer muss ich mich um die bösen Kinder kümmern, bin der Buh-Mann und der Alte bekommt die ganze Anerkennung für die Geschenke der artigen Kinder ... “
Dieses Mal soll aber alles anders werden. Und so geht er zum Weihnachtsmann und klagt ihm sein Leid. „Was schlägst du vor?“, fragt ihn darauf der Weihnachtsmann. „Na, dass wir dieses Mal tauschen!“

Doch ganz so einfach gibt der Weihnachtsmann sein Privileg nicht auf! „Lass uns darum spielen. Wer gewinnt, der darf die Geschenke verteilen, und der andere besucht die ungezogenen Jungs und Mädchen.“

„Ok, und was spielen wir?“ lässt sich Knecht Ruprecht darauf ein.
Nun erläutert der Weihnachtsmann das Spiel, das er im Sinn hat.

„In meinem Geschenke-Sack hier sind schon 23 rote und 23 blaue Geschenke eingepackt. Außer an der Farbe sind sie nicht zu unterscheiden.

Du ziehst nun, ohne in den Sack zu schauen, zwei Geschenke (ohne sie zwischendurch wieder zurückzulegen). Besitzen die beiden gezogenen Geschenke verschiedene Farben, so tust du das rote wieder in den Sack. Haben sie aber dagegen die gleiche Farbe, so kommt ein blaues wieder hinein. (Ich habe hier noch genügend zusätzliche blaue Pakete, die noch nicht eingepackt sind. Die kannst du gegebenenfalls dafür verwenden.)

Dies (zwei Pakete ziehen und eines wieder in den Sack zurücklegen) wiederholst du nun so lange, bis nach dem Ziehen kein Paket mehr im Geschenke-Sack ist. Das letzte Paket, was du dann wieder zurücklegen müsstest, bestimmt, wer von uns beiden gewinnt. Ist es blau, so hast du gewonnen. Ist es rot, dann geht der Sieg dieses Spiels an mich."

Knecht Ruprecht grübelt kurz nach. „Warum gerade 23 Pakete pro Farbe und warum bekommst du rot?"- „Weil ich der Weihnachtsmann bin. Und 'W' ist der 23. Buchstabe des Alphabets. Außerdem ... der, mit der roten Jacke, den alle Kinder anhimmeln, bin immer noch ich. Also ist Rot meine Farbe."
„Ok, ok", erwidert Ruprecht. „Für mich hört sich das zwar irgendwie nach einer Verschwörung an, aber machen wir es ruhig so. Also, auf geht's!"

Mit welcher Wahrscheinlichkeit (auf Vielfache von 10 % gerundet) gewinnt Knecht Ruprecht das vorgeschlagene Spiel und kann in diesem Jahr zum Helden aller Kinder werden?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0 %
2. 10 %
3. 20 %
4. 30 %
5. 40 %
6. 50 %
7. 60 %
8. 80 %
9. 90 %
10. 100 %

1.2 Lösung

Antwort 1: Die Wahrscheinlichkeit, dass Knecht Ruprecht das Spiel gewinnt, ist exakt Null.

In jedem Durchgang werden zwei Pakete aus dem Sack gezogen und eines wieder zurückgelegt. Die Anzahl der Pakete im Geschenke-Sack nimmt also jeweils um eins ab, d.h., das Spiel endet tatsächlich irgendwann in der Situation, dass nach dem Zurücklegen nur noch ein einzelnes Paket im Sack enthalten ist.

Werden zwei verschiedenfarbige Geschenke gezogen, so ändert sich (nach dem Zurücklegen des roten Paketes) die Anzahl der roten Geschenke im Sack nicht. Dies ist auch der Fall, wenn zwei blaue Geschenke gezogen wurden, denn dann wird ja ein blaues zurückgelegt. Die Anzahl der roten Geschenke im Sack ändert sich nur genau dann, wenn zwei rote Geschenke gezogen wurden. Da aber auch dann ein blaues zurückgelegt wird, verringert sich die Anzahl der roten im Sack dann also um genau zwei.

Zu Beginn ist die Anzahl der roten Geschenke mit 23 ungerade. Da sie aber in jedem Durchgang sich entweder gar nicht ändert, oder um genau zwei, bleibt sie also auch nach jedem Durchgang ungerade, wenn sie es zuvor schon war.

Also ist insbesondere immer mindestens ein rotes Geschenk im Sack. Damit muss das letzte zurückgelegte Geschenk eben ein rotes gewesen sein, und der Weihnachtsmann gewinnt sicher. Knecht Ruprechts Gewinnwahrscheinlichkeit beläuft sich auf exakt 0 % ...

Nebenbemerkung: Die Lösungsstrategie, die hier zur Anwendung kam, wird auch als „Invarianzprinzip“ bezeichnet: Man finde eine Eigenschaft, die egal was sonst so in den einzelnen Durchläufen passiert, sich nicht verändert (d.h. „invariant“ bleibt). In unserem Fall ist das die Eigenschaft, dass sich die Ungeradzahligkeit der Anzahl der roten Geschenke nicht ändert, egal was für Geschenke gezogen werden.

2 Kostümierte Diebe

Autor: Thomas Lütteke

2.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann ist sauer. Weil er nicht nur wenn's weihnachtet den Wein achtet, hat er ein paar gute Tropfen in seinem Weinkeller eingelagert. Nach der Halloween-Kostümparty der Wichtel fehlen aber einige seiner besten Flaschen. Da das nicht zum ersten Mal passiert ist, hatte der Weihnachtsmann dieses Mal eine Videokamera installiert. Als er sich das Video ansieht, erkennt er aber nicht die Täter, da diese in ihren Kostümen stecken: Einer der Wichtel ist als Osterhase verkleidet, der andere - und das ärgert den Weihnachtsmann besonders - steckt in einem Weihnachtsmannkostüm! Und dann auch noch in so einem übertriebenen, als ob der Weihnachtsmann so einen dicken Bauch hätte.
Jetzt will er natürlich herausfinden, wer in diesen Kostümen gesteckt hat. Da kommt eigentlich nur die Fünferbande der Wichtel Alex, Benni, Chris, Dieter und Emil infrage. Diese waren neben dem Weihnachtsmann- und Osterhasenkostüm noch als Mönch, Yoda und Schneewittchen verkleidet. Die fünf haben auf der Party fast den ganzen Abend in gleicher Reihenfolge nebeneinander an der Theke gesessen, und jeder hat die ganze Zeit immer das gleiche Getränk getrunken: Einer trank Wodka, einer Milch, einer Bier, einer Cola und einer Limo.
Als Verdächtige machen die fünf weitgehend von ihrem Zeugnisverweigerungsrecht Gebrauch. Und die anderen Wichtel, die als Zeugen befragt wurden, waren auf der Party auch ziemlich betrunken und können daher auch nicht viele Informationen beitragen.
Daher bekommt der Weihnachtsmann nur die folgenden Aussagen:

- Der lange Alex passt nur in das Weihnachtsmann- oder Mönchskostüm.
- Dieter trinkt auf Partys immer entweder Cola oder Wodka.
- Ganz rechts saß entweder Schneewittchen oder der Mönch.

- Der zweite von links hat Bier oder Limo getrunken.
- Die beiden rechts Sitzenden haben beide keine Milch getrunken.
- Der Osterhase saß ganz links oder in der Mitte.
- Benni saß rechts vom Weihnachtsmann und links vom Cola-Trinker.
- Emil saß rechts vom Cola-Trinker und links von Schneewittchen.
- Chris saß nicht genau in der Mitte.
- Emil ist zu groß, um ins Yoda-Kostüm zu passen, und mag weder Limo noch Wodka.
- Der Mönch trank keine Milch.

Kann der Weihnachtsmann mit diesen Informationen herausfinden, wer die beiden Diebe waren, oder den Kreis der Verdächtigen zumindest eingrenzen, indem einzelne Wichtel als Täter ausgeschlossen werden können?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Diebe waren Alex und Chris.
2. Die Diebe waren Benni und Dieter.
3. Die Diebe waren Chris und Emil.
4. Die Diebe waren Dieter und Alex.
5. Die Diebe waren Emil und Benni.
6. Der Weihnachtsmann kann nur einen Täter sicher identifizieren, und nur einer der anderen Wichtel kann eindeutig als Täter ausgeschlossen werden.
7. Der Weihnachtsmann kann nur bei einem der Täter sicher sein, aber zwei andere Wichtel sicher ausschließen.
8. Der Weihnachtsmann kann keinen der Wichtel als Täter überführen, und auch nur einen der Wichtel definitiv als Täter ausschließen.
9. Es sind zu wenige Informationen vorhanden, um überhaupt einen der Wichtel sicher zu überführen oder zu entlasten.
10. Die Daten enthalten einen Widerspruch. Mindestens eine der Informationen muss daher falsch sein.

2.2 Lösung

Antwort 4: Die Diebe waren Dieter und Alex.

Um solch ein Logik-Rätsel zu lösen, legt man sich eine Tabelle an, in die man die Informationen aus dem Text eintragen kann:

Dort macht man z.B. für jede Zuordnung ein Kreuz (×) und für jeden Zusammenhang, den man ausschließen kann, einen Kreis (ø). Diese Tabelle muss man nun durch Schlussfolgerungen schrittweise weiter füllen: Wenn z.B. Benni der Osterhase ist und der Osterhase Bier trinkt, dann trinkt Benni Bier. Wenn aber z.B. der Osterhase Bier trinkt und Benni nicht, dann kann Benni nicht der Osterhase sein. Mit solchen Überlegungen kann man im Idealfall alle Zuordnungen zuweisen. Mit den Angaben aus dem Text ergibt sich zunächst folgendes Schema:

		Kostüm					Position					Getränk				
		Weihnachtsmann	Osterhase	Schneewittchen	Mönch	Yoda	Links	2. links	Mitte	2. rechts	Rechts	Bier	Cola	Milch	Wodka	Limo
Name	Alex		ø	ø		ø										
	Benni	ø					ø				ø		ø			
	Chris								ø							
	Dieter											ø		ø		ø
	Emil			ø		ø	ø				ø				ø	ø
Getränk	Bier															
	Cola						ø	ø			ø					
	Milch				ø		ø	ø	ø							
	Wodka							ø								
	Limo															
Position	Links			ø												
	2. links		ø													
	Mitte															
	2. rechts		ø													
	Rechts	ø	ø			ø										

Da es hier nur Angaben dazu gibt, welche Zuordnungen nicht zutreffen, ist es nicht ganz einfach, die Tabelle weiter zu füllen. Aus der Tatsache, dass Dieter nur Cola oder Wodka trinkt, der 2. von links aber keines dieser beiden Getränke getrunken hat, kann man sagen, dass Dieter nicht der 2. von links gewesen sein kann. Ein paar weitere Felder kann man so noch mit Kreisen versehen, aber nicht das komplette Rätsel lösen.

Eine wichtige Information an dieser Stelle ist die Aussage, dass Emil rechts vom Cola-Trinker gesessen hat. Da weder Emil gleichzeitig auch links von Schneewittchen gesessen hat, kann er nicht ganz rechts sitzen, sondern maximal zweiter von rechts gewesen sein. Der Cola-Trinker muss also noch weiter links gesessen haben. Mit den schon bekannten Einschränkungen bleibt nur noch die mittlere Position, und somit für Emil die Position als zweiter von rechts. Hiervon ausgehend können nun recht leicht weitere Eigenschaften zugeordnet werden, und das Lösungsschema komplett ausgefüllt werden:

		Kostüm					Position					Getränk				
		Weihnachtsmann	Osterhase	Schneewittchen	Mönch	Yoda	Links	2. links	Mitte	2. rechts	Rechts	Bier	Cola	Milch	Wodka	Limo
Name	Alex	×	ø	ø	ø	ø	×	ø	ø	ø	ø	ø	ø	ø	×	ø
	Benni	ø	ø	ø	ø	×	ø	×	ø	ø	ø	ø	ø	ø	ø	×
	Chris	ø	ø	×	ø	ø	ø	ø	ø	ø	×	ø	ø	×	ø	ø
	Dieter	ø	×	ø	ø	ø	ø	ø	×	ø	ø	ø	×	ø	ø	ø
	Emil	ø	ø	ø	×	ø	ø	ø	ø	×	ø	×	ø	ø	ø	ø
Getränk	Bier	ø	ø	ø	×	ø	ø	ø	ø	×	ø					
	Cola	ø	×	ø	ø	ø	ø	ø	×	ø	ø					
	Milch	ø	ø	×	ø	ø	ø	ø	ø	ø	×					
	Wodka	×	ø	ø	ø	ø	×	ø	ø	ø	ø					
	Limo	ø	ø	ø	ø	×	ø	×	ø	ø	ø					
Position	Links	×	ø	ø	ø	ø										
	2. links	ø	ø	ø	ø	×										
	Mitte	ø	×	ø	ø	ø										
	2. rechts	ø	ø	ø	×	ø										
	Rechts	ø	ø	×	ø	ø										

Aus dem komplett gelösten Schema erkennt man nun, dass Alex der Weihnachtsmann und Dieter der Osterhase war. Somit ist Antwort 4: „Die Diebe waren Dieter und Alex“ die richtige Lösung.

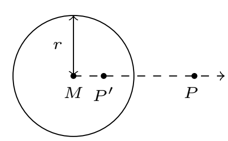
3 Schneemänner aus Glas

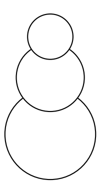
Autoren: Luise Fehlinger und Robert Jablko
Projekt: ZE-AP1

3.1 Aufgabe

Wie jedes Kind schon weiß, spielt die Physik am Nordpol etwas verrückt. Sonst würde der Weihnachtsmann es ja nicht schaffen, die ganze Welt in nur einer Nacht mit Geschenken zu beliefern und sich auch durch den allerkleinsten Schornstein zu quetschen. Aber das ist nicht das Einzige, was am Nordpol anders ist. Spiegelt sich am Nordpol ein Gegenstand in einer Kugel, so gilt folgendes Nordpol-Spiegelgesetz:

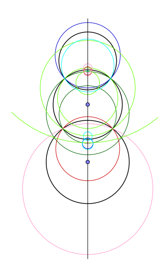
Der Spiegelpunkt P' liegt auf dem Strahl $\overrightarrow{MP}$ und es gilt: $|\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| = r^2$.





Wichtel Hugo möchte in diesem Jahr Schneemänner aus hohlen Glaskugeln bauen. Dazu nimmt er eine kleine (Radius r_1), eine mittlere (Radius r_2) und eine große (Radius r_3) Kugel. Von der mittleren Kugel schneidet er eine Kugelkappe ab und klebt in das entstehende Loch die kleine Kugel. Dann schneidet er eine Kappe von der großen Kugel ab und klebt die mittlere Kugel hinein.

Nun sind seine Glaskugeln lichtdurchlässig, spiegeln zugleich aber auch. Man sieht also nicht nur den Teil der kleinen Kugel, der in der mittleren steckt, sondern auch die Spiegelbilder der Kugeln in den anderen Kugeln und die Spiegelbilder der Spiegelbilder. Aber die Spiegelbilder der Spiegelbilder der Spiegelbilder sind dann zum Glück schon so blass, dass man sie nicht mehr wirklich sehen kann. Hugos Schneemann sieht also wie eine regelrechte Wolke von Kugeln aus. Geht das besser?



Also bittet Hugo seine Kollegen um Hilfe. Wie muss er den Schneemann bauen, damit möglichst wenige Spiegelbilder zu sehen sind? Die entstehenden Spiegelbilder sollen also nach Möglichkeit genau auf den schon vorhandenen Kugeln liegen bzw. dort, wo die ausgeschnittenen Kugelteile vorher waren.
Die Wichtel kommen auf viele gute Ideen, was bei einem optimalen Schneemann auf jeden Fall erfüllt sein muss. Aber genau einer hat sich geirrt. Wer?

Antwortmöglichkeiten:

1. Wichtel Cornelius: „Die Kugeln, die sich schneiden, müssen sich in rechten Winkeln schneiden. D.h., die Radien stehen in den Schnittpunkten senkrecht aufeinander.“

2. Wichtel Jolanda: „Der Schnittkreis von zwei sich schneidenden Glaskugeln muss auf der Kugel liegen, die als Durchmesser die Strecke zwischen den Mittelpunkten der sich schneidenden Glaskugeln hat.“

3. Wichtel Otis: „Der Abstand der Mittelpunkte der kleinen und der großen Glaskugel muss $\sqrt{r_1^2 + 2r_2^2 + r_3^2}$ sein.“

4. Wichtel Milena: „Man wird immer mindestens zwei Spiegelbilder sehen, die nicht komplett auf den Glaskugeln liegen.“

5. Wichtel Julian: „Man wird immer mindestens vier Spiegelbilder sehen, die nicht komplett auf den Glaskugeln liegen.“

6. Wichtel Lotta: „Man kann den Schneemann so bauen, dass höchstens sechs Spiegelbilder nicht komplett auf den Glaskugeln liegen.“

7. Wichtel Mattie: „Um das Loch in die mittlere Glaskugel zu bohren, muss man einen Bohrer mit einem Durchmesser $2\sqrt{\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}}$ verwenden.“

8. Wichtel Noam: „Das Quadrat des Radius des Schnittkreises zweier sich schneidender Glaskugeln muss das Reziproke der Summe der Quadrate der reziproken Radien der beiden Glaskugeln sein.“

9. Wichtel Ives: „Wenn man mit einem Laser von der mittleren Glaskugel eine Kugelkappe abschneiden möchte, sollte man die Schnittfläche im Winkel $\arctan \frac{r_1}{r_2}$ zur Tangentialfläche an die Kugel in dem Punkt, in dem man mit dem Schneiden beginnt, wählen.“

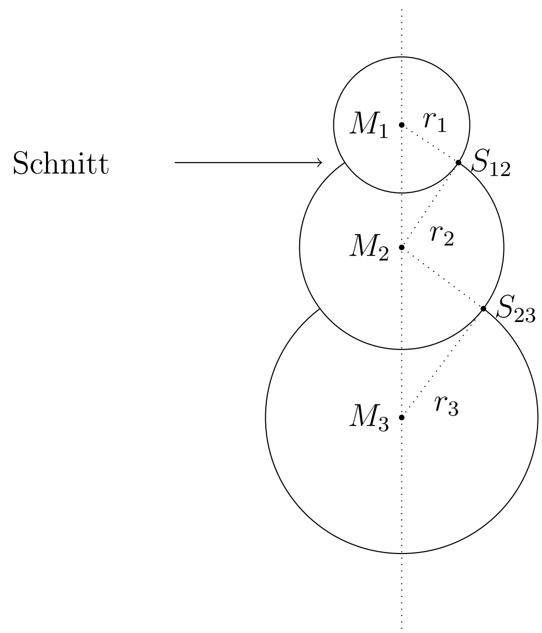
10. Wichtel Alva: „Wenn man mit einer (diamantbesetzten) Kreissäge mit Führungsschiene[1] die Kugelkappe von der mittlere Glaskugel absägen möchte, sollte der Abstand zwischen Führungsschiene und Sägeblatt gerade $r_2 \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_2\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1^2 + r_2^2}$ sein.“

[1] Man führt also die Glaskugel an der Führungsschiene, die parallel zum Sägeblatt ist, entlang.

3.2 Lösung

Antwort 3: Die folgende Aussage ist falsch: “Der Abstand der Mittelpunkte der kleinen und der großen Glaskugel muss $\sqrt{r_1^2 + 2r_2^2 + r_3^2}$ sein.”

Wir betrachten bei allen Überlegungen einen Schnitt durch die Mittelpunkte der Kugeln.



Cornelius Wir zeigen, dass diese Aussage äquivalent zur Aussage von Jolanda ist. Wenn wir das gezeigt haben, wissen wir, dass beide Aussagen richtig sind, sonst gäbe es ja mindestens zwei falsche Aussagen. Es hat sich aber genau ein Wichtel geirrt.

Wir betrachten das Dreieck mit den Ecken M_1 (Mittelpunkt der kleinen Glaskugel), M_2 (Mittelpunkt der mittleren Glaskugel) und S_{12} (ein Schnittpunkt von kleiner und mittlerer Glaskugel). $\overline{M_1S_{12}}$ ist ein Radius der kleinen Glaskugel und $\overline{M_2S_{12}}$ ist ein Radius der mittleren Glaskugel. Diese beiden stehen, wenn die Aussage von Cornelius korrekt ist, senkrecht aufeinander. Das ist laut Satz des Thales und seiner Umkehrung aber äquivalent dazu, dass der Schnittpunkt S_{12} auf dem Thaleskreis um $\overline{M_1M_2}$ in der betrachteten Schnittfläche liegt. Das wiederum ist äquivalent dazu, dass S_{12} auf der Kugel mit Durchmesser $\overline{M_1M_2}$ liegt.

Damit sind also beide Aussagen äquivalent und folglich richtig.

Bemerkung: Kugeln, die bei Inversion in sich selbst übergehen, stehen senkrecht aufeinander.

Beweis: Es sei K_1 der Kreis der kleinen Kugel in unserer betrachteten Schnittebene und K_2 der der mittleren Kugel. Es sei $P \in K_1$ ein beliebiger Punkt auf der kleinen Kugel. Sei $P' = I_{K_2}(P)$ der Spiegelpunkt von P an der mittleren Kugel. Dann gilt nach der Definition der Nordpolspiegelung: $|\overline{M_2S_{12}}|^2 = |\overline{M_2P'}| \cdot |\overline{M_2P}|$.

$\overline{M_2S_{12}}$ ist ein Radius der mittleren Kugel. Wenn die kleine und die mittlere Kugel sich im rechten Winkel schneiden, dann ist M_2S_{12} gleichzeitig eine Tangente an die kleine Kugel. Weiterhin ist M_2P eine Sekante durch die kleine Kugel und P' liegt auf dieser Sekante. Nach dem Tangenten-Sekanten-Satz an einem Kreis gilt $|\overline{M_2S_{12}}|^2 = |\overline{M_2\widetilde{P}}| \cdot |\overline{M_2P}|$, wobei $\widetilde{P}$ der zweite Schnittpunkt der Sekante M_2P mit K_1 ist. Damit stimmen aber P' und $\widetilde{P}$ überein, da beide diese Gleichung erfüllen und auf dem Strahl von M_2 durch P liegen. Also liegt P' auf K_1. D.h., wenn sich zwei Kugeln K_1, K_2 im rechten Winkel schneiden, dann gilt $I_{K_2}(K1) \subset K1$ und $I_{K_1}(K2) \subset K2$.

Umgekehrt gilt auch, wenn zwei Kugeln bei Inversion aneinander auf sich selbst abgebildet werden, schneiden sie sich im rechten Winkel. Dazu betrachten wir die Geraden M_1S_{12} und M_1M_2. Die Gerade durch die Kugelmittelpunkte schneide K_2 in den Punkten P und P', wobei P dichter an M_1 liege als P'. Da $I_{K_1}(K_2) = K_2$ gilt, gilt insbesondere $I_{K_1}(P) = P'$ und damit $r_1^2 = \underbrace{|\overline{M_1P}|}_{=|\overline{M_1M_2}|-r_2} \cdot \underbrace{|\overline{M_1P'}|}_{=|\overline{M_1M_2}|+r_2} = |\overline{M_1M_2}|^2 - r_2^2$. Mit der Umkehrung des Satzes des Pythagoras folgt, dass M_1S_{12} und M_2S_{12} senkrecht aufeinander stehen.

Jolanda Es wurde gerade gezeigt, dass diese Aussage richtig ist.

Otis Wir wissen schon, dass die Aussage von Cornelius korrekt ist. Damit sind die Dreiecke $\Delta M_1S_{12}M_2$ und $\Delta M_2S_{23}M_3$, wobei M_3 der Mittelpunkt der großen Glaskugel und S_{23} ein Schnittpunkt von mittlerer und großer Glaskugel ist, rechtwinklig und wir können den Satz des Pythagoras anwenden.

Es gilt:

$$\begin{aligned} |\overline{M_1M_3}| &= |\overline{M_1M_2}| + |\overline{M_2M_3}| \\ &\overset{S.d.P.}{=} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} + \sqrt{r_2^2 + r_3^2} \\ &\neq \sqrt{r_1^2 + 2r_2^2 + r_3^2}. \end{aligned}$$

Denn sonst wäre

$$\begin{aligned} && \sqrt{r_1^2 + r_2^2} + \sqrt{r_2^2 + r_3^2} &= \sqrt{r_1^2 + 2r_2^2 + r_3^2} \\ \Longrightarrow && r_1^2 + r_2^2 + 2\sqrt{r_2^2 + r_3^2}\sqrt{r_1^2 + r_2^2} + r_2^2 + r_3^2 &= r_1^2 + 2r_2^2 + r_3^2 \\ \Longrightarrow && 2\sqrt{r_2^2 + r_3^2}\sqrt{r_1^2 + r_2^2} &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist aber eine falsche Aussage, da alle Radien größer als null sind. Sonst wäre der Schneemann ja nur ein Punkt.

Wichtel Otis hat sich geirrt.

Milena Die Nordpol-Spiegelung ist eine Inversion am Kreis. Wird zweimal hintereinander an derselben Kugel invertiert, ist das Spiegelbild des Spiegelbildes mit dem Original identisch. Bei Inversion der mittleren Glaskugel an der kleinen, sind die Schnittpunkte Fixpunkte. Damit muss das Bild der mittleren Glaskugel im Idealfall auf der mittleren Kugel liegen. Nur dass der Kugelteil, der vorher außerhalb der kleinen Kugel war, jetzt im Inneren liegt (also dort, wo vorher der ausgeschnittene Teil war). Die große Kugel wird jedoch auch an der kleinen invertiert. Sie hat Schnittpunkte mit der mittleren Kugel gemeinsam, unterscheidet sich aber in allen anderen Punkten. Das muss also auch für die Bilder gelten. D.h., das Bild der großen Glaskugel hat Schnittpunkte mit der mittleren Glaskugel, stimmt aber nicht mit ihr überein. Das Bild kann aber auch nicht mit der kleinen Glaskugel übereinstimmen, weil bei Inversion an der kleinen Glaskugel nur die Punkte der kleinen Glaskugel auf diese abgebildet werden. Also liegt auf jeden Fall das Bild der großen Glaskugel bei Inversion an der kleinen nicht komplett auf einer Glaskugel.

