



MATHE



KALENDER

LÖSUNG SHEFT
2013



Deutsche
Mathematiker-Vereinigung

www.mathekalender.de



DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

Inhaltsverzeichnis

1 Münzwurf	4
1.1 Aufgabe	4
1.2 Lösung	6
2 Eisfußball	8
2.1 Aufgabe	8
2.2 Lösung	11
3 Improvisationstheater	13
3.1 Aufgabe	13
3.2 Lösung	16
4 Kerzen einpacken	19
4.1 Aufgabe	19
4.2 Lösung	21
5 Optimale Viertelung einer Kugeloberfläche	22
5.1 Aufgabe	22
5.2 Lösung	25
6 Hamster	28
6.1 Aufgabe	28
6.2 Lösung	30
7 Flohsprünge	32
7.1 Aufgabe	32
7.2 Lösung	34
8 Weinachtsabzocken	37
8.1 Aufgabe	37
8.2 Lösung	40
9 Teig teilen	42
9.1 Aufgabe	42
9.2 Lösung	44

10 Mützen	46
10.1 Aufgabe	46
10.2 Lösung	49
11 Arbeit statt Rute	51
11.1 Aufgabe	52
11.2 Lösung	55
12 Milch	56
12.1 Aufgabe	56
12.2 Lösung	58
13 Wunschzetteloptimierung	60
13.1 Aufgabe	60
13.2 Lösung	63
14 Xmasium	65
14.1 Aufgabe	65
14.2 Lösung	67
15 Kaninchen	70
15.1 Aufgabe	70
15.2 Lösung	72
16 Das Verwaltungsbürl des Marko V.	74
16.1 Aufgabe	74
16.2 Lösung	77
17 Probleme bei der Landung mit dem Zauberschlitten	79
17.1 Aufgabe	79
17.2 Lösung	81
18 Schwingende Schlitten	82
18.1 Aufgabe	82
18.2 Lösung	84
19 Plätzchen	85
19.1 Aufgabe	85
19.2 Lösung	88

20 Dodekaeder	91
20.1 Aufgabe	91
20.2 Lösung	93
21 Kein Fastfood für Rentiere	95
21.1 Aufgabe	95
21.2 Lösung	99
22 Eitle Rentiere	102
22.1 Aufgabe	102
22.2 Lösung	106
23 Geschenke umräumen	111
23.1 Aufgabe	111
23.2 Lösung	113
24 Lagerhalle	114
24.1 Aufgabe	114
24.2 Lösung	117
25 Fünf Wichtel	120
25.1 Aufgabe	120
25.2 Lösung	123

1 Münzwurf

Autor: John Schoenmakers



1.1 Aufgabe

Wichtel Konrad und Zipfel vertreiben sich ihre Zeit mit einem Münzwurfspiel. Hierbei wird eine faire Münze so oft geworfen, bis die Anzahl K (Kopf geworfen) und Z (Zahl geworfen) übereinstimmt oder eine der beiden Anzahlen um drei größer ist als die andere (z.B. beim Spielverlauf Kopf, Kopf, Zahl, Kopf, Zahl, Kopf, Kopf).

Bei Übereinstimmung von K und Z nach mindestens zwei Würfeln wird das Spiel unentschieden beendet. Ansonsten gewinnt Konrad wenn Kopf drei mal häufiger geworfen wurde als Zahl bzw. Zipfel gewinnt wenn Zahl drei mal häufiger auftrat.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Zipfel erst nach mindestens fünf Spielen zum ersten Mal gewinnt?

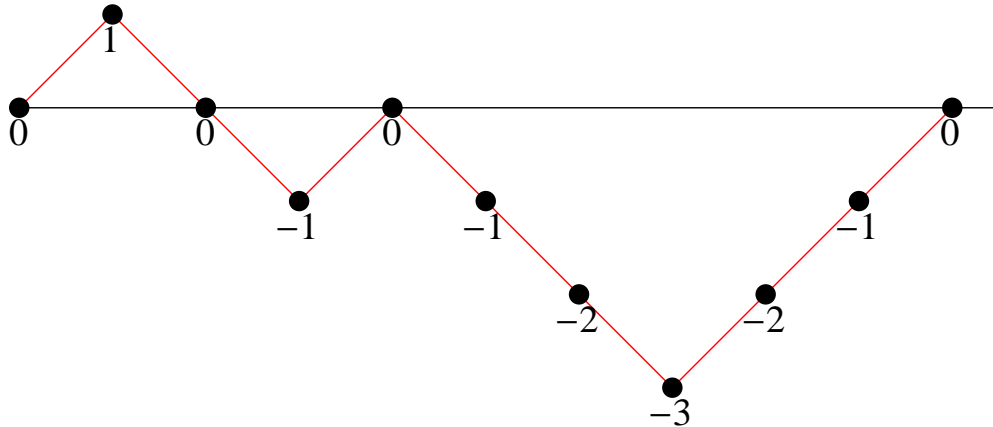
Hinweis: Ermittle zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass Zipfel direkt beim ersten Spiel gewinnt.

Antwortmöglichkeiten:

1. 0.0367
2. 0.1256
3. 0.3461
4. 0.4019
5. 0.5
6. 0.598
7. 0.6123
8. 0.6667
9. 0.7025
10. 0.75

1.2 Lösung

Lösung Nr. 4 ist richtig.



Definieren wir das Ergebnis eines Münzwurfes als 1 wenn Kopf geworfen wird und -1 wenn Zahl geworfen wird. Für eine Münzwurfreihe addieren wir diese Ergebnisse in S auf, wobei wir bei $S = 0$ starten. Dann interessiert erst einmal die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen des Zustandes $S = -3$.

Wir "konstruieren" eine Münzwurfreihe mit dem Ende $S = -3$. Ohne Einschränkung betrachten wir die Münzwurfreihe die in $S = 0$ startet. Wenn diese -3 trifft, muss zwangsläufig das Ergebnis des ersten Münzwurfes eine Zahl sein, also $S_1 = -1$ gelten. Wäre $S_1 = 1$ müsste die Münzwurfreihe auf dem Weg zu -3 zuerst die 0 passieren und wäre damit schon beendet. Mit dem gleichen Argument erhält man $S_2 = -2$. Aus S_2 geht man entweder direkt zu -3 oder wandert einmal über -1 zurück zu -2 und dann entweder direkt zu -3 oder wieder einmal über -1 zurück zu -2 und dann entweder direkt zu -3 oder usw.

Nehme an die Münzwurfreihe befindet sich in -2 und sei p die Wahrscheinlichkeit, dass die Münzwurfreihe von dort aus -3 trifft. Wegen obiger Überlegung muss dann

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} p$$

gelten, also $p = 2/3$. Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine bei $S = 0$ gestartete Münzwurfreihe bei $S = -3$ endet:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p = \frac{1}{6}.$$

Man sieht leicht ein, dass die Münzwurfreiheiten voneinander unabhängig sind. Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit von 5 Münzwurfreiheiten hintereinander die -3 NICHT treffen:

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 0.4019$$

Eine solche Münzwurfreihe ist in der Exkursionentheorie eine Exkursion. Exkursionentheorie wird angewendet in der Bewertung von pfadabhängigen Optionen, d.h. die Auszahlung der Option hängt vom ganzen Aktienverlauf ab.

2 Eisfußball

Autor: Felix Guenther



2.1 Aufgabe

In der Erfinderwerkstatt des Weihnachtsmannes arbeiten 9 Wichtel, die an der Produktentwicklung neuer Geschenkideen arbeiten. Allesamt sind große Eisfußballfans, die sich das Spitzenspiel zwischen Borussia Kiruna und der Hertha aus Rovaniemi nicht durch die Lappen gehen lassen wollen. Der Weihnachtsmann ist von der Idee, den Wichteln so kurz vor Heiligabend freizugeben, damit diese zum Rudelgucken gehen können, alles andere als begeistert; er weiß aber, dass gemeinsame Ausflüge der Motivation förderlich sein können. Hin- und hergerissen zwischen den Optionen, eher viele Wichtel gehen oder eher viele arbeiten zu lassen, entschließt er sich zu folgendem Angebot an seine Mitarbeiter: „Morgen werde ich euch Schirmmützen

aufsetzen, die entweder schwarz-gelb in den Farben der Borussia sind, oder blau-weiß in den Farben der Hertha. Ihr könnt die Mützen aller anderen Wichtel sehen, nicht aber eure eigene. Direkt nachdem ich euch allen die Mützen aufgesetzt habe, müsst ihr mir alle neune gleichzeitig sagen, welche Mütze ihr denkt zu tragen. Diejenigen, die die richtige Antwort sagen, dürfen sich dann das Spiel anschauen.“

Am selben Abend beraten die Wichtel über den Vorschlag des Weihnachtsmannes. Da sie nach dem Aufsetzen der Mützen keinerlei Möglichkeit der Interaktion haben, wollen sie sich im Vorhinein eine Strategie überlegen. Nun macht Eisfußballschauen aber keinen Spaß, wenn nur wenige mitkommen. Folglich suchen die Wichtel nach einer Taktik, die garantiert, dass in jedem Fall mindestens N Wichtel zum Spiel gehen werden, und die dabei $N \geq 0$ maximiert.

Das heißt, sie suchen eine Methode, die jedem Wichtel vorschreibt, welche Mütze er nennt (gegebenenfalls abhängig von den Mützen der anderen), sodass für jede Verteilung der Mützen mindestens N Wichtel die richtige Antwort sagen werden, wobei N möglichst groß sein soll.

Wichtel Pep, dem alten Strategen, kommt die Idee, den Weihnachtsmann zu fragen, ob er am nächsten Tag vielleicht als Erster, vor allen anderen, raten darf, welche Mütze er trägt. Für den Fall besprechen die Wichtel ebenfalls einen Plan, der das Mitkommen von M Wichteln garantiert, wobei M wiederum maximal sein soll.

Nichtsahnend geht der Weihnachtsmann am nächsten Morgen auf Peps Vorschlag ein, er darf also im Beisein aller vor allen anderen sagen, welche Mütze er zu tragen meint, im Anschluss müssen die verbleibenden acht dann aber gleichzeitig ihren Vorschlag abgeben. Wie viele Wichtel mehr werden nun auf jeden Fall zum Rudelgucken gehen (das heißt, was ist $M - N$)?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7

8. 8

9. 9

10. 0

Zusatzaufgabe: Was wären N und M , wenn (abzählbar) unendlich viele Wichtel in der Erfinderwerkstatt arbeiten würden?

2.2 Lösung

Antwort Nummer 4 ist richtig

Der Einfachheit halber identifizieren wir Mützen mit Zahlen: die der Borussia mit 0 und die der Hertha mit 1.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass Pep vor allen anderen sagen darf, welche Zahl er hat. Klar ist, dass $M \leq 8$, da Pep bei gegebener Verteilung von Nullen und Einsen auf den anderen Wichtel stets dieselbe Zahl sagt, unabhängig davon, ob er eine 0 oder 1 hat. Folglich kann er nicht immer die richtige Antwort sagen. Nun wollen wir zeigen, dass sogar $M = 8$ gilt, also alle anderen Wichtel nach Peps Antwort richtig liegen können. Dazu bildet Pep die Summe der Zahlen, die er sieht, und sagt 0 im Falle einer geraden und 1 im Falle einer ungeraden Summe. Jeder der verbleibenden acht Wichtel kann dann aus den Zahlen der anderen sieben und der Parität der Summe schlussfolgern, ob er eine 0 oder 1 trägt.

Kommen wir nun zu dem Fall, dass alle Wichtel gleichzeitig antworten müssen. Wir zeigen zunächst, dass $N \leq 4$ gilt. Angenommen, es gäbe eine Strategie mit $N \geq 5$. Zu jedem Wichtel X fertigen wir zwei Listen an: Eine Liste R mit den Verteilungen von Zahlen auf die Wichtel, bei dem X seine Zahl errät, und eine Liste F , bei denen er falsch liegt. Offenbar gibt es eine naheliegende Bijektion zwischen den beiden Mengen, denn bei zwei Verteilungen, die sich nur in der Zahl von X unterscheiden, liegt die eine in R und die andere in F . Wäre $N \geq 5$, so würde jede Verteilung in mindestens 5 R -Listen und in maximal 4 F -Listen stehen, im Widerspruch dazu, dass die R - und F -Listen alle gleich viele Elemente enthalten. Schließlich zeigen wir noch, dass $N = 4$ gilt. Dazu teilen wir acht der Wichtel in vier Paare. Ein Wichtel eines Paares sagt die Zahl, die er bei seinem Partner sieht, und der andere sagt die Zahl, die er nicht bei seinem Partner sieht. Sind beide Zahlen gleich, so rät der erste richtig, sind beide Zahlen verschieden, so rät der zweite richtig. Auf jeden Fall werden 4 Wichtel die richtige Lösung sagen.

Damit ist $M - N = 8 - 4 = 4$ und Antwort 4 ist korrekt.

Zusatzaufgabe: Die Wichtel definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Verteilungen von Zahlen auf Wichtel: Zwei Verteilungen heißen äquivalent, wenn sich die Zahlen nur auf endlich vielen Wichteln unterscheiden. Nach dem Auswahlaxiom können sie zu jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten wählen.

Aus der Information, welche Zahlen die anderen Wichtel tragen, lässt sich für jeden Wichtel eindeutig die Äquivalenzklasse ableiten. Müssen alle Wichtel gleichzeitig antworten, so sagt einfach jeder die Zahl, die er im gewählten Repräsentanten hätte. Nach Konstruktion sagen dann alle bis auf endlich viele die richtige Antwort. Es gibt keine bessere Variante für N als „alle bis auf endlich viele“, da es keine ganze

Zahl K geben kann, sodass immer alle Wichtel bis auf höchstens K die richtige Antwort sagen (sonst würden wir für eine Teilmenge aus $2K + 1$ Wichteln einen Widerspruch zum ersten Teil der Aufgabe erhalten). Darf Pep als erster Wichtel seine Zahl sagen, so können im Anschluss sogar alle anderen Wichtel die richtige Zahl sagen (M ist also „alle bis auf einen“). Dazu betrachten wir die Äquivalenzklassen wie oben, nur mit dem Unterschied, dass wir Verteilungen von Zahlen auf Wichtel außer Pep betrachten. Auf den entsprechenden Äquivalenzklassen wählen wir eine Färbung mit Zahlen 0 und 1 so, dass zwei Verteilungen derselben Äquivalenzklasse genau dann dieselbe Farbe erhalten, wenn sie sich an einer geraden Anzahl an Wichteln unterscheiden. Mit dem Kenntnis der Zahlen der anderen Wichtel und der Färbung, die durch Pep genannt wird, kann dann jeder andere Wichtel seine Zahl korrekt nennen.

3 Improvisationstheater

Autor: Marika Karbstein



3.1 Aufgabe

Die Wichtel haben Spaß. Seit dem Einüben des Advent-Stücks für den Weihnachtsmann im letzten Jahr, haben sie viel Gefallen am Theater spielen gefunden. Nun haben sich einzelne Gruppen gebildet. Jede Gruppe hat sich einen Namen gegeben und übt regelmäßig eine feste Zahl an Charakteren ein. Die Liste der Wichtelgruppen und ihrer Charaktere, die sie im Repertoire haben, ist wie folgt:

- „HC-Pfeffer-Unke“ spielen Kris Kringle und Gertrud Löwenhaupt.
- „Paulus-Kiste“ spielen Charlotte Blumenfeld, Willy Wonka und Ebenezer Scrooge.
- „Patzen-Elch“ spielen Sally Shock und Cedric Errol.
- „Team-Tal“ spielen Kris Kringle, Johannes Pfeiffer und Phil Connors.
- „Pfannen-Atzen“ spielen Kris Kringle, Cedric Errol und Cindy Lou Who.
- „Spielefan“ spielen Lieselotte Hoppenstedt, Ebenezer Scrooge und George Bailey.
- „So-checken-elf“ spielen Kris Kringle und Sally Shock.
- „Regenbusch“ spielen Gertrud Löwenhaupt und Johannes Pfeiffer.
- „Lakritz-Mop-Fanfare“ spielen Kris Kringle, Johannes Pfeiffer, Lieselotte Hoppenstedt und Ebenezer Scrooge.

- „Santa-Erben-EG“ spielen Kris Kringle, Phil Connors, Charlotte Blumenfeld und Ebenezer Scrooge.
- „Schrillste-Ton“ spielen Cindy Lou Who, Willy Wonka und Ebenezer Scrooge.
- „Lette-kichert“ spielen Charlotte Blumenfeld und Cindy Lou Who.

Wenn dem Weihnachtsmann die Arbeit, vor allen Dingen der Papierkram, den letzten Nerv zu rauben droht, schaut er gerne bei den Proben zu. Über die seltsamen Namen grübelt er dabei auch ein wenig nach und genießt das Stück Schokoladentorte, das die Wichtel hin und wieder extra für ihn organisieren.

Am heutigen Tag macht eine Nachricht die Runde, die alle Wichtel in helle Aufregung versetzt. In zwei Wochen ist ein großer Improvisationstheater-Wettbewerb. Für den Wettbewerb können sich verschiedene Mannschaften anmelden. Die Vorgabe ist aber, dass jede Mannschaft ein Stück improvisieren soll, in dem die Charaktere „Kris Kringle“ und „Ebenezer Scrooge“ besetzt sein müssen. Die Wichtel überlegen, wie sie Mannschaften bilden können. Jede Gruppe soll in höchstens einer Mannschaft sein, da sich die Wichtel einer Gruppe nicht trennen wollen und eine Mehrfachanmeldung nicht erlaubt ist. Damit das Zusammenspiel – das Zurufen und Umsetzen von Stichwörtern – innerhalb einer Mannschaft gut klappt, muss zwischen je zwei Wichteln einer Mannschaft eine „Stichwortweitergabe“ gewährleistet sein. Diese Stichwortweitergabe kann über beliebig viele Wichtel erfolgen. Dabei können aber Stichworte nur zwischen Wichteln innerhalb einer Gruppe weitergegeben werden oder zwischen Wichteln verschiedener Gruppen, die den gleichen Charakter darstellen. Eine Mehrfachbesetzung von Charakteren ist erlaubt und kann unter Umständen sogar ganz witzig sein. Die Wichtel fangen an zu diskutieren. Natürlich wollen alle am Wettbewerb teilnehmen.

Welche Aussage ist richtig?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es kann maximal eine Mannschaft gebildet werden.
2. Es gibt maximal zwei Mannschaften, wobei genau eine Gruppe keiner Mannschaft zugeordnet werden kann.
3. Es gibt maximal zwei Mannschaften, wobei genau zwei Gruppen keiner Mannschaft zugeordnet werden können.
4. Es gibt maximal zwei Mannschaften und alle Gruppen können am Wettbewerb teilnehmen.

5. Es gibt maximal drei Mannschaften, wobei genau eine Gruppe keiner Mannschaft zugeordnet werden kann.
6. Es gibt maximal drei Mannschaften, wobei genau zwei Gruppen keiner Mannschaft zugeordnet werden können.
7. Es gibt maximal drei Mannschaften und alle Gruppen können am Wettbewerb teilnehmen.
8. Es gibt maximal vier Mannschaften, wobei genau eine Gruppe keiner Mannschaft zugeordnet werden kann.
9. Es gibt maximal vier Mannschaften und alle Gruppen können am Wettbewerb teilnehmen.
10. Es gibt maximal fünf Mannschaften, wobei genau eine Gruppe keiner Mannschaft zugeordnet werden kann.

3.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 7

Eine mögliche Zuordnung zu den Mannschaften ist wie folgt

- Mannschaft 1
 - „Santa-Erben-EG“ (Kris Kringle, Phil Connors, Charlotte Blumenfeld, Ebenezer Scrooge)
 - „Paulus-Kiste“ (Charlotte Blumenfeld, Willy Wonka, Ebenezer Scrooge)
 - „Team-Tal“ (Kris Kringle, Johannes Pfeiffer, Phil Connors)
 - „Lette-kichert“ (Charlotte Blumenfeld, Cindy Lou Who)
- Mannschaft 2
 - „Lakritz-Mop-Fanfare“ (Kris Kringle, Johannes Pfeiffer, Lieselotte Hoppenstedt, Ebenezer Scrooge)
 - „Spielefan“ (Lieselotte Hoppenstedt, Ebenezer Scrooge, George Bailey)
 - „Regenbusch“ (Gertrud Löwenhaupt, Johannes Pfeiffer)
 - „HC-Pfeffer-Unke“ (Kris Kringle, Gertrud Löwenhaupt)
- Mannschaft 3
 - „Pfannen-Atzen“ (Kris Kringle, Cedric Errol, Cindy Lou Who)
 - „Schrillste-Ton“ (Cindy Lou Who, Willy Wonka, Ebenezer Scrooge)
 - „Pätzen-Elch“ (Sally Shock, Cedric Errol)
 - „So-checken-elf“ (Kris Kringle, Sally Shock)

Die erste Gruppe einer Mannschaft hat immer mit jeder anderen Gruppe ihrer Mannschaft wenigstens einen Charakter gemeinsam. Damit klappt die Stichwortweitergabe in jeder Mannschaft.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es nicht mehr Mannschaften geben kann. „Santa-Erben-EG“ und „Lakritz-Mop-Fanfare“ sind die einzigen Gruppen, die sowohl Kris Kringle als auch Ebenezer Scrooge besetzen. Sie könnten also bereits eine eigene Mannschaft sein. Lassen wir diese beiden Gruppen weg und betrachten alle anderen Gruppen. Dann ergibt sich das Bild 1. Es enthält alle Charaktere. Eine Gruppe ist als Menge von Charakteren dargestellt. Eine Mannschaft muss die Charaktere Kris Kringle und

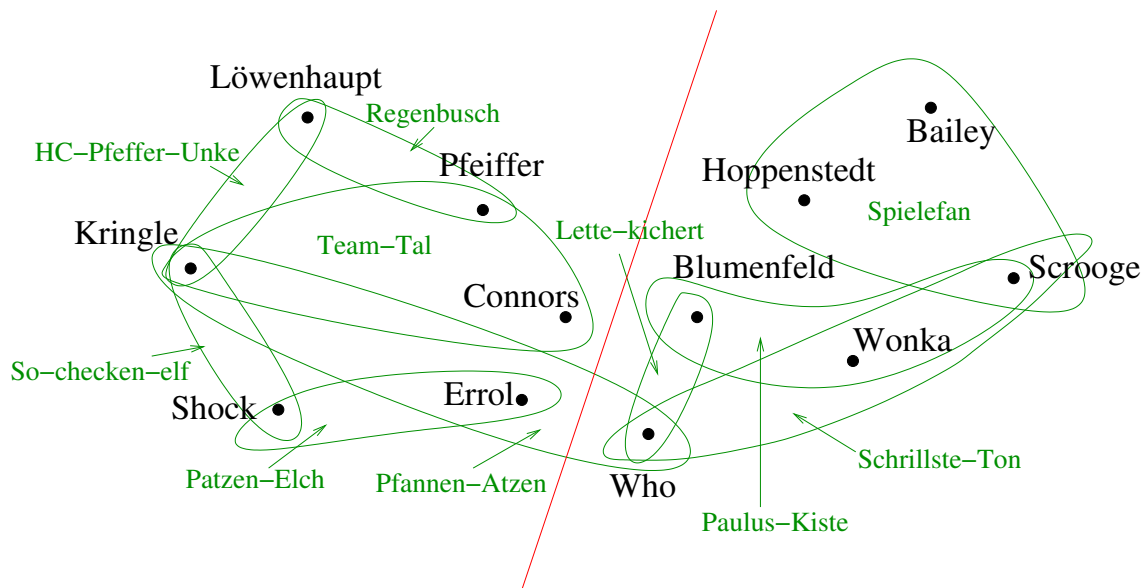


Abbildung 1: Darstellung der Gruppen und ihrer Charaktere als Hypergraph.

Ebenezer Scrooge umfassen und die Stichwortweitergabe-Bedingung erfüllen, d.h., eine Mannschaft entspricht einer Kette von Gruppen, die Scrooge und Kringle umfasst. Wir suchen nach möglichst vielen solcher Ketten, die untereinander jeweils Gruppen-disjunkt sind, da jede Gruppe in höchstens einer Mannschaft sein soll. Diese Zahl ist durch einen „minimalen Schnitt“ begrenzt. Im Bild ist ein minimaler Schnitt durch die rote Linie angedeutet. Dieser Schnitt enthält nur eine Gruppe, d.h., maximal eine weitere Mannschaft kann gebildet werden.

Bemerkung: Man kann die obige Darstellung als Hypergraph interpretieren. Die Charaktere sind *Knoten*, die Gruppen sind *Hyperkanten*. Eine minimale Menge von Hyperkanten, die zwei bestimmte Knoten s und t miteinander verbindet, nennt man einen *st-Hyperpfad*. Eine minimale Menge von Hyperkanten, die zwei bestimmte Knoten s und t voneinander trennt, nennt man einen *st-Hyperschnitt*. (Voneinander trennt heißt hier: Es gibt einen *st-Hyperpfad* im Hypergraph. Wenn man die Hyperkanten eines *st-Hyperschnitts* entfernen würde, gibt es keinen *st-Hyperpfad* mehr.)

Zur Lösung der Aufgabe findet folgender sehr bekannter Satz aus der Graphentheorie Anwendung:

Die maximale Anzahl an hyperkanten-disjunkten st-Hyperpfaden ist gleich der minimalen Anzahl an Hyperkanten in einem st-Hyperschnitt.

Weihnachtsmannrätsel:

- HC-Pfeffer-Unke → Pfefferkuchen
- Paulus-Kiste → Spekulatius
- Patzen-Elch → Plaetzchen
- Team-Tal → Lametta
- Pfannen-Atzen → Tannenzapfen
- Spielefan → Apfelsine
- So-checken-elf → Schneeflocke
- Regenbusch → Bescherung
- Lakritz-Mop-Fanfare → Marzipankartoffel
- Santa-Erben-EG → Gaensebraten
- Schrillste-Ton → Christstollen
- Lette-kichert → Lichterkette

Charaktere:

- Kris Kringle (Das Wunder von Manhattan)
- Ebenezer Scrooge (Charles Dickens Weihnachtsgeschichte)
- Gertrud Löwenhaupt (Die Weihnachtsgans Auguste)
- Sally Shock (Nightmare Before Christmas)
- Johannes Pfeiffer (Die Feuerzangenbowle)
- Phil Connors (Und täglich grüßt das Murmeltier)
- Cedric Errol (Der kleine Lord)
- Charlotte Blumenfeld (Als der Weihnachtsmann vom Himmel fiel)
- Cindy Lou Who (Der Grinch)
- Willy Wonka (Charly und die Schokoladenfabrik)
- Lieselotte Hoppenstedt (Weihnachten bei den Hoppenstedts)
- George Bailey (Ist das Leben nicht schön?)

4 Kerzen einpacken

Autor: Merlijn Staps



4.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann verschenkt Päckchen mit zylinderförmigen Kerzen für den Weihnachtsbaum. In diese Päckchen werden rote und grüne Kerzen eingepackt. Alle Kerzen haben einen Durchmesser von 2 cm, aber sie sind unterschiedlich lang. Der Weihnachtsmann packt zwei Sorten Päckchen, große für 18 Kerzen und kleine für 16. Die großen Päckchen sind 20 cm breit, 18 cm lang und 2 cm hoch. Die kleinen Päckchen sind 18 cm breit, 16 cm lang und 2 cm hoch.

In jedes große Päckchen kommen jeweils 9 rote und 9 grüne Kerzen mit Längen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 cm. Dabei müssen die roten Kerzen waagrecht (in der Breitenrichtung) und die grünen Kerzen senkrecht (in der Längsrichtung) in das Päckchen gelegt werden.

In jedes kleine Päckchen kommen jeweils 8 rote und 8 grüne Kerzen mit Längen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 cm. Dabei müssen sowohl die roten als auch die grünen Kerzen

waagrecht in das Päckchen gelegt werden.

Der Weihnachtsmann will wissen, auf wie viel verschiedene Arten er die Kerzen in die großen und die kleinen Päckchen hineinlegen kann. Dabei gelten zwei Packungsvarianten als verschieden, wenn eine Kerze an einer anderen Stelle liegt, also werden auch Varianten, die durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können, als verschieden angesehen. Es gibt kein Päckchen in dem zwei gleichfarbige Kerzen gleiche Länge haben.

Welche der folgenden Behauptungen ist wahr?

1. Für große und kleine Päckchen gibt es gleich viele Möglichkeiten.
2. Für die kleinen Päckchen gibt es 15 mal so viele Möglichkeiten wie für die großen.
3. Für die kleinen Päckchen gibt es 315 mal so viele Möglichkeiten wie für die großen.
4. Für die kleinen Päckchen gibt es 1260 mal so viele Möglichkeiten wie für die großen.
5. Für die großen Päckchen gibt es doppelt so viele Möglichkeiten wie für die kleinen.
6. Für die großen Päckchen gibt es 36 mal so viele Möglichkeiten wie für die kleinen.
7. Für die großen Päckchen gibt es 180 mal so viele Möglichkeiten wie für die kleinen.
8. Für die großen Päckchen gibt es 315 mal so viele Möglichkeiten wie für die kleinen.
9. Für die großen Päckchen gibt es 720 mal so viele Möglichkeiten wie für die kleinen.
10. Das Verhältnis der Anzahlen der Möglichkeiten ist keine ganze Zahl.

4.2 Lösung

Antwort Nummer 4 ist korrekt

Wir berechnen für beide Päckchen, wie viele Varianten möglich sind. Wir beginnen mit den kleinen Päckchen. Wir unterteilen das Päckchen in 8 Reihen, die 2 cm breit und 18 cm lang sind. Von den 8 längsten Kerzen (mit Längen 10 bis 16 cm) können keine zwei in derselben Reihe liegen, also müssen diese über die 8 Reihen verteilt werden. Dafür gibt es $8!$ Möglichkeiten. In die zwei Reihen mit 16 cm langen Kerzen müssen die zwei 2 cm langen Kerzen gelegt werden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. In die zwei Reihen mit 14 cm langen Kerzen müssen die 4 cm langen Kerzen gelegt werden usw. Damit sind die Kerzen auf die 8 Reihen verteilt, und wir haben noch 2^8 Möglichkeiten, die Positionen der Kerzen in jeder Reihe zu wählen. Insgesamt sind das also $8! \cdot 2^4 \cdot 2^8$ Möglichkeiten.

Beim Einpacken des großen Päckchens beginnen wir mit den zwei längsten Kerzen, mit Länge 18 cm. Diese können nur an den Rand gelegt werden, es gibt dafür 4 Möglichkeiten. Danach können auf 4 verschiedene Weisen die Kerzen der Länge 16 cm in das Päckchen gelegt werden. Das geht so weiter bis zu den Kerzen von 4 cm Länge. Schließlich gibt es noch zwei Möglichkeiten für die Kerzen der Länge 2 cm. Das ergibt $4^8 \cdot 2$ Möglichkeiten.

Es ist

$$\frac{8! \cdot 2^4 \cdot 2^8}{4^8 \cdot 2} = \frac{8! \cdot 2^{12}}{2^{17}} = \frac{8!}{2^5} = \frac{7!}{4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1260,$$

also ist die 4. Antwort richtig.

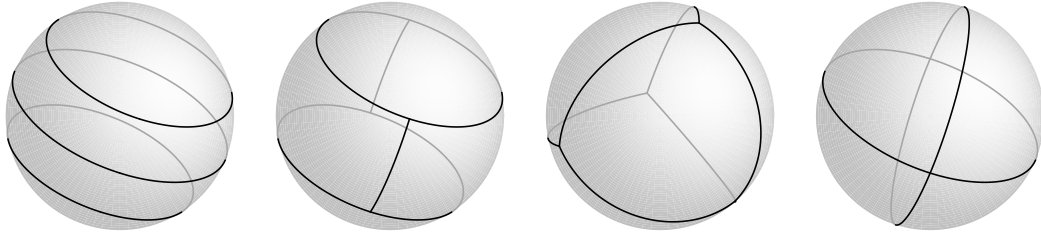
5 Optimale Viertelung einer Kugeloberfläche

Autor: Jens A. Griepentrog, Dorothee Knees, Christiane Kraus



5.1 Aufgabe

Da die diesjährige Verteilung der Geschenke nicht mehr von einem Weihnachtsmann allein bewältigt werden kann, wurde von übergeordneter Stelle beschlossen, die Arbeit gleichmäßig auf die vier Weihnachtsmänner *Heiliger Nikolaus*, *Père Noël*, *Väterchen Frost* und *Santa Claus* zu verteilen. Um den Transport zwischen den vier Arbeitsbereichen optimal zu gestalten, wollen sie eine Aufteilung der Oberfläche unserer Erdkugel in vier flächeninhaltsgleiche Zonen mit minimaler Länge der Grenzlinien zwischen diesen Gebieten finden. Die vier Weihnachtsmänner beginnen zu diskutieren (siehe Abbildung):



Santa Claus schlägt vor, die Kugelfläche durch den Äquator zu halbieren und anschließend die beiden Polkappen durch Breitenkreise abzutrennen.

Père Noël möchte die Polkappen beibehalten, aber die Äquatorialzone nicht durch den Äquator teilen. Er hat die Idee, diese Zone durch gegenüberliegende Längengradbögen zu halbieren, welche die Polkappen miteinander verbinden.

Der Heilige Nikolaus favorisiert eine Aufteilung der Oberfläche in vier kongruente und gleichseitige Kugeldreiecke.

Väterchen Frost ist dies alles zu kompliziert; er möchte die Kugelfläche auch durch den Äquator halbieren, aber anschließend die beiden Halbkugelflächen mittels eines Längengrades halbieren.

Einer der vier Weihnachtsmänner hat die richtige Lösung! Wer ist es? Wie groß ist die minimale Länge ℓ der Grenzlinien, die benötigt wird, um die Oberfläche einer Kugel vom Radius $r = 1$ in vier flächeninhaltsgleiche Stücke aufzuteilen?

Zur Auswahl stehen die folgenden Antwortmöglichkeiten:

1. $\ell = 2\pi$
2. $\ell = 6 \arcsin(\frac{2}{3})$
3. $\ell = 2\pi(\sqrt{3} + 1)$
4. $\ell = 4\pi$
5. $\ell = (\sqrt{6} + 1)\pi$
6. $\ell = 2\pi(\sqrt{3} + \frac{1}{3})$
7. $\ell = (\sqrt{3} + 2)\pi$
8. $\ell = 6 \arccos(-\frac{1}{4})$
9. $\ell = 6 \arccos(-\frac{1}{3})$
10. $\ell = 3\pi$

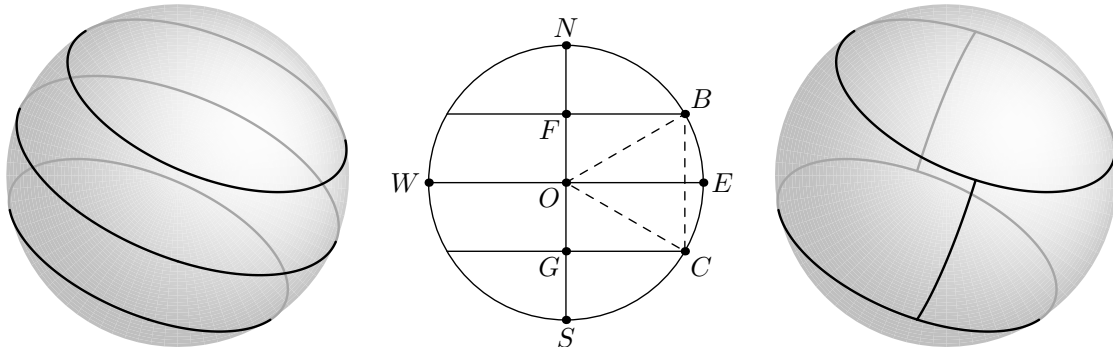
Projektbezug:

Die Aufgabe steht im Zusammenhang mit Separationsprozessen, welche man in vierkomponentigen Legierungen von Metallen beobachten kann. Betrachtet wird hierbei ein Gemisch von vier verschiedenen Teilchensorten, welche eine Kugeloberfläche vollständig ausfüllen und miteinander wechselwirken. Stoßen sich je zwei verschiedene Sorten ab und ziehen sich gleichartige Teilchen an, so findet eine Phasenseparation statt, also eine Entmischung der Teilchen in nahezu reine Phasen. Während dieses Prozesses entstehen energetisch immer günstigere Teilchenkonfigurationen, wobei auch die Länge der Grenzlinien zwischen den Phasen kleiner wird. Sind von jeder Sorte gleichviele Teilchen vorhanden, finden die Wechselwirkungen mit jeweils gleicher Stärke statt und startet man mit einer geeigneten Anfangskonfiguration der Teilchen, dann repräsentiert die Lösung der Aufgabe das Endstadium des Entmischungsprozesses.

5.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 9

Zur Lösung der Aufgabe berechnen wir der Reihe nach die Längen ℓ_S , ℓ_P , ℓ_F und ℓ_N der Grenzlinien, die von Santa Claus, Père Noël, Väterchen Frost und dem Heiligen Nikolaus vorgeschlagen wurden. Wir verwenden als Maßeinheit des Winkels stets die Bogenlänge des entsprechenden Einheitskreisbogens.



Santa Claus: Zur Berechnung der Bogenlängen der Breitenkreise betrachten wir einen ebenen Schnitt, der durch den Mittelpunkt O sowie durch Nordpol N und Südpol S der Kugel verläuft. Jede Polkappe soll ein Viertel der Kugeloberfläche haben, demnach gilt für die Höhe $|\overline{NF}|$ der Polkappen

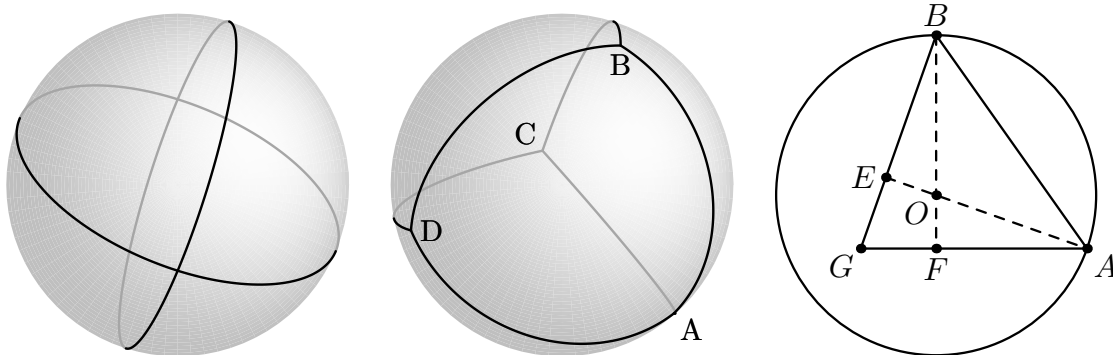
$$2\pi|\overline{NF}| = 2\pi|\overline{OE}| \cdot |\overline{NF}| = \frac{1}{4} \cdot 4\pi|\overline{OE}|^2 = \pi, \text{ also } |\overline{OF}| = |\overline{NF}| = \frac{1}{2}.$$

Der Satz von Pythagoras liefert für das rechtwinklige Dreieck BFO und den Radius $|\overline{FB}|$ des Breitenkreises

$$|\overline{FB}|^2 = |\overline{OB}|^2 - |\overline{OF}|^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ und somit } |\overline{FB}| = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Daraus folgt für die Gesamtlänge der Aufteilung schließlich $\ell_S = 2\pi|\overline{OE}| + 2 \cdot 2\pi|\overline{FB}| = 2\pi(1 + \sqrt{3})$.

Père Noël: Für die Längenberechnung, der die Polkappen verbindenden Längengreisbögen, führen wir einen ebenen Schnitt durch diese Bögen und den Kugelmittelpunkt O aus. Wegen $|\overline{BC}| = |\overline{FG}| = 1$ ist das Dreieck BOC gleichseitig. Somit ergibt sich für die Gesamtlänge dieser Aufteilung offenbar $\ell_P = 2 \cdot 2\pi|\overline{FB}| + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2\pi|\overline{OE}| = 2\pi(\sqrt{3} + \frac{1}{3}) < \ell_S$.