Analog gilt das für das Bild der kleinen Glaskugel bei Inversion an der großen Glaskugel.

Diese Aussage ist also korrekt.

Julian Wir wissen bereits, dass das Bild der kleinen Glaskugel bei Inversion an der großen (Bezeichnung: B_{13}) und das Bild der großen bei Inversion an der kleinen (Bezeichnung: B_{31}) nicht komplett auf den Glaskugeln liegen. B_{13} liegt im Innern der großen Glaskugel. Damit muss das Bild von B_{13} bei Inversion an der kleinen Glaskugel im Innern von B_{31} liegen, liegt also auch nicht komplett auf einer Glaskugel. Analog liegt das Bild von B_{31} bei Inversion an der großen Glaskugel im Innern von B_{13} also auch nicht komplett auf einer Glaskugel.

Diese Aussage ist korrekt.

Lotta Wenn zwei Kugeln sich senkrecht schneiden, geht eine bei Inversion an der anderen in sich selbst über und umgekehrt. Wenn wir zweimal dieselbe Inversion hintereinander ausführen, ist das zweite Bild mit dem Original identisch. Inversionen am Kreis erhalten die Winkel.

Also werden die Glaskugeln wie folgt abgebildet. Dabei ist K_1, K_2 bzw. K_3 die kleine, mittlere bzw. große Kugel und I_{K_1},I_{K_2} bzw. I_{K_3} die Inversion an der kleinen, mittleren bzw. großen Kugel.

$$
\begin{array}{lcll}
K_1 & \xrightarrow{I_{K_1}} & K_1 & \text{weitere Bilder s.u.} \\
K_1 & \xrightarrow{I_{K_2}} & K_1 & \text{weitere Bilder s.u.} \\
K_1 & \xrightarrow{I_{K_3}} & B_{13} & \text{und } B_{13} \text{ schneidet } K_2 \text{ senkrecht} \\
K_2 & \xrightarrow{I_{K_1}} & K_2 & \\
K_2 & \xrightarrow{I_{K_2}} & K_2 & \\
K_2 & \xrightarrow{I_{K_3}} & K_2 & \\
K_3 & \xrightarrow{I_{K_1}} & B_{31} & \text{und } B_{31} \text{ schneidet } K_2 \text{ senkrecht} \\
K_3 & \xrightarrow{I_{K_2}} & K_3 & \\
K_3 & \xrightarrow{I_{K_3}} & K_3 & \\
B_{13} & \xrightarrow{I_{K_1}} & I_{K_1}(B_{13}) & \text{im Innern von } B_{31} \\
B_{13} & \xrightarrow{I_{K_2}} & B_{13} & \\
B_{13} & \xrightarrow{I_{K_3}} & K_1 & \\
B_{31} & \xrightarrow{I_{K_1}} & K_3 & \\
B_{31} & \xrightarrow{I_{K_2}} & B_{32} & \\
B_{31} & \xrightarrow{I_{K_3}} & I_{K_3}(B_{31}) & \text{im Innern von } B_{13}
\end{array}
$$

Diese Liste beinhaltet alle Spiegelbilder und die Spiegelbilder der Spiegelbilder. D.h., wenn K_1 und K_2 sich senkrecht schneiden und K_2 und K_3 sich ebenfalls senkrecht schneiden, liegen genau vier Bilder nicht komplett auf den Glaskugeln.

Die Aussage ist also richtig (und könnte sogar noch verschärft werden).

Mattie Der Durchmesser des Bohrers muss das Doppelte der Höhe h von Dreieck $\Delta M_1 S_{12} M_2$ sein. Nach dem Höhensatz (wobei p und q die Hypothenusenabschnitte sind) gilt: $h^2 = p \cdot q$. Mit dem Kathetensatz und dem Satz des Pythagoras berechnen wir $p \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r_1^2$ und $q \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r_2^2$. Damit erhalten wir für die Höhe: $2h = 2\sqrt{\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}}$.

Die Aussage ist also richtig.

Noam Wir haben schon den Durchmesser des Schnittkreises als $2\sqrt{\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}}$ berechnet. Damit erhalten wir für das Quadrat des Radius des Schnittkreises: $\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}$. Das Reziproke davon ist $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 \cdot r_2^2} = \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_1^2}$. Die Aussage ist also korrekt.

Ives Der Schnittwinkel ist gleich dem Winkel zwischen der Höhe von S_{12} auf $\overline{M_1 M_2}$ (mit Fußpunkt H) und der Geraden durch M_1 und S_{12}. Die Dreiecke

$\Delta M_1 S_{12} H$ und $\Delta M_1 M_2 S_{12}$ stimmen in den rechten Winkeln und dem Winkel in M_1 überein, sind also ähnlich. Der Schnittwinkel ist also kongruent zum Winkel in M_2 von Dreieck $\Delta M_1 S_{12} M_2$. Damit ist der Winkel gleich $\arctan \frac{r_1}{r_2}$.

Die Aussage ist also korrekt.

Alva Der Abstand a zwischen Führungsschiene und Sägeblatt ist gerade der Radius des mittleren Kreises minus die Länge des Hypotenusenabschnittes q, der komplett innerhalb der mittleren Kugel liegt. Zur Berechnung nutzen wir den Kathetensatz und den Satz des Pythagoras: $q = \frac{r_2^2}{c} = \frac{r_2^2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$ und formen noch etwas um:

$$\begin{aligned} a &= r_2 - q \\ &= r_2 - \frac{r_2^2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}} \\ &= r_2\left(1 - \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}\right) \\ &= r_2\left(\frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}-r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}\right) \\ &= r_2\frac{r_1^2+r_2^2-r_2\sqrt{r_1^2+r_2^2}}{r_1^2+r_2^2} \end{aligned}$$

Damit ist auch diese Antwort richtig.

4 Transportkosten

Autorin: Sabiene Zänker

4.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann sitzt zufrieden an seinem Schreibtisch, blickt aus dem Fenster auf die herrlich verschneite Winterlandschaft und schlürft genüsslich seine heiße Schokolade mit Rum. Er denkt: „Wie schön, dass das Weihnachtsgeschäft in diesem Jahr so ruhig und entspannt angelaufen ist. Endlich ein erholsames Wochenende ohne Probleme.“

Doch das sollte nicht lange so bleiben. Das Telefon klingelt! Der Logistikchef vom Lebkuchenversand ruft an.

„Hey, Ruprecht! Wie geht es dir? Du, ich habe da mal ein kleines Problem! Ich brauche unbedingt deine Hilfe! Stell dir vor, wir haben gestern einen lukrativen Auftrag bekommen. Eigentlich sollte ich ablehnen, doch mit dieser Nachfrage können wir ganz groß rauskommen! Ich bräuchte einen Spezialisten wie deinen Neffen Willibald, der mit uns noch einmal die anfallenden Transportkosten durchrechnet. Noch an diesem Wochenende! Es ist dringend! Also, kurze Rede, hier ist das Problem:

Unsere Lebkuchenfirma möchte die Großhändler in Aspels, Bummerang und Cesaria beliefern. Wir haben zwei Auslieferungslager in Ostopus und in Westintrigen. Die Transportkosten, der Lagerbestand und der Bedarf der Großhändler sind der Tabelle, die ich dir gerade eben zugemailt habe, zu entnehmen.

Lager	Transportkosten in Euro je Palette			Lagerbestand
	A	B	C	
O	40	20	10	600
W	20	10	30	400
Bedarf an Paletten	200	500	300	1000

Wie müssen die Großhändler beliefert werden, damit die Transportkosten möglichst niedrig bleiben? Vor allem aber muss ich die minimalen Transportkosten, die auf uns zukommen, wissen.

Bitte, ihr könnt mir doch bestimmt helfen!“
„Hast du ein Glück! Willibald kommt mich in einer halben Stunde besuchen. Ich werde mit ihm sprechen. Ich denke, es wird klappen! Willibald kommt zu euch rüber!“
„Danke und tschüss!“

Antwortmöglichkeiten:

1. 12000 Euro
2. 14000 Euro
3. 15000 Euro
4. 16000 Euro
5. 17000 Euro
6. 17500 Euro
7. 18000 Euro
8. 19000 Euro
9. 20000 Euro
10. 21500 Euro

4.2 Lösung

Antwort 3: Die minimalen Transportkosten belaufen sich auf 15000 Euro.

Die Tabelle mit den Informationen zu den Transportkosten, dem Lagerbestand und dem Bedarf der Großhändler wird zur Festlegung der Variablen genutzt.

Lager	Transportkosten	in	Euro je Palette	Lagerbestand
	A	B	C	
O	a_0	b_0	$c_0 = 600 - a_0 - b_0$	600
W	$a_w = 200 - a_0$	$b_w = 500 - b_0$	$c_w = a_0 + b_0 - 300$	400
Bedarf an Paletten	200	500	300	1000

Alle Variablen a_0, b_0 , c_0, a_w, b_w und c_w sind nicht negativ.
Daraus ergeben sich die weiteren einschränkenden Bedingungen zu:

$$\begin{array}{llll} (1) & a_0 + b_0 & \leq & 600 \\ (2) & a_0 & \leq & 200 \\ (3) & b_0 & \leq & 500 \\ (4) & a_0 + b_0 & \geq & 300 \end{array}$$

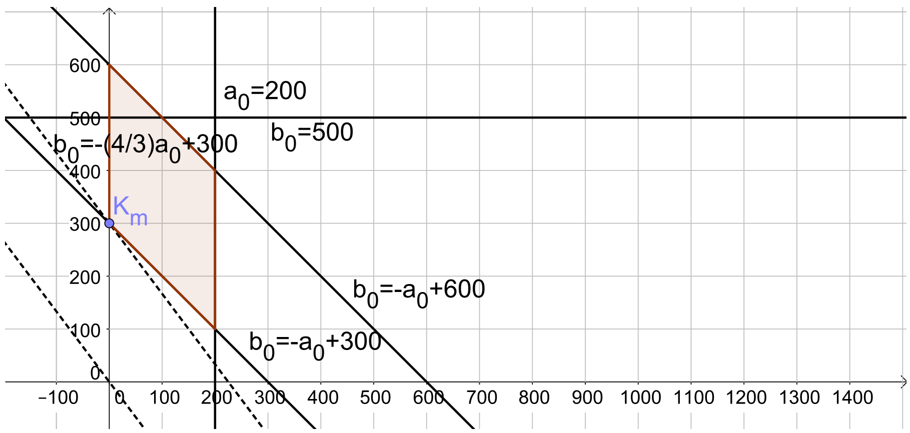
Die Transportkosten sollen minimiert werden, sie lassen sich wie folgt aus den gegebenen Informationen bestimmen und mit Hilfe der Gleichungen in der „Variablenfestlegungstabelle“ vereinfachen zu:

$$(5) \quad K \quad = \quad 40a_0 + 20a_w + 20b_0 + 10b_w + 10c_0 + 30c_w$$

und

$$(6) \quad \mathrm{K} \quad = \quad 40a_0 + 30b_0 + 600 \text{ sowie } (7)\ K_0^* = \tfrac{-4}{3}a_0.$$

Aus der folgenden Grafik lässt sich die kostengünstigste Lieferung der Anzahl von Lebkuchen-Paletten von den Lagern in O und W zu den Großhändlern nach A, B und C leicht erkennen.



Die Ergebnisse werden wieder in einer Tabelle zusammengefasst.

	A	B	C
O	0	300	300
W	200	200	0

Jetzt lassen sich die minimalen Transportkosten wie folgt berechnen:
$K_m = 20 \cdot 300 + 10 \cdot 300 + 20 \cdot 200 + 10 \cdot 200 = 15000$

Für den Transport hat die Lebkuchenfirma demnach 15000 Euro zu bezahlen, Antwort 3 ist richtig.

5 Das große Ren(n)tier-Rennen

Autoren: Heide Hoppmann und Kai Hennig
Projekt: B-MI3

5.1 Aufgabe

Am ersten Weihnachtsfeiertag, einen Tag nach dem stressigen Heiligabend, macht der Weihnachtsmann einen gemütlichen Winterspaziergang. Die Polarlichter glitzern über dem Nordpol, die Schneeflocken sinken leise zu Boden und es knirscht sanft unter seinen schweren, schwarzen Stiefeln. Doch die besinnliche Stille wird jäh durch laute Rufe, die aus dem Rentierstall herüber tönen, unterbrochen.
Die neun Rentiere des Weihnachtsmannes, die jedes Jahr seinen schweren Schlitten mit den unzähligen Geschenken ziehen, streiten heftig. Als der Weihnachtsmann den Stall betritt, stehen sich Dancer, Dasher, Prancer, Vixen, Comet, Cupid, Donner, Blitz und natürlich Rudolph, mit rot angelaufenen Wangen (Rudolph selbstverständlich auch mit roter Nase) schnaufend gegenüber.
“ICH bin mit Abstand der Schnellste von uns!”, behauptet Rudolph mit einer von Hochmut durchtränkten Stimme. “DU bist der Schnellste? Jedes Jahr muss ICH mein Tempo drosseln, damit ihr überhaupt hinterherkommt!”, schreit Comet zurück. “Es ist ein Wunder, dass wir es überhaupt noch schaffen die Geschenke rechtzeitig bei den Kindern abzuliefern, so wie IHR alle immer trödelt!”, meint Dancer daraufhin und schüttelt langsam den Kopf. “Dass ich nicht lache. WIR trödeln? Du bist so langsam, ich habe gehört, dass die Menschen DICH mittlerweile als “Gehtier” bezeichnen und nicht mehr als Rentier!”, lacht Cupid und schaut dabei abfällig auf Dancer.
“Ho, ho, ho, meine Lieben. Jetzt beruhigt euch doch alle mal. Jedes Jahr derselbe Streit”, versucht der Weihnachtsmann mit seiner tiefen, lachenden Stimme zu beruhigen. “Ich denke, dass es an der Zeit ist, diesen Streit ein für alle Mal beizulegen. Und was wäre dafür besser geeignet als ein fairer, sportlicher Wettkampf, um zu ermitteln, wer der Schnellste von euch ist?”

Der Weihnachtsmann schlägt daraufhin folgenden Modus für den Wettkampf vor: Jedes Rentier läuft genau ein Rennen gegen jedes andere Rentier. Ein Rennen besteht aus drei Runden um den Rentierstall. Für jede Runde nach der ein Rentier vor dem jeweils anderen liegt, erhält es einen Punkt (mit Hilfe neuster Technik lässt sich immer ein eindeutiger Rundensieger bestimmen). Falls es ein Rentier schafft in allen drei Runden vorne zu liegen, erhält es einen zusätzlichen Bonuspunkt. Nachdem alle Rennen vorbei sind, ergibt sich die Rangfolge der Rentiere aus der Anzahl der Punkte, die sie in ihren Rennen sammeln konnten. Haben zwei oder mehrere Rentiere dieselbe Anzahl an Punkten, so wird ihre Reihenfolge ausgelost.
Genau eine der folgenden Aussagen zum großßen Ren(n)tier-Rennen ist falsch. Welche ist es?

Antwortmöglichkeiten:

1. Bevor der Wettkampf beginnt, soll Buddy der Weihnachtself eine Reihenfolge für die Rennen festlegen. Das gestaltet sich als ziemlich schwierig, denn es gibt mehr mögliche Reihenfolgen als Atome im Körper des Weihnachtsmannes (ca. $7 \cdot 10^{27}$).
2. Es ist unmöglich, dass ein Rentier nach Wettkampfende 31 Punkte hat.
3. Falls ein Rentier mehr als 31 Punkte sammelt, so haben alle anderen Rentiere höchstens 28 Punkte.
4. Die Summe der Punkte aller Rentiere zusammen ist mindestens 108.
5. Die Summe der Punkte aller Rentiere zusammen ist kleiner als 145.
6. Wenn ein Rentier in jedem seiner Rennen die Mehrzahl der Runden gewinnt, so hat es nach Wettkampfende mindestens 16 Punkte.
7. Es ist möglich den Wettkampf mit 12 Punkten zu gewinnen.
8. Selbst 29 Punkte garantieren einem Rentier nicht den Sieg.
9. Wenn ein Rentier mindestens 17 Punkte erreicht hat, kann es nicht den letzten Platz belegen.
10. Für Buddy ist Rudolph der absolute Favorit. Er glaubt, dass Rudolph in jedem seiner Rennen alle Runden gewinnt. Angenommen das tritt wirklich ein: Dann ist es für ein anderes Rentier möglich, mit 14 Punkten den letzten Platz zu belegen.

5.2 Lösung

Antwort 10: Falls Rudolph in jedem seiner Rennen alle Runden gewinnt, kann kein Rentier mit 14 Punkten den letzten Platz belegen

Um zu zeigen, dass Behauptung 10 falsch und die neun anderen Aussagen wahr sind, brauchen wir die folgenden einfachen Vorabüberlegungen: Wir können den Wettkampf als eine Liga mit 9 Teilnehmern betrachten, wobei jeder Teilnehmer genau einmal gegen jeden anderen rennt (Single-Round-Robin Modus).

- 9 Teilnehmer
- Jeder Teilnehmer bestreitet 8 Rennen
- $8 + 7 + \cdots + 1 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ Rennen gibt es insgesamt.
- Jedes Rennen A vs. B endet mit 4:0, 2:1, 1:2, oder 0:4 nach Punkten
- In jedem Rennen werden insgesamt mindestens 3 und maximal 4 Punkte vergeben.

Nun zeigen wir warum Aussagen 1-9 korrekt sind und Aussage 10 falsch ist:

1. Es gibt insgesamt 36 Rennen. Die Anzahl der Reihenfolgen ist somit 36! (sprich: 36 Fakultät) und es gilt $36! > 7 \cdot 10^{27}$ (Taschenrechner).

2. Falls ein Rentier in all seinen Rennen 4 Punkte holt, hat es $8 \cdot 4 = 32$ Punkte erreicht. Falls es in nur einem Rennen keine 4 Punkte holt, kann es in diesem Rennen noch maximal 2 Punkte holen, und damit insgesamt höchstens $2 + 7 \cdot 4 = 30$ Punkte. Somit gibt es keine Möglichkeit, den Wettbewerb mit 31 Punkte zu beenden.

3. Die einzige Möglichkeit mehr als 31 Punkte zu erhalten ist nach 2.) alle seine Rennen mit 4 Punkten zu gewinnen, also 32 Punkte zu haben. Angenommen Rentier A gewinnt also mit 4:0 gegen alle anderen Rentiere, dann erhalten diese 0 Punkte aus den Rennen gegen A. Bei maximal 7 weiteren Rennen pro Rentier und maximal 4 Punkten, die man pro Rennen gewinnen kann, bedeutet das, dass alle höchstens $0 + 7 \cdot 4 = 28$ Punkte erreichen können.

4. Pro Rennen werden mindestens 3 Punkte verteilt. Es gibt 36 Rennen. Also ist die Summe mindestens $3 \cdot 36 = 108$.

5. Pro Rennen werden höchstens 4 Punkte verteilt. Es gibt 36 Rennen. Also ist die Summe höchstens $4 \cdot 36 = 144$.

6. Eine Mehrzahl an Runden bedeutet, dass ein Rentier mindestens 2 Runden eines Rennens gewinnt. Damit erhält es also mindestens 2 Punkte in diesem Rennen. Bei 8 Rennen sind das also mindestens 16 Punkte.

7. Um mit 12 Punkten auf den ersten Platz zu kommen, dürfen alle anderen Rentiere ebenso maximal 12 Punkte haben. Das bedeutet, dass die Summe der Punkte aller Rentiere kleiner oder gleich $9 \cdot 12 = 108$ sein muss. Da nach Aussage 4.) aber 108 eine untere Schranke ist, bedeutet dies, dass alle Rentiere am Ende genau 12 Punkte haben müssen und alle Rennen 2:1 oder 1:2 ausgehen müssen. Eine solche Konstellation ist möglich, wie folgendes Beispiel zeigt:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
1		2	2	2	2	1	1	1	1	12
2	1		2	2	2	2	1	1	1	12
3	1	1		2	2	2	2	1	1	12
4	1	1	1		2	2	2	2	1	12
5	1	1	1	1		2	2	2	2	12
6	2	1	1	1	1		2	2	2	12
7	2	2	1	1	1	1		2	2	12
8	2	2	2	1	1	1	1		2	12
9	2	2	2	2	1	1	1	1		12
										108

Der Eintrag in Zeile i und Spalte j steht für die Anzahl an Punkten die Rentier $i \in \{1 \dots 9\}$ gegen Rentier j erzielt hat.

8. Angenommen Rentier A und B holen 4 Punkte gegen die übrigen 7 Rentiere. Außerdem gewinnt A gegen B mit 2:1. Dann hat A genau $2+7 \cdot 4 = 30$ und B genau $2 + 7 \cdot 4 = 29$ Punkte. Somit hat B trotz seiner 29 Punkte nicht den ersten Platz erreicht.

9. Angenommen ein Rentier wird mit 17 Punkten Letzter. Dann haben alle anderen Rentiere auch mindestens 17 Punkte. Insgesamt haben die Rentiere dann zusammen mindestens $9 \cdot 17 = 153$ Punkte. 144 ist nach 5.) allerdings eine obere Schranke für die Anzahl aller Punkte. Daher kann man mit 17 Punkten nicht Letzter werden.

10. Wir streichen alle Rennen an denen Rudolph teilnimmt und betrachten nun eine Liga aus 8 Teilnehmern (alle haben 0 Punkte aus den Rennen gegen Rudolph). Die Anzahl an Rennen ist $7+6+\dots+1 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ und es gibt hier in Summe maximal $28 \cdot 4 = 112$ Punkte zu verteilen. Diese Punktzahl wird insbesondere nur dann erreicht, wenn alle Rennen 4:0 oder 0:4 ausgehen.

    Um mit 14 Punkten Letzter zu werden müssten die übrigen 7 Rentiere auch mindestens 14 Punkte haben, also wären das insgesamt mindestens $8 \cdot 14 = 112$ Punkte für alle 8 Rentiere. Die maximal Summe von 112 Punkten wird aber nur erreicht, wenn alle Rennen 4:0 oder 0:4 ausgehen.

Das impliziert jedoch, dass jedes Rentier eine Punktanzahl haben muss, die durch 4 teilbar ist. Also müssten alle anderen Rentiere mindestens 16 Punkte haben, damit man mit 14 Punkten Letzter wird. Dies ist aber ein Widerspruch zur oberen Schranke von 112 Punkten und somit wird man mit 14 Punkten garantiert nicht Letzter.

6 Explosion

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

6.1 Aufgabe

Im Chemielabor des Weihnachtsmanns gab es heute eine Explosion, bei der einige Wichtelbärte verbrannt wurden. Die Wichtel Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo, Frodo, Gumbo, Harpo, Izzo und Jacco berichten dem Weihnachtsmann aufgeregt am Telefon, was ihnen und ihren Kollegen zugestoßen ist. Die Explosion hat diese zehn Wichtel aber so verwirrt, dass nur ein einziger eine wahre Aussage macht. Wer sagt die Wahrheit?

Antwortmöglichkeiten:

1. Atto sagt: Wenn sowohl Jacco als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Frodo oder Kuffo den Bart verbrannt.
2. Bilbo sagt: Wenn sowohl Mirko als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Kuffo oder Nemmo den Bart verbrannt.
3. Chico sagt: Wenn sowohl Puzzo als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Harpo oder Nemmo den Bart verbrannt.
4. Dondo sagt: Wenn sowohl Loco als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Gumbo oder Nemmo den Bart verbrannt.
5. Espo sagt: Wenn sowohl Onno als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Atto oder Jacco den Bart verbrannt.
6. Frodo sagt: Wenn sowohl Chico als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Bilbo oder Mirko den Bart verbrannt.
7. Gumbo sagt: Wenn sowohl Onno als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Chico oder Puzzo den Bart verbrannt.
8. Harpo sagt: Wenn sowohl Bilbo als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Dondo oder Izzo den Bart verbrannt.
9. Izzo sagt: Wenn sowohl Gumbo als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Espo oder Onno den Bart verbrannt.
10. Jacco sagt: Wenn sowohl Dondo als auch ich verbrannte Bärte haben, dann hat entweder Dondo oder Kuffo den Bart verbrannt.

Zur Erinnerung: Eine Aussage der Form *"Wenn X, dann Y"* ist genau dann falsch, wenn X wahr und gleichzeitig Y falsch ist. In den übrigen drei Fällen (X und Y beide wahr; X und Y beide falsch; X falsch und Y wahr) ist diese Aussage wahr. Eine Aussage der Form *"Entweder X oder Y"* ist genau dann falsch, wenn X und Y beide wahr oder beide falsch sind.

6.2 Lösung

Antwort 4: Dondo sagt die Wahrheit.

Eine Aussage der Form *"Wenn sowohl α als auch β verbrannte Bärte haben, dann hat entweder γ oder δ den Bart verbrannt"* ist genau in den folgenden drei Fällen wahr: (i) α hat keinen verbrannten Bart; (ii) β hat keinen verbrannten Bart; (iii) Genau einer von γ und δ hat einen verbrannten Bart;
Weiter führen wir folgende Notation ein: A steht für *"Atto hat einen verbrannten Bart"*, B steht für *"Bilbo hat einen verbrannten Bart"*, und
C,D,$E, \ldots ,P$ stehen für die analogen Aussagen über Chico, Dondo, Espo, ..., Puzzo.