Väterchen Frost: Die beiden Großkreise dieser Aufteilung haben offenbar die Gesamtlänge $\ell_F = 4\pi$. Aus $\frac{100}{9} < 12$ folgt $\frac{10}{3} < 2\sqrt{3}$, also $4 < 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}$ und somit schließlich $\ell_F < \ell_P$.

Heiliger Nikolaus: Zur Aufteilung der Kugeloberfläche in vier kongruente und gleichseitige Kugeldreiecke betrachten wir ein regelmäßiges Tetraeder, dessen Umkugel gerade die gegebene Einheitskugel ist. Verbindet man die vier Eckpunkte A , B , C und D des Tetraeders jeweils paarweise miteinander durch Großkreisbögen, so ergibt sich die gewünschte Aufteilung.

Zur Berechnung der Bogenlänge dieser Großkreisbögen schneiden wir die Kugel mit derjenigen Ebene, welche durch die Eckpunkte A und B sowie den Mittelpunkt O der Kugel verläuft. Dabei erreicht der Schnitt das Tetraeder zuerst an seiner Kante \overline{AB} , verläuft dann durch den Kugelmittelpunkt O und verläßt das Tetraeder am Mittelpunkt G der gegenüberliegenden Kante \overline{CD} . Als Schnittfigur mit dem Tetraeder entsteht das gleichschenklige Dreieck ABG mit $|\overline{AG}| = |\overline{BG}|$. Da der Kugelmittelpunkt O zugleich der Schnittpunkt der Höhen des regelmäßigen Tetraeders ist, müssen die Höhen \overline{AE} und \overline{BF} des Dreiecks ABG durch O verlaufen und folgende Beziehungen erfüllen:

$$|\overline{AO}| = 3|\overline{OE}| = 3|\overline{OF}| = |\overline{BO}| = 1.$$

Nach dem Satz von Pythagoras gelten für die rechtwinkligen Dreiecke OFA und BFA offenbar $|\overline{AF}|^2 = |\overline{OA}|^2 - |\overline{OF}|^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ sowie

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{BF}|^2 + |\overline{AF}|^2 = \frac{16}{9} + \frac{8}{9} = \frac{24}{9} \text{ und somit } |\overline{AB}| = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Daraus folgt für den Winkel $\beta = \sphericalangle ABF$ sofort

$$\frac{4}{3} = |\overline{BF}| = |\overline{AB}| \cdot \cos \beta = \frac{2}{3}\sqrt{6} \cos \beta, \text{ also } \cos \beta = \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Für den gesuchten Winkel $\omega = \sphericalangle BOA = \pi - 2\beta$ folgt schließlich

$$\cos \omega = \cos(\pi - 2\beta) = -\cos 2\beta = 1 - 2\cos^2 \beta = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Damit hat der Großkreisbogen, welcher A und B miteinander verbindet, die Länge $\arccos(-\frac{1}{3})$, woraus sich für diese Aufteilung die Gesamtlänge $\ell_N = 6 \arccos(-\frac{1}{3})$ aller Grenzlinien ergibt.

Wegen des streng monotonen Fallens des Kosinus auf dem Intervall $[0, \pi]$ folgt aus $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ zuerst $\arccos(-\frac{1}{3}) < \frac{2}{3}\pi$ und schließlich $\ell_N = 6 \arccos(-\frac{1}{3}) < 4\pi = \ell_F$. Damit hat diese Aufteilung die kürzesten Grenzlinien aller vorgeschlagenen Varianten; das heißt, Antwort 9 ist richtig!

6 Hamster

Autor: Cor Hurkens



6.1 Aufgabe

Der Riesenhamster Hannibal hat einen Riesenvorrat an ganzen Riesenweizenkörnern für den Winter angelegt. Hannibals Winterpause dauert $t \geq 2$ Tage und sein Weizenvorrat besteht aus k Körnern.

Am ersten Tag der Winterpause frisst Hannibal morgens ein Weizenkorn und nachmittags $1/101$ seines restlichen Vorrats.

Am zweiten Tag der Winterpause frisst Hannibal morgens zwei Weizenkörner und nachmittags $1/101$ seines restlichen Vorrats.

Am dritten Tag der Winterpause frisst Hannibal morgens drei Weizenkörner und nachmittags $1/101$ seines restlichen Vorrats.

Und so weiter: Am n -ten Tag der Winterpause frisst Hannibal morgens jeweils n Weizenkörner und nachmittags $1/101$ seines restlichen Vorrats. Am Morgen des t -ten und letzten Tages sind schliesslich noch genau t Körner übrig, die Hannibal ebenfalls auffrisst.

Frage: Wie lautet die Einerziffer der Dezimaldarstellung von $k + t$?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

6.2 Lösung

Antwort 10 ist richtig.

Für $n = 1, \dots, t$ bezeichnen wir mit R_n die restliche Anzahl an Weizenkörnern, die zu Beginn des n -ten Tages noch vorhanden sind, und mit W_n die Anzahl der Weizenkörner, die Hannibal im Laufe des n -ten Tages verzehrt. Dann gilt laut Angabe

$$W_n = n + \frac{1}{101} (R_n - n) \quad \text{für } 1 \leq n \leq t. \quad (1)$$

Gleichung (1) impliziert

$$R_{n+1} = R_n - W_n = 100(W_n - n). \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgern wir

$$W_{n+1} = (n+1) + \frac{1}{101} (R_{n+1} - (n+1)) = \frac{100}{101} (W_n + 1). \quad (3)$$

Gleichung (3) kann in die folgende handlichere Form umgeschrieben werden:

$$W_{n+1} - 100 = \frac{100}{101} (W_n - 100) \quad \text{für } 1 \leq n \leq t-1. \quad (4)$$

Gleichung (4) besagt, dass die Werte $W_n - 100$ für $n = 1, \dots, t$ eine geometrische Folge mit dem Quotienten $100/101$ bilden. Für das erste Glied $W_1 - 100$ und das letzte Glied $W_t - 100$ dieser geometrischen Folge erhalten wir

$$W_t - 100 = \left(\frac{100}{101} \right)^{t-1} (W_1 - 100). \quad (5)$$

Nun setzen wir die bekannten Werte $W_1 = (k + 100)/101$ und $W_t = t$ in (5) ein, multiplizieren die Gleichung mit 101^t und erhalten dadurch

$$101^t (t - 100) = 100^{t-1} (k - 10.000). \quad (6)$$

Laut Angabe dauert die Winterpause $t \geq 2$ Tage. Da die rechte Seite von (6) durch 100^{t-1} teilbar ist, muss auch die linke Seite durch 100^{t-1} teilbar sein. Da der Faktor 101^t zu 100^{t-1} teilerfremd ist, muss daher gelten:

$$t - 100 \text{ ist durch } 100^{t-1} \text{ teilbar} \quad (7)$$

Wir stellen fest, dass die Zahl $t - 100$ betragsmäßig viel kleiner als ihr Teiler 100^{t-1} ist. Wenn aber eine betragsmäßig kleinere Zahl durch eine betragsmäßig größere Zahl teilbar ist, dann muss die kleinere Zahl gleich 0 sein. Wir schließen also zuerst $t = 100$ aus (7), und danach $k = 10.000$ aus (6). Gleichung (4) impliziert $W_n = 100$ für $1 \leq n \leq t$, und aus (2) erhalten wir $R_n = 100(101 - n)$.

Wie sieht nun Hannibals Fressprogramm während der Winterpause aus? Hannibal beginnt den n -ten Tag mit einem Vorrat von $R_n = 100(101 - n)$ Körnern. Am Morgen frisst er zunächst n Körner. Am Nachmittag frisst er $1/101$ seines restlichen Vorrats von $R_n - n = 101(100 - n)$ Körnern, und das sind dann weitere $100 - n$ Weizenkörner. Insgesamt frisst er an diesem Tag $n + (100 - n) = 100 = W_n$ Körner und behält $R_n - 100 = R_{n+1}$ Körner in seinem Vorrat.

Zusammenfassung: Hannibals Winterpause dauert $t = 100$ Tage, sein Weizenvorrat besteht aus $k = 10.000$ Weizenkörnern, und die Einerziffer der Dezimaldarstellung von $k + t$ ist 0. Daher ist Antwort #10 korrekt.

Anmerkung. Für die Beantwortung der Multiple-Choice Frage muss man natürlich nicht beweisen, dass das Problem eine eindeutige Lösung hat. Es genügt, eine *einzig*e zulässige Belegung für k und t zu raten.

Sobald man $W_1 = (k + 100)/101$ herausgefunden hat, muss $k + 100$ durch 101 teilbar sein. Und wenn man erst einmal $W_2 = 100(k + 201)/101^2$ bestimmt hat, so weiß man auch, dass $k + 201$ durch 101^2 teilbar ist. Und die kleinste positive ganze Zahl k , für die $k + 201$ durch 101^2 teilbar ist, ist bereits der gesuchte Wert $k = 10.000$.

7 Flohsprünge

Autor: Marijke Bodlaender, Gerhard Woeginger



7.1 Aufgabe

Tief im Saum der roten Zipfelmütze des Weihnachtsmanns wohnt Florian, der Weihnachtsfloh. Heute macht Florian einen Ausflug und springt lustig auf den reellen Zahlen herum. Jeder Sprung führt ihn von einem reellen Startpunkt a zu einem reellen Zielpunkt b , wobei immer $0 \leq a \leq b \leq 100$ gilt. Florians Energieverbrauch für den Sprung von a nach b ist dabei wie folgt festgelegt:

- Falls $b \leq 50$, so kostet der Sprung $(b - a)\sqrt{100b - b^2}$ Energieeinheiten.
- Falls $b \geq 50$, so kostet der Sprung $b^2 - ab$ Energieeinheiten.

Florian beginnt seine Reise auf der Zahl 0, macht dann 100.000 Sprünge und bleibt schlussendlich auf der Zahl 100 sitzen. Welche der folgenden Aussagen trifft auf die kleinstmögliche während dieser Reise verbrauchte Gesamtenergie E zu?

Antwortmöglichkeiten:

1. $5710 \leq E < 5711$
2. $5711 \leq E < 5712$
3. $5712 \leq E < 5713$
4. $5713 \leq E < 5714$
5. $5714 \leq E < 5715$
6. $5715 \leq E < 5716$
7. $5716 \leq E < 5717$
8. $5717 \leq E < 5718$
9. $5718 \leq E < 5719$
10. $5719 \leq E < 5720$

7.2 Lösung

Antwort Nummer 4 ist richtig.

Die folgende Funktion $f : [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$ wird in unseren weiteren Überlegungen eine zentrale Rolle spielen: Im Intervall $0 \leq x \leq 50$ definieren wir $f(x) = \sqrt{100x - x^2}$ und im Intervall $50 \leq x \leq 100$ definieren wir $f(x) = x$. Der Graph dieser Funktion f besteht aus einem Viertelkreis mit Mittelpunkt im Punkt $(50, 0)$ und Radius 50, und aus einem Geradenstück vom Punkt $(50, 50)$ bis zum Punkt $(100, 100)$; siehe Abbildung 2. Ausserdem betrachten wir das Gebiet, das vom Funktionsgraphen, von der x -Achse und von der Geraden $x = 100$ begrenzt wird. Die Fläche A dieses Gebietes setzt sich aus einem Viertelkreis mit Radius 50 (mit Fläche 625π), einem Quadrat mit Seitenlänge 50 (mit Fläche 2500) und einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck mit Seitenlänge 50 (mit Fläche 1250) zusammen. Alles in allem erhalten wir $A = 625(\pi + 6) \approx 5713,49$.

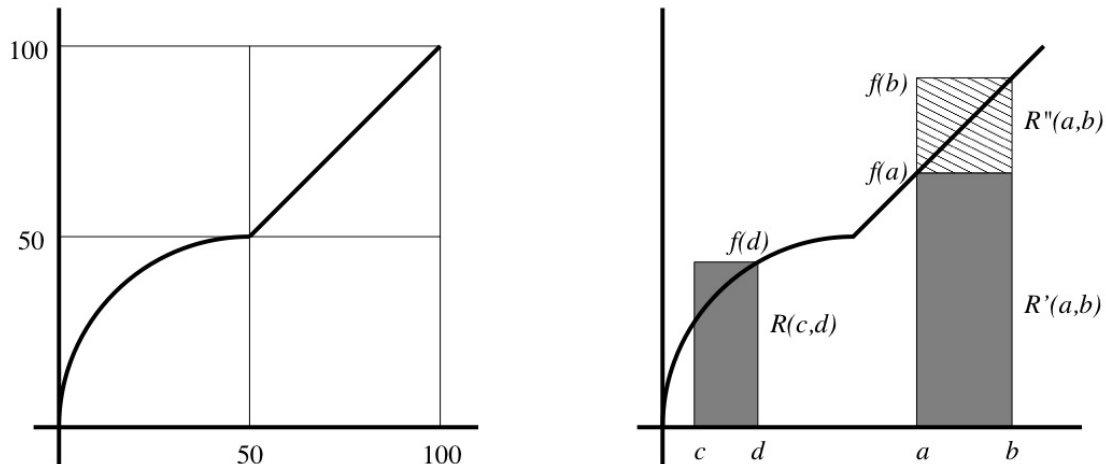


Abbildung 2: Das linke Bild zeigt den Graphen der Funktion f , und das rechte Bild zeigt drei Rechtecke $R(c, d)$, $R'(a, b)$ und $R''(a, b)$.

Für zwei reelle Zahlen a und b mit $0 \leq a \leq b \leq 100$ definieren wir das Rechteck $R(a, b)$, dessen Ecken in den vier Punkten $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(a, f(b))$ und $(b, f(b))$ liegen; siehe Abbildung 2. Die Grundlinie dieses Rechtecks hat die Länge $b - a$, seine Höhe beträgt $f(b)$ und seine Fläche beträgt $(b - a) f(b)$. Die Rechtecksfläche misst somit genau Florians Energieverbrauch für einen Sprung vom Punkt a zum Punkt b . Wir unterteilen das Rechteck $R(a, b)$ durch einen Schnitt entlang der Geraden $y = f(a)$ in

ein unteres Rechteck $R'(a, b)$ und in ein oberes Rechteck $R''(a, b)$; siehe Abbildung 2.

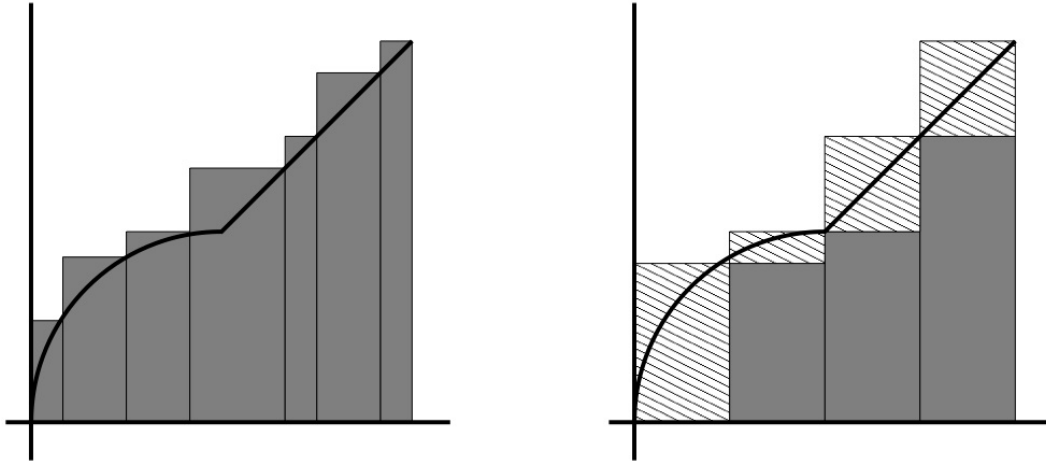


Abbildung 3: Das linke Bild zeigt die Rechtecke für eine Folge von sieben Sprüngen, und das rechte Bild zeigt die Rechtecke für eine Folge von vier equidistanten Sprüngen.

(Eine untere Schranke für E): Wenn der Weihnachtsfloh der Reihe nach zu den Punkten $0 = x_0, x_1, \dots, x_{100.000} = 100$ springt, so entspricht die während dieser Reise verbrauchte Energie der Gesamtfläche aller Rechtecke $R(x_i, x_{i+1})$; siehe Abbildung 3. Da diese Rechtecke das gesamte Gebiet unter dem Funktionsgraphen überdecken, folgern wir die untere Schranke $E \geq A$.

(Eine obere Schranke für E): Wir wollen zeigen, dass die kleinstmögliche Gesamtenergie sehr nahe bei A liegt. Zu diesem Zweck lassen wir Florian 100.000 Sprünge der Länge $1/1000$ machen, sodass er der Reihe nach die Punkte $x_i = i/1000$ mit $i = 1, \dots, 100.000$ besucht. Die dadurch verbrauchte Energie ist die Gesamtfläche aller Rechtecke $R(x_i, x_{i+1})$, die sich wiederum aus der Gesamtfläche A' aller Rechtecke $R'(x_i, x_{i+1})$ und der Gesamtfläche A'' aller Rechtecke $R''(x_i, x_{i+1})$ zusammensetzt; Abbildung 3 zeigt eine vereinfachte Darstellung dieser Situation mit nur vier Sprüngen.

Da die Rechtecke $R'(x_i, x_{i+1})$ paarweise disjunkt sind und da sie alle im Gebiet zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse liegen, gilt sicherlich $A' \leq A$. Da jedes Rechteck $R''(x_i, x_{i+1})$ eine Grundlinie der Länge $1/1000$ hat und da die Summe der Höhen aller dieser Rechtecke genau 100 beträgt, gilt $A'' = 100 \times 1/1000 = 1/10$. Florian verbraucht für seine 100.000 Sprünge der Länge $1/1000$ daher höchstens $A' + A'' \leq A + 1/10$ Energieeinheiten.

(Zusammenfassung): Alles in allem erhalten wir, dass die kleinstmögliche Gesamtenergie E zwischen den beiden Schranken $A \approx 5713,49$ und $A + 1/10 \approx 5713,59$ liegt. Daher ist Antwort #4 korrekt.

Anmerkung. Im Prinzip haben wir die Fläche A zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse durch die untere Riemannsumme aller Rechtecke $R'(x_i, x_{i+1})$ und durch die obere Riemannsumme aller Rechtecke $R(x_i, x_{i+1})$ approximiert. Diese Riemannsummen gehen auf den deutschen Mathematiker Bernhard Riemann (1826–1866) und auf den französischen Mathematiker Jean Gaston Darboux (1842–1917) zurück und bilden das Fundament der Integralrechnung. Mehr Information darüber findet man (zum Beispiel) in der Wikipedia:

http://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsches_Integral

Anmerkung. Diese Aufgabe ist mit dem Computer gut zu attackieren, da man sehr schnell bis auf ein paar Zehntel an den Minimalwert E herankommt, und dann die korrekte Antwort erraten kann. Die exakte Optimierung von E (mit allen 100.000 Variablen für die 100.000 Sprünge) dürfte die Rechenkraft eines PCs aber erheblich übersteigen.

8 Weinachtsabzocken

Autor: Falk Ebert



8.1 Aufgabe

Weihnachtszeit - Zeit für gemeinsame Unternehmungen: Plätzchenbacken, Winter-spaziergänge durch den Regen und auch mal die Gelegenheit, in der Familie wieder etwas gemeinsam zu spielen. Bei den Regional-Weihnachtsmännern Antonio de Las Vegas und Louis de Monte Carlo sehen Spiele in der Weihnachtszeit immer etwas anders aus. Die beiden zocken immer um ihre Adventskalender und der Gewinner bekommt alles. Rentierrennenwetten und Wipp-den-Weihnachtsmannhut sind out. Sie haben es auch mit verschiedenen Varianten des Nim Spiels (siehe z.B. Kalender-aufgabe vom 6. Dezember 2010) versucht. Da aber nun mal geben seliger als nimen ist, haben sie sich etwas neues ausgedacht:

Die Spieler schreiben nacheinander je eine Startzahl auf *eine (gemeinsame)* große, anfangs leere Tafel. Dabei muss der zweite Spieler darauf achten, eine *andere* Zahl als

der beginnende Spieler zu wählen. Dann geht es ebenfalls abwechselnd weiter. Jeder Spieler schreibt eine weitere Zahl an die Tafel - diese muss jetzt aber die Differenz zweier bereits an der Tafel stehender Zahlen sein und darf noch nicht bereits darauf stehen. Wer das nicht mehr kann, verliert das Spiel.