- Falls B falsch ist, so sagen Bilbo und Harpo beide die Wahrheit; daher muss B wahr sein.
- Falls C falsch ist, so sagen Chico und Frodo beide die Wahrheit; daher muss C wahr sein.
- Falls D falsch ist, so sagen Dondo und Jacco beide die Wahrheit; daher muss D wahr sein.
- Falls G falsch ist, so sagen Gumbo und Izzo beide die Wahrheit; daher muss G wahr sein.
- Falls J falsch ist, so sagen Atto und Jacco beide die Wahrheit; daher muss J wahr sein.
- Falls O falsch ist, so sagen Espo und Gumbo beide die Wahrheit; daher muss O wahr sein.

Wir fassen zusammen: Die sechs Aussagen B,C,D,G,J,O sind wahr.

- Falls A falsch ist, so sagt Atto die Wahrheit (da der Wenn-Teil seiner Aussage falsch ist). Aber auch Espo sagt dann die Wahrheit (da der Dann-Teil seiner Aussage wahr ist). Also muss A wahr sein.
- Falls E falsch ist, so sagen sowohl Espo (Wenn-Teil falsch) als auch Izzo (Dann-Teil wahr) die Wahrheit. Also muss E wahr sein.
- Falls I falsch ist, so sagen sowohl Izzo (Wenn-Teil falsch) als auch Harpo (Dann-Teil wahr) die Wahrheit. Also muss I wahr sein.
- Falls M falsch ist, so sagen sowohl Bilbo (Wenn-Teil falsch) als auch Frodo (Dann-Teil wahr) die Wahrheit. Also muss M wahr sein.
- Falls P falsch ist, so sagen sowohl Chico (Wenn-Teil falsch) als auch Gumbo (Dann-Teil wahr) die Wahrheit. Also muss P wahr sein.

Wir fassen zusammen: Die fünf Aussagen A,E,I,M,P sind ebenfalls wahr.

- Falls F und K beide falsch sind, so sagen sowohl Frodo als auch Jacco die Wahrheit; unmöglich. Falls F wahr und K falsch ist, so sagen sowohl Atto als auch Jacco die Wahrheit; unmöglich. Falls F falsch und K wahr ist, so sagen sowohl Atto als auch Frodo die Wahrheit; unmöglich. Demnach sind F und K beide wahr.
- Falls H und N beide falsch sind, so sagen sowohl Bilbo als auch Harpo die Wahrheit; unmöglich. Falls H wahr und N falsch ist, so sagen sowohl Bilbo als auch Chico die Wahrheit; unmöglich. Falls H falsch und N wahr ist, so sagen sowohl Chico als auch Harpo die Wahrheit; unmöglich. Demnach sind H und N beide wahr.

Alles in allem wissen wir nun, dass die 15 Aussagen A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,M, N,O,P allesamt wahr sind; nur der Wahrheitswert von L bleibt noch offen. Da die neun Wichtel Atto, Bilbo, Chico, Espo, Frodo, Gumbo, Harpo, Izzo und Jacco verwirrt waren und falsche Aussagen gemacht haben, muss Wichtel Dondo die Wahrheit gesagt haben. Daher ist die Aussage L falsch, und Antwort #4 ist korrekt.

7 Kekse

Autoren:
Cor Hurkens (TU Eindhoven)
Rudi Pendavingh (TU Eindhoven)

7.1 Aufgabe

Der Grinch und Knecht Ruprecht teilen 205 Weihnachtskekse untereinander auf. Der Aufteilungsprozess geht über mehrere Runden. Zu Beginn jeder Runde nimmt Knecht Ruprecht eine Anzahl (seiner Wahl) von noch nicht zugeteilten Keksen aus der Keksdose und legt sie auf einen Teller. Der Grinch entscheidet dann, ob diese Kekse Ruprecht oder ihm selbst gehören sollen. Der Aufteilungsprozess endet, wenn alle Kekse zugeteilt sind. Der Aufteilungsprozess endet aber auch, sobald einer der beiden 12 Tellerinhalte erhalten hat; in diesem Fall erhält der andere (der zu diesem Zeitpunkt höchstens 11 Tellerinhalte erhalten hat) alle restlichen Kekse in der Dose.

Der Grinch und Knecht Ruprecht treffen in jeder Runde die für sie bestmöglichen Entscheidungen, um die maximale Anzahl Kekse zu bekommen. Wie viele Kekse kann sich Knecht Ruprecht sichern?

Antwortmöglichkeiten:

1. 95 Kekse
2. 96 Kekse
3. 97 Kekse
4. 98 Kekse
5. 99 Kekse
6. 100 Kekse
7. 101 Kekse
8. 102 Kekse
9. 103 Kekse
10. 104 Kekse

7.2 Lösung

Antwort 3: Knecht Reuprecht bekommt 97 Kekse und der Grinch bekommt 108 Kekse; man beachte, dass $97 + 108 = 205$ gilt.

Die folgende Strategie garantiert dem Grinch mindestens 108 Kekse: *"Jeder Teller mit höchstens* 8 *Keksen geht an Knecht Ruprecht, und jeder Teller mit mindestens* 9 *Keksen geht an den Grinch."*

Falls der Grinch mit dieser Strategie 12 Teller bekommt, so ergibt das mindestens $12 \cdot 9 = 108$ Kekse für ihn. Falls der Grinch mit dieser Strategie 11 oder weniger Teller bekommt, so erhält Knecht Ruprecht höchstens 12 Teller; das ergibt dann höchstens $12 \cdot 8 = 96$ Kekse für Ruprecht und mindestens $205 - 96 = 109$ Kekse für den Grinch.

Andrerseits kann sich Ruprecht mindestens 97 Kekse sichern, indem er auf die ersten 22 Teller jeweils 9 Kekse legt: Falls der Grinch 12 dieser Teller an sich selbst zuweist, so erhält Ruprecht die restlichen $205 - 12 \cdot 9 = 97$ Kekse. Falls der Grinch höchstens 11 dieser Teller an sich selbst zuweist, so erhält Ruprecht 11 dieser Teller und damit mindestens $11 \cdot 9 = 99$ Kekse.

8 Schicht im Schacht

Autoren: Jan Hackfeld, Julie Meißner, Miriam Schlöter
Projekt: Design and Operation of Infrastructure Networks under Uncertainty; DFG SPP 1736 „Algorithms for Big Data“.

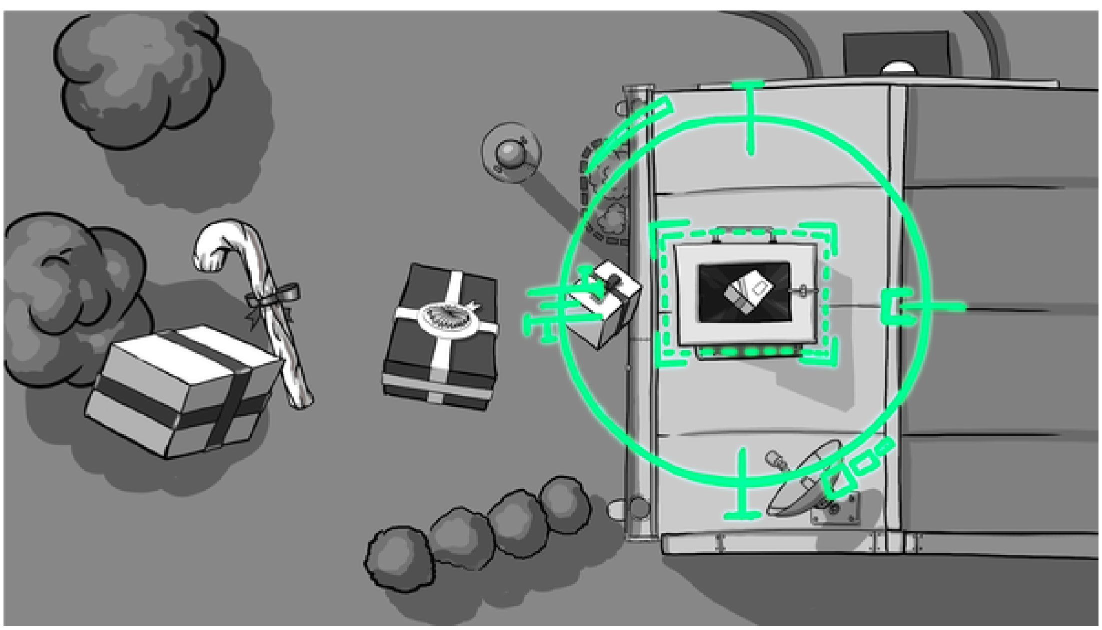
8.1 Aufgabe

Einige Tage vor Weihnachten ist der Weihnachtsmann fast fertig, die Geschenkeauslieferungstour für den diesjährigen 24. Dezember zu planen. Wie in jedem Jahr beginnt er auf den Fiji-Inseln und arbeitet sich dann durch alle Zeitzonen, um auf Hawaii die letzten Familien zu besuchen. Jetzt fehlt noch das letzte Hochhaus, in dem er drei Familien besuchen möchte.

	Stockwerk
Familie Aloha	1. Stock
Familie Baako	6. Stock
Familie Calahan	9. Stock

Der Weihnachtsmann erklärt Rudolph: „Dieses Haus lässt meine weißen Haare grau werden! Ich habe den Zettel verloren, auf dem steht, wann die Familien jeweils zu den Großeltern fahren. Jetzt weiß ich nur noch, dass alle Familien zwischen 14.30 Uhr und 17.00 Uhr abfahren und, da sie den Bus nehmen, ihre Abfahrtszeit ein Vielfaches von 10 Minuten nach 14.30 Uhr ist.
Wir müssen auf einem Balkon im 5. Stock landen und von dort wieder abfliegen, denn nur dort gibt es einen Zugang über den Lüftungsschacht in alle Wohnungen. Der ist wiederum derart eng, dass ich ganze 5 Minuten brauche, um von einem Stockwerk in ein benachbartes zu kriechen. Mit welcher Strategie kann ich denn jetzt alle Geschenke verteilen ohne gesehen zu werden? Wir wollen doch auch noch am hawaiianischen Strand Weihnachten feiern.“
„Mhmm...“, überlegt Rudolph. Doch nach einiger Zeit beginnt seine Nase zu leuchten und er schlägt vor: „Also, du brauchst 5 Minuten, um im Schacht ein Stockwerk zu kriechen, die Geschenke kannst du bei den Familien blitzschnell unter den

Baum legen, sodass wir die Zeit dafür vernachlässigen können. Außerdem hörst du, egal wo du im Schacht bist, wann sich welche der drei Familien auf den Weg macht, was nur alle 10 Minuten der Fall sein kann. In dem Moment, in dem die Familie die Wohnung verlässt, kannst du die Geschenke in die Wohnung bringen ohne entdeckt zu werden. Allerdings hast du diese Information nicht vorweg, da du deinen Zettel verloren hast, und musst daher schon Entscheidungen treffen, bevor dir alle Informationen vorliegen. Wir brauchen also eine Strategie-ohne-Vorwissen, die darauf reagiert, wann die Familien abfahren.
Um zu entscheiden, wie gut unsere Strategie-ohne-Vorwissen ist, können wir uns mit der Zeit vergleichen, um die wir abfliegen können, wenn du deinen Zettel nicht verloren hättest und du alle Abfahrtszeiten der Familien kennen würdest. In diesem Fall können wir eine optimale Strategie-mit-Vorwissen angeben, die bei gegebenen Abfahrtszeiten angibt, wie du durch den Schacht kriechen solltest, damit du möglichst schnell mit dem Verteilen der Geschenke fertig bist. Die Zeit, die wir bei einer Strategie-ohne-Vorwissen später abfliegen können als bei der Strategie-mit-Vorwissen, soll dabei selbst im ungünstigsten Fall möglichst gering sein.“
Der Weihnachtsmann und Rudoph machen eine Reihe von Beobachtungen über eine optimale Strategie-ohne-Vorwissen. Bei welcher der folgenden Aussagen haben sie einen Fehler gemacht?



Antwortmöglichkeiten:

1. Es reicht aus, um 14.30 Uhr auf dem Balkon im 5. Stock zu landen.
2. Wenn die Familien Aloha und Baako als erste zeitgleich das Haus verlassen, darf der Weihnachtsmann nicht sofort in den 6. Stock kriechen.
3. Selbst wenn Familie Baako mindestens 50 Minuten nach Familie Aloha und Familie Calahan abfährt, ist der Weihnachtsmann mit jeder optimalen Strategie-ohne-Vorwissen im ungünstigsten Fall 20 Minuten später fertig als mit einer optimalen Strategie-mit-Vorwissen.
4. Es gibt eine optimale Strategie-ohne-Vorwissen, die in dem Fall, dass die Familien die Wohnungen erst um 17.00 Uhr gleichzeitig verlassen, zur gleichen Zeit fertig ist wie jede optimale Strategie-mit-Vorwissen.
5. Wenn vor 15.00 Uhr noch keine Familie abgefahren ist, muss sich der Weihnachtsmann um 15.00 Uhr immer noch im 5. Stock befinden.
6. Es gibt eine Strategie-ohne-Vorwissen, mit der der Weihnachtsmann höchstens 20 Minuten später als mit jeder optimalen Strategie-mit-Vorwissen abfliegt.
7. Wenn der Weihnachtsmann die Geschenke bisher ausschließlich im 9. Stock schon verteilt hat, darf er anschließend nicht im 6. Stock darauf warten, dass Familie Baako oder Familie Aloha ihre Wohnung verlassen.
8. Egal wann die Familien genau ihre Wohnungen verlassen, kann der Weihnachtsmann bis spätestens 18.00 Uhr vom 5. Stock abfliegen.
9. Es existiert eine optimale Strategie-ohne-Vorwissen, mit der der Weihnachtsmann zur gleichen Zeit abfliegt wie in einer optimalen Strategie-mit-Vorwissen, falls Familie Aloha mindestens 60 Minuten nach Familie Calahan die Wohnung verlässt.
10. Wenn Familie Aloha 60 Minuten vor Familie Calahan abfährt, dann kann der Weihnachtsmann bis spätestens 17.20 Uhr abfliegen.

Projektbezug:

In der Diskreten Optimierung beschäftigen wir uns mit Techniken, mit denen man aus einer sehr großen, aber meist endlichen Menge möglicher Lösungen eine optimale Lösung finden kann. Diese Weihnachtskalender-Aufgabe lässt sich noch gut mit einem Blatt Papier und einem Stift lösen. Wenn die Anzahl der Stockwerke und Familien aber deutlich größer wäre, ließe sich ein solches Problem nur noch mit geeigneten Algorithmen auf einem Computer lösen. Eine besondere Herausforderung dabei ist, dass der Weihnachtsmann in dieser Aufgabe Entscheidungen treffen muss, ohne dass ihm bereits die vollständigen Informationen über alle Abfahrtszeiten vorliegen. Das Teilgebiet der Diskreten Optimierung, das sich mit Problemen dieser Art beschäftigt, nennt man *Online-Optimierung* und was wir in dieser Aufgabe eine Strategie-ohne-Vorwissen genannt haben, nennt man üblicherweise einen Online-Algorithmus. In der Online-Optimierung suchen wir nach möglichst guten Algorithmen für Probleme, bei denen man mit Teilinformationen schon Entscheidungen treffen muss, die sich auf die Qualität der kompletten Lösung auswirken. In einem Projekt, das uns zu dieser Aufgabe inspiriert hat, haben wir uns mit Algorithmen beschäftigt, um zum Beispiel einen Industriefahrstuhl zu steuern, der verschiedene Produkte in ein hohes Regal einsortiert.
Bemerkungen: Bitte nicht am 1.12, 7.12., 15.12. oder 16.12.
Für die Illustration wäre es schön, wenn darauf das Hochhaus mit den verschiedenen Stockwerken und Familien zu erkennen ist.

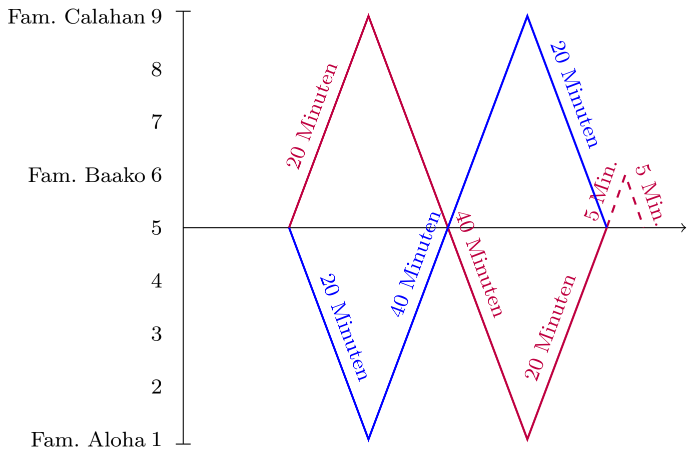


Abbildung 1: Mögliche Strategien-mit-Vorwissen für den Weihnachtsmann

8.2 Lösung

Antwort 9: Die folgende Aussage ist falsch: "Es existiert eine optimale Strategie-ohne-Vorwissen, mit der der Weihnachtsmann zur gleichen Zeit abfliegt wie in einer optimalen Strategie-mit-Vorwissen, falls Familie Aloha mindestens 60 Minuten nach Familie Calahan die Wohnung verlässt."

Bei einer Strategie-mit-Vorwissen hat der Weihnachtsmann grundsätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten durch den Schacht zu klettern (siehe Abbildung 1). Wenn er zuerst zu Familie Aloha in den 1. Stock klettert, folgt er der blauen Route. Er klettert danach zu Familie Calahan in den 9. Stock und anschließend zurück in den 5. Stock. Er braucht für das Klettern der gesamten Strecke genau 80 Minuten. Es kann allerdings sein, dass er zwischendurch noch warten muss, dass eine Familie die Wohnung verlässt. Alternativ kann der Weihnachtsmann auch der roten Route folgen und zuerst zu Familie Calahan in den 9. Stock klettern bevor er abfliegen kann. Dann klettert er zu Familie Aloha in den 1. Stock und von dort zurück in den 5. Stock. Falls der Weihnachtsmann die Geschenke noch nicht an Familie Baako verteilt hat, muss er nun nochmal in den 6. Stock und zurück klettern.

Ein mögliche optimale Strategie-mit-Vorwissen ist folgende: Der Weihnachtsmann entscheidet sich für die rote Route, wenn Familie Calahan das Haus vor Familie Aloha verlässt und ansonsten für die blaue Route. Auf der roten Route wartet der Weihnachtsmann auf dem Weg zu Familie Aloha bei Familie Baako, wenn diese noch nicht das Haus verlassen hat und mindestens 30 Minuten vor Familie Aloha das Haus verlässt. Ansonsten verteilt er die Geschenke beim Vorbeiklettern, wenn Familie Baako schon das Haus verlassen hat, oder ganz am Ende durch den

Umweg in den 6. Stock.

Unsere Strategie-ohne-Vorwissen versucht die Strategie-mit-Vorwissen nachzuahmen. Der Weihnachtsmann wartet im 5 Stock bis er hört, dass Familie Aloha oder Familie Calahan das Haus verlässt. Verlässt Familie Aloha vor oder gleichzeitig mit Familie Calahan das Haus, kriecht der Weihnachtsmann sofort in den 1. Stock und folgt der blauen Route, sonst folgt er der roten Route. Auf der roten Route kriecht er auf dem Weg zu Familie Aloha ohne Warten an Familie Baako vorbei, wenn diese noch nicht das Haus verlassen hat.

Bei einer optimalen Strategie-mit-Vorwissen verlässt der Weihnachtsmann den 5. Stock genau 20 Minuten bevor Familie Calahan oder Familie Aloha das Haus verlässt, damit er die Geschenke verteilen kann, sobald aus dem Haus sind. Mit unserer Strategie-ohne-Vorwissen kann der Weihnachtsmann erst im 5. Stock starten, wenn die Familie das Haus verlässt. Er startet also auf die gleiche Route mit 20 Minuten Verspätung gegenüber der Strategie-mit-Vorwissen. Wir überlegen uns nun, dass der Weihnachtsmann insgesamt auch nie mehr als 20 Minuten Verspätung gegenüber der Strategie-mit-Vorwissen hat. Der Weihnachtsmann könnte sich entweder noch weiter verspäten, weil er zwischendurch auf eine Familie warten muss, oder weil er auf der roten Route Familie Baako noch zusätzlich als letztes besucht.

Wenn der Weihnachtsmann auf seiner Route auf eine Familie warten muss, so hätte er, wenn er der optimalen Strategie-mit-Vorwissen folgt, ebenfalls auf diese Familie warten müssen. Der Weihnachtsmann verlässt diese Familie dann zur gleichen Zeit wie es die Strategie-mit-Vorwissen besagt. Er hat also in diesem Fall seine Verspätung sogar aufgeholt.

Wenn der Weihnachtsmann auf der roten Route Familie Baako nochmal am Ende besuchen muss, dann verlässt Familie Baako das Haus nachdem der Weihnachtsmann das letzte mal im 6. Stock vorbei gekommen ist. Bei der Strategie-mit-Vorwissen hätte der Weihnachtsmann ebenfalls die rote Route gewählt und entweder ebenfalls den Umweg in den 6. Stock gemacht oder vorher im 6. Stock auf die Abfahrt von Familie Baako gewartet. Im ersten Fall bleibt die Verspätung bei höchstens 20 Minuten. Im zweiten Fall liefert der Weihnachtsmann die Geschenke an Familie Aloha bei der Strategie-ohne-Vorwissen nicht später aus als bei der Strategie-mit-Vorwissen, da in der Strategie-mit-Vorwissen in diesem Fall Familie Baako vor Familie Aloha beliefert wird. Damit kann der Weihnachtsmann in diesem Fall insgesamt höchstens 10 Minuten Verspätung durch den Umweg in den 6. Stock haben.

Um 16.40 Uhr kann sich der Weihnachtsmann auf den Weg machen ohne bereits zu wissen, ob Familie Aloha oder Familie Calahan das Haus zuerst verlässt, da er weiß, dass alle Familien das Haus bis 17.00 Uhr verlassen. Er kann also in diesem Fall um 16:40 bereits in den 1. oder 9. Stock kriechen, da es dann egal ist, ob er die blaue oder die rote Route wählt.

Nun zu den 10 Aussagen bezüglich einer optimalen Strategie-ohne-Vorwissen.

1. *Es reicht aus, um 14.30 Uhr auf dem Balkon im 5. Stock zu landen.*

   Richtig. Bei der oben dargestellten Strategie-ohne-Vorwissen landet der Weihnachtsmann erst um 14.30 Uhr und braucht höchstens 20 Minuten mehr als jede Strategie-mit-Vorwissen. Wegen Aussage 3 geht es nicht besser und es reicht, um 14.30 Uhr zu landen.

2. *Wenn die Familien Aloha und Baako als erste zeitgleich das Haus verlassen, darf der Weihnachtsmann nicht sofort in den 6. Stock kriechen.*

   Richtig. Angenommen Familie Aloha und Familie Baako verlassen um 15.00 Uhr das Haus und Familie Calahan um 15.40 Uhr. Eine optimale Strategie-mit-Vorwissen für den Weihnachtsmann ist, um 15.00 Uhr die Geschenke an Familie Aloha zu verteilen, um 15.25 Uhr an Familie Baako und um 15.40 Uhr an Familie Calahan um dann um 16.00 Uhr abzufliegen. Wenn der Weihnachtsmann um 15.05 Uhr die Geschenke an Familie Baako verteilt, kann er erst um 16.30 Uhr mit dem Verteilen aller Geschenke fertig sein und braucht 30 Minuten mehr als mit einer Strategie-mit-Vorwissen. Mit der oben angegebenen Strategie braucht aber nur höchstens 20 Minuten mehr.

3. *Selbst wenn Familie Baako mindestens 50 Minuten nach Familie Aloha und Familie Calahan abfährt, ist der Weihnachtsmann mit jeder optimalen Strategie-ohne-Vorwissen im ungünstigsten Fall 20 Minuten später fertig als mit einer optimalen Strategie-mit-Vorwissen.*

   Richtig. Angenommen Familie Aloha und Familie Calahan verlassen um 15.00 Uhr das Haus und Familie Baako erst um 15.50 Uhr. Eine optimale Strategie-mit-Vorwissen für den Weihnachtsmann ist, um 15.00 Uhr die Geschenke an Familie Aloha zu verteilen, um 15.40 Uhr an Familie Calahan, um 15.55 Uhr an Familie Baako und um 16.00 Uhr abzufliegen. Wegen Aussage 5 sollte der Weihnachtsmann bei einer optimalen Strategie-ohne-Vorwissen im 5. Stock warten bis eine Familie abfährt. Wenn der Weihnachtsmann also um 15.00 Uhr noch im 5. Stock ist und keine Geschenke verteilt hat, kann er frühestens um 16.20 Uhr alle Geschenke ausgeliefert haben. Das heißt, eine optimale Strategie-ohne-Vorwissen braucht für diese Abfahrtszeiten 20 Minuten länger als eine optimale Strategie-mit-Vorwissen.

4. *Es gibt eine optimale Strategie-ohne-Vorwissen, die in dem Fall, dass die Familien die Wohnungen erst um 17.00 Uhr gleichzeitig verlassen, zur gleichen Zeit fertig ist wie jede optimale Strategie-mit-Vorwissen.*

   Richtig. Bei der oben beschriebenen Strategie-ohne-Vorwissen hat der Weihnachtsmann in diesem Fall alle Geschenke bist 18.00 Uhr verteilt. Bei jeder optimalen Strategie-mit-Vorwissen muss der Weihnachtsmann nach 17.00 Uhr noch insgesamt 12 Stockwerke überwinden, was 60 Minuten dauert, sodass er ebenfalls erst um 18.00 Uhr mit dem Verteilen der Geschenke fertig sein kann.