Um Spitzfindigkeiten vorzubeugen, haben die Spieler sich geeinigt, dass die Startzahl jedes Spielers eine natürliche Zahl von 1 bis 99 sein muss und dass nur *positive* Differenzen aufgeschrieben werden.

Offensichtlich sind die Startzahlen der beiden Spieler für den weiteren Spielverlauf wichtig. Durch einen fairen Münzwurf haben die Spieler festgelegt, dass Antonio beginnen soll und die erste Zahl anschreibt, Louis die zweite.

Kann Antonio durch die Wahl seiner Startzahl einen Sieg erzwingen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Startzahlen sind egal. Wenn Antonio beim Spielen keinen Fehler macht, kann Louis nie gewinnen.
2. Es gibt nur eine Startzahl für Antonio, bei der er verlieren kann.
3. Es gibt genau 6 Startzahlen für Antonio, bei denen er verlieren kann.
4. Es gibt genau 12 Startzahlen für Antonio, bei denen er verlieren kann.
5. Es gibt genau 42 Startzahlen für Antonio, bei denen er verlieren kann.
6. Es gibt genau 42 Startzahlen für Antonio, bei denen er sicher gewinnen kann.
7. Es gibt genau 12 Startzahlen für Antonio, bei denen er sicher gewinnen kann.
8. Es gibt genau 6 Startzahlen für Antonio, bei denen er sicher gewinnen kann.
9. Nur bei einer einzigen Startzahl kann Antonio sicher gewinnen - egal wie Louis spielt.
10. Louis kann immer gewinnen, egal mit welcher Zahl Antonio beginnt.

Mathematikbezug

Spieltheorie ist bei vielen wirtschaftsmathematischen Problemen ein wichtiges Werkzeug geworden, insbesondere seit man festgestellt hat, dass sich einzelne Menschen durchaus intelligent verhalten, wenn es dabei etwas zu gewinnen gibt. Diese Spiele werden dann zwar nicht an einer Tafel ausgetragen. Aber die Grundprinzipien, dass man innerhalb gewisser Regeln den anderen möglichst schlecht dastehen lassen will, sind immer die gleichen.

8.2 Lösung

Antwortmöglichkeit Nummer 9 ist richtig.

Nur bei einer einzigen Startzahl kann Antonio sicher gewinnen - egal wie Louis spielt.

Die erste Erkenntnis sollte sein, dass der eigentliche Spielverlauf vollkommen unerheblich ist. Es kommt allein auf die Startzahlen an. Nennen wir die nacheinander an der Tafel stehenden Zahlen, in der Reihenfolge ihres Anschriebs z_1, z_2, z_3 usw. Die Startzahlen sind also z_1 und z_2 . Nehmen wir zuerst einmal an, dass $z_1, z_2 > 1$ und $ggT(z_1, z_2) = 1$. Aufgrund der Spielregeln, dass es sich stets um positive Differenzen handelt, kann nie eine größere Zahl als $\max(z_1, z_2)$ an der Tafel stehen. Man wird feststellen, dass dann *alle* natürlichen Zahlen von 1 bis $\max(z_1, z_2)$ an der Tafel stehen werden.

Da Antonio beginnt, schreibt er die Zahlen z_1, z_3, z_5 etc., also immer die Zahlen mit ungeradem Index. Louis schreibt die Zahlen mit geradem Index. Es werden genau (wenn zwischendurch kein Spieler vergisst, wie man natürliche Zahlen subtrahiert) $\max(z_1, z_2)$ Zahlen aufgeschrieben. Wenn $\max(z_1, z_2)$ ungerade ist, gewinnt Antonio andernfalls gewinnt Louis. Und was ist mit dem Fall, dass $ggT(z_1, z_2) = t \neq 1$? In diesem Fall gilt, dass $t|z_1, t|z_2$ und mit Sicherheit auch $t|z_3 = |z_1 - z_2|$. Induktiv lässt sich folgern, dass $t|z_i$ für alle Züge i . Wir können also $\tilde{z}_1 = z_1/t$ und $\tilde{z}_2 = z_2/t$ setzen. Dann ist $ggT(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = 1$ und wir können wie vorher argumentieren, dass Antonio gewinnt, wenn $\max(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \max(z_1, z_2)/t$ ungerade ist und Louis im anderen Fall. Da Louis der Nachziehende ist, hat er nahezu die komplette Kontrolle über diesen Wert. Wählt Antonio ein gerades z_1 , so kann Louis z.B. mit $z_2 = z_1 - 1$ den Gewinn erzwingen, da dann $ggT(z_1, z_2) = 1$ und $\max(z_1, z_2)$ gerade ist. Wählt Antonio hingegen ein ungerades z_1 , so kann Louis mit $z_2 = z_1 + 1$ kontern und hat wieder $ggT(z_1, z_2) = 1$ und $\max(z_1, z_2)$ gerade. Die einzige Ausnahme bildet Antonios Wahl $z_1 = 99$, da dann Louis nicht mit einer größeren geraden Zahl kontern darf. Diesen Fall muss man noch gesondert betrachten. Wählt Louis ein kleineres z_2 mit $ggT(z_1, z_2) = 1$, hat er automatisch verloren. Da $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, kommen als Teiler t nur 3, 9, 11 und 33 in Frage. Aber in jedem Fall ist dann $\max(99, z_2)/t = 99/t$ entweder 33, 11, 9 oder 3 und damit ungerade. Mit der Wahl $z_1 = 99$ kann Antonio also garantiert gewinnen. Und dies ist auch seine einzige Möglichkeit, einen Sieg zu erzwingen.

Zusätzlicher Beweis: Wir nehmen an, dass es eine echte Teilmenge T der Zahlen von 1 bis $\max(z_1, z_2)$ gibt, so dass jede Differenz von Zahlen aus T auch in T liegt. Offensichtlich müssen z_1 und z_2 in dieser Teilmenge liegen. Desweiteren darf 1 nicht

in dieser Teilmenge liegen, da man ansonsten sukzessive durch Subtraktion von 1 alle Zahlen von 1 bis $\max(z_1, z_2)$ als Differenzen erzeugen kann und T damit keine *echte* Teilmenge der Zahlen von 1 bis $\max(z_1, z_2)$ mehr ist. Die kleinste Zahl in T kann also minimal 2 sein. Ebensovienig kann die Differenz zweier Zahlen genau 1 sein, da ansonsten 1 in T sein müsste. Folglich kann die Differenz zweier Zahlen in T minimal 2 sein. Induktiv kann man daraus jetzt folgern, dass alle Zahlen in T gerade sein müssen, also auch z_1 und z_2 . Dies widerspricht aber der Annahme, dass $\text{ggT}(z_1, z_2) = 1$. T kann also keine echte Teilmenge der Zahlen von 1 bis $\max(z_1, z_2)$ sein, sondern nur der gesamte Bereich.

9 Teig teilen

Autor: Matthias Nuck



9.1 Aufgabe

In der Weihnachtsbäckerei herrscht Panik. Nachdem vor mehreren Jahren das Pfefferkuchenfließband erfolgreich eingeführt wurde, ist in diesem Jahr die Teigschneidemaschine defekt. Diese Maschine macht nichts anderes als rasend schnell einen Teigwürfel durch 12 ebene Schnitte in insgesamt 125 kleinere Teigwürfel zu teilen. Die Schnitte erfolgen so, dass je vier Schnitte parallel zu einem Paar paralleler Seitenflächen des großen Teigwürfels erfolgen. Hierfür haben die Wichtel extra eine klebrige Rezeptur entwickelt, welche garantiert, dass der große Teigwürfel nicht schon während des Schneidens zerfällt. Die kleinen Teigwürfel werden dann nach dem schneiden gleich weiter verarbeitet.

Die Wichtel überlegen wie sie das Problem mit der Schneidemaschine lösen können.

”Die Reparatur der Schneidemaschine kann in diesem Jahr nicht mehr erfolgen”, bemerkt Wichtel Technician. ”Das Fließband still legen und dann wieder per Hand backen, das geht gar nicht. Um das zu schaffen, hätten wir schon vor Monaten anfangen müssen zu backen”, meint Wichtel Ökonomicus.

Die Schneidemaschine durch einen Wichtel der Bäckerei zu ersetzen ist auch keine gute Idee, denn die Geschwindigkeit des Bandes lässt sich nicht drosseln und keiner der Wichtel in der Weihnachtsbäckerei schneidet schnell genug. Bei einer Probe stellte sich heraus, dass keiner der Backwichtel mehr als einen Schnitt in der geforderten Zeit schafft.

Am Ende entscheiden sich die Wichtel, die Stelle auszuschreiben. Obwohl es kaum zu erwarten war, bewirbt sich tatsächlich ein Kandidat. Wichtel Schneidfix schafft durch schnelles Herumfuchteln eines (sehr langen) Messers erstaunliche 10 ebene Schnitte in der geforderten Zeit. Zwar ist man in seiner Nähe alles andere als sicher und das Ergebnis seiner Schneidkünste sind weder kleine Würfel, noch eine genau vorauszusagende Anzahl an Schnittkörpern, aber er erhält die Stelle trotzdem.

Wie viele Pfefferkuchenteilkörper entstehen bei der Teilung des Teigwürfels durch 10 ebene Schnitte maximal?

Antwortmöglichkeiten:

1. 80
2. 100
3. 165
4. 176
5. 211
6. 242
7. 512
8. 564
9. 783
10. 1024

9.2 Lösung

Lösung 4 ist richtig

Zu betrachten ist die Anzahl der Polyeder welche nach 10 ebenen Schnitten durch einen Quader maximal entstehen können. Während sich das Problem bei bis zu drei Schnitten noch gut überschauen lässt, wird es ab dem vierten Schnitt knifflig.

Anzahl Schnitte	S	0	1	2	3	4
max. Anzahl neuer Körper	$N(S)$	-	1	2	4	?
max. Gesamtanzahl Körper	$K(S)$	1	2	4	8	?

Betrachten wir also zunächst die maximale Anzahl der entstehenden Schnittkörper nach 4 Schnitten.

Die Anzahl $N(4)$ der neuen Schnittkörper kann nur dann maximal werden, wenn die 4-te Ebene die bisherigen drei Ebenen innerhalb des Körpers schneidet. Es muss insbesondere 3 Schnittgeraden zwischen den bisherigen Ebenen und der 4-ten Ebene innerhalb des Körpers geben. Hierbei teilen diese drei Schnittgeraden die Schnittfläche des 4-ten Schnittes in Teilflächen, welche allesamt Schnittflächen von geteilten Einzelkörpern sind (s. Bild 1).

Durch die drei Schnittgeraden können höchstens 7 Teilflächen entstehen (s. Bild 2). Somit kommen höchstens $N(4)=7$ Körper (zu den bei drei Schnitten maximal erhaltenen $K(3)=8$ Körpern) hinzu und wir erhalten $K(4)=K(3)+N(4)=15$.

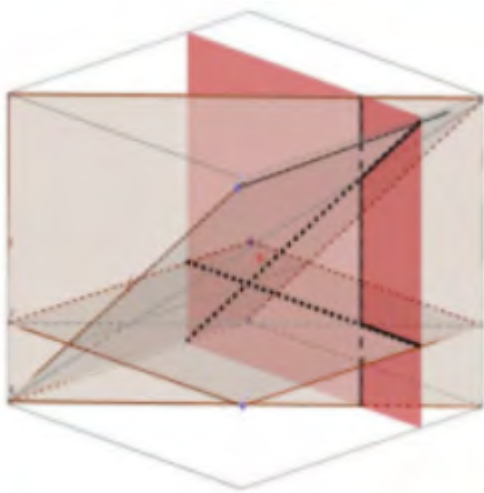


Bild 1

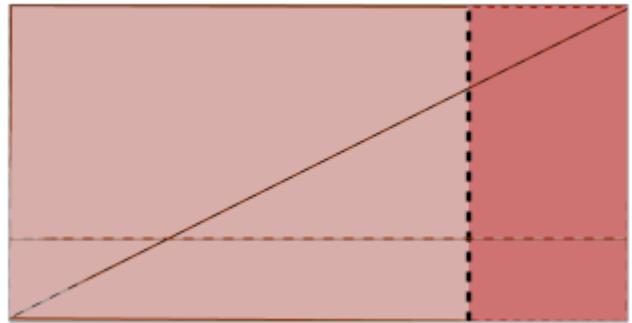


Bild 2

Beim 5-ten Schnitt haben wir (maximal) 4 neue Schnittgeraden zwischen der fünften Schnittebene und den vier ursprünglichen Schnittebenen. Dass durch 3 Schnittgeraden unser Schnittpolygon in maximal 7 Teilflächen zerlegt werden kann, wissen wir

bereits (s. Bild 2). Die Frage ist: Wie viele weitere Teilflächen können durch die 4-te Schnittgerade entstehen?

Jede (bisherige) Teilfläche, in welche die 4-te Gerade "eintritt" bedeutet eine Teilung dieser Teilfläche. Unsere 4-te Gerade kann höchstens 4 Teilflächen "betreten", nämlich beim "Übertritt" in das Gesamtpolygon und noch jeweils bei jedem "Übertritt" über eine der 3 anderen Schnittgeraden. Somit kommen maximal 4 weitere Teilflächen (zu den bereits bekannten 7) hinzu und es entstehen durch den 5-ten Schnitt maximal $N(5)=7+4=11$ neue Teilkörper. Eine analoge Argumentation liefert die Verallgemeinerung: Beim Schnitt S kommen maximal $S-1$ mehr Teilflächen (und damit Körper) hinzu, als beim Schnitt $S-1$.

Zusammengefasst erhalten wir:

I) $N(1)=1$ und $N(S)=N(S-1)+(S-1)$ (für $S>1$) und

II) $K(0)=1$ und $K(S)=K(S-1)+N(S)$ (für $S>0$).

Somit lassen sich $N(S)$ und $K(S)$ für beliebige S durch rekursive Ersetzung ermitteln und die obige Tabelle ergänzen.

Für große S ist dieses Verfahren sehr aufwändig. Schaut man sich die rekursive Ersetzung an, so erkennt man, dass gilt:

$$I') N(S) = N(1) + 1 + 2 + \dots + (S-2) + (S-1) = 1 + \sum_{i=1}^{S-1} i = 1 + \frac{(S-1)S}{2} \text{ und}$$

$$II') K(S) = K(0) + N(1) + N(2) + \dots + N(S) = 1 + \sum_{i=1}^S \left(1 + \frac{(i-1)i}{2}\right)$$

$$= 1 + S + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^S i^2 - \sum_{i=1}^S i \right)$$

Unter Nutzung der als bekannt vorausgesetzten Summenformel $\sum_{i=1}^S i^2 = \frac{S(S+1)(2S+1)}{6}$

liefern entsprechende Umformungen: $K(S) = 1 + S + \frac{S^3-S}{6}$. Für $S=10$ erhalten wir $K(10)=176$.

10 Mützen

Autor: Gerhard Woeginger



10.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat 126 Intelligenzwichtel zu einem gemütlichen Nachmittag mit Kaffee und Kuchen eingeladen. Als die Wichtel den Saal betreten, bekommt jeder von ihnen hinterrücks eine neue Wichtelmütze auf den Kopf gesetzt. Das geht blitzschnell, sodass keiner von ihnen die Farbe der eigenen Mütze zu sehen kriegt. Der Weihnachtsmann eröffnet das Treffen mit einer kurzen Rede.

“Meine lieben Intelligenzwichtel! Wir wollen diesen Nachmittag mit einem kleinen Denkspiel beginnen. Keiner von euch kennt die Farbe der eigenen Mütze, und jeder von euch kann die Mützen aller anderen 125 Wichtel sehen. Ziel dieses Spieles ist es, die Farbe der eigenen Mütze möglichst schnell und durch reines Nachdenken herauszufinden. Ich werde nun im Fünf-Minuten-Takt mit meiner grossen Weihnachtsglocke läuten. Wenn einer die eigene Mützenfarbe herausgefunden hat, so muss er beim nächsten Läuten sofort den Saal verlassen. Im Nebenzimmer bekommt er dann eine Tasse Kaffee und ein grosses Stück Sachertorte serviert.”

Der Weihnachtsmann will gerade zur Glocke gehen, als dem Wichtel Atto eine wichtige Frage einfällt: *“Ja ist es denn wirklich für jeden von uns möglich, seine Mützenfarbe durch logisches Denken zu bestimmen? Wenn zum Beispiel jeder von uns*

eine andere Mützenfarbe hätte, dann könnte wohl niemand seine Farbe durch Denken herausfinden. Dann wäre das Spiel für uns doch nicht zu gewinnen!” Der Weihnachtsmann entgegnet ihm ein wenig unwirsch: *“Hätte, könnte, wäre!!! Natürlich kann jeder von euch dieses Spiel gewinnen! Ich habe die Mützenfarben sehr sorgfältig ausgewählt, sodass jeder von euch tatsächlich seine Farbe im Laufe des Spiels durch Denken herleiten kann.”* Und dann beginnen die Wichtel zu denken. Und der Weihnachtsmann beginnt zu läuten.

- Beim ersten Läuten verlassen Atto und neun andere Wichtel den Saal.
- Beim zweiten Läuten gehen alle Wichtel mit butterblumengelben, dotterblumengelben, schlüsselblumengelben und sonnenblumengelben Mützen aus dem Saal.
- Beim dritten Läuten gehen alle Wichtel mit karmesinroten Mützen, beim vierten Läuten alle mit kaktusgrünen Mützen, beim fünften Läuten alle mit aquamarinblauen Mützen, beim sechsten Läuten alle mit goldorangen Mützen, beim siebten Läuten alle mit bernsteinbraunen Mützen und beim achten Läuten gehen alle mit muschelgrauen Mützen.
- Beim neunten, zehnten, elften und zwölften Läuten verlässt niemand den Saal.
- Beim dreizehnten Läuten gehen alle Wichtel mit blütenweissen und alle Wichtel mit ebenholzscharzen Mützen.

Und so geht es weiter. Beim N -ten Läuten des Weihnachtsmanns verlässt schließlich die letzte Wichtelgruppe den Saal. Ganze sieben Mal hat der Weihnachtsmann zwischendurch geläutet, ohne dass jemand aus dem Saal gegangen wäre (und bei diesen sieben Malen sind das neunte, zehnte, elfte und zwölfte Läuten bereits mitgezählt). Unsere Frage lautet nun: Wie groß ist N ? Antwortmöglichkeiten:

1. $N = 17$
2. $N = 18$
3. $N = 19$
4. $N = 20$
5. $N = 21$
6. $N = 22$

7. $N = 23$

8. $N = 24$

9. $N = 25$

10. $N = 26$

10.2 Lösung

Antwort Nummer 2 ist richtig

Betrachten wir zunächst einmal die Situation vor dem ersten Läuten des Weihnachtsmanns. Der Wichtel Atto sieht sich um und stellt dabei fest, dass Bilbo als einziger Wichtel eine tomatenroten Mütze trägt. Der Weihnachtsmann hat gesagt, dass jeder Wichtel seine eigene Mützenfarbe durch Nachdenken herausfinden kann. Wie um alles in der Welt soll Bilbo seine Mützenfarbe bestimmen? Falls Bilbo keine einzige andere tomatenrote Mütze sieht, so kann er sicher nicht entscheiden, ob seine eigene Mütze feuerrot oder ziegelrot oder tomatenrot ist oder vielleicht auch eine ganz andere Farbe hat. Nein, Bilbo muss auf jeden Fall eine tomatenrote Mütze auf dem Kopf eines anderen Wichtels sehen. Da Atto aber keine weitere tomatenrote Mütze entdecken kann, folgert Atto nun daraus, dass die von Bilbo gesehene tomatenrote Mütze auf Attos eigenem Kopf sitzen muss. Atto steht auf und verlässt beim ersten Läuten den Saal. Bilbo denkt sich die Situation natürlich genau symmetrisch durch: Er sieht Atto als einzigen mit tomatenroter Mütze, und folgert daraus, dass seine eigene Mütze ebenfalls tomatenrot ist. Gemeinsam mit Atto und Bilbo verlassen noch vier weitere Wichtelpaare beim ersten Läuten den Saal: Alpo und Barbo mit mohnroten Mützen, Akko und Bebbo mit rosenroten Mützen, Archo und Bodo mit weichelroten Mützen und Ando und Buzzo mit zinnoberroten Mützen.