5. *Wenn vor 15.00 Uhr noch keine Familie abgefahren ist, muss sich der Weihnachtsmann um 15.00 immer noch im 5. Stock befinden.*

   Richtig. Nimm an der Weihnachtsmann befindet sich in einem Stockwerk über dem 5. Stock. Für die Abfahrtszeiten: Aloha 15.00 Uhr, Baako 15.00 Uhr, Calahan 15.40 Uhr, gibt es eine optimale Strategie-mit-Vorwissen, welche die Familien in dieser Reihenfolge besucht und um 16.00 Uhr abfliegt. Da sich der Weihnachtsmann aber über dem 5. Stockwerk befindet, braucht er mehr als 20 Minuten um Familie Aloha zu erreichen und ist unabhängig davon ob er Familie Aloha oder Familie Calahan zuerst besucht erst nach 16.20 Uhr mit dem Verteilen der Geschenke fertig. Damit ist er mehr als 20 Minuten langsamer als eine optimale Strategie-mit-Vorwissen. In dem Fall, dass sich der Weihnachtsmann um 15.00 Uhr unterhalb des 5. Stockwerks befindet, kann man die Abfahrtszeiten von Familie Aloha und Familie Calahan vertauschen und erhält ebenfalls ein Beispiel, wo der Weihnachtsmann über 20 Minuten langsamer ist. Da es aber eine Strategie-ohne-Vorwissen gibt, mit der der Weihnachtsmann nur höchstens 20 Minuten langsamer ist, sollte er sich also um 15.00 Uhr im 5. Stock befinden.

6. *Es gibt eine Strategie-ohne-Vorwissen, mit der der Weihnachtsmann höchstens 20 Minuten später als mit jeder optimalen Strategie-mit-Vorwissen abfliegt.*

   Richtig, siehe unsere oben beschriebene Strategie-ohne-Vorwissen.

7. *Wenn der Weihnachtsmann die Geschenke im 9. Stock schon verteilt hat, darf er anschließend nicht im 6. Stock darauf warten, dass Familie Baako oder Familie Aloha ihre Wohnung verlassen.*

   Richtig. Betrachte folgende mögliche Abfahrtszeiten: Familie Calahan 15.00 Uhr, Familie Baako 16.00 Uhr, Familie Aloha 15.40 Uhr. Mit einer optimalen Strategie-mit-Vorwissen beschenkt der Weihnachtsmann die Familien Calahan und Aloha genau zu ihrer Abfahrtszeit, die Familie Baako um 16.05 Uhr und er kann um 16.10 Uhr abfliegen. Falls der Weihnachtsmann bei einer Strategie-ohne-Vorwissen zunächst die Geschenke an Familie Calahan ausliefert und um 15.40 Uhr im 6. Stock wartet, kann er anschließend frühestens um 16.35 Uhr abfliegen, wenn er erst Familie Aloha und dann Familie Baako beschenkt und sogar erst um 16.45 Uhr, wenn er die Familien andersherum beschenkt. In beiden Fällen hat er mindestens 25 Minuten Verspätung. Laut Aussage 6 gibt es eine Strategie-ohne-Vorwissen, die eine maximale Verspätung von 20 Minuten garantiert. Also sollte er nicht im 6. Stock warten.

8. *Egal wann die Familien genau ihre Wohnungen verlassen, kann der Weihnachtsmann bis spätestens 18.00 Uhr vom 5. Stock abfliegen.*

   Richtig. Wir schauen, was der Weihnachtsmann bei der oben beschriebenen Strategie-ohne-Vorwissen in diesem Fall macht. Egal, wann die Familien genau abfahren, verteilt der Weihnachtsmann spätestens um 17.00 Uhr die Geschenke an Familie Aloha oder an Familie Calahan. Da dann alle Familien abgefahren sind, braucht der Weihnachtsmann noch höchstens 60 Minuten die restlichen Geschenke zu verteilen. Er ist also auf jeden Fall bis 18.00 Uhr mit dem Verteilen der Geschenke fertig.

9. *Es existiert eine optimale Strategie-ohne-Vorwissen, mit der der Weihnachtsmann zur gleichen Zeit abfliegt wie in einer optimalen Strategie-mit-Vorwissen, falls Familie Aloha mindestens 60 Minuten nach Familie Calahan die Wohnung verlässt.*

   Falsch. Betrachte folgende mögliche Abfahrtszeiten: Calahan 15.00 Uhr, Baako 16.00 Uhr, Aloha 16.30 Uhr oder alternativ Calahan 15.00 Uhr, Baako 16.30 Uhr, Aloha 16.00. Eine optimale Strategie-mit-Vorwissen ist bei beiden möglichen Abfahrtszeiten, die Geschenke genau zum Abfahrtszeitpunkte jeder Familie zu verteilen. Bei den ersten Zeiten ist der Weihnachtsmann dann um 16.50 Uhr, bei den zweiten um 16.35 Uhr mit dem Verteilen der Geschenke fertig. In einer Strategie-ohne-Vorwissen muss er sich entscheiden in welchem Stockwerk er um 16.00 Uhr wartet, ohne die Abfahrtszeiten zu kennen. Egal ob er im 1. Stock oder 6. Stock oder dazwischen wartet, braucht er bei einer der möglichen Abfahrtszeiten länger als die optimale Strategie-mit-Vorwissen.

10. *Wenn Familie Aloha 60 Minuten vor Familie Calahan abfährt, dann kann der Weihnachtsmann bis spätestens 17.20 Uhr abfliegen.*

    Richtig. Wir schauen was der Weihnachtsmann bei unserer Strategie-ohne-Vorwissen in diesem Fall macht. Sobald Familie Aloha abfährt, kriecht der Weihnachtsmann in den 1. Stock, verteilt die Geschenke und kriecht dann in den 9. Stock. Spätestens um 17.00 Uhr fährt Familie Calahan ab, sodass sich spätestens dann der Weihnachtsmann auf den Weg in den 6. Stock macht, wo nach 17.00 Uhr Familie Baako ebenfalls die Wohnung verlassen hat und er so spätestens um 17.20 Uhr den 5. Stock erreicht und abfliegen kann.

9 Knobelaufgabe

Autorin/Autor: Unbekannt
Überarbeitung: Matthias Nicol

9.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann möchte sich für seine Wichtel eine neue Knobelaufgabe ausdenken. Da er einen kleinen Preis (zwei Kinokarten) und einen größeren Preis (zwei Konzertkarten) zu vergeben hat, soll die Aufgabe einen leichten und einen schwierigeren Teil enthalten. Er formuliert die Aufgabe so:
„In einem vollständig dunklen magischen Raum liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe, welche innerhalb dieses Raumes ununterscheidbar sind.
Es handelt sich dabei um:

- fünf weiße Handschuhe für die rechte Hand,
- fünf weiße Handschuhe für die linke Hand,
- fünf schwarze Handschuhe für die rechte Hand und
- fünf schwarze Handschuhe für die linke Hand.

Zwei Handschuhe gelten natürlich genau dann als „passendes Paar“, wenn sie die gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist.
Unter einem „Zug“ sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne dass wegen der Dunkelheit dabei eine Auswahl nach der Farbe möglich ist.
Eine „Auswahl von n Zügen“ bestehe darin, dass man nacheinander n Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst danach feststellt, ob sich unter den n entnommenen Handschuhen mindestens ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte die Auswahl als beendet.“
Dem Weihnachtsmann wird schnell klar, dass die kleinste natürliche Zahl n mit

der Eigenschaft, dass die Auswahl von n Zügen mit Sicherheit beendet ist, recht einfach und auch recht schnell zu ermitteln ist.
Diese Aufgabenstellung wäre also für die Vergabe des kleinen Preises geeignet.
Für den Gewinn der Konzertkarten müssen die Wichtel die richtige Antwort auf die folgende Aufgabenstellung finden.
„Wie groß ist die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass eine Auswahl von n Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 99% beendet wird?“

Antwortmöglichkeiten:

1. $n = 15$
2. $n = 14$
3. $n = 13$
4. $n = 11$
5. $n = 10$
6. $n = 9$
7. $n = 8$
8. $n = 7$
9. $n = 6$
10. $n = 5$

9.2 Lösung

Antwort 8: Erst für $n = 7$ wird eine Auswahl von n Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 99% beendet.

Es sei $f(m)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Auswahl mit m Zügen erfolgreich ist. Dann gilt z.B. $f(1) = 0$ und $f(11) = 1$. Außerdem ist einsichtig, dass $f(m)$ monoton wachsend ist. Die gesuchte natürliche Zahl n ist also diejenige, für die gilt:

$$f(n) > 0{,}99 \text{ und } f(n-1) \leq 0{,}99, n \geq 2$$

Die 20 Handschuhe werden in vier Klassen zusammengefasst:

- fünf mal weiß links,
- fünf mal weiß rechts,
- fünf mal schwarz links und
- fünf mal schwarz rechts.

Wir entnehmen m Handschuhe, $6 \leq m \leq 10$ (also aus mindestens zwei Klassen), und betrachten die entstehende Menge E der entnommenen Handschuhe. Es gibt $\binom{20}{m}$ Möglichkeiten für E.

Wir ermitteln jetzt die Anzahl der Möglichkeiten, kein passendes Paar in E zu bekommen. Die m Handschuhe sind dann aus mindestens zwei Klassen $(6 \leq m)$ und höchstens aus zwei Klassen (sonst ist immer ein passendes Paar dabei), also aus genau zwei Klassen. Als Zusammenstellung für nicht passende Paare kommen die folgenden vier Kombinationen inbetracht:

- (weiß - links; schwarz - links)
- (weiß - links; schwarz - rechts)
- (weiß - rechts; schwarz - links) und
- (weiß - rechts; schwarz - rechts).

In jedem der vier Fälle gibt es genau $\binom{5+5}{m} = \binom{10}{m}$ Möglichkeiten für E.

Also gilt: $f(m) = 1 - \frac{4 \cdot \binom{10}{m}}{\binom{20}{m}}$ $(6 \leq m \leq 10)$.
Speziell:
$f(6) = 1 - \frac{4 \cdot \binom{10}{6}}{\binom{20}{6}} = 1 - \frac{7}{323} < 0{,}99$
$f(7) = 1 - \frac{4 \cdot \binom{10}{7}}{\binom{20}{7}} = 1 - \frac{2}{323} > 0{,}99$.
Wegen der Monotonie von f ist $n = 7$ die gesuchte Zahl.

10 Das Weihnachtsplätzchenwürfelspiel

Autor: Christian Schröder
Projekt: SE 1

10.1 Aufgabe

Drei Weihnachtswichtel fragen den Weihnachtsmann nach seinen berühmten, leckeren Weihnachtsplätzchen. Ihnen tropft bereits der Zahn, wenn sie nur daran denken. Sie möchten gern wieder welche naschen. Der Weihnachtsmann willigt ein, aber nur nach seinen Regeln eines Würfelspiels. Das Spiel beginnt mit sechs leeren Tellern, durchnummeriert von eins bis sechs. Die Wichtel wechseln sich reihum dabei ab, mit einem fairen, traditionellen Würfel zu würfeln. Die gewürfelte Zahl, z. B. eine fünf, gehört genau zu dem Teller mit der Nummer, die gewürfelt wurde, im Beispiel die Fünf. Auf diesem Teller liegt zu Beginn kein Plätzchen. Der Weihnachtsmann legt ein Plätzchen auf diesen Teller. Der nächste Wichtel ist mit dem Würfeln an der Reihe. Würfelt er eine Zahl, zu der ein Teller mit Plätzchen gehört, dann darf er dieses Plätzchen essen, anderenfalls legt der Weihnachtsmann wieder ein Plätzchen auf den Teller und der nächste Wichtel ist an der Reihe. Das Spiel wird, solange es leere Teller gibt, wie beschrieben fortgesetzt. Gibt es also noch leere Teller, dann wird weitergewürfelt. Sollten mit dem neuen Plätzchen hingegen alle sechs Teller besetzt sein, so darf der letzte Würfler alle sechs Plätzchen essen und das ganze Spiel ist beendet.
Wie viele Plätzchen werden bei diesem Spiel durchschnittlich insgesamt gegessen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 6
2. 6,3
3. 12
4. 27,2
5. 31,4
6. 42
7. 44,6
8. 47
9. 83,2
10. unendlich viele

10.2 Lösung

Antwort 7: Es werden durchschnittlich 44,6 Plätzchen gegessen.

Zunächst ist es völlig egal, wie viele Wichtel teilnehmen, da nur nach der Durchschnittsgesamtzahl an Plätzchen gefragt ist.

Die minimale Plätzchenzahl ist sicherlich sechs (Antwort 1); sie wird z.B. erreicht, wenn die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gewürfelt werden. Die maximal Plätzchenzahl ist unbegrenzt (Antwort 10). Dies passiert z.B., wenn durchgängig nur Einsen gewürfelt werden. Die durchschnittliche Anzahl liegt irgendwo dazwischen. Sie muß nicht ganzzahlig sein. (Die durchschnittlich gewürfelte Augenzahl ist mit 3,5 auch nicht ganzzahlig.)

Nehmen wir an, das Spiel sei nach m Würfen beendet. Wie viele Plätzchen werden dann gegessen? Man braucht mindestens sechs Würfe, um jeden Teller einmal zu füllen. Die sechs Teller werden am Ende mit einem Mal leer gegessen. Sollte zwischendurch ein Teller geleert werden, so benötigt man einen weiteren Wurf, um ihn wieder zu füllen. Es werden somit $(m-6)/2+6$ Plätzchen gegessen.

Es bleibt zu berechnen, wie viel Würfe zum Beenden des Spiels durchschnittlich notwendig sind. Dazu nehmen wir an, daß zu einem Zeitpunkt fünf der sechs Teller belegt sind. Sollte im nächsten Wurf die Nummer des unbelegten Tellers fallen, ist das Spiel nach diesem einen Wurf beendet. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit 1/6. Wenn jedoch die Nummer eines belegten Tellers fällt, sinkt die Anzahl der belegten Teller auf vier. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit 5/6. Dazu ist es unerheblich, welche fünf der sechs Teller belegt waren.

Wir nennen die durchschnittliche Anzahl noch zu spielender Würfe bei fünf belegten Tellern m_5. Dann gilt

$$m_5 = 1 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot m_4.$$

Dabei beschreibt m_4 die durchschnittliche Anzahl noch zu spielender Würfe bei vier belegten Tellern.

Was passiert bei vier belegten Tellern? Sollte im nächsten Wurf die Nummer eines unbelegten Tellers fallen, so steigt die Anzahl belegter Teller auf fünf. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit 2/6. Wenn jedoch die Nummer eines belegten Tellers fällt, sinkt die Anzahl der belegten Teller auf drei. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit 4/6. Dazu ist es wieder unerheblich, welche vier der sechs Teller belegt waren. Ähnlich wie oben ergibt sich also

$$m_4 = 1 + \frac{2}{6} \cdot m_5 + \frac{4}{6} \cdot m_3.$$

Mit ähnlichen Überlegungen ergeben sich

$$
\begin{aligned}
m_3 &= 1 + \frac{3}{6} \cdot m_4 + \frac{3}{6} \cdot m_2, \\
m_2 &= 1 + \frac{4}{6} \cdot m_3 + \frac{2}{6} \cdot m_1, \\
m_1 &= 1 + \frac{5}{6} \cdot m_2 + \frac{1}{6} \cdot m_0.
\end{aligned}
$$

Dabei beschreiben m_2, m_1 und m_0 die durchschnittliche Anzahl noch zu spielender Würfe bei zwei belegten Tellern bzw. bei einem und keinem belegten Teller. Die Zahl, die wir suchen ist also m_0.

Nehmen wir schließlich an, daß kein Teller belegt ist, wie z.B. zu Beginn des Spiels. Nach einem Wurf ist dann ein Teller belegt, egal welche Zahl fällt. Es gilt also

$$m_0 = 1 + \frac{6}{6} m_1.$$

Zusammenfassend ergibt sich das lineare Gleichungssystem (nach Multiplikation aller Gleichungen mit sechs)

$$
\begin{aligned}
6m_5 - 5m_4 + 0m_3 + 0m_2 + 0m_1 + 0m_0 &= 6, \\
-2m_5 + 6m_4 - 4m_3 + 0m_2 + 0m_1 + 0m_0 &= 6, \\
0m_5 - 3m_4 + 6m_3 - 3m_2 + 0m_1 + 0m_0 &= 6, \\
0m_5 + 0m_4 - 4m_3 + 6m_2 - 2m_1 + 0m_0 &= 6, \\
0m_5 + 0m_4 + 0m_3 - 5m_2 + 6m_1 - 1m_0 &= 6, \\
0m_5 + 0m_4 + 0m_3 + 0m_2 - 6m_1 + 6m_0 &= 6.
\end{aligned}
$$

Die Lösung ergibt sich (z.B. mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens) zu

$$[m_5, m_4, m_3, m_2, m_1, m_0] = \frac{1}{10}[630, 744, 786, 808, 822, 832].$$

Das Spiel ist also nach durchschnittlich $m_0 = 83{,}2$ Würfen beendet. Dies ist die neunte Antwort. Aber gefragt war ja nach der Anzahl der Plätzchen. Diese ergibt sich nach obiger Formel zu

$$(m_0 - 6)/2 + 6 = (83{,}2 - 6)/2 + 6 = 44{,}6.$$

Die richtige Antwort ist somit die siebte.

Zu den restlichen falschen Antworten:
2. 2π,
3. doppelte der Minimalzahl
4. $10e$

5. 10π
6. die Antwort auf die Frage nach dem Sinn des Universums
8. die zufälligste ganze Zahl unter 100
9. die durchschnittliche Anzahl an benötigten Würfen.

11 Kartenspiel

Autor: Onno Boxma (TU Eindhoven)

11.1 Aufgabe

Der Grinch hat ein Kartenspiel mit 16 Karten, die mit den Zahlen $1,2,3,\ldots,16$ nummeriert sind. Die Karten werden vom Weihnachtsmann gut durchgemischt und in zwei gleich große Stapel zu je 8 Karten aufgeteilt. Da der Weihnachtsmann die Karten gewissenhaft und ehrlich mischt, ist jede mögliche Aufteilung in zwei Stapel genau gleich wahrscheinlich. Der Grinch erhält dann den ersten Stapel und der Weihnachtsmann nimmt sich den zweiten Stapel. Beide schauen sich ihr Spielblatt genau an.

Dann legen die beiden Spieler jeweils abwechselnd eine ihrer Karten offen auf den Tisch. Der Weihnachtsmann darf die erste Karte ablegen. Das Spiel endet, sobald die Summe aller Zahlen auf dem Tisch durch 17 teilbar ist. Gewinner ist dann jener Spieler, der die letzte Karte auf den Tisch gelegt hat. Weihnachtsmann und Grinch spielen mit großer Besonnenheit und völlig fehlerlos, und sie treffen immer die für sie bestmöglichen Entscheidungen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Weihnachtsmann das Spiel gewinnt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0
2. $8! \cdot 8!/16!$
3. $1/16!$
4. $23/16!$
5. $1/17$
6. $1/16$
7. $1/2$
8. $3/4$
9. $15/16$
10. 1

11.2 Lösung

Antwort 1: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Weihnachtsmann das Spiel gewinnt, ist Null.

Erstens: Eine Karte liegt entweder offen auf dem Tisch, ist in der eigenen Hand oder in der Hand des Gegners. Daher kennen beide Spieler die Karten in der Hand des Gegners und das Spiel wird im Prinzip mit offenen Karten gespielt.

Zweitens: Wir betrachten eine Situation, in der der Grinch am Zug ist und dabei k Karten in der Hand hat. Der Weihnachtsmann hat in diesem Fall noch $k-1$ Karten in der Hand. Die Summe aller Zahlen auf dem Tisch sei S. Eine Karte x ist *schlecht* für den Grinch, falls der Weihnachtsmann die Karte y in der Hand hat, für die $S+x+y$ durch 17 teilbar ist. Der Grinch kann in diesem Fall die Karte x nicht ausspielen, da der Weihnachtsmann das Spiel im folgenden Zug durch Karte y gewinnen kann. Da der Grinch mehr Karten als der Weihnachtsmann in der Hand hat, hat er mindestens eine nicht-schlechte Karte zur Auswahl. Der Grinch spielt eine beliebige nicht-schlechte Karte aus und bringt das Spiel in die nächste Runde.

Drittens: Der Weihnachtsmann kann das Spiel nicht mit seinem ersten Zug gewinnen. Der Grinch spielt dann immer eine nicht-schlechte Karte aus und verhindert dadurch, dass der Weihnachtsmann im Folgezug gewinnt. Das Spiel läuft weiter und weiter und weiter, bis dass der Weihnachtsmann schließlich gar keine Karten und der Grinch nur noch eine einzige Karte hat. Der Grinch legt seine letzte Karte ab. Die Summe auf dem Tisch beträgt dann

$$1+2+3+\cdots+16 = 8\cdot 17,$$

und der Grinch gewinnt.

Viertens: Wir folgern, dass Antwort #1 richtig ist. Der Weihnachtsmann ist bei diesem Spiel chancenlos.

12 Das Gewinnspiel

Autor: Stefan Rüdrich

12.1 Aufgabe

Seit nunmehr drei Jahren gibt es am 12. Dezember eines jeden Jahres für die vielen fleißigen Helfer des Weihnachtsmannes im Weihnachtsradio 83,3 ein Quizz mit attraktiven Preisen. Gefragt sind die Wichtel mit Interesse für Literatur, Geschichte, Chemie, Physik und natürlich auch Mathematik. Der Weihnachtsmann selbst als interessierter Mathematikfan sponsert für die Radiobelegschaft den Kaffee und seine superleckeren Plätzchen. Für den Gewinner des Mathematikrätsels stehen zwei der begehrten Karten für das kommende Neujahrskonzert mit Übernachtung im Fünfsternehotel des Elfenlandes zur Verfügung. Es gibt sehr viele Interessenten für so ein exklusives Konzertereignis. Der 83. Anrufer darf mit der Moderatorin um die begehrten Konzerttickets spielen.

Dazu muss er erraten, in welcher von vier Plätzchendosen, beschriftet mit den Buchstaben A, B, C und D die Konzertkarten liegen. Drei der Dosen sind nur mit Plätzchen gefüllt, in genau einer zufällig gewählten Dose befinden sich neben den Plätzchen auch die Karten.

Um Sendezeit zu füllen und den Anrufer zu verunsichern, wird das Spiel ein wenig gestreckt: Nachdem sich der Anrufer für eine Dose entschieden hat, wird diese noch nicht geöffnet. Zunächst öffnet die Moderatorin, die bereits weiß, wo der Gewinn zu finden ist, eine der drei anderen Dosen - auf jeden Fall eine, die nur mit Plätzchen gefüllt ist. Dann darf der Kandidat entscheiden, ob er bei seiner ursprünglichen Wahl bleibt, oder zu einer der beiden übrigen, noch geschlossenen Dosen wechselt. Erst dann öffnet die Moderatorin die vom Kandidaten gewählte Dose, womit sich entscheidet, ob der Anrufer die Karten gewinnt.

Lohnt es sich für den Anrufer, an dieser Stelle auf Nachfrage der Moderatorin auf eine andere Dose zu wechseln, um seine Gewinnchancen zu erhöhen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Ja, der Wechsel auf eine andere Dose garantiert den Gewinn der Tickets.
2. Ja, die Gewinnchance verbessert sich durch den Wechsel auf 3/8.
3. Nein, die Gewinnchance bleibt bei 1/4.
4. Nein, die Gewinnchance sinkt durch den Wechsel auf 1/8.
5. Nein, die Gewinnchance fällt durch den Wechsel auf 0.
6. Ja, die Gewinnchance verbessert sich durch den Wechsel auf 3/4.
7. Nein, die Gewinnchance sinkt durch den Wechsel auf 1/6.
8. Es macht keinen Unterschied, wie sich der Kandidat entscheidet.
9. Ja, die Gewinnchance verbessert sich durch den Wechsel auf 1/2.
10. Der Kandidat sollte selbst zufällig entscheiden, ob er die Dose wechselt, um seine Gewinnchance zu maximieren.

12.2 Lösung

Antwort 2: Die Chance auf den Hauptgewinn erhöht sich für den Kandidaten durch den Wechsel auf eine andere Dose von 1/4 auf 3/8.

Selbst berühmte Mathematiker, wie etwa Paul Erdös, zweifelten an der Richtigkeit der Lösung, da die Intuition vieler Menschen vorgibt, dass die Gewinnchance unabhängig von der Spielstrategie sein sollte, wenn zu Beginn des Spiels alle Dosen mit gleicher Wahrscheinlichkeit den Gewinn enthalten.
Dieser scheinbare Widerspruch löst sich auf, wenn man durchschaut, dass die Moderatorin durch das Öffnen einer nur mit Plätzchen gefüllten Dose eine nützliche Information offenbart, die bei Spielbeginn noch nicht bekannt war und erst bei der finalen Wahl berücksichtigt werden kann.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, der Kandidat entscheidet sich zunächst für Dose A und legt sich auf die Strategie fest, die Dose später zu wechseln. Mit einer Wahrscheinlichkeit von je 1/4 sind die Karten in Dose A, B, C oder D zu finden. Ohne eine weitere Information liegt also die Chance, dass der Kandidat sofort die richtige Dose gewählt hat, bei 1/4 und die Wahrscheinlichkeit, dass eine der anderen Dosen die Tickets enthält bei 3/4.

Wenn nun die Moderatorin eine nur mit Plätzchen gefüllte Dose öffnet, z.B. Dose C, kann diese von nun an ausgeschlossen werden. Immer noch beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Anrufer sich die richtige Dose ausgesucht hat, 1/4 und die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht die richtige war, 3/4. Die Zahl der Alternativen hat sich aber von drei auf zwei verringert und die Gewinnchance bei einem Wechsel auf B oder D liegt somit nun bei $(3/4)/2 = 3/8$.

Würde der Kandidat stattdessen mit der Strategie spielen, stets bei der zuerst gewählten Dose zu bleiben, begnügt er sich mit der geringeren Wahrscheinlichkeit von 1/4, sofort die richtige von vier Dosen zu wählen. Bleibt der Kandidat bei seiner Wahl, unabhängig von dem Verhalten der Moderatorin, ändert das Öffnen einer anderen Dose auch nicht die Chance, mit der ersten Wahl richtig zu liegen und bleibt somit bei 1/4.

Projektbezug:

Das Rätsel ist einer Finalrunde der amerikanischen Spielshow „Let's Make a Deal“ nachempfunden, die unter dem Namen „Geh aufs Ganze!“ von 1992 bis 2003 im deutschen Privatfernsehen lief.

Das dahinter liegende Problem geht auf den Biostatistiker Steve Selvin zurück, der es als Leserbrief im Fachblatt *American Statistician* 1975 veröffentlichte. Bekannt wurde es erst 15 Jahre später durch Marilyn vos Savants Kolumne *Ask Marilyn* im Magazin *Parade*, die einen Leserbrief von Craig F. Whitaker beantwortete. Die ursprüngliche Aufgabenstellung war allerdings unscharf bezüglich der Spielregeln und dem Verhalten des Moderators, wodurch es zu unterschiedlichen Interpretationen der Aufgabe und einem Disput über die korrekte Lösung kam. Unter passenden Annahmen bzw. bei klarer Formulierung des Spielablaufs ist die Lösung aber unstrittig.

Inzwischen ist es im deutschsprachigen Raum als das "Ziegenproblem" bekannt geworden[1], da in der ursprünglichen Spielshow, in der sich der mögliche Gewinn nicht in Dosen, sondern hinter einem von drei Toren verbarg, Ziegen als symbolische Trostpreise hinter den übrigen Toren standen.

[1]Quelle: de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem

13 Einstellungstest

Autorin/Autor: unbekannt
Überarbeitung: Matthias Nicol

13.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann muss wegen der großen Arbeitsbelastung neue Wichtel einstellen. Für den Einstellungstest überlegt er sich schnell eine nach seiner Meinung recht einfache Aufgabe:
Ermittle alle Tripel reeller Zahlen §(x,y,z) für die gilt:

$$2x + x^2y = y \tag{1}$$
$$2y + y^2z = z \tag{2}$$
$$2z + z^2x = x \tag{3}$$

Der Weihnachtsmann möchte die Aufgabe natürlich selbst erst einmal lösen, gerät jedoch bald ins Schwitzen. Mit den ihm bekannten Methoden kommt er nicht weiter.
Sein Mathematiker-Freund von der Nord-Nord-Ost-Universität gibt ihm einen kleinen helfenden Tipp. „Du musst x durch $x = \tan\alpha$ ersetzen.“
Nach einigem Überlegen und konzentriertem Arbeiten kann der Weihnachtsmann die vollständige Lösungsmenge ermitteln.
Wie viele Lösungen gehören zur Lösungsmenge?

Antwortmöglichkeiten:

1. natürlich keine Lösung
2. genau eine Lösung
3. genau zwei Lösungen
4. genau drei Lösungen
5. genau vier Lösungen
6. genau fünf Lösungen
7. genau sechs Lösungen
8. genau sieben Lösungen
9. genau acht Lösungen
10. unendlich viele Lösungen

13.2 Lösung

Antwort 8: Genau sieben Lösungen gehören zur Lösungsmenge

Falls es ein Lösungstripel gibt, muss gelten:

$$|x| \neq 1,\, |y| \neq 1,\, |z| \neq 1,\; x := \tan\alpha (4)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
(1) & \iff & y = \frac{2x}{1-x^2} & \overset{x=\tan\alpha}{=} & \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} & = & \tan(2\alpha) & (5) \\
(2) & \iff & z = \frac{2y}{1-y^2} & \overset{5}{=} & \frac{2\tan(2\alpha)}{1-\tan^2(2\alpha)} & = & \tan(4\alpha) & (6) \\
(3) & \iff & x = \frac{2z}{1-z^2} & \overset{6}{=} & \frac{2\tan(4\alpha)}{1-\tan^2(4\alpha)} & = & \tan(8\alpha) & (7) \\
(4) \wedge (7) & \implies & \tan\alpha & = & \tan(8\alpha) & & &
\end{array}$$

Wegen der Periodizität der Tangensfunktion existiert eine ganze Zahl n mit $\alpha + n\pi = 8\alpha$.
Daraus folgt $\alpha = \frac{n\pi}{7}, n \in \mathbb{Z}$.
Somit muss für x nach (4) gelten: $x = \tan(\frac{n\pi}{7})$,$n \in \mathbb{Z}$.

Für x kommen also nur die Zahlen $x = \tan(0)$, $x = \tan(\frac{\pi}{7})$, $x = \tan(\frac{2\pi}{7})$,

$x = \tan(\frac{3\pi}{7})$, $x = \tan(\frac{4\pi}{7})$, $x = \tan(\frac{5\pi}{7})$ und $x = \tan(\frac{6\pi}{7})$) in Frage.

Daher können wegen (4), (5) und (6) höchstens die sieben Tripel

$(\tan(\frac{n\pi}{7}),\, \tan(\frac{2n\pi}{7}),\, \tan(\frac{4n\pi}{7})),\; n = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6$ (8)
der Aufgabenstellung genügen.

Probe:
Alle sieben Tripel der Form (8) erfüllen tatsächlich die Gleichungen (1), (2) und (3), denn für jedes Tripel gilt $|x| \neq 1$, $|y| \neq 1$, $|z| \neq 1$ sowie

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{2x}{1-x^2} & = & \frac{2\tan(\frac{n\pi}{7})}{1-\tan^2(\frac{n\pi}{\text{ffl}7})} & = & \tan(\frac{2n\pi}{7}) & = & y \\
\frac{2y}{1-y^2} & = & \frac{2\tan(\frac{2n\pi}{7})}{1-\tan^2(\frac{2n\pi}{\text{ffl}7})} & = & \tan(\frac{4n\pi}{7}) & = & z \\
\frac{2z}{1-z^2} & = & \frac{2\tan(\frac{4n\pi}{7})}{1-\tan^2(\frac{4n\pi}{\text{ffl}7})} & = & \tan(\frac{8n\pi}{7}) & = & x
\end{array}$$

Es ist $\tan(\frac{8n\pi}{7}) = \tan(\frac{n\pi}{7})$.

14 Tiefschnee

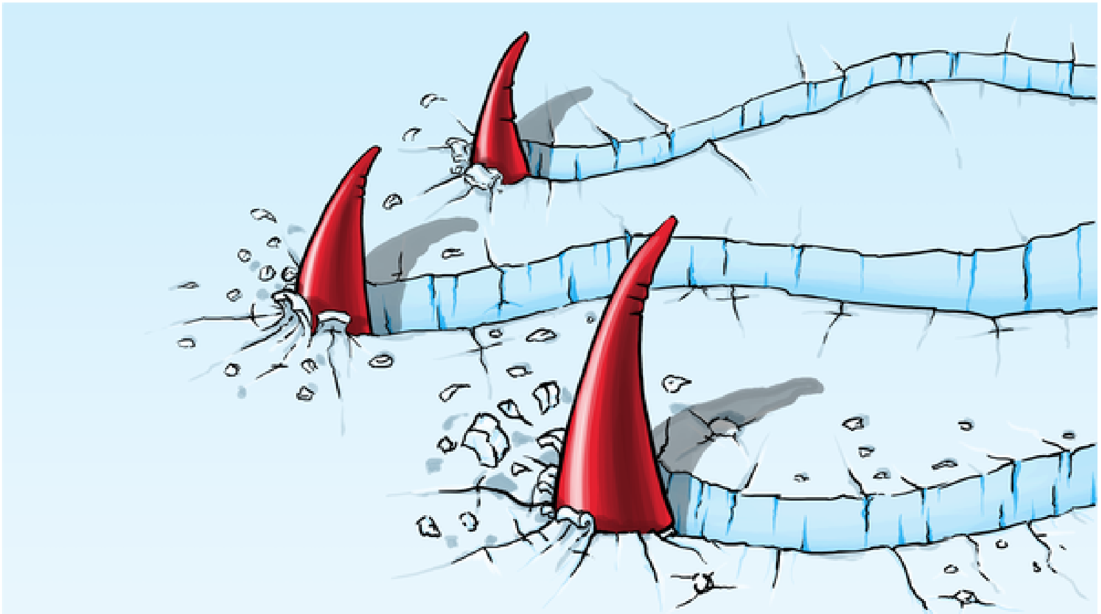
Autor: Georg Prokert (TU Eindhoven)

14.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht kämpft sich durch den Tiefschnee. Ruprecht hat seine Wanderung in mehrere Phasen aufgeteilt.

- In der ersten Phase macht Ruprecht einen einzigen Schritt nach Norden. Dann stärkt er sich mit einem Schluck Rum aus dem Flachmann.
- In der zweiten Phase dreht sich Ruprecht zunächst um 90 Grad (vielleicht nach links, vielleicht nach rechts). Er macht zwei Schritte in die neue Richtung und stärkt sich aus dem Flachmann.
- In der dritten Phase dreht sich Ruprecht um 90 Grad (vielleicht nach links, vielleicht nach rechts) und macht drei Schritte in die neue Richtung. Danach stärkt er sich mit einem Schluck aus dem Flachmann.
- Und so weiter, und so fort. In Phase k dreht sich Ruprecht zunächst um 90 Grad (nach links oder nach rechts), macht k Schritte in die neue Richtung, und gönnt sich dann einen Schluck.

Am Ende von Phase N nimmt Ruprecht wieder seinen wohlverdienten Schluck aus dem Flachmann. Er studiert seine Spuren im Schnee und da bemerkt er auf einmal: Er steht genau wieder an jenem Punkt, an dem er seine Wanderung begonnen hat! Welche der folgenden Werte kommen für die Zahl N in Frage?



Antwortmöglichkeiten:

1. Die beiden Werte 303 und 314
2. Die beiden Werte 304 und 319
3. Die beiden Werte 305 und 322
4. Die beiden Werte 306 und 315
5. Die beiden Werte 307 und 317
6. Die beiden Werte 308 und 320
7. Die beiden Werte 309 und 318
8. Die beiden Werte 310 und 321
9. Die beiden Werte 311 und 316
10. Die beiden Werte 312 und 313

14.2 Lösung

Antwort 2: Für die Anzahl der Phasen N kommen nur $N = 304$ und $N = 319$ in Frage.

Warum nur Werte der Form 8m+7 und 8m+8 in Frage kommen. Wir modellieren Ruprechts Wanderung im Kartesischen Koordinatensystem. Ruprecht startet im Ursprung (0,0), und sein erster Schritt nach Norden bringt ihn in den Punkt (0,1). Die zweite Phase bringt ihn dann entweder zum Punkt (2,1) oder zum Punkt (-2,1). Allgemein gilt, dass Phase k für gerades k die x-Koordinate um $\pm k$ ändert (während die y-Koordinate gleich bleibt), und dass sich für ungerades k die y-Koordinate um $\pm k$ verändert (während die x-Koordinate gleich bleibt).

Wir betrachten nun die x-Koordinate etwas genauer. Jede ungerade Phase lässt die x-Koordinate gleich, und jede gerade Phase verändert sie um einen geraden Wert. Modulo 4 betrachtet passiert dabei folgendes: Am Ende von Phase 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 21 etc ist die x-Koordinate $\equiv 2 \pmod 4$. Am Ende von Phase 1, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25 etc ist die x-Koordinate $\equiv 0 \pmod 4$. Allgemeiner gesagt: Falls k die Form $8m+1$, $8m+6$, $8m+7$ oder $8m+8$ hat, so ist die x-Koordinate am Ende von Phase k durch 4 teilbar; andernfalls läßt die x-Koordinate bei Division durch 4 den Rest 2.

Nun wenden wir uns der y-Koordinate zu. Am Ende von Phase 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, etc ist die y-Koordinate ungerade. Am Ende von Phase 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, etc ist die y-Koordinate gerade. Etwas allgemeiner formuliert: Falls k die Form $8m + 3$, $8m + 4$, $8m + 7$ oder $8m + 8$ hat, so ist die y-Koordinate am Ende von Phase k gerade; andernfalls ist sie ungerade.

Wenn Ruprecht am Ende von Phase N wieder in seinem Startpunkt (0,0) stehen soll, so muss die x-Koordinate durch 4 teilbar und muss die y-Koordinate gerade sein. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass k in diesem Fall die Form $8m + 7$ oder $8m + 8$ haben muss.

Warum alle Werte der Form 8m+7 und 8m+8 tatsächlich in Frage kommen. Zuerst zeigen wir, dass die beiden Werte $N = 7$ und $N = 8$ möglich sind. Für $N = 7$ verwenden wir

> Nord 1, Ost 2, Süd 3, Ost 4, Süd 5, West 6 und Nord 7.

Für $N = 8$ verwenden wir

> Nord 1, Ost 2, Süd 3, West 4, Süd 5, West 6, Nord 7 und Ost 8.

Als nächstes behaupten wir: Falls N ein möglicher Wert ist, dann ist auch $N+8$ ein möglicher Wert. Wenn Ruprecht nämlich nach N Phasen wieder im Ursprung (0,0) landet, dann kann er die folgenden acht Phasen $N+1, \ldots, N+8$ wie folgt durchführen. Wenn N gerade ist, dann verwendet Ruprecht

> Nord $N+1$, Ost $N+2$, Süd $N+3$, West $N+4$, Süd $N+5$, West $N+6$, Nord $N+7$ und Ost $N+8$.

Wenn N ungerade ist, dann verwendet Ruprecht die um 90 Grad gedrehte Variante

> Ost $N+1$, Süd $N+2$, West $N+3$, Nord $N+4$, West $N+5$, Nord $N+6$, Ost $N+7$ und Süd $N+8$.

Man sieht leicht, dass sich die acht Phasen $N+1, \ldots, N+8$ genau aufheben und Ruprecht zu seinem Anfangspunkt zurückbringen. Daher sind mit $N = 7$ und $N = 8$ auch alle Werte $N = 8m+7$ oder $N = 8m+8$ möglich.

Warum nur die Werte 303, 304, 311, 312, 319 und 320 möglich sind. Unter den zwanzig Zahlen, die in den Antwortmöglichkeiten aufgelistet werden, haben nur 303, 304, 311, 312, 319 und 320 die gewünschte Form $8m+7$ oder $8m+8$. Die korrekte Antwort ist daher #2.

15 Kreuzzahlrätsel

Autor: Marc Uetz (Universiteit Twente)

15.1 Aufgabe

Jedes leere Quadrat im nachfolgenden Diagramm soll mit einer Dezimalziffer gefüllt werden; jede Ziffer darf dabei mehrmals verwendet werden. Jeder der vier Wichtel Alphonso, Bartolomeo, Cristiano und Domingo in diesem Rätsel ist mindestens 10 Jahre alt.

■	a	b
c		
d		■

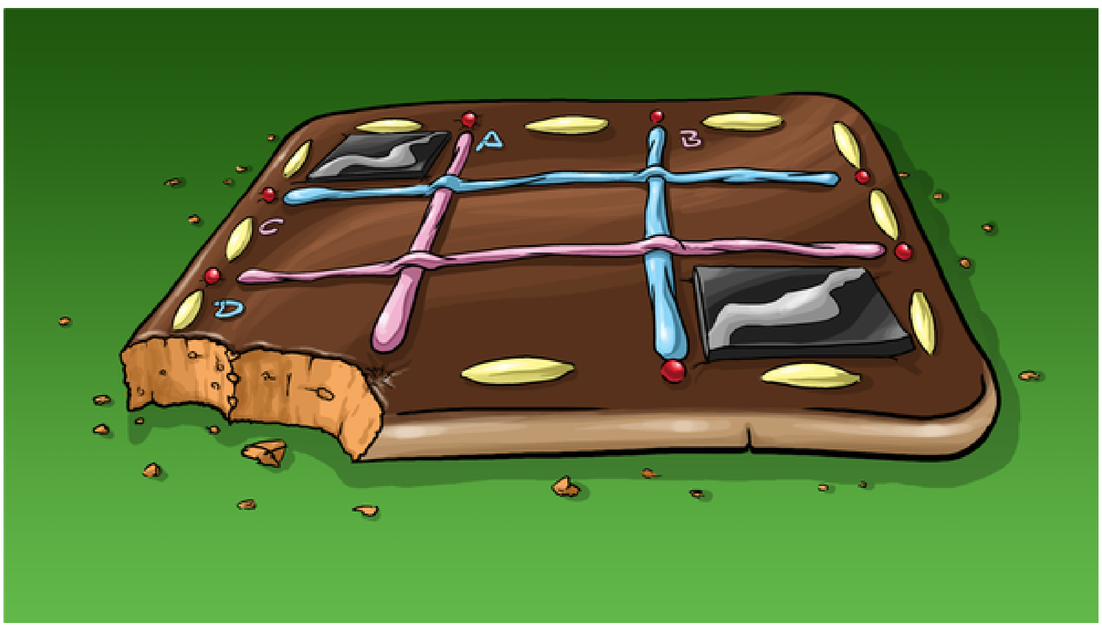
Waagrecht:

a. Alter von Alphonso
c. Summe der Alter von dreien dieser vier Wichtel
d. Alter von Domingo

Senkrecht:

a. Summe der Alter von allen vier Wichteln
b. Alter von Bartolomeo
c. Alter von Cristiano

Frage: Welche Ziffer tritt mehr als einmal in der Lösung auf?



Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

15.2 Lösung

Antwort 10: Die Ziffer 0 kommt mehr als einmal vor.

Die linke Abbildung zeigt eine mögliche Lösung mit den Ziffern 2,9,1,0,5,6,0. Wir wollen nun noch zeigen, dass es nur eine einzige Lösung gibt. Dazu führen wir die Bezeichnungnen E,F,G,H,J,K,L für die gesuchten sieben Ziffern ein, wie in der rechten Abbildung angegeben.

■	a **2**	b **9**
c **1**	**0**	**5**
d **6**	**0**	■

■	a **E**	b **F**
c **G**	**H**	**J**
d **K**	**L**	■

Alphonso ist dann $10E + F$ Jahre alt, Bartolomeo $10F + J$ Jahre, Cristiano $10G + K$ Jahre, und Domingo $10K + L$ Jahre. Da jeder Wichtel mindestens 10 Jahre alt ist, gilt $E,F,G,K \geq 1$. Die Summe aller vier Wichtelalter (a-senkrecht) ist $100E+10H+L$, und die Summe von dreien dieser Wichtelalter (c-waagrecht) ist $100G + 10H + J$. Da jeder Wichtel höchstens 99 Jahre alt ist, erhalten wir $100E+10H+L \leq 4\cdot 99 = 396$ und $100G+10H+J \leq 3\cdot 99 = 297$. Das impliziert

$$E \leq 3 \quad \text{und} \quad G \leq 2. \tag{4}$$

Die Differenz aus a-senkrecht und c-waagrecht ergibt das Alter x des Extrawichtels, dessen Alter in c-waagrecht nicht mitgezählt wird.

$$x \;=\; (100E + 10H + L) - (100G + 10H + J) \;=\; 100(E - G) + (L - J). \tag{5}$$

Falls $E \leq G$, so ist $x \leq 9$; dies steht im Widerspruch zur Angabe. Falls $E \geq G+2$, so folgt daraus der Widerspruch $x \geq 200 + L - J > 99$. Also gilt

$$E = G + 1. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) erhalten wir dann $x = 100+L-J \geq 91$. Die erste Ziffer des Alters des Extrawichtels ist somit 9. Wegen (4) scheiden Alphonso und Cristiano als Extrawichtel aus. Falls Domingo der Extrawichtel ist, so implizieren $x = 10K+L$ und $x = 100 + L - J$, dass $10K + J = 100$ gilt; unmöglich. Daher bleibt nur noch Bartolomeo als Extrawichtel übrig, und es gilt $F = 9$ und $x = 90 + J$. Zusammen mit $x = 100 + L - J$ ergibt dies nun

$$2J = 10 + L \quad \text{und} \quad J \geq 5. \tag{7}$$

Das Gesamtalter der vier Wichtel ist einerseits $10E+9$ plus $90+J$ plus $10G+K$ plus $10K+L$ und andrerseits $100E+10H+L$ laut a-senkrecht. Unter Berücksichtigung von (6) ergibt das

$$80G + 10H \;=\; 11K + J + 9. \tag{8}$$

Wegen $80 \leq 80G + 10H$ und $11K + J + 9 \leq 11K + 18$ folgern wir $K \geq 6$ aus (8). Betrachtet man (8) modulo 10, so sieht man, dass $K + J \equiv 1 \bmod 10$ ist. Mit $5 \leq J \leq 9$ in (7) und $6 \leq K \leq 9$ erzwingt das nun $J = 5$ und $K = 6$. Aus (8) folgen dann $G = 1$ und $H = 0$, und (6) und (7) implizieren schliesslich $E = 2$ und $L = 0$.

16 Ein sicherer Tresor

Autor: Thorsten Eidner

16.1 Aufgabe

Diebstahl im Weihnachtsland! Schlimmer hätte es kaum kommen können: Die Wunschzettel der Kinder in der Hand des Grinchs! Dabei waren alle Dokumente vermeintlich sicher im Tresor, der sich nur durch die richtige Eingabe eines vierstelligen Codes öffnen ließ, verstaut.
Damit die Wichtel jedem Kind das richtige Geschenk einpacken, müssen sie natürlich auf die Zettel im Tresor zugreifen können. Doch auf einen Wichtel allein wollte sich der Weihnachtsmann nicht verlassen. Daher wählte er vier Wichtel aus, gab aber keinem von ihnen den kompletten Code: Atto kannte nur die 1., 2. und 3., Bilbo die 1., 2. und 4., Chico die 1., 3. und 4. sowie Dondo nur die 2., 3. und 4. Stelle des Codes. So war gesichert, dass keiner allein den Tresor öffnen konnte, zwei beliebige der vier Wichtel waren aber dazu gemeinsam in der Lage. Leider hatte der Weihnachtsmann die Bestechlichkeit von Atto, der Schokolade über alles liebte, und Bilbo, der mit Lebkuchen zu ködern war, unterschätzt. So kam der Grinch an den Code und damit an die Wunschzettel. Zwar muss Weihnachten dieses Jahr deswegen nicht ausfallen, aber ohne die Wunschzettel können die Geschenke nur zufällig verteilt werden - na, das wird ja eine schöne Bescherung!

Zukünftig darf sich so etwas auf keinen Fall wiederholen. Ein neuer, besser gesicherter Tresor muss her! Bloß gut, dass gerade ein topmodernes Fabrikat entwickelt wurde, bei dem der für die Öffnung notwendige und durch den Weihnachtsmann anfangs festzulegende Code eine beliebig große Stellenzahl haben kann. Auch weiterhin soll einer Gruppe von w Wichteln, die besonders verlässlich sind (Atto und Bilbo sind ganz bestimmt nicht mehr dabei), der Zugriff auf den Tresor möglich sein, indem jeder nach einem ausgeklügelten Plan einen Teil der Infor-

mationen über die Stellen des Codes erhält (und dann natürlich streng geheim für sich behalten muss).
Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(1) Die Information über eine Stelle des Codes erhält jeweils nur ein Teil der Wichtel, und zwar für jede Stelle die gleiche Anzahl an Wichteln. Diese bilden jeweils eine Gruppe. Es soll aber keine zwei Stellen des Codes geben, die genau der gleichen Gruppe von Wichteln bekannt sind.

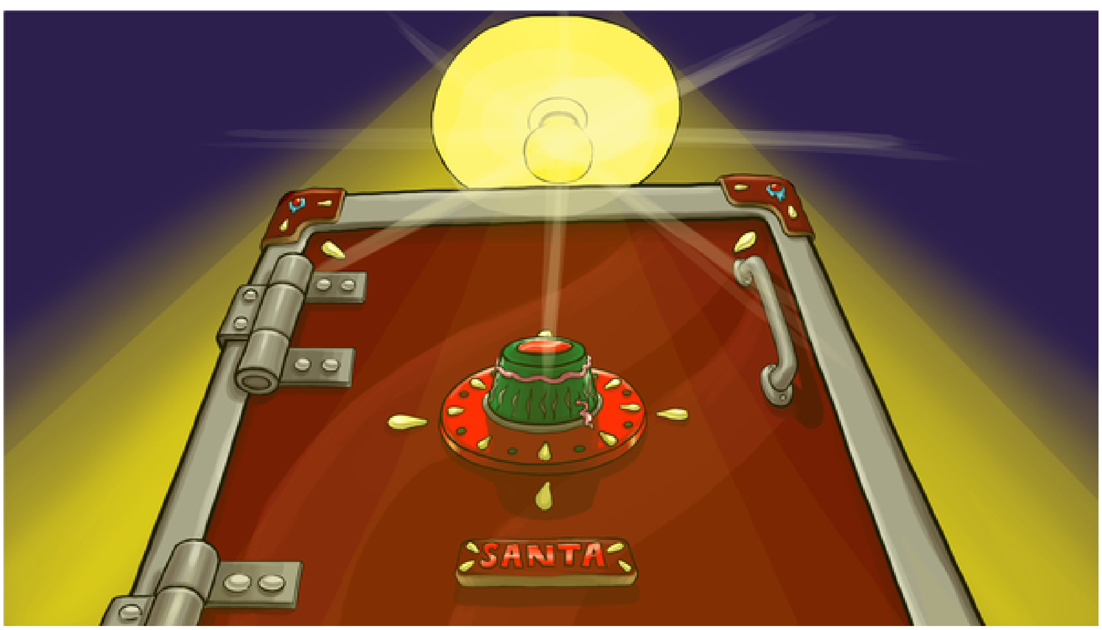
(2) Es gibt eine natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: Immer wenn sich n beliebige der w Wichtel treffen, sind sie mit den ihnen bekannten Stellen des Codes nicht in der Lage, den Tresor zu öffnen. Treffen sich hingegen $(n+1)$ beliebige der w Wichtel, dann können sie mit ihrem gemeinsamen Wissen den kompletten Code eingeben und damit den Tresor öffnen.

(3) n soll mindestents 2 und höchstens $w-3$ betragen.

(4) Jeder Wichtel soll höchstens 35 Stellen des Codes kennen.

(5) Kein Wichtel soll mehr als ein Drittel aller Stellen des Codes kennen.