Und was passiert vor dem zweiten Läuten? Chico sieht sich im Saal um und stellt fest, dass Coco und Cambo die einzigen Wichtel mit butterblumengelben Mützen sind. Warum ist Coco denn nicht schon beim ersten Läuten aus dem Saal gegangen? Falls Coco nur einen einzigen anderen Wichtel mit butterblumengelber Mütze gesehen hat, so konnte er daraus (analog zu Attos und Bilbos obigen Überlegungen) schliessen, dass seine eigene Mütze butterblumengelb ist, und beim ersten Läuten aus dem Saal gehen. Da Coco das aber nicht getan hat, muss er noch einen weiteren Wichtel mit butterblumengelber Mütze sehen, und dieser weitere Wichtel kann nur Chico selbst sein. Daher verlässt Chico nun beim zweiten Läuten den Saal. Mit ihm gehen Coco und Cambo (die sich die Situation symmetrisch durchgedacht haben) und drei weitere Dreiergruppen von Wichteln mit dotterblumengelben, schlüsselblumengelben und sonnenblumengelben Mützen.

Was passiert vor dem dritten Läuten? Dondo sieht, dass Darko, Dezzo und Duffo die einzigen anderen Wichtel mit karmesinroten Mützen im Saal sind. Warum ist Darko nicht schon beim zweiten Läuten aus dem Saal gegangen? Falls Darko nur zwei weitere Wichtel mit karmesinroten Mützen gesehen hat, so konnte er daraus (analog zu Chicobes obigen Überlegungen) schließen, dass seine eigene Mütze karmesinrot ist, und beim zweiten Läuten aus dem Saal gehen. Da Darko das nicht getan hat, muss

er noch einen weiteren Wichtel mit karmesinroter Mütze sehen, und dieser weitere Wichtel muss Dondo sein. Dondo verlässt daher den Saal, und mit ihm gehen Darko, Dezzo und Duffo.

Und so weiter, und so fort. Wenn sich zu Anfang des Spiels genau k Wichtel mit der selben fixen Mützenfarbe im Saal befinden, so verlässt diese Gruppe beim $(k - 1)$ -ten Läuten des Weihnachtsmanns geschlossen den Saal. Die folgende Tabelle listet die Anzahl der Wichtel auf, die bis zum dreizehnten Läuten den Saal verlassen.

Runde	Kommentar	Anzahl
1. Läuten	fünf Wichtelpaare: 5×2	10
2. Läuten	vier Blumengelbtöne: 4×3	12
3. Läuten	karmesinrot: 1×4	4
4. Läuten	kaktusgrün: 1×5	5
5. Läuten	aquamarinblau: 1×6	6
6. Läuten	goldorange: 1×7	7
7. Läuten	bernsteinbraun: 1×8	8
8. Läuten	muschelgrau: 1×9	9
9. Läuten	niemand: 0×10	—
10. Läuten	niemand: 0×11	—
11. Läuten	niemand: 0×12	—
12. Läuten	niemand: 0×13	—
13. Läuten	weiß, schwarz: 2×14	28

Nach dem dreizehnten Läuten haben also genau 89 der insgesamt 126 Wichtel den Saal verlassen, sodass sich 37 Wichtel im Saal befinden. Da jede noch im Saal vorhandene Mützenfarbe mindestens 15-mal auftreten muss, haben entweder alle 37 verbleibenden Wichtel die selbe Mützenfarbe oder es gibt zwei Mützenfarben für $15 + 22$ oder $16 + 21$ oder $17 + 20$ oder $18 + 19$ Wichtel. Da es insgesamt aber nur sieben Runden gibt, in denen niemand den Saal verlässt, kann die Tabelle nur auf folgende Art vervollständigt werden.

Runde	Kommentar	Anzahl
14. Läuten	niemand: 0×15	—
15. Läuten	niemand: 0×16	—
16. Läuten	niemand: 0×17	—
17. Läuten	sandsteinfarben: 1×18	18
18. Läuten	honigfarben: 1×19	19

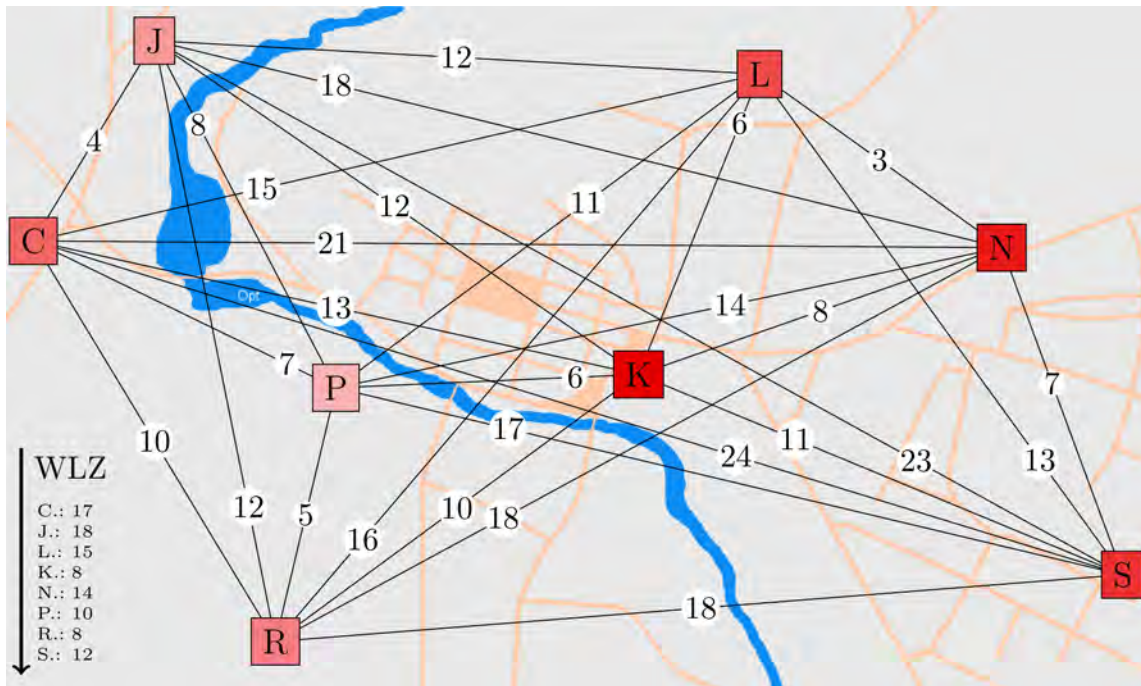
Alles in allem gibt es daher genau $N = 18$ Runden. Somit ist Antwort #2 korrekt.

11 Arbeit statt Rute

Autor: Olga Heismann, Achim Hildenbrandt



11.1 Aufgabe



Aufgrund einer neuen EU-Richtlinie sollen böse Kinder in diesem Jahr das erste Mal eine letzte Chance erhalten, ihr Verhalten zu bereuen um doch noch am heiligen Abend vom Weihnachtsmann reich beschenkt zu werden. Voraussetzung dafür ist, dass sie ihren Eltern bei der Vorbereitung des Weihnachtsfests tatkräftig zur Hand gehen. Leider wurde diese Richtlinie allerdings so kurzfristig beschlossen, dass es nicht mehr möglich war, die betroffenen Kinder und Eltern umfassend über die Medien zu informieren, sodass sie jetzt persönlich von Wichteln des Weihnachtsmanns besucht werden müssen.

Im Ort Komb an der Opt ist dabei der Wichtel Tee Vau Peh für die bösen Kinder zuständig. Deren gibt es dort acht an der Zahl, nämlich Chantal, Justin, Lisa, Kirsten, Natalie, Peter, Roland und Stefan. Die Kinder waren allerdings nicht alle gleich böse, was sich aus Gerechtigkeitsgründen auch in der Länge der Strafarbeit niederschlagen soll. Die Reihenfolge der Kinder von “am bösesten gewesen” nach “am wenigsten böse gewesen” ist: Kirsten, Natalie, Stefan, Lisa, Chantal, Roland, Justin, Peter.

Tee Vau Peh soll nun mit einem Schlitten vom Weihnachtsmann-Logistik-Zentrum (WLZ), welches sich südlich von Komb an der Opt befindet, zu jedem Kind genau 1x reisen und ihm eindringlich ins Gewissen reden, sodass es die Strafarbeit auch wirklich erledigt. Nach getaner Arbeit soll er den Rentierschlitten dann wieder im WLZ abstellen. Da, wie schon erwähnt, die Kinder alle unterschiedlich lang arbeiten

sollen und die Zeit bis zum Weihnachtsabend schon sehr knapp ist, sollen die bösen Kinder möglichst als erstes besucht werden, sodass sie früher anfangen zu arbeiten als solche, die sich nicht ganz so schlimm benommen haben.

Damit Tee Vau Peh diese Vorgabe in der Besuchsreihenfolge auch umsetzt, bekommt er vom Weihnachtsmann fünf Schokoladenstücke für jedes Paar Kinder (A,B) bei dem er A vor B besucht und A böser als B war. Wenn er also beispielsweise das schlimmste von allen Kindern gleich am Anfang seiner Tour besucht, bekommt er damit schon $7 \cdot 5 = 35$ Schokoladenstücke. Leider muss er allerdings auch das Rentier wieder mit Schokoladenstücken füttern, da es sich sonst nicht vom Fleck bewegt. Die Anzahl der nötigen Schokoladenstücke, um von einem Ort zum anderen zu kommen siehst du in der folgenden Tabelle (und für die Häuser der Kinder auch auf der obigen Karte).

	WLZ	C.	J.	L.	K.	N.	P.	R.	S.
WLZ	0	17	18	15	8	14	10	8	12
Chantal	17	0	4	15	13	21	7	10	24
Justin	18	4	0	12	12	18	8	12	23
Lisa	15	15	12	0	6	3	11	16	13
Kirsten	8	13	12	6	0	8	6	10	11
Natalie	14	21	18	3	8	0	14	18	7
Peter	10	7	8	11	6	14	0	5	17
Roland	8	10	12	16	10	18	5	0	18
Stefan	12	24	23	13	11	7	17	18	0

Da der Schlitten über ausreichend Reserve-Schokostückchen für die Ernährung des Rentiers verfügt, ist es egal, wenn der Wichtel zwischendurch im Schokominus ist. Abgerechnet wird erst am Schluss der Tour.

Da Tee Vau Peh etwas verfressen ist, möchte er natürlich am Ende seiner Tour möglichst viele Schokoladenstücke für sich behalten. Dummerweise ist die Zeit knapp und Tee Vau Peh ist dank extensiven Glühweingenusses leider nicht mehr in der Lage, sich schnell den optimalen Weg für dieses Problem zu überlegen. Hilf ihm dabei! Wie viele Schokoladenstücke kann er am Ende höchstens haben?

Antwortmöglichkeiten:

1. 37
2. 39
3. 43

- 4. 45
- 5. 47
- 6. 51
- 7. 52
- 8. 56
- 9. 86
- 10. 88

Projektbezug:

Das Target Visitation Problem (TVP) ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem, welches beispielsweise bei der effizienten Versorgung von Katastrophengebieten eine Rolle spielt und derzeit an der Universität Heidelberg erforscht wird. Der Wichtel in dieser Aufgabe muss ein solches Problem lösen.

11.2 Lösung

Antwort Nummer 8 ist richtig.

Mit der Reihenfolge WLZ, Kirsten, Stefan, Natalie, Lisa, Chantal, Justin, Peter, Roland, WLZ. benötigt das Rentier 69 Schokoladenstückchen und es werden 25 Paare von Kindern in der richtigen Reihenfolge besucht. Das ergibt für Tee Vau Peh $25 \cdot 5 - 69 = 56$ Schokoladenstückchen und alle kleineren Antwortmöglichkeiten 1–7 fallen weg.

Der Rentierschlitten muss an jedem der Orte ein Mal ankommen. Dazu benötigt er mindestens 45 Schokoladenstückchen, weil die Strecken mit dem kleinsten Schokoladenverbrauch wie folgt sind: zu WLZ (von Kirsten) 8, zu Chantal (von Justin) 4, zu Justin (von Chantal) 4, zu Lisa (von Natalie) 3, zu Kirsten (von Lisa) 6, zu Natalie (von Lisa) 3, zu Peter (von Roland) 5, zu Roland (von Peter) 5, zu Stefan (von Natalie) 7. Wenn alle Kinder in der richtigen Reihenfolge besucht werden, bekommt Tee Vau Peh vom Weihnachtsmann

$$7 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + \dots + 1 \cdot 5 = 140$$

Schokoladenstückchen. Damit kann es keine Lösung geben, bei der der Wichtel mehr als $140 - 45 = 95$ Schokoladenstückchen bekommt.

140 Schokoladenstücke Belohnung bekommt der Wichtel allerdings nur, wenn er die Kinder genau in der Reihenfolge ihrer Boshaftigkeit besucht. Dann allerdings hat er Wegkosten von 91 und behält am Ende nur 49 Schokoladenstücke. Auch 135 Schokoladenstücke kann er nur sehr selten bekommen, nämlich genau dann, wenn er die Kinder in der Reihenfolge besucht, die im wesentlichen der Boshaftigkeit entspricht, bei der aber genau ein Mal ein Kind genau vor dem nächstschlimmeren besucht wird. Dafür gibt es sieben Möglichkeiten. Allerdings sind in allen diesen Fällen die Wegkosten viel höher als 45 (82, 84, 84, 92, 96, 101 und 108). Wir können die Abschätzung $140 - 45$ also verbessern zu $130 - 45 = 85$.

Daher fallen die Antwortmöglichkeiten 9 und 10, die größere Gewinne als 85 versprechen, auch weg. Richtig ist also Antwort 8.

12 Milch

Autor: Haio Broersma, Rudi Pendavingh



12.1 Aufgabe

Der Grinch und Knecht Ruprecht teilen unter einander vier Fässer mit je 40 Litern Milch auf. Der Grinch gibt Ruprecht zunächst vier Gutscheine, von denen zwei mit dem Wort LINKS und zwei mit LINKS-ODER-RECHTS beschriftet sind. Der Aufteilungsprozess geht über vier Runden.

Zu Beginn der k -ten Runde ($k = 1, 2, 3, 4$) teilt der Grinch die Milch des k -ten Fasses auf einen linken und einen rechten Bottich (je 40l groß) vollständig auf. Knecht Ruprecht sieht sich die beiden Bottiche genau an und übergibt dem Grinch dann einen seiner Gutscheine. Wenn Ruprecht einen Gutschein mit dem Wort LINKS-ODER-RECHTS übergibt, so darf er einen der beiden Bottiche beliebig auswählen. Wenn Ruprecht den Gutschein mit dem Wort LINKS übergibt, so muss er den linken Bottich wählen. Ruprecht entnimmt dann die komplette Milch aus dem gewählten Bottich, und der Grinch die aus dem anderen Bottich.

Der Grinch und Knecht Ruprecht treffen in jeder Runde die für sie bestmöglichen Entscheidungen. Wieviele Liter Milch kann sich Knecht Ruprecht sichern?

Antwortmöglichkeiten:

1. 72 Liter
2. 71 Liter
3. 70 Liter
4. 69 Liter
5. 68 Liter
6. 67 Liter
7. 66 Liter
8. 65 Liter
9. 64 Liter
10. 63 Liter

12.2 Lösung

Antwort Nummer 8 ist richtig

Diese Aufgabe löst man am besten, indem man sie rückwärts angeht und sie vom Ende aus (wo nur noch ein Gutschein übrig ist) bis zum Anfang (wo noch alle vier Gutscheine verfügbar sind) durchdenkt. Beginnen wir also mit der vierten und letzten Runde:

(4a) Falls Ruprecht noch einen LINKS Gutschein hat, so schüttet der boshafte Grinch natürlich den gesamten Inhalt des vierten Fasses in den rechten Bottich. Ruprecht muss den leeren linken Bottich wählen und erhält 0 Liter Milch.

(4b) Falls Ruprecht noch einen LINKS-ODER-RECHTS Gutschein hat, wird Ruprecht sich auf jeden Fall den volleren Bottich nehmen. Der Grinch gibt daher je 20 Liter in beide Bottiche, und Ruprecht erhält genau 20 Liter Milch.

Die Analyse der dritten Runde baut auf unsere Ergebnisse (4a) und (4b) auf. Die vom Grinch in dieser Runde in den linken Bottich gegebene Milchmenge bezeichnen wir mit x .

(3a) Falls Ruprecht noch zwei LINKS Gutscheine hat, so schüttet der Grinch das gesamte Fass in den rechten Bottich und setzt $x = 0$. Insgesamt erhält Ruprecht dann aus dritter und vierter Runde (siehe 4a) genau 0 Liter Milch.

(3b) Falls Ruprecht noch zwei LINKS-ODER-RECHTS Gutscheine hat, so kann er sich den volleren Bottich nehmen. Der Grinch gibt daher je 20 Liter in beide Bottiche. Insgesamt erhält Ruprecht aus dritter und vierter Runde (siehe 4b) 40 Liter Milch.

(3c) Falls Ruprecht noch einen LINKS und einen LINKS-ODER-RECHTS Gutschein hat, unterscheiden wir zwei Fälle für x . Wenn $x \geq 10$, dann nimmt Ruprecht den linken Bottich mit dem LINKS Gutschein; er erhält dann aus der dritten Runde und aus (4b) mindestens $x + 20 \geq 30$ Liter Milch. Wenn $x < 10$, dann nimmt Ruprecht den rechten Bottich mit dem LINKS-ODER-RECHTS Gutschein; er erhält dann aus der dritten Runde $40 - x \geq 30$ Liter Milch und 0 Liter aus (4a). Ruprecht kann sich also auf jeden Fall 30 Liter Milch aus dritter und vierter Runde sichern. Und der Grinch wählt natürlich $x = 10$, sodass Ruprecht nicht mehr als 30 Liter bekommt.

Die Analyse der zweiten Runde baut auf unsere Ergebnisse (3a), (3b) und (3c) auf. Die vom Grinch in den linken Bottich gegebene Milchmenge bezeichnen wir mit y .

(2a) Angenommen, Ruprecht hat noch einen LINKS-ODER-RECHTS und zwei LINKS Gutscheine. Wenn $y \geq 5$, so nimmt Ruprecht den linken Bottich mit einem LINKS Gutschein; zusammen mit (3c) sichert er sich so $y + 30 \geq 35$ Liter Milch. Wenn $y < 5$, so nimmt Ruprecht den rechten Bottich mit dem LINKS-ODER-RECHTS

Gutschein; zusammen mit (3a) sichert er sich $40 - y \geq 35$ Liter Milch. Ruprecht kann sich also in beiden Fällen 35 Liter Milch sichern. Der Grinch kann mit $y = 5$ verhindern, dass Ruprecht mehr als 35 Liter bekommt.

(2b) Angenommen, Ruprecht hat noch einen LINKS und zwei LINKS-ODER-RECHTS Gutscheine. Wenn $y \geq 15$, so nimmt Ruprecht den linken Bottich mit dem LINKS Gutschein; zusammen mit (3b) sichert er sich so $y + 40 \geq 55$ Liter Milch. Wenn $y < 15$, so nimmt Ruprecht den rechten Bottich mit einem LINKS-ODER-RECHTS Gutschein; zusammen mit (3c) sichert er sich $(40 - y) + 30 \geq 55$ Liter Milch. Ruprecht kann sich also in beiden Fällen 55 Liter Milch sichern, und der Grinch kann mit $y = 15$ jedes bessere Resultat für Ruprecht verhindern.

Schlussendlich analysieren wir die erste Runde, in der der Grinch z Liter Milch in den linken Bottich tut. Wenn $z \geq 10$, nimmt Ruprecht den linken Bottich mit einem LINKS Gutschein; zusammen mit (2b) garantiert ihm das $z + 55 \geq 65$ Liter Milch. Wenn $z < 10$, nimmt Ruprecht den rechten Bottich mit einem LINKS-ODER-RECHTS Gutschein; zusammen mit (2a) garantiert ihm das $(40 - z) + 35 \geq 65$ Liter Milch. Ruprecht kann sich also auf jeden Fall 65 Liter Milch sichern. Der Grinch kann mit $z = 10$ verhindern, dass Ruprecht mehr als 65 Liter bekommt.