Damit, so denkt der Weihnachtsmann, müsste das Ganze einerseits noch halbwegs praktikabel sein und andererseits den Grinch daran hindern, sich den Code zu beschaffen. Doch ist eine solche Aufteilung überhaupt möglich? Und wenn ja, für welche Anzahl w an Wichteln ist es möglich, bei geeigneter Stellenzahl des Codes eine solche Verteilung der Information über die einzelnen Stellen des Codes an die Wichtel vorzunehmen, so dass alle genannten Bedingungen erfüllt sind?



Antwortmöglichkeiten:

1. Nur für $w = 5$.
2. Nur für $w = 6$.
3. Nur für $w = 7$.
4. Nur für $w = 8$.
5. Nur für $w = 9$.
6. Nur für $w = 10$.
7. Nur für $w = 11$.
8. Es gibt genau eine solche Anzahl w mit $w \geq 12$.
9. Es gibt keine Anzahl w, mit der die Bedingungen zu erfüllen sind.
10. Es gibt mindestens zwei Werte für w, für die eine solche Verteilung möglich ist.

16.2 Lösung

Antwort 5: Nur mit $w = 9$ Wichteln ist es möglich, die Information wie beschrieben auf alle Wichtel verteilen.

Allgemeine Lösung des Problems für beliebiges w und n (mit $n < w$) sowie Bedingungen (1) und (2):

Parameter:

w	Gesamtzahl der Wichtel mit Informationen zum Code
n	Anzahl von Wichteln, die den Tresor gemeinsam in keinem Fall öffnen können, während dies $n+1$ Wichtel immer können - entsprechend Bedingung (2)
c	Stellenzahl des Codes
s	Anzahl der Wichtel, die eine bestimmte Stelle des Codes kennen
z	Anzahl der Stellen des Codes, die ein Wichtel kennt

(Beispielhaft betragen diese Variablen für die im ersten Teil der Aufgabe beschriebene Konstellation mit vier Wichteln und vierstelligem Code: $w = 4, c = 4, n = 1, s = 3, z = 3$.)

Wir betrachten jetzt eine Auswahl von n der w Wichtel. Da diese n Wichtel laut Bedingung (2) allein den Code nicht vollständig kennen dürfen, muss es mindestens eine Stelle geben, die sie alle n nicht kennen. Alle anderen Wichtel (also die übrigen $w - n$) müssen diese Stelle aber kennen, denn nur so ist sicherzustellen, dass $(n + 1)$ Wichtel immer die komplette Information haben. Eine solche Verteilung der Information muss es aber für jede beliebige Auswahl von n der w Wichtel geben, folglich muss die Stellenzahl c des Codes mindestens $\binom{w}{n}$ betragen. Über diese $\binom{w}{n}$ Verteilungen hinaus können aber wegen Bedingung (1) auch keine weiteren Stellen hinzukommen, folglich ist $c = \binom{w}{n}$. Bei dieser Verteilung ist dann nicht nur der Wert s für alle Stellen des Codes gleich, sondern auch der Wert z ist für alle Wichtel gleich. Für s ergibt sich aus diesen Überlegungen $s = w - n$. Wenn die Information über jede der c Stellen an $(w - n)$ Wichtel gegeben wird, dann erhält jeder Wichtel die Information von $c \cdot \frac{w-n}{w} = \binom{w}{n}\frac{w-n}{w}$ Stellen, was gleichbedeutend ist mit $\binom{w-1}{n}$.
Zusammengefasst gilt für gegebenes w und n ($n < w$):

$$c = \binom{w}{n}; \quad s = w - n; \quad z = c \cdot \frac{w-n}{w} = \binom{w-1}{n}$$

Lösung des Problems unter Berücksichtigung der speziellen Bedingungen (3) bis (5):

(3) $2 \leq n \leq (w-3)$
(4) $z \leq 35$
(5) $z \leq c/3$

Wir zeigen $w \geq 9$:
Aus $z = c \cdot \frac{w-n}{w}$ und (5) folgt $\frac{w-n}{w} \leq \frac{1}{3}$ und mithin $n \geq \frac{2w}{3}$. Unter Berücksichtigung von (3) folgt daraus $w - 3 \geq n \geq \frac{2w}{3}$ $(*)$ und mithin $w \geq 9$.

Wir zeigen $w < 10$:
$z = \binom{w-1}{n}$ ist bei gegebenem w und einem n im Bereich $2 \leq n \leq (w-3)$ minimal für $n = 2$ bzw. $n = w-3$ (da $\binom{w-1}{2} = \binom{w-1}{w-3}$). Für $w \geq 10$ ist damit $z \geq \binom{9}{2} = 36$. Folglich kann es für $w \geq 10$ keine Verteilungen geben, die Bedingungen (3) und (4) erfüllen.

Damit kommt unter den Bedingungen der Aufgabe nur $w = 9$ als Lösung in Frage. Aus $(*)$ folgt dann $n = 6$ und die übrigen Variablen berechnen sich wie folgt:

$$c = \binom{9}{6} = 84; \quad s = 3; \quad z = \binom{8}{6} = 28.$$

Für diese Werte sind alle Bedingungen erfüllt.

Zusammenfassung der Lösung:

Der Weihnachtsmann wählt einen 84-stelligen Code für den Tresor und gibt die Information hierüber an 9 Wichtel. Jeder Stelle des Codes wird eine der 84 möglichen verschiedenen Auswahlen von 6 der 9 Wichtel zugeordnet. Die Information über die betreffende Stelle erhalten diese 6 Wichtel nicht, hingegen erhalten diese jeweils die übrigen 3 Wichtel. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass immer, wenn sich 6 der Wichtel treffen, diesen mindestens eine Stelle des Codes fehlt. Treffen sich hingegen 7 Wichtel dann haben sie gemeinsam die Information über den kompletten Code. Wenn die Information über jede der 84 Stellen dreimal weitergegeben wird, dann erhält jeder der 9 Wichtel die Information über 28 Stellen des Codes.

17 Mützen

Autoren:
Aart Blokhuis (TU Eindhoven)
Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

17.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann sagt zu den zwölf Intelligenzwichteln Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo, Frodo, Gumbo, Harpo, Izzo, Jacco, Kuffo und Loco:

„Meine lieben Intelligenzwichtel! Schwierige Denkaufgaben mit Mützen auf Wichtelköpfen haben schon eine lange Tradition im mathematischen Adventskalender. Deshalb lade ich euch morgen zu einem gemütlichen Nachmittag mit Kaffee und Kuchen ein.“

– *„Fein, wir kommen gerne!“*, rufen die zwölf Wichtel.

Der Weihnachtsmann fährt fort: *„Heute Abend werde ich einige Wichtelmützen mit den fünf Zahlen* 0,1,2,3,4 *beschriften. Morgen setze ich dann jedem von euch hinterrücks und blitzschnell eine dieser Mützen auf den Kopf, sodass keiner die Zahl auf der eigenen Mütze zu sehen kriegt. Ihr könnt die Zahlen auf den elf anderen Mützen sehen, dürft aber keinerlei Informationen untereinander austauschen. Dann frage ich euch in alphabetischer Reihenfolge, ob Ihr die Zahl auf eurer eigenen Mütze kennt. Antwortet ein Wichtel mit NEIN, so wird er sofort nach Hause geschickt. Antwortet ein Wichtel mit JA, so muss er mir die Zahl ins Ohr flüstern. Ist es die richtige Zahl, so darf er weiter in den großen Saal gehen und bekommt dort eine Tasse Kaffee und ein großes Stück Sachertorte serviert. Falls er aber eine falsche Zahl flüstert, so wird er sofort nach Hause geschickt.“*

– *„Dürfen wir so laut flüstern, dass auch die anderen Wichtel die Zahl hören?“*

fragt Harpo.

– *„Nein, natürlich nicht!“*, antwortet der Weihnachtsmann. *„Keine Schummeleien!“*

– *„Dürfen wir uns aussuchen, ob wir mit einem sehr lauten oder einem ganz leisen JA antworten?“* fragt Chico.

– *„Nein“*, antwortet der Weihnachtsmann. *„Ich sagte bereits: Keine Schummeleien! Ein einfaches JA oder ein einfaches NEIN ist gut, aber Ihr dürft damit keine weiteren Informationen übermitteln. Andernfalls gibt es statt Kaffee und Kuchen nur Wasser und Brot für Euch!“*

Die Wichtel beginnen zu überlegen. Sie diskutieren und sie denken nach. Sie denken nach und sie diskutieren. Dann diskutieren sie noch mehr und denken noch länger nach. Sie arbeiten schließlich eine wirklich geniale Strategie aus, die die Anzahl N der Wichtel maximiert, die garantiert Kaffee und Kuchen erhalten. Unsere Frage lautet: Wie groß ist N?

Antwortmöglichkeiten:

1. $N = 3$
2. $N = 4$
3. $N = 5$
4. $N = 6$
5. $N = 7$
6. $N = 8$
7. $N = 9$
8. $N = 10$
9. $N = 11$
10. $N = 12$

17.2 Lösung

Antwort 8: Die maximale Anzahl von Wichteln, die garantiert Kaffee und Kuchen erhalten, ist $N = 10$.

Man sieht leicht, dass $N \leq 10$ gilt, da Atto und Bilbo ihre Zahlen nicht herausfinden können: Atto hat keinerlei Information über die Zahl auf seiner Mütze. Bilbo verfügt nur über Atto's Ja/Nein Antwort, und kann durch dieses einzelne Bit Information nicht fünf mögliche Zahlen unterscheiden.

Wir beschreiben nun eine mögliche Strategie (unter vielen), die Kaffee und Kuchen für alle Wichtel mit Ausnahme von Atto und Bilbo garantiert. Wir bezeichnen die Zahl auf Bilbo's Mütze mit B. Weiters bezeichnen wir die Summe der zehn Zahlen auf den Mützen von Chico, Dondo, Espo, ..., Loco modulo 5 genommen mit S. Atto wählt seine Antwort in Abhängigkeit von B und S gemäß folgender Tabelle:

Atto	$S = 0$	$S = 1$	$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$
$B = 0$	Ja	Ja	Nein	Ja	Nein
$B = 1$	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
$B = 2$	Nein	Ja	Ja	Ja	Nein
$B = 3$	Nein	Nein	Ja	Ja	Nein
$B = 4$	Ja	Nein	Ja	Ja	Nein

Falls Atto Ja sagt, so rät er irgendeine beliebige Zahl. Bilbo wählt seine Antworten in Abhängigkeit von S und in Abhängigkeit von Atto's Antwort:

Bilbo	$S = 0$	$S = 1$	$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$
Atto=Ja	Ja/0	Ja/2	Ja/4	Nein	Nein
Atto=Nein	Ja/1	Ja/3	Ja/4	Nein	Nein

Wir behaupten nun, dass Chico die Zahl S bestimmen kann. Chico sieht B vor sich, hört Atto's und Bilbo's Antworten und unterscheidet einige Fälle:

- Bilbo=Nein: Wenn Atto=Ja, dann ist $S = 3$. Wenn Atto=Nein, dann ist $S = 4$.
- Bilbo=Ja und $B = 0$: Wenn Atto=Nein, dann ist $S = 2$. Wenn Atto=Ja und Bilbo=Saal, dann ist $S = 0$. Wenn Atto=Ja und Bilbo=nach Hause, dann ist $S = 1$.
- Bilbo=Ja und $B = 1$: Wenn Atto=Ja, dann ist $S = 1$. Wenn Atto=Nein und Bilbo=Saal, dann ist $S = 0$. Wenn Atto=Nein und Bilbo=nach Hause, dann ist $S = 2$.

- Bilbo=Ja und $B = 2$: Wenn Atto=Nein, dann ist $S = 0$. Wenn Atto=Ja und Bilbo=Saal, dann ist $S = 1$. Wenn Atto=Ja und Bilbo=nach Hause, dann ist $S = 2$.
- Bilbo=Ja und $B = 3$: Wenn Atto=Ja, dann ist $S = 2$. Wenn Atto=Nein und Bilbo=Saal, dann ist $S = 1$. Wenn Atto=Nein und Bilbo=nach Hause, dann ist $S = 0$.
- Bilbo=Ja und $B = 4$: Wenn Atto=Nein, dann ist $S = 1$. Wenn Atto=Ja und Bilbo=Saal, dann ist $S = 2$. Wenn Atto=Ja und Bilbo=nach Hause, dann ist $S = 0$.

Chico kennt also die Summe S der zehn Zahlen auf den Mützen von Chico, Dondo, $\ldots$, Loco modulo 5 genommen. Da Chico außerdem die neun Zahlen auf den Mützen von Dondo, Espo, $\ldots$, Loco vor sich sieht, kann er sich nun die eigene Zahl leicht ausrechnen. Die restlichen neun Wichtel rechnen ihre Zahlen auf analoge Weise aus.

18 Wichteltanz

Autoren:
Aart Blokhuis (TU Eindhoven)
Cor Hurkens (TU Eindhoven)

18.1 Aufgabe

Am letzten Wochenende gab es wieder einen großen Tanzabend im Wichteldorf. Wichtelfrauen und Wichtelmänner haben ausgelassen miteinander getanzt. Die Wichtelmänner Atto, Bilbo, Chico und die Wichtelfrau Dunda erzählen uns darüber:

Atto: Ich habe nur mit Dunda, Enna und Farra getanzt.

Bilbo: Jeder von uns Wichtelmännern hat im Laufe des Abends mit genau drei Wichtelfrauen getanzt.

Chico: Für je zwei von uns Wichtelmännern gab es genau eine Wichtelfrau, mit der beide getanzt haben.

Dunda: Für je zwei von uns Wichtelfrauen gab es genau einen Wichtelmann, der mit beiden getanzt hat.

Wir wollen wissen: Wie viele Wichtel (Wichtelfrauen plus Wichtelmänner) waren beim Tanz?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es waren 10 Wichtel beim Tanz.
2. Es waren 12 Wichtel beim Tanz.
3. Es waren 14 Wichtel beim Tanz.
4. Es waren 16 Wichtel beim Tanz.
5. Es waren 18 Wichtel beim Tanz.
6. Es waren 20 Wichtel beim Tanz.
7. Es waren 22 Wichtel beim Tanz.
8. Es waren 24 Wichtel beim Tanz.
9. Es waren 26 Wichtel beim Tanz.
10. Es waren 28 Wichtel beim Tanz.

18.2 Lösung

Antwort 3: Es waren 14 Wichtel beim Tanz, und zwar waren es 7 Wichtelmänner und 7 Wichtelfrauen.

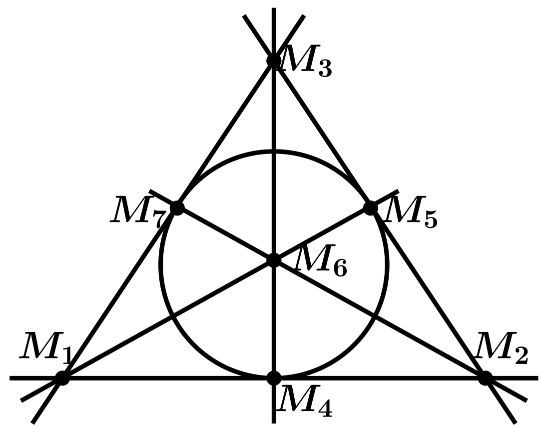
Wir geben zunächst drei Beschreibungen für einen derartigen Tanzabend mit 14 Wichteln an, und zeigen danach, warum keine der anderen neun Antworten richtig sein kann.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
F_1	+	+	·	+	·	·	·
F_2	+	·	+	·	·	·	+
F_3	·	+	·	·	·	+	+
F_4	+	·	·	·	+	+	·
F_5	·	·	·	+	+	·	+
F_6	·	·	+	+	·	+	·
F_7	·	+	+	·	+	·	·

Abbildung 2: Ein möglicher Tanzabend.

Eine mögliche Lösung. Die Tabelle in Abbildung 2 zeigt einen möglichen Tanzabend mit 7 Wichtelmännern $M_1, \ldots, M_7$ und sieben Wichtelfrauen $F_1, \ldots, F_7$. Ein $+$ bedeutet, dass die beiden Wichtel miteinander getanzt haben.
Man prüft leicht nach, dass (i) jeder Wichtelmann mit genau drei Wichtelfrauen getanzt hat; dass (ii) jede Wichtelfrau mit genau drei Wichtelmännern getanzt hat; dass es (iii) für je zwei Wichtelfrauen genau einen Wichtelmann gibt, der mit beiden getanzt hat; und dass es (iv) für je zwei Wichtelmänner genau eine Wichtelfrau gibt, die mit beiden getanzt hat. Zusammengefasst: Alle Bedingungen in der Aufgabenstellung sind erfüllt.

Eine äquivalente Beschreibung. Die nebenstehende Abbildung zeigt eine geometrische Darstellung des Tanzabends in Abbildung 2. Jeder Wichtelmann ist als Punkt dargestellt. Jede Wichtelfrau ist als Gerade oder Kreis dargestellt. Ein Punkt tanzt mit einer Geraden (mit einem Kreis), wenn der Punkt auf der Geraden (auf dem Kreis) liegt.



Und noch eine äquivalente Beschreibung. Unsere dritte Darstellung basiert auf den sieben dreistelligen Zahlen in der Zahlenmenge
$X = \{111,112,121,122,211,212,221\}$. Eine 3-elementige Teilmenge von X nennen wir *weiblich*, falls sich ihre Elemente zu einer Summe mit lauter geraden Ziffern aufaddieren. Zum Beispiel ist die Teilmenge $\{112,122,212\}$ weiblich, da die Summe $112 + 122 + 212 = 446$ aus lauter geraden Ziffern besteht. Die Teilmenge $\{111,112,121\}$ hingegen ist nicht weiblich, da $111 + 112 + 121 = 344$ die ungerade Ziffer 3 enthält. Man prüft leicht nach, dass X genau sieben verschiedene 3-elementige weibliche Teilmengen enthält.
Beim Tanzabend entsprechen die Wichtelmänner den sieben Zahlen in X: $M_1 = 111$, $M_2 = 112$, $M_3 = 121$, $M_4 = 221$, $M_5 = 211$, $M_6 = 122$ und $M_7 = 212$. Jede Wichtelfrau entspricht einer 3-elementigen weiblichen Teilmenge von X. Ein Wichtelmann tanzt mit einer Wichtelfrau, falls die entsprechende Zahl in der entsprechenden Teilmenge enthalten ist.

Warum nur Antwort #3 richtig ist. Wir betrachten nun die Aussagen von Atto, Bilbo, Chico und Dunda genauer und leiten aus ihnen Schritt für Schritt einige Eigenschaften des Tanzabends her. Mit $\mathcal{F}(M)$ bezeichnen wir dabei die Menge aller Frauen, die mit dem Mann M getanzt haben, und mit $\mathcal{M}(F)$ die Menge aller Männer, die mit der Frau F getanzt haben.
Eine *schlechte Viererkonfiguration* besteht aus zwei Frauen F_1 und F_2 und zwei Männern M_1 und M_2, wobei beide Männer mit beiden Frauen getanzt haben. Chico's Aussage schliesst die Existenz einer schlechten Viererkonfiguration von vorneherein aus.

Wir nehmen zwecks Widerspruchs an, dass eine Frau F mit nur zwei Männern M_1 und M_2 getanzt hat. Dann enthält die Vereinigungsmenge $\mathcal{F}(M_1) \cup \mathcal{F}(M_2)$ alle Frauen: wäre nämlich eine Frau F' nicht in dieser Vereinigungsmenge, so hätten F und F' im Widerspruch zu Dunda's Aussage keinen gemeinsamen Tanzpartner. Da mit Atto, Bilbo, Chico mindestens drei Männer anwesend waren, muss es neben M_1 und M_2 noch einen weiteren Mann M_3 geben. Laut Bilbo's Aussage gilt

$|\mathcal{F}(M_3)| \geq 3$, was zu $|\mathcal{F}(M_3) \cap \mathcal{F}(M_1)| \geq 2$ oder $|\mathcal{F}(M_3) \cap \mathcal{F}(M_2)| \geq 2$ führt. Das ergibt eine schlechte Viererkonfiguration und den gewünschten Widerspruch. Ein ähnliches (einfacheres) Argument zeigt, dass keine Frau nur mit einem einzigen Mann getanzt haben kann. Wir fassen diese Beobachtungen und Bilbo's Aussage zusammen.

Fakt 1. *Jeder der Männer hat mit mindestens drei Frauen getanzt, und jede der Frauen hat mit mindestens drei Männern getanzt.*

Dunda sagt, dass je zwei Frauen *mindestens* einen gemeinsamen Tanzpartner haben. Mehr als einen gemeinsamen Tanzpartner können sie aber gar nicht haben, da sonst eine schlechte Viererkonfiguration auftritt. Wir fassen dies und Chico's Aussage wie folgt zusammen.

Fakt 2. *Je zwei Frauen haben genau einen gemeinsamen Tanzpartner, und je zwei Männer haben genau eine gemeinsame Tanzpartnerin.*

Als nächstes nehmen wir zwecks Widerspruchs an, dass es zwei Männer M_1 und M_2 gibt, für die die Vereinigungsmenge $\mathcal{F}(M_1) \cup \mathcal{F}(M_2)$ alle anwesenden Frauen umfasst. Wir betrachten dann einen dritten Mann M_3 mit $|\mathcal{F}(M_3)| \geq 3$. Da eine der Mengen $\mathcal{F}(M_1)$ und $\mathcal{F}(M_2)$ mindestens zwei der Frauen in $\mathcal{F}(M_3)$ enthält, finden wir eine schlechte Viererkonfiguration; ein Widerspruch. Ein symmetrisches Argument zeigt, dass es keine zwei Frauen F_1 und F_2 gibt, für die die Vereinigungsmenge $\mathcal{M}(F_1) \cup \mathcal{M}(F_2)$ alle anwesenden Männer umfasst.

Fakt 3. *Für je zwei Männer gibt es mindestens eine Frau, die mit keinem von beiden getanzt hat. Für je zwei Frauen gibt es mindestens einen Mann, der mit keiner von beiden getanzt hat.*

Nun betrachten wir einen Mann M und eine Frau F, die *nicht* mit einander getanzt haben. Es sei $M_1, \ldots, M_k$ eine Aufzählung aller Männer in $\mathcal{M}(F)$. Laut Fakt 2 haben die beiden Männer M und M_i $(1 \leq i \leq k)$ genau eine gemeinsame Tanzpartnerin, die wir mit F_i bezeichnen wollen. Falls $F_i = F_j$ mit $i \neq j$ gilt, so bilden M_i, M_j, F und $F_i = F_j$ eine schlechte Viererkonfiguration. Die Frauen $F_1, \ldots, F_k$ sind daher paarweise verschieden und haben alle mit dem Mann M getanzt. Dies impliziert $|\mathcal{F}(M)| \geq |\mathcal{M}(F)|$. Ein symmetrisches Argument betrachtet die Frauen, die mit M getanzt haben und zeigt $|\mathcal{M}(F)| \geq |\mathcal{F}(M)|$. Daraus erhalten wir $|\mathcal{M}(F)| = |\mathcal{F}(M)|$ und kommen zur folgenden Aussage.

Fakt 4. *Falls ein Mann M und eine Frau F nicht mit einander getanzt haben, so ist die Anzahl der Frauen, die mit M getanzt haben, gleich der Anzahl der Männer, die mit F getanzt haben.*

Nun betrachten wir Atto und einen beliebigen anderen Mann M. Laut Fakt 3 gibt es eine Frau F, die weder mit Atto noch mit M getanzt hat. Laut Fakt 4 gilt weiters $|\mathcal{M}(F)| = |\mathcal{F}(\text{Atto})| = 3$ und $|\mathcal{M}(F)| = |\mathcal{F}(M)|$. Also hat M mit genau drei Frauen getanzt. Ein ähnliches Argument zeigt, dass jede Frau mit genau drei Männern getanzt hat.

Fakt 5. *Jeder Mann hat mit drei Frauen getanzt, und jede Frau hat mit drei Männern getanzt.*

Atto hat nur mit Dunda, Enna und Farra getanzt. wir betrachten die drei Mengen $\mathcal{M}$(Dunda), $\mathcal{M}$(Enna) und $\mathcal{M}$(Farra) etwas genauer:

- Der Durchschnitt von je zwei dieser drei Mengen besteht aus Atto, da andernfalls eine schlechte Viererkonfiguration auftritt. In anderen Worten: Jede der drei Mengen besteht aus Atto plus zwei anderen Männern.
- Die Vereinigung der drei Mengen umfasst alle anwesenden Männer: wäre nämlich ein Mann M nicht in dieser Vereinigungsmenge, so hätten Atto und M im Widerspruch zu Fakt 2 keine gemeinsame Tanzpartnerin.

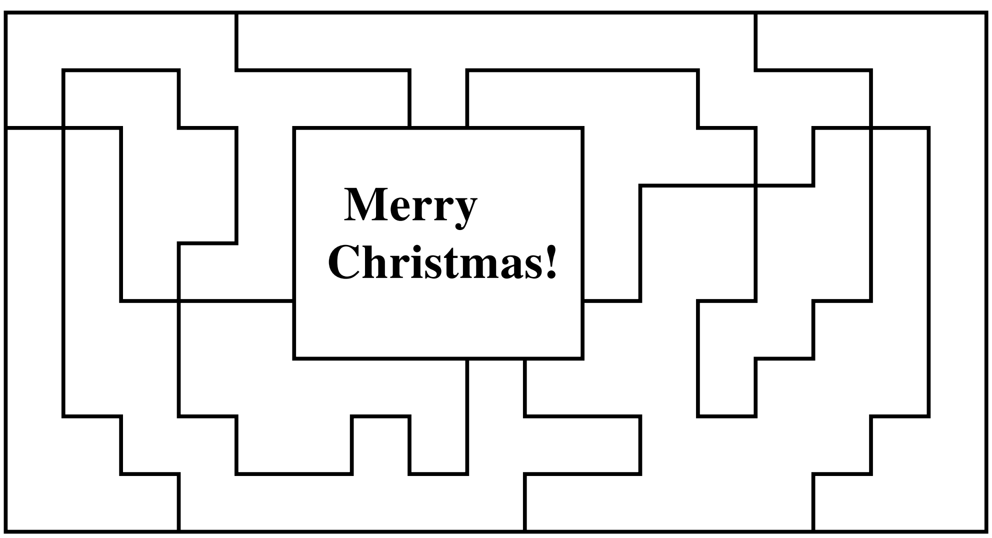
Die Gesamtzahl aller tanzenden Männer beträgt also $1 + 3 \cdot 2 = 7$. Ein symmetrisches Argument zeigt, dass insgesamt 7 Frauen anwesend sind. Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

19 Mondrian

Autor: Hajo Broersma (Universiteit Twente)

19.1 Aufgabe

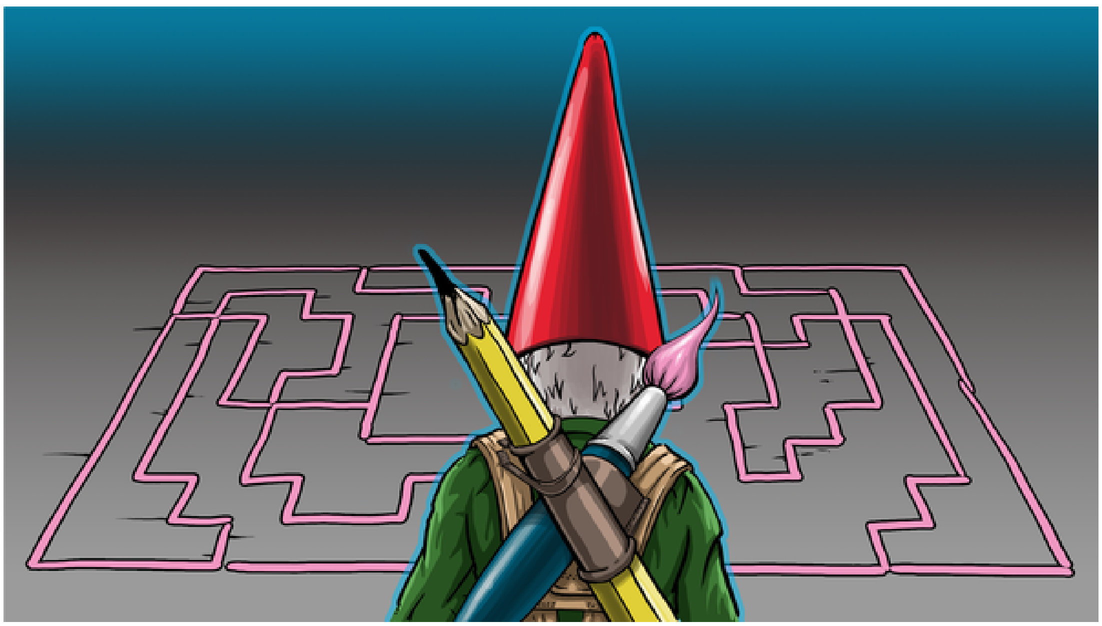
Der Malwichtel Mondrian hat eine Weihnachtskarte entworfen und in elf Gebiete unterteilt. Mondrian nennt zwei Gebiete benachbart, falls sie eine horizontale oder eine vertikale Kante gemeinsam haben. (Zum Beispiel ist das Gebiet in der linken unteren Ecke der Karte mit genau zwei anderen Gebieten benachbart, aber nicht mit jenem dritten Gebiet, mit dem es nur einen einzigen Punkt gemeinsam hat.)



Das rechteckige Gebiet in der Mitte enthält die Worte “Merry Christmas” und soll weiss bleiben. Die anderen zehn Gebiete will Mondrian mit Blautönen ausmalen, deren Helligkeitsgrad durch eine entsprechende positive ganze Zahl angegeben wird. Mondrian stellt folgende Regeln auf:

- Die 10 Gebiete sollen mit Blautönen mit 10 verschiedenen Helligkeiten ausgemalt werden.
- Auch die Helligkeitsunterschiede von benachbarten blauen Gebieten sollen jeweils verschieden sein: Falls die Differenz der Helligkeiten von zwei benachbarten Gebieten gleich d ist, so darf diese Differenz d bei keinem anderen Paar benachbarter Gebiete auftreten.

Mondrian möchte die Helligkeiten der verwendeten Blautöne möglichst klein halten. Wie lautet der kleinstmögliche Wert I der größten auftretenden Helligkeit?



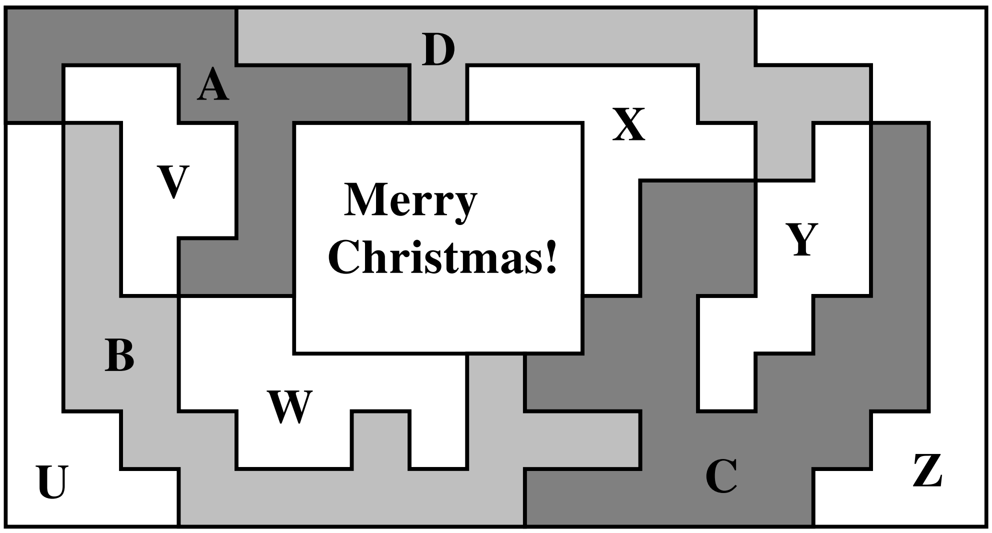
Antwortmöglichkeiten:

1. $I = 14$
2. $I = 15$
3. $I = 16$
4. $I = 17$
5. $I = 18$
6. $I = 19$
7. $I = 20$
8. $I = 21$
9. $I = 22$
10. $I = 23$

19.2 Lösung

Antwort 3: Der kleinste mögliche Wert I für die maximale Helligkeit ist $I = 16$.

Wir bezeichnen die 10 auszumalenden Gebiete mit A,B,C,D und U,V,W,X,Y,Z wie in der folgenden Abbildung angegeben:



Beobachtung 1: Es gibt insgesamt 14 Paare von benachbarten Gebieten (AU, AV, AW, BU, BV, BW und CX, CY, CZ, DX, DY, DZ und AD und BC) und damit 14 verschiedene Differenzen der Blautöne von benachbarten Gebieten.
Beobachtung 2: Die Differenz $|A - U|$ und die Summe $A + U$ haben immer dieselbe Parität. Daher hat die Summe aller 14 Differenzen dieselbe Parität wie

$$\begin{aligned} & (A+U)+(A+V)+(A+W)+(B+U)+(B+V)+(B+W) \\ & + (C+X)+(C+Y)+(C+Z)+(D+X)+(D+Y)+(D+Z) \\ & + (A+D)+(B+C) \\ = \quad & 4(A+B+C+D) \ + \ 2(U+V+W+X+Y+Z). \end{aligned}$$

Die Summe aller 14 Differenzen muss daher eine gerade Zahl sein.

Nun zur Lösung der Aufgabe. Der Fall $I = 14$ ist unmöglich, da dann nur die 13 Zahlen $1,2,\ldots,13$ für die 14 Differenzen in Frage kommen. Der Fall $I = 15$ ist ebenfalls unmöglich: In diesem Fall müssten $1,2,\ldots,14$ die 14 Differenzen sein. Die Summe $1+2+3+\cdots+13+14$ ist aber eine ungerade Zahl und widerspricht unserer Beobachtung 2.

Der Fall $I = 16$ ist schließlich möglich: Wir wählen $A = 16$, $B = 13$, $C = 11$, $D = 15$ und $U/V/W = 1/2/3$ und $X/Y/Z = 6/7/8$. Die 14 Differenzen sind dann 1,2,3,4,5 und 7,8,9,10,11,12,13,14,15. Daher ist Antwort #3 mit $I = 16$ korrekt.

20 Gemischtes Doppel

Autor: Rudi Pendavingh (TU Eindhoven)

20.1 Aufgabe

Die vier Wichtelfrauen Alix, Bona, Clio, Dana und die vier Wichtelmänner Emil, Fred, Gerd, Hans nehmen an einem Tennisturnier für gemischte Doppel teil. Jeder der acht Wichtel hat strikte Vorlieben für die vier möglichen Tennispartner. Zum Beispiel möchte Alix am liebsten mit Fred zusammen spielen, am zweitliebsten mit Hans, am drittliebsten mit Emil, und am viertliebsten mit Gerd. Die Vorlieben der Wichtel sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Alix:	Fred, Hans, Emil, Gerd	Emil:	Alix, Clio, Bona, Dana
Bona:	Gerd, Emil, Fred, Hans	Fred:	Bona, Dana, Clio, Alix
Clio:	Hans, Fred, Gerd, Emil	Gerd:	Clio, Alix, Dana, Bona
Dana:	Emil, Gerd, Hans, Fred	Hans:	Dana, Bona, Alix, Clio

Die Wichtel losen zunächst einmal eine zufällige Anfangspaarung P_1 aus:

P_1: Alix–Gerd Bona–Hans Clio–Emil Dana–Fred

In dieser Paarung P_1 bilden Alix und Emil ein unzufriedenes Paar: Alix spielt lieber mit Emil als mit ihrem momentanen Partner Gerd zusammen, und Emil spielt lieber mit Alix als mit seiner momentanen Partnerin Clio zusammen. Alix und Emil beschließen daher, ein Paar zu bilden. Die im Stich gelassenen Partner Clio und Gerd bilden ebenfalls ein neues Paar:

P_2: Alix–Emil Bona–Hans Clio–Gerd Dana–Fred

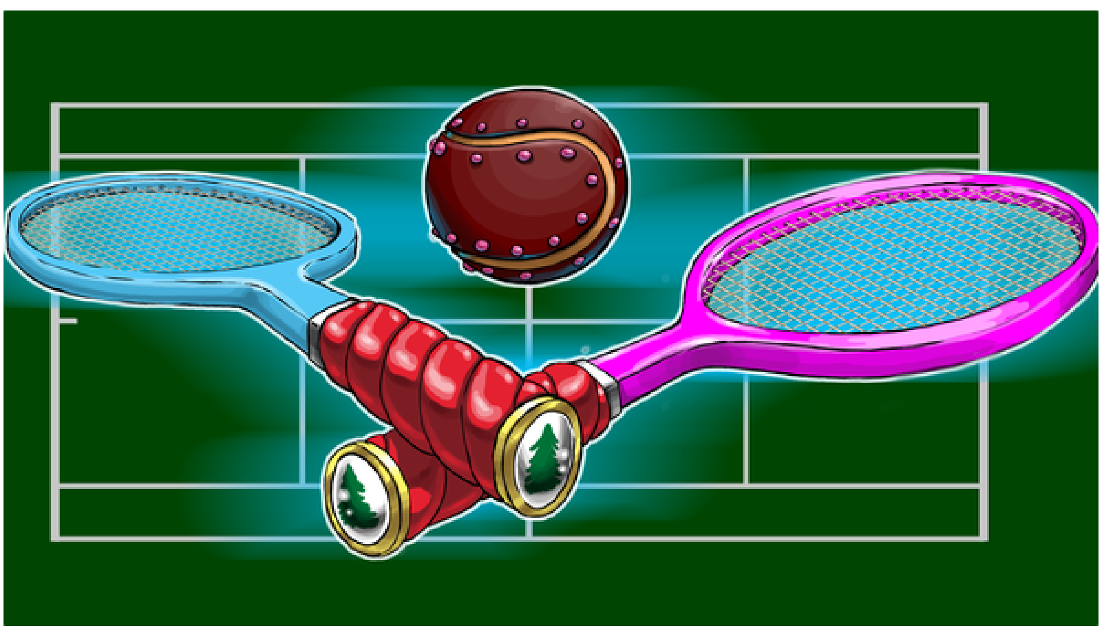
Wir sagen, dass die Paarung P_1 durch das unzufriedene Paar Alix und Emil in die Paarung P_2 übergeht. In der neuen Paarung P_2 formen Bona und Fred ein unzufriedenes Paar: Bona spielt lieber mit Fred als mit ihrem momentanen Partner Hans zusammen, und Fred spielt lieber mit Bona als mit seiner momentanen Partnerin Dana zusammen. Die Paarung P_2 geht nun in die folgende Paarung P_3 über:

P_3: Alix–Emil Bona–Fred Clio–Gerd Dana–Hans

Da es in P_3 keine unzufriedene Paare gibt, terminiert der Prozess. Wir haben also eine Kette P_1,P_2,P_3 mit drei Paarungen gefunden, die durch unzufriedene Paare ineinander übergehen.

In dieser Aufgabe betrachten wir derartige Ketten von Paarungen. Eine Kette beginnt mit einer beliebigen Paarung P_1 und geht dann Schritt für Schritt in weitere Paarungen $P_2, P_3, P_4, \ldots$ über. Eine Paarung P_i kann dabei in eine neue Paarung P_{i+1} übergehen, falls es in P_i eine Wichtelfrau F und einen Wichtelmann M mit folgenden Eigenschaften gibt: Die Frau F spielt lieber mit M zusammen als mit ihrem momentanen Partner M', und der Mann M spielt lieber mit F zusammen als mit seiner momentanen Partnerin F'. Wir sagen dann, dass F und M ein unzufriedenes Paar (F,M) bilden. Die beiden Paare (F,M') und (F',M) in der Paarung P_i werden dann durch die beiden Paare (F,M) und (F',M') ersetzt und das ergibt die Nachfolgepaarung P_{i+1}. (Es ist möglich, dass eine Paarung P_i zwei oder mehr verschiedene potentielle Nachfolgepaarungen hat. Falls P_i nämlich zwei oder mehr verschiedene unzufriedene Paare enthält, so könnte jedes dieser unzufriedenen Paare zu einer anderen Nachfolgepaarung führen.)

Wir wollen von Euch wissen, wie lang solche Ketten überhaupt werden können. Mit L bezeichnen wir die Länge der längstmöglichen derartigen Kette und mit K bezeichnen wir die Länge der längstmöglichen Kette, in der jede Paarung höchstens einmal vorkommt.



Antwortmöglichkeiten:

1. $K = 8$ und $L = 8$
2. $K = 9$ und $L = 9$
3. $K = 10$ und $L = 10$
4. $K = 11$ und $L = 11$
5. $K = 12$ und $L = 12$
6. $K = 13$ und L unendlich
7. $K = 14$ und L unendlich
8. $K = 15$ und L unendlich
9. $K = 16$ und L unendlich
10. $K = 17$ und L unendlich

20.2 Lösung

Antwort 9: Die Länge L ist unendlich und $K = 16$.

Die Tabelle 1 listet alle 24 möglichen Paarungen auf und nummeriert sie mit den Zahlen 1,2, ... ,24 durch. Die äußerst rechte Spalte gibt die unzufriedenen Paare an, gefolgt von den daraus resultierenden neuen Paarungen.
Die Abbildung 3 zeigt noch einmal die 24 Paarungen. Ein Pfeil von Paarung x zu Paarung y gibt an, dass x durch ein unzufriedenes Paar in y übergeht. Die vier Paarungen 8,10,19,24 haben weder eingehende noch ausgehende Pfeile. Die vier Paarungen 1,6,15,17 bilden eine kleine Komponente, von der aus keine anderen Paarungen erreicht werden können.
Die restlichen sechzehn Paarungen bilden eine komplizierte Komponente mit vielen Pfeilen. Man prüft leicht nach, dass der äußere Rand einen Kreis bildet, der beliebig oft (im Uhrzeigersinn) durchlaufen werden kann; daher ist L unendlich. Weiters gibt es eine Kette der Länge 16, die alle Paarungen in der komplizierten Komponente durchläuft:

$$5,\ 18,\ 13,\ 14,\ 20,\ 23,\ 21,\ 11,\quad 9,\ 3,\ 4,\ 2,\ 16,\ 22,\ 12,\ 7$$

Die Pfeile in dieser Kette sind in der Abbildung blau eingezeichnet. Daher ist $K = 16$ und Antwort #9 ist richtig.

Nr	Paarung				Resultierende Paarungen			
1	EA	FB	GC	HD				
2	EA	FB	GD	HC	HA→16			
3	EA	FC	GB	HD	GD→4			
4	EA	FC	GD	HB	FB→2			
5	EA	FD	GB	HC	GD→2	HD→3	HA→18	
6	EA	FD	GC	HB	FB→1	HD→1		
7	EB	FA	GC	HD	FC→9			
8	EB	FA	GD	HC				
9	EB	FC	GA	HD	EA→3			
10	EB	FC	GD	HA				
11	EB	FD	GA	HC	EA→5	HD→9	HA→12	
12	EB	FD	GC	HA	HD→7			
13	EC	FA	GB	HD	FC→3	GC→7	GD→14	
14	EC	FA	GD	HB	FB→16	FC→4	GC→20	
15	EC	FB	GA	HD	EA→1	GC→1		
16	EC	FB	GD	HA	GC→22			
17	EC	FD	GA	HB	EA→6	FB→15	GC→6	HD→15
18	EC	FD	GB	HA	GC→12	GD→16	HD→13	
19	ED	FA	GB	HC				
20	ED	FA	GC	HB	EB→7	FB→22	FC→23	
21	ED	FB	GA	HC	EA→2	EB→11	HA→22	
22	ED	FB	GC	HA	EB→12			
23	ED	FC	GA	HB	EA→4	EB→9	FB→21	
24	ED	FC	GB	HA				

Tabelle 1: Liste aller möglichen Paarungen

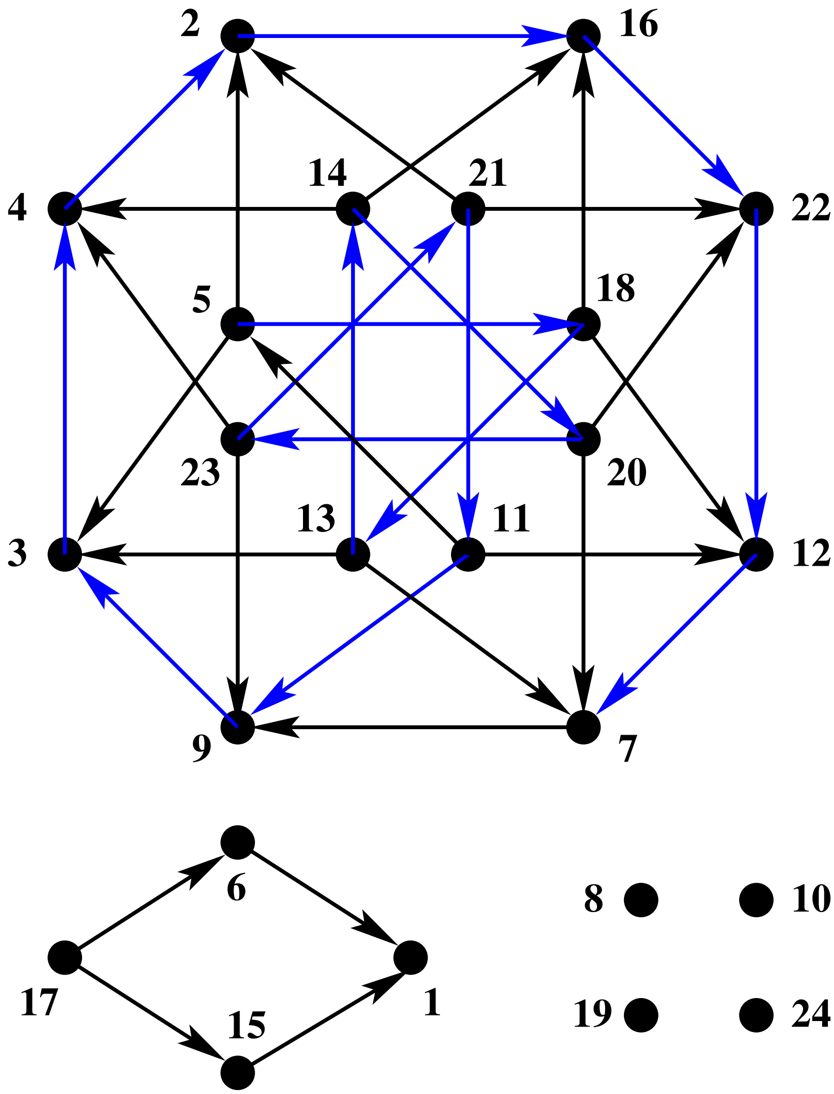


Abbildung 3: Die 24 Paarungen als Graph dargestellt. Ein Pfeil von Paarung x zu Paarung y gibt an, dass x durch ein unzufriedenes Paar in y übergeht.

21 Jäger des verlorenen Weihnachtsmanns

Autor: Falk Ebert

21.1 Aufgabe

Es ist bitterer Winter in Grönland. In einer Bar weit jenseits des Polarkreises sitzt ein älterer Mann mit Lederjacke, Hut und - merkwürdigerweise einer Peitsche am Gürtel. Er starrt auf eine vor sich liegende Karte der Umgebung. Ein Informant hat ihm gesteckt, dass im Umkreis von 100km um die Bar der Weihnachtsmann wohnen sollte. Das ist natürlich immer noch ein riesiges Areal. Also hat er sich direkt hierher begeben, in der Hoffnung, mehr herauszufinden. Ein Gespräch am Nachbartisch erregt seine Aufmerksamkeit.

Mann: Stell Dir vor, ich habe neulich den Weihnachtsmann persönlich heimgefahren. So ein Knauser. Von wegen Geschenke und so. 108km hat die Anzeige von der Bar bis zu seiner Wohnung angezeigt und er hat genau passend gezahlt. Kein Trinkgeld - gar nix. Nicht mal eine Zuckerstange...

Frau: Bei Deiner Fahrweise ist das nicht verwunderlich. Sag mal, rechnest Du immer noch so ab, wie damals, als Du in Manhattan gefahren bist?

Mann: Logisch. Ich fahre ja auch so.

Frau: Dachte ich mir! Ich musste neulich eine Eilzustellung für seine Geschenkemanufaktur von hier zu ihm fliegen. Mein Hexenbesen zeigte mir dann 105km an. Die habe ich mir aber auch gut bezahlen lassen.

Mann: Mit dem Besen, der immer so abrupt die Richtung wechselt?

Frau: Logisch. Ist ja eben auch ein Hexenbesen. Die meiste Zeit fliegt er aber doch schnurgerade.

Dem Fremden wird es zu bunt. Nicht nur, dass hier ein ehemaliger Taxifahrer aus New York und eine Hexe mit einem Besen ihre Geschichten austauschen. Sowas kann man nördlich des Polarkreises schon mal erwarten. Nein, offensichtlich haben die keine Ahnung, wie man Entfernungen misst. Und dann sind die Entfernungen auch noch zu groß. Der Weihnachtsmann sollte doch höchstens 100km weit weg sein. Enttäuscht geht er zur Bar, um seine Rechnung zu begleichen. Der Barkeeper, der sein Dilemma sieht, raunt ihm zu:

„Wenn Du den Alten findest, sag ihm mal Bescheid, dass er hier noch 12 unbezahlte Eierpunsch offen hat. Ich gebe Dir auch einen Tip. Der Taxifahrer fährt immer nur in Nord-Süd-Richtung oder in Ost-West-Richtung und biegt höchstens mal im rechten Winkel ab. Wenn wir also die Bar ins Zentrum eines Koordinatensystems setzen, dann ist der Taxi-Abstand von hier zum Punkt (x, y) gegeben als

$$d_{Taxi} = |x| + |y|.$$

Wie die Hexe fliegt, weiß ich nicht. Aber ihr Hexenabstand von der Bar zum Punkt (x, y) ist

$$d_{Hexe} = \frac{|x|}{\sqrt{3}} + \max\left(\frac{|x|}{\sqrt{3}}, |y|\right).$$

Frag nicht wieso!“

Der Fremde nimmt den Hut ab und kratzt sich am Kopf. Das soll ihm weiterhelfen? Wie viele Möglichkeiten für den Wohnort des Weihnachtsmanns gibt es, wenn tatsächlich alle Informationen richtig sein sollten?

Antwortmöglichkeiten:

1. Keine! Die spinnen ja alle komplett hier.
2. genau eine
3. genau 2
4. genau 4
5. genau 6
6. genau 8
7. genau 12
8. genau 24
9. genau 42
10. immer noch unendlich viele...

21.2 Lösung

Antwort 4: Es gibt genau vier Möglichkeiten für den Aufenthaltsort des Weihnachtsmanns.