Zusammengefasst: Ruprecht sichert sich 65 Liter Milch, und Antwort #8 ist korrekt.

13 Wunschzetteloptimierung

Autor: Yann Disser, Max Klimm, Sebastian Stiller



13.1 Aufgabe

Geschenke gibt's fürs Bravsein. Aber es hilft auch, wenn man seine Wunschliste klug sortiert. Je nachdem wie brav ein Kind war, reserviert der Weihnachtsmann unterschiedlich viel Gewicht auf seinem Schlitten für die Geschenke dieses Kindes. Der Weihnachtsmann packt innerhalb dieses Gewichtsrahmens in der Reihenfolge des Wunschzettels, d.h. er probiert zunächst den ersten Gegenstand auf der Liste einzupacken, danach den zweiten und so weiter bis zum Ende der Liste. Immer wenn ein Gegenstand vom Gewicht her noch dazu kann, lädt er ihn unwiderruflich auf. Andernfalls wird der Gegenstand unwiderruflich nicht eingepackt, und der Weihnachtsmann macht mit dem nächsten Gegenstand auf der Liste weiter.

Es ist also sehr wichtig, in welcher Reihenfolge man seine Wünsche auf die Liste setzt. Dabei gibt es zwei Probleme. Erstens weiß kaum jemand, für wie brav einen der Weihnachtsmann hält, d.h. wie viel Gewicht man reserviert bekommt. Zweitens hat jedes Geschenk ein festes Gewicht, nach dem sich der Weihnachtsmann richtet, und einen festen Wert, um den es den Kindern geht. (Man will schließlich nicht besonders schwere, sondern besonders schöne Geschenke.)

Basti, Moritz, Paula, Vera und Ruprecht wünschen sich dieses Jahr alle die gleichen Gegenstände zu Weihnachten. Jeder von ihnen hat seine eigene Strategie, die Reihenfolge dieser Gegenstände auf seinem Wunschzettel zu bestimmen:

- Basti sortiert die Gegenstände absteigend nach Wert.
- Moritz sortiert die Gegenstände aufsteigend nach Gewicht.
- Paula sortiert die Gegenstände absteigend nach Gewicht.
- Vera berechnet für jeden Gegenstand die sogenannte Dichte, d.h. Wert geteilt durch das Gewicht, und sortiert dann die Gegenstände absteigend nach Dichte.
- Ruprecht kennt das Gewicht, das ihm zugeteilt wird, und schreibt den Wunschzettel so, dass der Gesamtwert der ihm zukommenden Geschenke maximal ist.

Der Weihnachtsmann findet alle fünf gleich brav, d.h. für jeden ist das gleiche Gewicht reserviert. Welche der folgenden Aussagen ist auf jeden Fall korrekt, egal welche Gegenstände sich die Fünf wünschen und wie groß das reservierte Gewicht ist?

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Gesamtwert von Bastis Geschenken ist mindestens so groß wie jeweils der von Moritz, Paula und Vera.
2. Der Gesamtwert von Moritz' Geschenken ist mindestens so groß wie jeweils der von Basti, Paula und Vera.
3. Der Gesamtwert von Paulas Geschenken ist mindestens so groß wie jeweils der von Basti, Moritz und Vera.
4. Der Gesamtwert von Veras Geschenken ist mindestens so groß wie jeweils der von Basti, Moritz und Paula.
5. Der Gesamtwert von Bastis Geschenken ist mindestens ein Viertel des Gesamtwerts von Ruprechts.
6. Der Gesamtwert von Moritz' Geschenken ist mindestens ein Viertel des Gesamtwerts von Ruprechts.

7. Der Gesamtwert von Paulas Geschenken ist mindestens ein Viertel des Gesamtwerts von Ruprechts.
8. Der Gesamtwert von Veras Geschenken ist mindestens ein Viertel des Gesamtwerts von Ruprechts.
9. Wenn alle Geschenke die gleiche Dichte haben, ist der Gesamtwert der Geschenke von Basti und Paula jeweils mindestens halb so groß wie der von Ruprecht.
10. Wenn alle Geschenke die gleiche Dichte haben, ist der Gesamtwert der Geschenke von Moritz mindestens halb so groß wie der von Ruprecht.

13.2 Lösung

Nummer 9 ist richtig.

Zu Weihnachten schicken alle Kinder dem Weihnachtsmann ihren Wunschzettel mit einer Liste von Gegenständen. Der Weihnachtsmann packt für jedes Kind einen Sack, dessen Größe davon abhängt, wie brav das Kind im vergangenen Jahr war. Die Wunschliste wird dabei in Reihenfolge abgearbeitet, das heißt, der Weihnachtsmann versucht zunächst den ersten Gegenstand auf der Liste einzupacken, danach den zweiten, und so weiter bis zum Ende der Liste. Immer wenn ein Gegenstand in den Sack passt, bleibt er im Sack, andernfalls wird er nicht eingepackt und der Weihnachtsmann macht mit den anderen Gegenständen der Liste weiter. (Wir gehen hier vereinfachend davon aus, dass sowohl die Größe des Sackes als auch die Größe der Gegenstände durch eine natürliche Zahl beschrieben werden und dass eine Menge von Gegenständen genau dann in den Sack passt, wenn die Summe der Größen kleiner gleich der Größe des Sackes ist.)

Sie kennen die Größe und den Wert der Gegenstände, wissen aber nicht, wie groß der Sack sein wird, den der Weihnachtsmann für sie auswählt. Natürlich wollen die Fünf den Gesamtwert aller Gegenstände in ihrem jeweiligen Geschenkesack maximieren. Wir nehmen an Basti, Moritz, Paula, Vera und Ruprecht bekommen dieses Jahr einen Sack gleicher Größe, wir geben von den Gegenständen (Wert, Größe) an.

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Gesamtwert von Bastis Geschenken ist mindestens so groß wie jeweils der von Moritz, Paula und Vera.
Nein, bei $(3,3),(2,2),(2,2)$ und Kapazität 4 erhält Basti 3, aber Moritz 4
2. Der Gesamtwert von Moritz' Geschenken ist mindestens so groß wie jeweils der von Basti, Paula und Vera.
Nein, bei $(1,1),(2,2)$ und Kapazität 2 erhält Moritz 1, aber Basti 2
3. Der Gesamtwert von Paulas Geschenken ist mindestens so groß wie jeweils der von Basti, Moritz und Vera.
Nein, bei $(3,3),(2,2),(2,2)$ und Kapazität 4 erhält Paula 3, aber Moritz 4
4. Der Gesamtwert von Veras Geschenken ist mindestens so groß wie jeweils der von Basti, Moritz und Paula.
Nein, bei $(2,1),(3,3)$ und Kapazität 3 erhält Vera 2, aber Basti 3

5. Der Gesamtwert von Bastis Geschenken ist mindestens ein Viertel des Gesamtwerts von Ruprechts.
Nein, bei $(6,6), (5,1), (5,1), (5,1), (5,1), (5,1)$ und Kapazität 6 erhält Basti 6, Ruprecht aber 25
6. Der Gesamtwert von Moritz' Geschenken ist mindestens ein Viertel des Gesamtwerts von Ruprechts.
Nein, bei $(1,1), (5,5)$ und Kapazität 5 erhält Moritz 1, Ruprecht aber 5
7. Der Gesamtwert von Paulas Geschenken ist mindestens ein Viertel des Gesamtwerts von Ruprechts.
Nein, bei $(1,2), (5,1)$ und Kapazität 2 erhält Paula 1, Ruprecht aber 5
8. Der Gesamtwert von Veras Geschenken ist mindestens ein Viertel des Gesamtwerts von Ruprechts.
Nein bei $(1,1), (5,6)$ und Kapazität 6 erhält Vera 1, Ruprecht aber 5
9. Wenn alle Geschenke die gleiche Dichte haben, ist der Gesamtwert der Geschenke von Basti und Paula jeweils mindestens halb so groß wie der von Ruprecht.
Ja. In den Extremfällen (es kann kein Geschenk oder es können alle Geschenke geladen werden) haben alle den selben Wert. Im allgemeinen Fall nutzen Basti und Paula mindestens die Hälfte der möglichen Ladekapazität. Entweder das schwerste Geschenk nutzt über die Hälfte der Ladekapazität oder es kann immer noch ein nächst leichteres geladen werden.
10. Wenn alle Geschenke die gleiche Dichte haben, ist der Gesamtwert der Geschenke von Moritz mindestens halb so groß wie der von Ruprecht.
Nein, siehe oben

14 Xmasium

Autor: Rudi Pendavingh, Frits Spieksma



14.1 Aufgabe

Im Forschungslabor des Weihnachtsmanns wurde ein neues chemisches Element entdeckt und (in Anlehnung an die berühmten Elemente Rubidium, Cäsium und Francium) auf den Namen *Xmasium* getauft. Knecht Ruprecht hat einige Xmasium-Atome auf die Zahlengerade gelegt und ihr Verhalten beobachtet:

- Liegt ein Xmasium-Atom auf der Zahl m , so kann es sich in zwei neue Xmasium-Atome spalten, die dann auf den Zahlen $m - 1$ und $m + 1$ zu liegen kommen.
- Liegen zwei Xmasium-Atome auf den Zahlen $n - 1$ und $n + 1$, so können die beiden in ein einziges Atom verschmelzen, das dann auf der Zahl n zu liegen kommt.

Die Xmasium-Atome sind so winzig klein, dass auf jedem Punkt der Zahlengeraden ausreichend Platz für beliebig viele Atome ist. Knecht Ruprecht legt nun ein einziges Xmasium-Atom auf die Zahl 0, lässt die gesamte restliche Zahlengerade völlig leer und geht in die Kantine Mittag essen. Als er zurückkommt, findet er zu seinem Erstaunen wieder nur ein einziges Xmasium-Atom auf der Zahlengeraden vor, das aber auf einer ganzen Zahl z mit $21 \leq z \leq 29$ liegt. Die Frage lautet: Welchen Wert hat diese Zahl z ?

Antwortmöglichkeiten:

1. $z = 21$
2. $z = 22$
3. $z = 23$
4. $z = 24$
5. $z = 25$
6. $z = 26$
7. $z = 27$
8. $z = 28$
9. $z = 29$
10. Aus den Angaben kann man den Wert von z nicht schlüssig ableiten.

14.2 Lösung

Antwort Nummer 4 ist richtig

Nur Antwort #4 mit $z = 24$ ist richtig.

In der Abbildung 4 sehen wir, wie ein Xmasium-Atom von der Zahl 0 zur Zahl 6 wandern kann. Wiederholt man diese Prozedur drei weitere Male (und jeweils geeignet verschoben), so wandert das Atom zunächst weiter nach 12, dann nach 18, und schließlich nach 24. Die Situation mit $z = 24$ ist daher tatsächlich erreichbar.

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	Kommentar
	X								0 spaltet sich
X		X							1 spaltet sich
X	X		X						2 spaltet sich
X	X	X		X					3 spaltet sich
X	X	X	X		X				4 spaltet sich
X	X	X	X	X		X			5 spaltet sich
X	X	X	X	X	X		X		6 spaltet sich
X	X	X	X	X	X	X		X	5 spaltet sich
X	X	X	X	X	*		X	X	4 spaltet sich
X	X	X	X	*	X	X	X	X	1 und 3 verschmelzen
X	X		*	X	X	X	X	X	0 und 2 verschmelzen
X		X	X	X	X	X	X	X	-1 und 1 verschmelzen
	X		X	X	X	X	X	X	0 und 2 verschmelzen
		X		X	X	X	X	X	1 und 3 verschmelzen
			X		X	X	X	X	2 und 4 verschmelzen
				X		X	X	X	3 und 5 verschmelzen
					X		X	X	4 und 6 verschmelzen
						X		X	5 und 7 verschmelzen
							X		

Abbildung 4: Wie ein Xmasium-Atom von 0 nach 6 wandert. Zellen mit Eintrag X enthalten ein einziges Xmasium-Atom und Zellen mit Eintrag * enthalten zwei Xmasium-Atome.

Für eine vollständige Lösung müssen wir noch zeigen, dass keine der anderen acht aufgelisteten Situationen erreichbar ist. Dafür geben wir zwei Argumente an.

Das **erste Argument** untersucht zunächst die Anzahl A_u von Xmasium-Atomen auf ungeraden Zahlen und die Anzahl A_g von Atomen auf geraden Zahlen. Wir

behaupten, dass der Hilfwert $A_g - A_u + 2$ immer durch 3 teilbar ist: Am Anfang liegt ein einziges Xmasium-Atom auf der (geraden) Zahl 0, sodass $A_g = 1$ und $A_u = 0$ und somit $A_g - A_u + 2 = 3$ gilt. Wenn sich ein Atom auf einer geraden Zahl spaltet, so wird dadurch A_g um 1 verringert und gleichzeitig A_u um 2 erhöht; der neue Hilfwert $(A_g - 1) - (A_u + 2) + 2 = (A_g - A_u + 2) - 3$ ist daher wieder durch 3 teilbar. Analog kann man sich die Fälle durchdenken, in denen sich ein Atom auf einer ungeraden Zahl spaltet oder in denen zwei Atome verschmelzen.

Als nächstes betrachten wir die Anzahl B_1 (bzw. B_2) von Xmasium-Atomen auf Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 (bzw. 2) lassen. Wir behaupten, dass der Hilfwert $B_1 - B_2$ immer gerade ist: Am Anfang liegt ein einziges Xmasium-Atom auf 0, sodass $B_1 = B_2 = 0$ gilt und $B_1 - B_2$ gerade ist. Spaltet sich ein Atom auf einer durch 3 teilbaren Zahl, so erhöhen sich B_1 und B_2 jeweils um 1, sodass der Hilfwert unverändert bleibt. Spaltet sich ein Atom auf einer Zahl der Form $3k + 1$, so verringert B_1 sich um 1 und erhöht B_2 sich um 1; der Hilfwert verringert sich um 2 und bleibt gerade. Analog kann man sich die restlichen Fälle von Spaltungen und Verschmelzungen durchdenken.

Wie sieht es nun mit den neun möglichen Werten von z aus? Da am Ende nur noch ein einziges Atom übrig ist, muss entweder $A_g = 0$ und $A_u = 1$ (mit $A_g - A_u + 2 = 1$) gelten, oder $A_g = 1$ und $A_u = 0$ (mit $A_g - A_u + 2 = 3$); wir schlussfolgern, dass z durch 2 teilbar sein muss. Für die Endwerte von B_1 und B_2 sieht man leicht, dass $B_1 = B_2 = 0$ gelten muss; wir schlussfolgern, dass z durch 3 teilbar sein muss. Unter den angegebenen Zahlen ist nur $z = 24$ sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar.

Das **zweite Argument** betrachtet die komplexe Zahl $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, die die Gleichungen $x^3 = -1$ und $x^6 = 1$ erfüllt und somit eine sechste Einheitswurzel ist. Man rechnet leicht die folgenden Fakten nach: $x^{6k} = 1$, und $x^{6k+1} = x$, und $x^{6k+2} = x^2$, und $x^{6k+3} = -1$, und $x^{6k+4} = -x$, und $x^{6k+5} = -x^2$. Da x auch die Gleichung $x = 1 + x^2$ erfüllt, gilt insbesondere

$$x^n = x^{n-1} + x^{n+1} \quad \text{für alle ganzen Zahlen } n.$$

Wir weisen nun jedem auf der Zahl n liegenden Atom das Potenzial $P(n) = x^n$ zu, und wir definieren das Potenzial einer Menge A von Atomen als die Summe der Einzelpotenziale aller Atome in A . Da $x^n = x^{n-1} + x^{n+1}$ gilt, lassen Atomspaltungen und Atomverschmelzungen das Potenzial einer Situation unverändert. Das Potenzial der Anfangssituation mit einem Xmasium-Atom auf der Zahl 0 beträgt $x^0 = 1$. Das Potenzial der Situationen mit $z = 21$ und $z = 27$ beträgt $-1 \neq 1$; das Potenzial der Situationen mit $z = 22$ und $z = 28$ beträgt $-x \neq 1$; das Potenzial der Situationen mit $z = 23$ und $z = 29$ beträgt $-x^2 \neq 1$; das Potenzial der Situation mit $z = 25$

beträgt $x \neq 1$ und das Potenzial der Situation mit $z = 26$ beträgt $x^2 \neq 1$. Daher ist keine dieser acht Situationen von der Anfangssituation aus erreichbar.

15 Kaninchen

Autor: Cor Hurkens, Gerhard Woeginger



15.1 Aufgabe

Knecht Ruprecht hat sein großes, rechteckiges Kaninchenkehege durch vier waagerechte und vier senkrechte Gitterzäune in 25 kleinere, rechteckige Gehege unterteilt. Jeder Gitterzaun reicht von einer Seite des Geheges bis zur gegenüberliegenden Seite. Das folgende Bild gibt die Form der Aufteilung und die Flächen von einigen dieser kleineren Gehege an (Achtung! Das Bild ist nicht maßstabsgetreu!)

		39		30
	24			X
			26	16
35	Y	42		
22			Z	

Ruprecht kratzt sich am Kopf und fragt sich: Kann man aus den bekannten Flächeninhalten die drei Flächen X , Y und Z berechnen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Ja, sicher: $X = 25$, $Y = 27$, $Z = 32$.
2. Ja, sicher: $X = 26$, $Y = 28$, $Z = 33$.
3. $X = 26$ und $Y = 27$, aber Z kann man aus den Angaben nicht bestimmen.
4. $X = 26$ und $Z = 32$, aber Y kann man aus den Angaben nicht bestimmen.
5. $Y = 28$ und $Z = 32$, aber X kann man aus den Angaben nicht bestimmen.
6. $X = 25$, aber Y und Z kann man aus den Angaben nicht bestimmen.
7. $Y = 28$, aber X und Z kann man aus den Angaben nicht bestimmen.
8. $Z = 33$, aber X und Y kann man aus den Angaben nicht bestimmen.
9. Aus den Angaben kann keine der drei Flächen X , Y und Z bestimmt werden.
10. Aus den Angaben kann man nur herleiten, dass X , Y , Z gleich groß sind.

15.2 Lösung

Die richtige Antwort ist Nummer 8

Die korrekte Antwort ist #8. Die folgende Abbildung bezeichnet die fünf horizontalen Längen der kleinen Gehege mit a, b, c, d, e und ihre fünf vertikalen Längen mit s, t, u, v, w . Wir fassen nun das Produkt $acdestuw$ auf zwei verschiedene Arten zusammen:

$$22 \cdot 42 \cdot 26 \cdot 30 = (as)(ct)(du)(ew) = (at)(cw)(eu)(ds) = 35 \cdot 39 \cdot 16 \cdot Z$$

Daraus erhalten wir den Wert $Z = 33$.

w			39		30
v		24			X
u				26	16
t	35	Y	42		
s	22			Z	
	a	b	c	d	e

Wie sieht es nun mit den Flächen X und Y aus? Eine mögliche Teilbelegung unserer zehn Variablen ist $a = 65/6$, $c = 13$, $d = 65/4$, $e = 10$, $s = 132/65$, $t = 42/13$, $u = 8/5$, $w = 3$ (wobei b und v unbelegt bleiben). Diese Teilbelegung ergibt die korrekten Flächen 39, 30, 26, 16, 35, 42 und 22, und legt außerdem alle im folgenden Bild mit einem Stern markierten Flächen fest:

3	*		39	*	30
v		24			X
8/5	*		*	26	16
42/13	35	Y	42	*	*
132/65	22		*	Z	*
	65/6	b	13	65/4	10

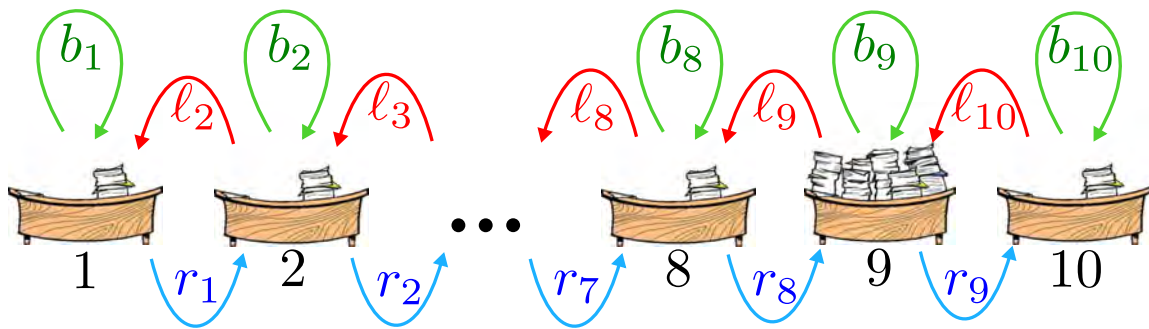
Wenn wir die Teilbelegung nun mit $b = 1$ und $v = 24$ vervollständigen, so hat jede bekannte Zelle den korrekten Flächeninhalt und es gilt $X = 240$ und $Y = 42/13$. Wenn wir die Teilbelegung hingegen mit $b = 3$ und $v = 8$ vervollständigen, so hat zwar wieder jede bekannte Zelle den korrekten Flächeninhalt, aber es gilt auf einmal $X = 80$ und $Y = 126/13$. Folglich können die beiden Flächen X und Y aus den Angaben nicht exakt bestimmt werden.

16 Das Verwaltungsbüro des Marko V.

Autor: M. Liero, A. Glitzky



16.1 Aufgabe



In der Adventszeit ist im Verwaltungsbüro des Weihnachtsmanns verständlicherweise viel los. An zehn Arbeitsplätzen bearbeiten Elfen Anfragen, Bestellungen und Last-Minute-Wunschlisten.

Wie in Verwaltungen üblich werden hier die Dokumente, deren Anzahl die der Schreibtische weit übersteigt, am Arbeitsplatz gestempelt und dann einfach von

einem Schreibtisch auf den nächsten geschoben. Dabei lässt sich Folgendes beobachten: Am Arbeitsplatz i geht ein Dokument mit Wahrscheinlichkeit ℓ_i zum linken und mit Wahrscheinlichkeit r_i zum rechten Nachbarn. Insbesondere bleibt es also zur Selbstkontrolle mit Wahrscheinlichkeit $b_i = 1 - \ell_i - r_i$ am i ten Arbeitsplatz. Da der erste Arbeitsplatz keinen linken und der letzte keinen rechten Nachbarn hat, gilt hier $\ell_1 = r_{10} = 0$.

Zu Beginn des Arbeitstages liegen auf jedem Schreibtisch gleich viele Unterlagen. Im Minutentakt werden nun die Dokumente nach dem obigen Schema munter verschoben. Dabei bleibt die Anzahl der Dokumente stets gleich. Ferner beeinflussen sich die einzelnen Dokumente auf ihrer Reise nicht gegenseitig.

Da die Zeit am Nordpol viel langsamer als im Rest der Welt vergeht, stellt sich bereits am frühen Nachmittag ein Gleichgewicht ein. Die statistische Verteilung der Dokumente auf den Schreibtischen ändert sich nicht mehr. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Dokument am Platz i zu finden, ändert sich in den folgenden Schritten nicht mehr.

Der Elf Marko V. arbeitet am neunten Arbeitsplatz und ist ein totaler Workaholic. Er hat eine Möglichkeit gefunden seine beiden Nachbarn zu manipulieren (vornehmlich mit Lebkuchen und Glühwein). Er kann einen Parameter $a \in [0, \infty)$ zu seinem Vorteil kontrollieren. Dieser Parameter bestimmt die Übergangswahrscheinlichkeiten nach links und rechts in der Form $r_8 = a \ell_9$ und $r_9 = a \ell_{10}$. Für die übrigen Übergangswahrscheinlichkeiten gilt $r_i = 2 \ell_{i+1}$.

Wie muss Marko a wählen, damit er sich am Ende des Tages über möglichst viele Dokumente auf seinem Schreibtisch freuen kann?

Antwortmöglichkeiten:

1. $a = 1$
2. $a = \sqrt[10]{2^{10} - 2}$
3. $a = \pi$
4. $a = 1 + 2^{10}$
5. $a = \frac{5}{2}$
6. $a = \sqrt{2^7 - 100}$
7. $a = 42$
8. $a = 0$

9. $a = \sqrt{2 - 2^{-7}}$

10. $a = 10\sqrt{2^5 + 1}$

16.2 Lösung

Die richtige Antwort ist Nummer 9

Unsere Strategie ist folgende: (i) Wir suchen eine Formel, die die zufällige Reise eines Dokuments auf den Schreibtischen beschreibt, (ii) wir leiten eine Formel für die Gleichgewichtsverteilung (p_1^*, \dots, p_{10}^*) des Dokuments her, und (iii) maximieren die Wahrscheinlichkeit $p_9^* = p_9^*(a)$ für den neunten Arbeitsplatz bezüglich des Parameters a . Das Gesetz der großen Zahlen liefert uns dann, dass die Anzahl der Dokumente am neunten Arbeitsplatz durch $M_{\text{Dok}} p_9^*$ gegeben ist (M_{Dok} ist die Zahl aller Dokumente). Wir betrachten auf der Menge $\{1, \dots, 10\}$ eine Wahrscheinlichkeitsbedingung (p_1, \dots, p_{10}) , d.h., p_i gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Dokument auf dem i ten Schreibtisch zu finden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach dem Weiterreichen der Dokumente ist dann gegeben durch $p^{\text{next}} = F(p)$, wobei

$$\begin{aligned} p_1^{\text{next}} &= \ell_2 p_2 & + b_1 p_1 \\ p_i^{\text{next}} &= \ell_{i+1} p_{i+1} + b_i p_i & + r_{i-1} p_{i-1}, \quad i = 2, \dots, 9 \\ p_{10}^{\text{next}} &= & + b_{10} p_{10} + r_9 p_9. \end{aligned}$$

Im Gleichgewicht muss nun gelten $p^* = F(p^*)$ (die statistische Verteilung ändert sich nicht mehr). Benutzen wir die Identitäten $b_1 = 1 - r_1$, $b_i = 1 - r_i - \ell_i$ und $b_{10} = 1 - r_{10}$ erhalten wir damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= \ell_2 p_2^* & - r_1 p_1^* \\ 0 &= \ell_{i+1} p_{i+1}^* - r_i p_i^* & - \ell_i p_i^* + r_{i-1} p_{i-1}^*, \quad i = 2, \dots, 9 \\ 0 &= & - \ell_{10} p_{10}^* + r_9 p_9^*. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$p_k^* = \frac{r_{k-1}}{\ell_k} p_{k-1}^* = \frac{r_{k-1}}{\ell_k} \frac{r_{k-2}}{\ell_{k-1}} \dots \frac{r_1}{\ell_2} p_1^* \quad \text{für } k = 2, \dots, 10.$$

Da p^* eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss ferner $\sum_{k=1}^{10} p_k^* = 1$ gelten. Benutzen wir zusätzlich die Beziehungen $r_{k-1}/\ell_k = 2$ für $k = 2, \dots, 8$ und $r_8/\ell_9 = r_9/\ell_{10} = a$ führt dies auf

$$\begin{aligned} 1 &= p_1^* \left(1 + \sum_{k=2}^{10} \frac{r_{k-1}}{\ell_k} \frac{r_{k-2}}{\ell_{k-1}} \dots \frac{r_1}{\ell_2} \right) \\ &= p_1^* \left(\sum_{k=1}^8 2^{k-1} + 2^7 a + 2^7 a^2 \right). \end{aligned}$$

Der erste Term ist eine endliche geometrische Summe, es gilt also

$$p_1^* = \frac{1}{2^8 - 1 + 2^7 a + 2^7 a^2}, \quad p_9^* = \frac{2^7 a}{2^8 - 1 + 2^7 a + 2^7 a^2}.$$

Man überprüft leicht, dass $p_9^* = p_9^*(a_*)$ maximal ist, wenn gilt $a_* = \sqrt{2 - 2^{-7}} \approx 1.411$.

17 Probleme bei der Landung mit dem Zauberschlitten

Autor: Merlijn Staps



17.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann will mit seinem fliegenden Zauberschlitten auf einer quadratischen Waldlichtung landen. Allerdings behindern ihn dabei zwei auf der Lichtung stehende Tannen (diese sind als punktförmig anzunehmen).

Um landen zu können, braucht der Schlitten ein freies, rechteckiges Gebiet von 10 Quadratmeter Größe. Da es sich um einen Zauberschlitten handelt, ist es egal, wie lang die Seiten dieses rechteckigen Gebietes sind. Der Schlitten kann z.B. auf einem rechteckigen Gebiet von 5 Meter mal 2 Meter landen, aber auch auf einem schmalen Streifen von 100 Meter mal 10 cm. Die Seiten des Landungsgebietes müssen aber parallel zu den Rändern der Lichtung verlaufen, und im Landungsgebiet darf keine Tanne stehen.

Wie groß muss die quadratische Lichtung mindestens sein, damit der Schlitten in jedem Fall landen kann, unabhängig davon, wo auf der Lichtung die zwei Tannen stehen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 10 Quadratmeter
2. $5(2 + \sqrt{3}) = \frac{5}{2-\sqrt{3}}$ Quadratmeter
3. 20 Quadratmeter
4. $5(2 + \sqrt{5}) = \frac{5}{\sqrt{5}-2}$ Quadratmeter
5. 25 Quadratmeter
6. $\frac{50}{31}(9 + 5\sqrt{2}) = \frac{50}{9-5\sqrt{2}}$ Quadratmeter
7. $5(3 + \sqrt{5}) = \frac{20}{3-\sqrt{5}}$ Quadratmeter
8. $10(1 + \sqrt{3}) = \frac{20}{\sqrt{3}-1}$ Quadratmeter
9. $20\sqrt{2}$ Quadratmeter
10. 30 Quadratmeter

17.2 Lösung

Die 7. Antwort ist richtig

Wir beweisen also, dass $5(3 + \sqrt{5}) = \frac{20}{3 - \sqrt{5}}$ Quadratmeter die kleinste mögliche Fläche ist.

Sei a die Seitenlänge der Lichtung.

Wir beweisen erst, dass der Schlitten landen kann, wenn die Fläche a^2 der Lichtung größer ist als $\frac{20}{3 - \sqrt{5}}$. Seien $D_1 = (x_1, y_1)$ und $D_2 = (x_2, y_2)$ die Koordinaten der Tannen. (Die Eckpunkte der Lichtung haben die Koordinaten $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$, (a, a)). Wir nehmen an, dass $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$ gilt, anderenfalls drehen wir das Quadrat. Wir betrachten die Rechtecke R_1 links von D_1 , R_2 oberhalb von D_2 , und R_3 rechts von D_1 und unterhalb von D_2 . Diese drei Rechtecke haben die Flächen ax_1 , $a(a - y_2)$, bzw. $(a - x_1)y_2$. Wir zeigen, dass eine dieser Flächen größer als 10 Quadratmeter ist. Anderenfalls gilt $ax_1 \leq 10$, $a(a - y_2) \leq 10$ und $(a - x_1)y_2 \leq 10$. Dann ist

$$10 \geq (a - x_1)y_2 \geq \left(a - \frac{10}{a}\right) \left(a - \frac{10}{a}\right) = \left(a - \frac{10}{a}\right)^2 = a^2 - 20 + \frac{100}{a^2},$$

also $0 \geq a^4 - 30a^2 + 100$. Es folgt $a^2 \leq \frac{30 + \sqrt{900 - 400}}{2} = \frac{30 + 10\sqrt{5}}{2} = \frac{20}{3 - \sqrt{5}}$, im Widerspruch zur Voraussetzung $a^2 > \frac{20}{3 - \sqrt{5}}$.

Ist die Fläche a^2 des Quadrats kleiner als $\frac{20}{3 - \sqrt{5}}$, dann wählen wir $D_1 = a\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$ und $D_2 = a\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$ als Positionen der Tannen. Wir betrachten die Rechtecke R_1 unterhalb von D_1 , R_2 horizontal zwischen D_1 und D_2 , R_3 oberhalb von D_2 und R_4 rechts von D_1 und unterhalb von D_2 . Jeder mögliche Landeplatz liegt vollständig in einem dieser vier Rechtecke oder im Bild eines dieser Rechtecke bei Spiegelung an der Geraden $y = x$. Deshalb genügt es, zu beweisen, dass jedes dieser Rechtecke eine Fläche von weniger als 10 Quadratmetern hat.

Die Fläche von R_1 ist $a^2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) < \frac{20}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 10$.

Die Fläche von R_2 ist $a^2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) < \frac{20}{3 - \sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5} - 2) = 5(\sqrt{5} - 1) < 10$.

Die Fläche von R_3 ist wegen $a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = a^2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$ gleich der Fläche von R_1 , also kleiner als 10 Quadratmeter.

Die Fläche von R_4 ist $a^2 \left(1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) < \frac{20}{3 - \sqrt{5}} \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 = 10$.

Also kann der Schlitten nicht landen, wenn die Fläche der Lichtung kleiner ist als $\frac{20}{3 - \sqrt{5}}$ und die Tannen auf den angegebenen Punkten stehen.

18 Schwingende Schlitten

Autor: Volker Mehrmann, Lukas Waas



18.1 Aufgabe

Die Startbahn für den Weihnachtsschlitten war ja schon immer ein wenig holprig. So holprig sogar, dass der Schlitten regelmäßig in Schwingungen gerät und schon mal das ein oder andere Paket vom Schlitten rutscht. Die Wichtel dürfen dann in halsbrecherischen Aktionen hinter dem Schlitten hersprinten, um die verlorenen Geschenke wieder auf ihm zu drapieren. Aber Sprintwichtel Bölt kommt langsam in die Jahre und hat ehrlich gesagt auch genug von den Verfolgungsjagden im Schnee und Eis. Er bestellt daher ein neuartiges Schwingungsdämpfungsgerät, das am Schlitten montiert werden soll. Die Firma sagt, das Gerät sei bereits perfekt auf das neue Weihnachtsschlittenmodell eingestellt. Alles könnte so einfach sein und Bölt freut sich auf einen entspannten 24. Dezember, aber gleich bei der ersten Probefahrt kriegt der Schlitten einen Schlag und wieder stürzen alle Pakete vom Postschlitten.

Alle Einstellungen, die die Firma gemacht hat, sind verloren, der Akku hat einen ordentlichen Schaden erlitten und so kurz vor Weihnachten geht dort niemand mehr

ans Telefon. Nach längerer Rücksprache mit den Leuten vom MATHEON, die viel Erfahrung mit den Schwingungssystemen haben, kann er jedoch in Erfahrung bringen, dass die beiden Regler h und k am Gerät so einzustellen sind, dass alle Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^2 + (d - c \cdot h) \cdot x + (b - c \cdot k) \quad (8)$$

reell und kleiner gleich -1 sind, wobei für die Koeffizienten $d=0$; $b=1$; $c=2$ gilt. Weiterhin gilt es, den defekten Akku des Geräts nicht zu überlasten. Die, den Energieverbrauch für die Dämpfung der Schwingung bestimmende Variable W , sollte daher möglichst klein sein.

$$W(h, k) = h^2 + k^2 \quad (9)$$

Wie sind die Parameter h und k zu wählen, bzw. welche der folgenden Aussagen trifft auf die Lösung zu?

Antwortmöglichkeiten:

1. $h > 2, 2; k > -3$
2. $h > 3, 6; k < 1, 1$
3. $h < 2; k > 1, 5$
4. $h > 2, 1; k > 5$
5. $h < 1, 2; k > 5, 2$
6. $h < 3, 6; k < -0, 25$
7. $h < 1, 1; k < 0, 5$
8. $h < -5, 2; k > -0, 5$
9. $h > 1; k > -0, 2$
10. $h > -0, 5; k < 1$

18.2 Lösung

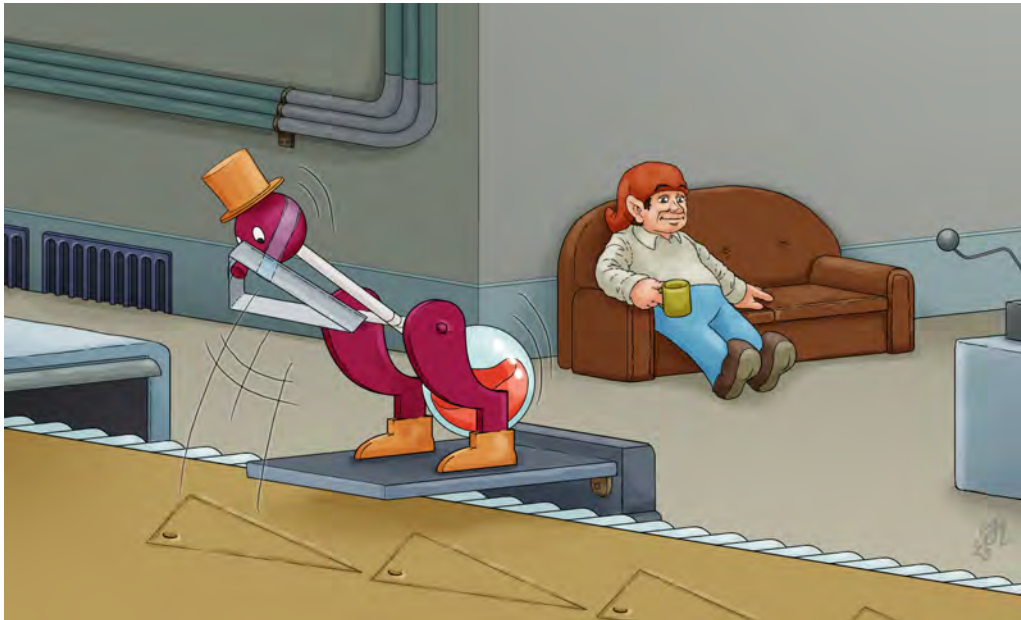
Nummer 7 ist richtig.

Von den Lösungen der Gleichung $x^2 - 2hx + (1 - 2k) = 0$ ($x_{1/2} = h \pm \sqrt{h^2 - 1 + 2k}$) ist bekannt, dass sie reell und kleiner gleich -1 sind. Hieraus folgt, dass gilt $h \leq -1$ ($h \pm w \leq -1$). Für $h = -1$ ist in diesem Fall h^2 minimal und es ergibt sich, dass $k \geq 0$ gilt. Da $k = 0$ ebenfalls den kleinstmöglichen Betrag hat, haben die Parameter die Werte $h = -1$ und $k = 0$.

Auf diese Werte trifft nur Lösung Nr.7 zu.

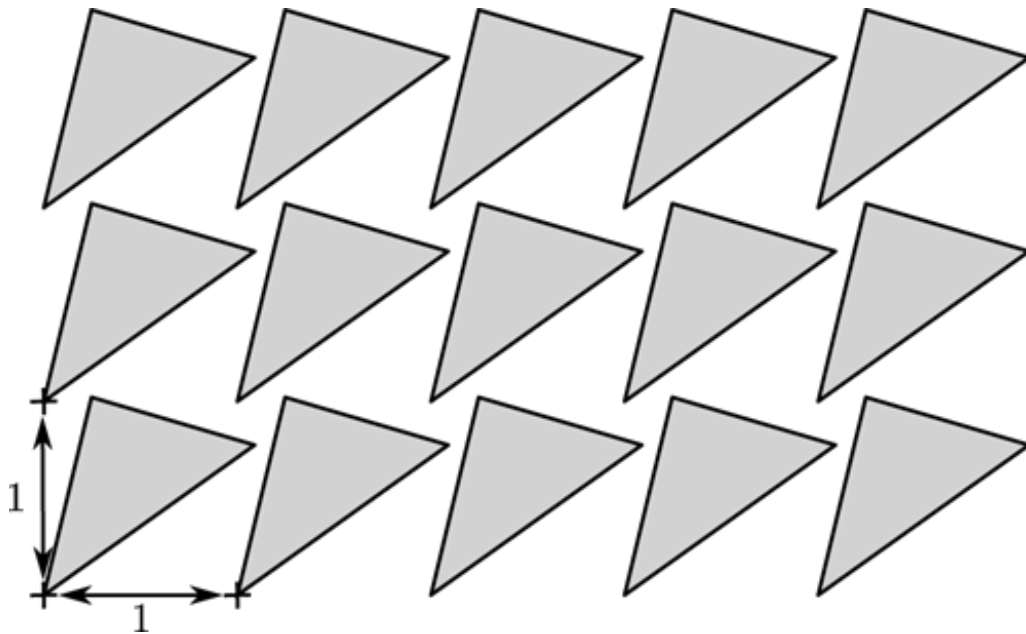
19 Plätzchen

Autor: Boris Springborn



19.1 Aufgabe

Ein Wichtel stantzt mit einer Plätzchenform dreieckige Plätzchen aus einem unendlich großen Plätzchenteig, der die ganze Ebene bedeckt. Zwischen den Stanzungen bewegt er die Form jeweils um eine Längeneinheit nach rechts, links, hinten oder vorne, so dass die Plätzchen auf dem Blech regelmäßig angeordnet sind:



Form und Ausrichtung der dreieckigen Stanzform soll so gewählt werden, dass die Plätzchen möglichst groß sind. Überlappen dürfen sich die Plätzchen dabei nicht, aber sie dürfen sich berühren. Was ist der größtmögliche Flächeninhalt in Quadratlängeinheiten, den ein Plätzchen haben kann?