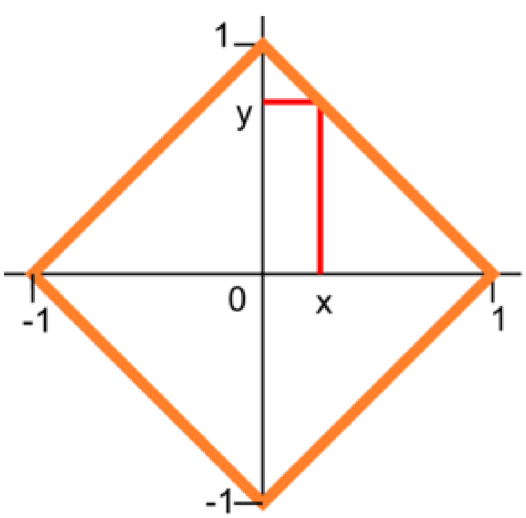
Es geht bei dieser Aufgabe darum, dass verschiedene Abstandsmaße unterschiedliche Geometrien bedingen. Der klassische *euklidische* Abstand d eines Punktes $(x,\, y)$ vom Koordinatenursprung ist definiert als

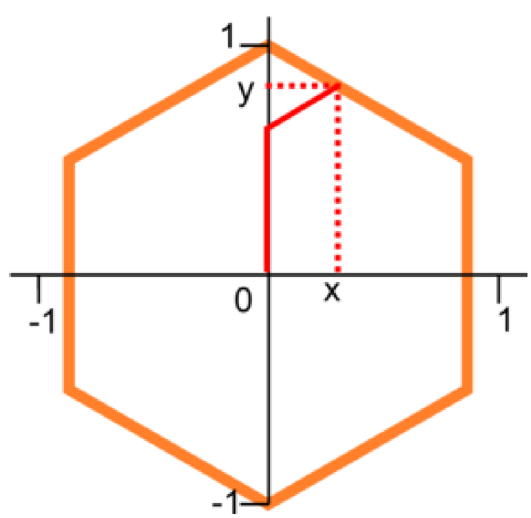
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Damit ist auch ein Kreis das, was man sich klassisch darunter vorstellt - eine runde Sache.

Schauen wir uns den „Kreis" des Taxifahrers an. Zur Vereinfachung betrachten wir den Einheitskreis - also den mit Radius (Abstand vom Nullpunkt) 1. Gibt man sich einige x-Werte mit $-1 \leq x \leq 1$ vor, dann kann man die entsprechenden y-Werte aus $1 = |x| + |y|$ bestimmen. Es ergibt sich ein auf den Ecken stehendes Quadrat als „Einheitskreis". Alle Punkte auf diesem Quadrat haben den Abstand 1 vom Ursprung.

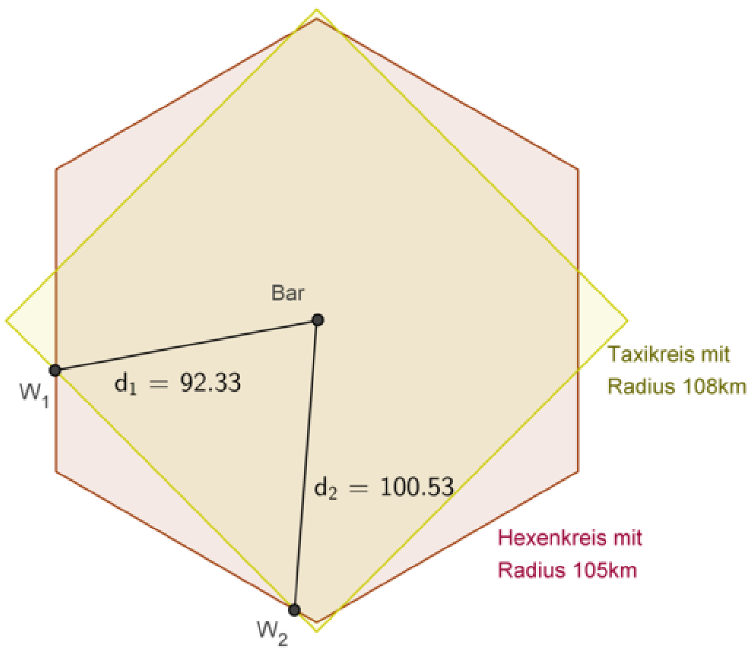
Analog kann man beim Hexenabstand vorgehen. Solange $|y| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, hat beispielsweise jeder Punkt mit $|x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ den Hexenabstand 1 vom Nullpunkt. Ebenfalls die Punkte $(0,\, 1)$ und $(0,\, -1)$. Man bekommt bald heraus, dass der Einheitskreis beim Hexenabstand ein *Hex*agon ist. Definieren lässt sich der Hexenabstand ähnlich wie der Taxiabstand, nur dass man nicht im Winkel von 90° abbiegt sondern im Winkel von 120°.





Betrachten wir jetzt die Umkreise mit den jeweiligen Abstandsbegriffen von Hexe und Taxifahrer und legen die Kreise übereinander, dann ergeben sich insgesamt 8

Schnittpunkte (W_1, W_2 und ihre 6 Spiegelbilder). Davon liegen aber nur 4 innerhalb eines klassischen (euklidischen) Abstands von 100km (W_1 und Spiegelbilder). Die korrekte Antwort ist also: *4*.

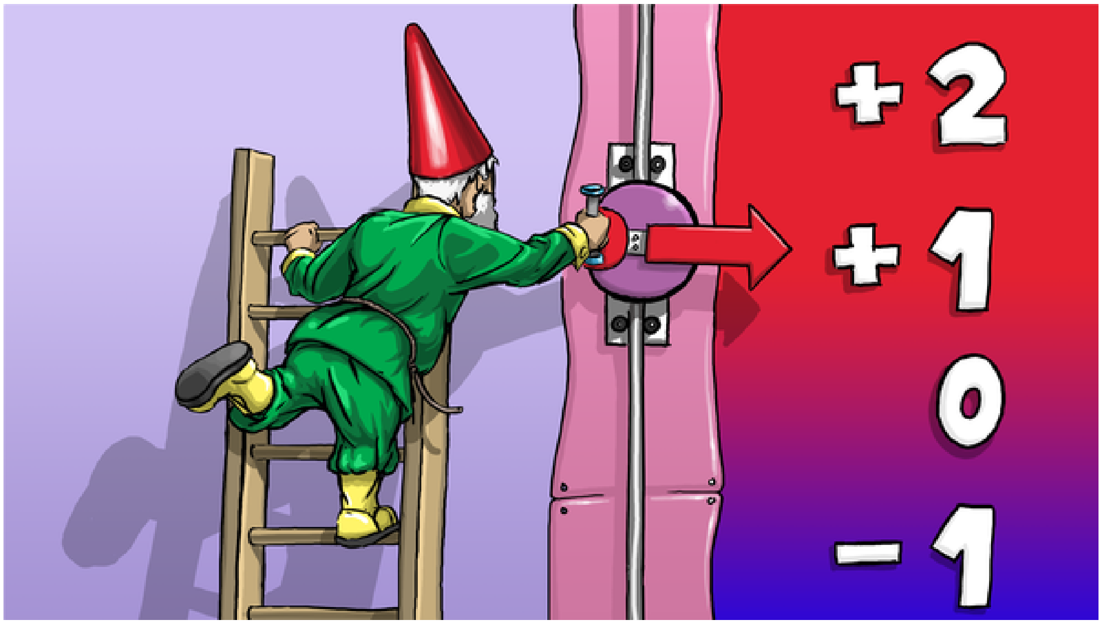


22 Temperatur

Autorin: Judith Keijsper (TU Eindhoven)

22.1 Aufgabe

“Na, das ist ja höchst kurios,” sagt der Wetterwichtel Wendelin. “Da studiere ich gemütlich die Temperaturen der letzten tausend Tage, denke mir nichts böses, und dann so etwas! Am ersten Tag hat unsere Wetterstation Sigma-601 einen Messwert von $-6°$ Celsius geliefert. Gut. Und da, im mittleren Drittel der Sigma-601 Tabelle sehe ich den Messwert $+1°$ Celsius. Auch gut. Aber jetzt kommt der Knüller: Vom zweiten bis zum neunhundertneunundneunzigsten Tag ist doch tatsächlich jeder Messwert gleich der Summe der Messwerte des vorangehenden und des nachfolgenden Tages!”
Der Weihnachtsmann blickt von seiner Zeitung auf: “Wahrlich, ein Knüller! Welche Temperatur wurde denn an dem Tag gemessen, an dem wir unsere Weihnachtskekse gebacken haben?”
Wenn wir davon ausgehen, dass Wendelin dem Weihnachtsmann die richtige Antwort gibt, was antwortet er dann?



Antwortmöglichkeiten:

1. Der Messwert am 991. Tag betrug +1° Celsius.
2. Der Messwert am 992. Tag betrug +2° Celsius.
3. Der Messwert am 993. Tag betrug +3° Celsius.
4. Der Messwert am 994. Tag betrug +4° Celsius.
5. Der Messwert am 995. Tag betrug +5° Celsius.
6. Der Messwert am 996. Tag betrug +6° Celsius.
7. Der Messwert am 997. Tag betrug +7° Celsius.
8. Der Messwert am 998. Tag betrug +8° Celsius.
9. Der Messwert am 999. Tag betrug +9° Celsius.
10. Der Messwert am 1000. Tag betrug +10° Celsius.

22.2 Lösung

Antwort 5: Der Messwert am 995. Tag betrug $+5°$ Celsius.

Wir bezeichnen die Messwerte der Reihe nach mit $T_1,\ldots,T_{1000}$ und setzen $x = T_2$. Dann gilt $T_1 = -6$ und $T_2 = x$, und laut Angabe gilt wegen $T_n = T_{n-1} - T_{n-2}$ weiter

$$T_3 = x+6; \quad T_4 = 6; \quad T_5 = -x; \quad T_6 = -(x+6); \quad T_7 = -6; \quad T_8 = x$$

Mit $T_7 = T_1$ und $T_8 = T_2$ wiederholen sich die Messwerte daher in Sechserblöcken: Es gilt $T_n = T_{n-6}$ für $n = 7,\ldots,1000$. Laut Angabe ist weiter einer der Messwerte gleich $+1$. Die entsprechenden vier Fälle $x = 1$, $x+6 = 1$, $-x = 1$ und $-(x+6) = 1$ führen zu den folgenden vier Möglichkeiten für den Sechserblock:

- $T_1 = -6; \quad T_2 = +1; \quad T_3 = +7; \quad T_4 = +6; \quad T_5 = -1; \quad T_6 = -7$
- $T_1 = -6; \quad T_2 = -5; \quad T_3 = +1; \quad T_4 = +6; \quad T_5 = +5; \quad T_6 = -1$
- $T_1 = -6; \quad T_2 = -1; \quad T_3 = +5; \quad T_4 = +6; \quad T_5 = +1; \quad T_6 = -5$
- $T_1 = -6; \quad T_2 = -7; \quad T_3 = -1; \quad T_4 = +6; \quad T_5 = +7; \quad T_6 = +1$

Wegen $T_{991} = T_1 \neq 1$, und $T_{992} = T_2 \neq 2$, und $T_{993} = T_3 \neq 3$, und $T_{994} = T_4 \neq 4$, und $T_{996} = T_6 \neq 6$, und $T_{997} = T_1 \neq 7$, und $T_{998} = T_2 \neq 8$, und $T_{999} = T_3 \neq 9$, und $T_{1000} = T_4 \neq 10$ ist nur Antwort #5 mit einer dieser vier Möglichkeiten kompatibel. Daher gilt $x = -5$ und $T_{995} = T_5 = +5$, und Antwort #5 ist korrekt.

23 Weihnachtskrimi

Autor: Axel Flinth
Projekt: AG Kutyniok

23.1 Aufgabe

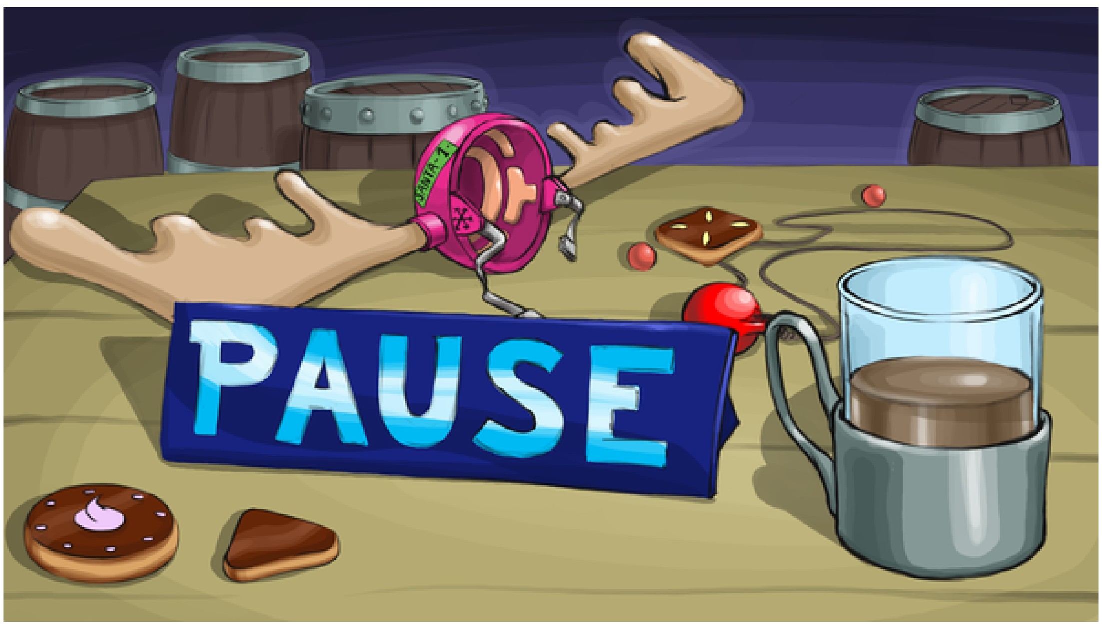
In der arbeitsintensiven Adventszeit ließen die Rentiere des Weihnachtsmannes den Abend gern mit einem Glas Glühwein gemütlich ausklingen. Dementsprechend haben sie ein riesiges Lager, in dem sie jede Menge des süßen Getränks lagerten.

Eines Nachts beobachteten die Rentiere, wie zwei - und zwar genau zwei - Weihnachtsmannelfen etwas aus dem Lager stahlen. Als der Weihnachtsmann davon erfuhr, leitete er sofort eine Ermittlung zur Klärung des Straftatbestandes ein. Schnell konnte er eine kleine Gruppe von Elfen ermitteln, zu der die Diebe sicher gehörten.

Die Elfen dieser Gruppe waren aber sehr gute Freunde und wollten nicht, dass der Weihnachtsmann herausfand, wer die Straftat begangen hatte. Ihnen wäre es am liebsten, der Weihnachtsmann erführe gar nicht, wer wie viel gestohlen hat. Jedoch ist der Weihnachtsmann nach dem Weihnachtsrecht verpflichtet, diese Untersuchung durchzuführen und die Elfen zu dem Diebstahl zu befragen. Und ein Gesetz besagt, dass Elfen nicht lügen dürfen.

Um es dem Weihnachtsmann aber so schwer wie möglich zu machen, überlegen die Elfen sich Folgendes: Der Weihnachtsmann ist zwar berechtigt, die Elfen zu befragen, aber es ist im Weihnachtsrecht nicht festgelegt, auf welche Art und Weise genau dies geschehen soll. Die Elfen werden daher nur in Paaren antworten und zwar nur wie viel sie *gemeinsam* stahlen. Da die Elfen in der Adventszeit auch viel zu tun haben, musste der Weihnachtsmann ferner einen Tag vorher festlegen, welche Paare er zu fragen beabsichtige, damit die Elfen die Verhöre in ihren Tagesabläufen sinnvoll einplanen konnten. Er durfte also die Wahl der Paare nicht von den Antworten abhängig machen, die er schon bekommen hatte. Der Weihnachtsmann überlegt sich einen guten strategischen Plan für die drei Fälle, dass die Gruppe der verdächtigen Elfen aus i) genau drei, ii) genau vier und iii) genau fünf Elfen besteht.

Daraus ergibt sich folgende Frage:
Untersuchen Sie für alle drei Fälle, wie viel Fragen der Weihnachtsmann mindestens stellen muss, um sicher herauszufinden, wer wie viel gestohlen hat. (Letzteres ist wichtig, um die Schulden an die Rentiere gerecht zurück zu zahlen.)
Das Ergebnis A ist der folgenden Form gegeben $A = \Big(\text{Fall i)}, \text{Fall ii)}, \text{Fall iii)}\Big)$.



Antwortmöglichkeiten:

1. $A = (1,2,3)$
2. $A = (1,2,4)$
3. $A = (2,2,3)$
4. $A = (2,3,4)$
5. $A = (2,3,5)$
6. $A = (2,4,5)$
7. $A = (3,3,4)$
8. $A = (3,4,5)$
9. $A = (3,4,6)$
10. $A = (4,5,5)$

Projektbezug:

In vielen Anwendungen der Mathematik sind oft Lösungen von Gleichungssystemen, in denen nur wenige der beteiligten Variablen ungleich null sind (d.h. dünn besetzt bzw. *sparse*), von besonderer Bedeutung. Solche Lösungen lassen sich in der Tat oft mit deutlich weniger Gleichungen ermitteln als allgemeine Lösungen - das ist die Hauptbotschaft der sogenannten *Compressed Sensing*-Theorie.
Bemerkungen:

23.2 Lösung

Antwort 7: Die Anzahl der Fragen, die der Weihnachtsmann stellen muss, ist für die drei Fälle: $A = (3{,}3{,}4)$**.**

Zuerst bemerken wir, dass wir jeden Elf mindestens einmal („eingebettet in einem Paar") fragen müssen. Anderenfalls ist die Information, die der Weihnachtsmann erhält, komplett unabhängig von den Elfen, die nicht befragt wurden. Nun betrachten wir die Lösungen für die drei Fälle, in denen drei, vier, bzw. fünf Elfen unter Verdacht stehen.

Fall 1: Drei Elfen. Wenn wir nur ein Paar auswählen, können wir nicht alle Elfen fragen. Nur ein Paar zu befragen ist damit ausgeschlossen. Zwei Paare sind damit auch nicht genug: Nennen wir die Paare, die wir befragen (A,B) und (B,C) - man beachte, dass die Paare in jedem Fall einen Elf gemeinsam haben müssen -, dann werden die beiden Konfigurationen „A stiehlt 0, B stiehlt 2 und C stiehlt 1" und „A stiehlt 2, B stiehlt 0 und C stiehlt 3" (die beide möglich sind) die gleichen „Messungen" verursachen. Drei Paare sind aber genug: Wählen wir (A,B), (A,C) und (B,C), so erhalten wir in jedem Fall ein lineares Gleichungssystem, das eindeutig lösbar ist - dementsprechend können wir die gestohlenen Mengen rekonstruieren.

Fall 2: Vier Elfen. Ein Paar reicht wieder, wie oben, nicht aus. Zwei Paare können wir in diesem Fall wie folgt ausschließen: Wenn das erste Paar, das befragt wird, (A,B) ist, muss das zweite Paar (C,D) sein, denn sonst wird D nie befragt. Dann werden wir aber für jedes Paar nur Kenntnis über die Summe der gestohlenen Mengen erhalten, woraus wir nie die genauen Mengen für jeden einzelnen Elf rekonstruieren können.

Wir müssen also mindestens drei Paare befragen; das ist jedoch ausreichend: Die Strategie (A,B), (A,C) und (A,D) wird immer erfolgreich sein. Das sieht man wie folgt: Wenn A nichts gestohlen hat, muss mindestens eine der Summen gleich null sein. Wenn also alle Messungen ungleich null sind, können wir schließen, dass A schuldig ist. Wenn wir anschließend untersuchen, welche von den drei Summen sich von den anderen beiden unterscheiden, können wir ermitteln, wer der andere Schuldige ist, und danach auch die genauen gestohlenen Mengen ausrechnen.

Wenn aber eine Summe gleich null ist, können wir sofort schließen, dass beide Elfen in dem entsprechenden Paar unschuldig sind. Die anderen sind damit schuldig und wir können direkt ablesen, wie viel sie jeweils gestohlen haben (denn A hat ja nichts gestohlen in diesem Fall).

Fall 3: Fünf Elfen. Hier können sowohl ein Paar als auch zwei Paare mit dem „nicht alle befragt haben"- Argument ausgeschlossen werden. Auch drei Paare sind nicht genug: Da wir alle Elfen befragen müssen, werden, bis auf Permutationen, die Paare (A,B), (C,D) und (A,E) erhalten. Für den Fall, dass nur die mittlere von diesen Messungen ungleich null ist, können wir nie zurückrechnen, welchen Wert C und D jeweils gestohlen haben.

Vier Paare sind aber genug: (A,B), (A,C), (A,D) und (A,E) funktioniert. Das Argument ist ähnlich zu der obigen Situation: Wenn alle Summen ungleich null sind, muss A schuldig sein und wir können durch Vergleiche ermitteln, wer der andere Schuldige ist. In dem Fall, dass es eine Nullmessung gibt, ist A unschuldig, was impliziert, dass wir die Schuldigen und deren jeweils gestohlenen Mengen einfach ablesen können aus den von null verschiedenen Messungen.

Die richtige Antwort ist also: (7): A=(3,3,4)

24 Moskito

Autor: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)

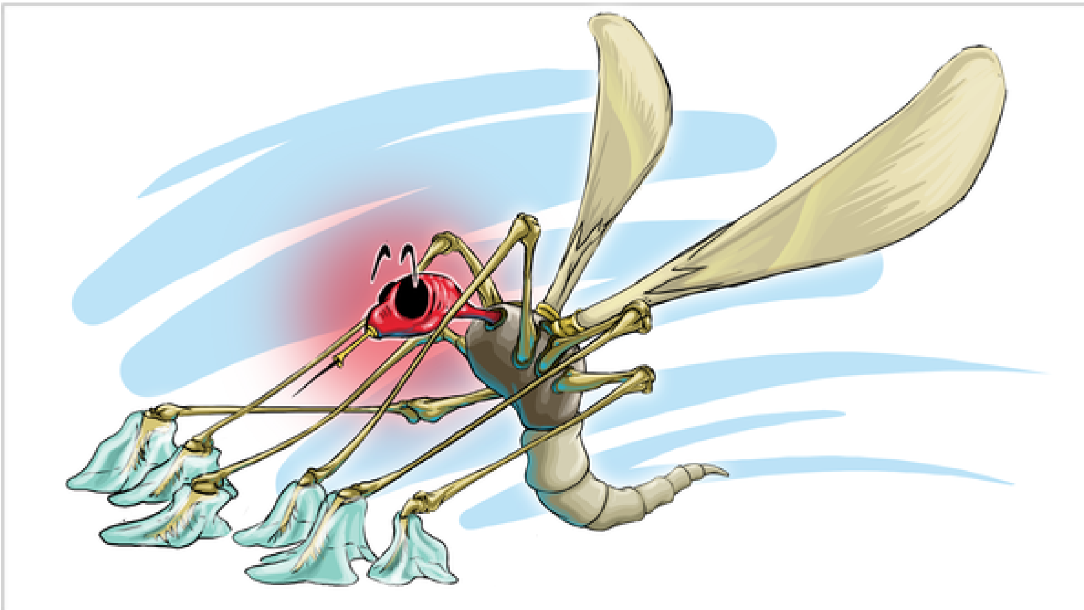
24.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht nutzt die kalten Wintermonate dazu, die unendlich vielen, unendlich lästigen Moskitos in seiner Küche los zu werden. Diese blutgierigen, summenden, kleinen, punktförmigen Quälgeister sind nämlich auf der Fensterbank festgefroren und können sich nicht mehr rühren.

Alle Moskitos sitzten auf reellen Zahlen zwischen 0 und 1: Der erste Moskito sitzt im Punkt 1, der zweite sitzt im Punkt $1/2$, der dritte im Punkt $1/3$, der vierte im Punkt $1/4$, und so weiter, der k-te im Punkt $1/k$, und so fort, und so fort.

Mit einem einzigen Schlag mit der Fliegenklatsche kann Knecht Ruprecht alle Moskitos in einem Intervall der Länge L töten (wobei L die Länge der Fliegenklatsche ist und die beiden Endpunkte zum Intervall gehören). Knecht Ruprecht erledigt alle Moskitos durch insgesamt fünf Schläge. Wäre die Fliegenklatsche aber auch nur ein kleinwinziges Stückchen kürzer, so würde Ruprecht mindestens sechs Schläge benötigen.

Frage: Wie lautet dann die dritte Ziffer hinter dem Komma in der Dezimaldarstellung von L?



Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

24.2 Lösung

Es werden zwei Antworten als richtig gewertet:
Antwort 9 und 10: Die dritte Zahl hinter dem Komma in der Dezimaldarstellung ist 9 bzw. 0.

Man sieht leicht, dass einer der Schläge den Punkt 0 abdecken muß.
Falls nun $L < 1/10$ wäre, so würde Ruprecht für jeden der sechs Punkte 0, 1/10, 1/5, 1/3, 1/2 und 1 einen separaten Schlag benötigen; je zwei dieser sechs Punkte sind nämlich mindestens 1/10 voneinander entfernt. Das zeigt uns, dass $L \geq 1/10$ gilt.

Nun zeigen wir noch, dass bei einer Klatsche der Länge $L = 1/10$ fünf Schläge reichen:

- Schlag 1 erledigt das Intervall $[0, L]$ und alle Moskitos in den Punkten $1/k$ mit $k \geq 10$.
- Schlag 2 erledigt das Intervall $[1/9, 1/9 + L]$ und die Moskitos in $1/k$ mit $5 \leq k \leq 9$.
- Schlag 3 erledigt das Intervall $[1/4, 1/4 + L]$ und die Moskitos in 1/4 und 1/3.
- Schlag 4 erledigt das Intervall $[1/2, 1/2 + L]$ und den Moskito im Punkt 1/2.
- Schlag 5 erledigt das Intervall $[1, 1 + L]$ und den Moskito im Punkt 1.

Zusammengefasst: Die kürzest mögliche Länge der Fliegenklatsche ist $L = 1/10$. Die Dezimaldarstellung von L ist 0.1, und die zweite, dritte, vierte, und alle weiteren Ziffern hinter dem Komma sind daher 0. Antwort #10 ist richtig.

Allerdings lässt sich dieselbe Zahl auch als $L = 0.0\overline{9} = 0.0999\ldots$ darstellen. Dann ist die dritte Nachkommastelle 9, also ist auch Antwort #9 richtig.