Antwortmöglichkeiten:

1. $1/2$
2. $4/7$
3. $3/5$
4. $5/8$
5. $2/3$
6. $5/7$
7. $3/4$

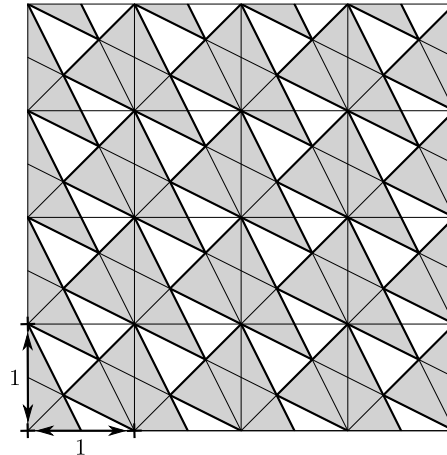
8. $4/5$
9. $5/6$
10. $6/7$

19.2 Lösung

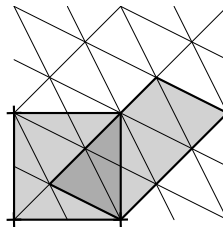
Richtige Lösung: Antwort 5

Der größtmögliche Flächeninhalt der Plätzchen ist $2/3$.

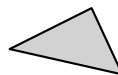
Wie man den Flächeninhalt $2/3$ erreichen kann, sieht man hier:



Jedes Plätzchen besteht aus vier kleinen Dreiecken, die jeweils den Flächeninhalt $1/6$ haben. Ein Parallelogramm aus sechs solchen Dreiecken lässt sich nämlich durch zwei Scherungen in ein Einheitsquadrat verwandeln:



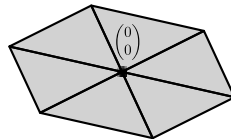
Es bleibt zu zeigen, dass ein größerer Flächeninhalt nicht möglich ist. Betrachte eine Dreiecksfläche D in der Ebene:



Das Überlappungsverbot besagt, dass für beliebige ganze Zahlen n_1 und n_2 , die nicht beide 0 sind, der Schnitt von D mit dem verschobenen Dreieck $D + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ höchstens Punkte am Rand von D enthält.

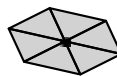
Es bezeichne $D - D$ die Menge aller Vektoren, die als Differenz von Punkten in D vorkommen, also

$$D - D = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Es gibt } P, Q \in D \text{ mit } v = P - Q\}.$$



Das Überlappungsverbot ist genau dann erfüllt, wenn $D - D$ im Inneren keinen ganzzahligen Vektor außer $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält. Wenn nämlich $D - D$ im Inneren einen ganzzahligen Vektor $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält, dann gibt es zwei Punkte P und Q im Inneren von D , so dass $P = Q + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$. Also ist P auch in $D + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ enthalten, und das Überlappungsverbot ist verletzt. Wenn umgekehrt das Überlappungsverbot verletzt ist, dann gibt es einen Punkt P im Inneren von D , der auch im Inneren eines anderen Dreiecks $D + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ enthalten ist. Dann ist aber $P - \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ auch im Inneren von D enthalten, und somit ist $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ als Differenz dieser beiden Punkte im Inneren von $D - D$ enthalten.

Betrachte nun die Menge $S = \frac{1}{2}(D - D)$, die entsteht, wenn man jeden Vektor in $D - D$ halbiert:



Wie D ist auch S punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, d.h. wenn $v \in S$, dann gilt auch $-v \in S$. Deshalb ist die Menge $S - S$ der Differenzen von zwei Punkten in S gleich der Menge $S + S$ der Summen von zwei Punkten in S :

$$\begin{aligned} S - S &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Es gibt } X, Y \in S \text{ mit } v = X - Y\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Es gibt } X, Y \in S \text{ mit } v = X + Y\} = S + S \end{aligned}$$

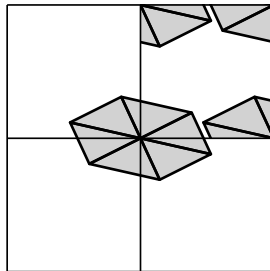
Weil S auch noch konvex ist, ist mit X und Y stets auch $\frac{1}{2}(X + Y)$ in S enthalten. Deshalb gilt

$$S + S = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}v \in S\} = 2S = D - D.$$

Wir haben also gezeigt:

$$S - S = D - D.$$

Daraus folgt: Wenn das Dreieck D das Überlappungsverbot erfüllt, dann enthält auch S im Inneren keine zwei Punkte, deren Differenz ein ganzzahliger Vektor ist. Das bedeutet aber: Wenn man die Ebene \mathbb{R}^2 in lauter Einheitsquadrate zerschneidet und alle Quadrate, die Teile von S enthalten, übereinanderlegt, dann überlappen sich die Teile von S nicht:



(Begründung: Dieses Übereinanderlegen zweier Einheitsquadrate ist eine ganzzahlige Verschiebung eines der beiden Einheitsquadrate. Würden sich nun Teile von S aus diesen beiden Einheitsquadraten überlappen, dann gäbe es zwei Punkte P und Q innerhalb von S , deren Differenz ein ganzzahliger Vektor ist, was ein Widerspruch zu obigen Ausführungen wäre.)

Der Flächeninhalt von S ist also kleiner oder gleich 1. Andererseits ist der Flächeninhalt von S gleich $3/2$ mal dem Flächeninhalt von D (nämlich $1/4$ des Flächeninhalts von $D - D$, und der Flächeninhalt von $D - D$ ist 6 mal der Flächeninhalt von D). Der Flächeninhalt von D ist also höchstens $2/3$.

Übrigens: Für Mathematiker kann man die Aufgabe auch kürzer formulieren: „Was ist das größte Dreieck in einem flachen Torus?“

20 Dodekaeder

Autor: Onno Boxma



20.1 Aufgabe

Eine Raupe kriecht auf den Kanten eines Dodekaeders herum. Sie beginnt ihre Reise in der Ecke A , und ihr Ziel ist die diametral gegenüber liegende Ecke Z des Dodekaeders. In jeder Ecke entscheidet die Raupe sich zufällig für eine der drei anstoßenden Kanten: Mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ kriecht sie die eine Kante entlang, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ kriecht sie die zweite Kante entlang, und mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ kriecht sie wieder auf der Kante zurück, auf der sie gerade gekommen ist. Die Raupe benötigt genau einen Tag, um eine Kantenlänge zurückzulegen. Sobald sie ihren Zielpunkt Z erreicht hat, verwandelt sie sich in einen Schmetterling und fliegt davon. Frage: Wie viele Tage (Erwartungswert) wird die Raupe auf dem Dodekaeder verbringen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 10 Tage
2. 15 Tage
3. 20 Tage
4. 25 Tage
5. 30 Tage
6. 35 Tage
7. 40 Tage
8. 45 Tage
9. 50 Tage
10. 55 Tage

20.2 Lösung

Antwort Nummer 6 ist richtig

Zuerst teilen wir die 20 Ecken des Dodekaeders in sechs Gruppen auf: Die Gruppe G_k ($0 \leq k \leq 5$) enthält all jene Ecken, von denen aus der kürzeste Weg bis zur Ecke Z genau k Kanten durchläuft. Dann ist $G_0 = \{Z\}$, die Gruppe G_1 besteht aus den drei Nachbarecken von Z , die beiden Gruppen G_2 und G_3 bestehen aus jeweils sechs Ecken, die Gruppe G_4 besteht aus den drei Nachbarecken von A , und $G_5 = \{A\}$. Wir beobachten:

- G_0 enthält nur den Zielpunkt Z .
- Jede Ecke in G_1 ist zu einer Ecke in G_0 und zu zwei Ecken in G_2 benachbart.
- Jede Ecke in G_2 ist zu je einer Ecke in G_1 , G_2 und G_3 benachbart.
- Jede Ecke in G_3 ist zu je einer Ecke in G_2 , G_3 und G_4 benachbart.
- Jede Ecke in G_4 ist zu zwei Ecken in G_3 und zu einer Ecke in G_5 benachbart.
- Die Ecke in G_5 ist zu drei Ecken in G_4 benachbart.

Als nächstes führen wir t_k als die erwartete Anzahl von Tagen ein, die die Raupe noch auf dem Dodekaeder verbringen wird, falls sie momentan in einer Ecke der Gruppe G_k sitzt; man sieht leicht, dass dieser Erwartungswert t_k für alle Ecken in G_k genau gleich groß ist. Die obigen sechs Beobachtungen übersetzen sich nun in folgende sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}t_0 &= 0 \\t_1 &= 1 + \frac{1}{3}t_0 + \frac{2}{3}t_2 \\t_2 &= 1 + \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2 + \frac{1}{3}t_3 \\t_3 &= 1 + \frac{1}{3}t_2 + \frac{1}{3}t_3 + \frac{1}{3}t_4 \\t_4 &= 1 + \frac{2}{3}t_3 + \frac{1}{3}t_5 \\t_5 &= 1 + t_4\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $t_1 = 19$, $t_2 = 27$, $t_3 = 32$, $t_4 = 34$ und $t_5 = 35$. Da die Raupe in der Ecke A startet, verbringt sie im Erwartungswert $t_5 = 35$ Tage auf dem Dodekaeder.

21 Kein Fastfood für Rentiere

Autor: Philipp Petersen, Jackie Ma



21.1 Aufgabe

”Ach herrje!” seufzt der Weihnachtsmann, ”diese überanspruchsvollen Rentiere veranstalten wie jedes Jahr einen Aufstand”. Die Hintergrundgeschichte hinter diesem verzweifelten Ausruf lautet wie folgt: Jedes Jahr, sobald der Dezember anfängt, überlegen sich die Rentiere, dass sie nur noch ihre spezielle Rentier-Kraft-Nahrung zu sich nehmen wollen. Insidern ist klar, dass die Inhaltsstoffe weder besonders gesund noch irgendwie nahrhaft sind, geschweige denn, dass man wie der Name zu behaupten scheint, mehr Kraft davon bekäme. Aber so sind Rentiere nun mal, wenn sie sich etwas in den Kopf gesetzt haben, muss es so geschehen und gerade in der Vorweihnachtszeit gehört es zu den unvernünftigsten Aktionen den Rentieren einen Wunsch abzuschlagen.

Zwar ist der Weihnachtsmann an die Rentiere und ihre unvernünftigen Forderungen gewöhnt, jedoch kann er Stress und zusätzliche Aufgaben im Moment weniger gebrauchen als ein Loch im Geschenkesack. Im Fall des Rentieraufstandes könnte das

Problem jedoch schnell gelöst sein, da Papa Noel sich in weiser Voraussicht die Zutaten aufgeschrieben hatte und diese auch denkbar einfach sind. Er braucht nur vier Zutaten: Zucker, Lebkuchenteig, Milch und eine Geheimzutat, aber auf die richtigen Mengen kommt es an. Und daran haperte es die letzten Jahre.

Das klingt ja schön und gut, aber warum hat der Weihnachtsmann nun so einen verzweifelten Gesichtsausdruck aufgesetzt. Der Grund dafür liegt darin, dass er sich letztes Jahr sagte: "Nach dem Stress der vorherigen Jahre mache ich es dieses Jahr verschlüsselt und narrensicher". Verschlüsselt, zumal es ständig vorkommt, dass Rentiere versuchen die Zutaten auszuspionieren und dann wochenlange Feten feiern würden, da sie den Weihnachtsmann ausgetrickst haben. Narrensicherheit ist wichtig, da der Weihnachtsmann sich schon an genug Sachen erinnern muss und sein Gedächtnis damit schon stark belastet ist. Er mag sich gar nicht vorstellen was die Rentiere anstellen würden, sollte sich daraus ein falsches Rezept ergeben. Nun aber hadert er mit seinem neuen Verfahren.

Zum besseren Verständnis der Problematik ist nun langsam mal sein - ach so ausgebufftes - Verfahren aus dem letzten Jahr von Interesse.

Punkt 1 - Die Informationen sollen auf viele verschiedene Orte verteilt werden damit die herum stöbernden Rentiere und auch ihre Komplizen, die Wichtel, nicht zu schnell an die Informationen herankommen.

Punkt 2 - Wie die Erfahrung lehrt, sollte der Weihnachtsmann sich nicht darauf verlassen, dass er alle versteckten Informationen wiederfindet. Der Weihnachtsmann macht also **zwölf** Notizen nach folgendem Prinzip. Auf jeden Notizzettel schreibt er nur eine Zahl, die sich allerdings nach einem komplizierten Verfahren ergibt. So schreibt er sich zunächst die folgenden Zahlen auf:

1. Die Menge von Zucker.
2. Die Menge an Zucker minus die Menge an Lebkuchenteig.
3. Die Menge an Lebkuchenteig plus die Menge an Zucker.

Außerdem addiert er die Informationen über die Mengen von Milch und der Geheimzutat wie folgt:

1. Die Menge an Milch und ein mal die Menge von der Geheimzutat.
2. Minus die Menge an Milch plus die Menge der Geheimzutat.

3. Die Menge an Milch minus die Menge der Geheimzutat.
4. Minus die Menge an Milch minus die Menge der Geheimzutat.

Es ergeben sich zwölf Kombinationen von Zahlen aus beiden Blöcken. Er notiert sich jeweils die Summen der beiden Zahlen und natürlich auch wie diese zustande gekommen sind, also beispielsweise:

”Die Menge an Zucker plus die Menge an Milch minus die Geheimzutat ergibt 5.”

Diese Zettel versteckte er, wobei er sich gemerkt hat wo die Zettel liegen, allerdings weiß er von keinem Zettel mehr was auf ihm steht. Wie das Verfahren funktioniert, würde der Weihnachtsmann allerdings nie vergessen.

Nun hatte er sich zwölf Zahlen notiert und das für nur vier Zutaten. Völlig überflüssig, dachte sich der Weihnachtsmann im letztem Jahr, doch es ist eingetreten was eintreten musste. Der Weihnachtsmann erinnert sich nicht mehr an alle Verstecke der zwölf Zettel. Trotzdem weicht sein besorgter Gesichtsausdruck langsam einem triumphierenden Grinsen und er postuliert: ”Ich erinnere mich gerade an die (minimale) notwendige Anzahl der Verstecke um das Rezept in jedem Fall zu rekonstruieren.” An wie viele Verstecke erinnert sich der Weihnachtsmann (mindestens)?

Just als der Weihnachtsmann sich aufmacht die ersten Zettel einzusammeln, trifft er den frechen Wichtel Arthur, der ihn mit der nächsten Schreckensbotschaft neckt. Angeblich haben die Wichtel einen der 12 Zettel gefunden und gegen eine Fälschung mit einer anderen Zahl ausgetauscht. Welcher Zettel gefälscht ist, will Arthur aber nicht verraten. Der gutmütige Weihnachtsmann hat aber keinen Grund sich lange über dieses Schelmenstück zu empören. Wie kann der Weihnachtsmann auch dieses Hindernis überwinden?

Antwortmöglichkeiten:

1. Der Weißbärtige meint zunächst, dass er acht Verstecke kennt. Mit acht Zetteln macht es keinen Unterschied ob einer davon eine falsche Information beinhaltet.
2. Sankt Nikolaus kennt acht Verstecke. Erinnert er sich noch an einen mehr, kann ihm auch die Gemeinheit der Wichtel nichts mehr anhaben.
3. Acht Notizzettel sind bei der schlechtesten Konstellation nötig. Die Wichtel zwingen ihn aber dazu, sich an insgesamt 10 zu erinnern.

4. Der Weihnachtsmann konnte zunächst sieben Verstecke aufzählen, eine falsche Information führt dazu, dass er alle 12 braucht.
5. Sieben Verstecke konnte er aufzählen, später stellte sich heraus, dass er sich an mindestens 2 zusätzliche Verstecke erinnern muss.
6. Sieben Notizen braucht man im schlechtesten Fall, sollte eine Information falsch sein, braucht man 8.
7. Papa Noel erkannte, dass sechs Verstecke ausreichen um die Lösung zu bestimmen. Dank der Wichtel muss er sich nun an mindestens 3 Weitere erinnern.
8. Die Hauptperson dieses Textes rekapitulierte sechs Verstecke. Dank seines schlauen Verfahrens reichen ihm diese 6, auch wenn eines davon falsch ist.
9. Der Weihnachtsmann konnte sich an fünf Verstecke erinnern. Wenn eine Notiz falsch ist, kann er das kompensieren indem er 2 weitere Zettel findet.
10. Selbst mit allen zwölf Notizen ist es unmöglich sicher festzustellen, in welchem Verhältnis die Zutaten gemischt werden.

21.2 Lösung

Antwort 5 ist richtig.

Zunächst schreiben wir uns die zwölf Gleichungen für die Zutaten in ihren auftauchenden Kombinationen auf, wobei wir abkürzen:

x_1 : Zucker, x_2 : Lebkuchenteig, x_3 : Milch, x_4 : Geheimzutat, y_i Lösung der i -ten Gleichung.

$$\begin{array}{ll} v_1 : x_1 + x_3 + x_4 = y_1 & v_5 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_5 \\ v_2 : x_1 - x_3 + x_4 = y_2 & v_6 : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = y_6 \\ v_3 : x_1 + x_3 - x_4 = y_3 & v_7 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = y_7 \\ v_4 : x_1 - x_3 - x_4 = y_4 & v_8 : x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = y_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} v_9 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_9 \\ v_{10} : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_{10} \\ v_{11} : x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = y_{11} \\ v_{12} : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = y_{12} \end{array}$$

Jetzt muss begründet werden, warum sieben Gleichungen reichen um das Rätsel zu lösen also um ein eindeutig lösbares Gleichungssystem zu bilden.

Dazu gruppieren wir die ersten vier Gleichungen v_1, v_2, v_3, v_4 in einen Topf T_1 , die nächsten Gleichungen v_5, \dots, v_8 in T_2 und die letzten v_9, \dots, v_{12} in T_3 .

Nun, angenommen der Weihnachtsmann findet sieben Verstecke wieder. Dann müssen davon mindestens drei Vektoren aus einem der drei Töpfe T_1, T_2, T_3 sein. Seien diese beispielsweise aus $T_k, k \in \{1, 2, 3\}$. Dann gibt es aber mindestens einen weiteren Topf, in dem sich mindestens zwei gefundene Vektoren befinden, sei dieser $T_j, j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}$. Wo die übrigen zwei Vektoren liegen ist für den weiteren Verlauf nicht wichtig. Zu diesem Zeitpunkt haben wir also fünf Gleichungen charakterisiert. Wir müssen jetzt noch zeigen, warum diese ein eindeutig lösbares Gleichungssystem bilden.

Fall 1: In T_j sind 2 Gleichungen der Form:

$$\begin{array}{l} v_p : x_1 + Jx_2 + ax_3 + bx_4 = y_p \\ v_q : x_1 + Jx_2 - (ax_3 + bx_4) = y_q, \end{array}$$

wobei $J \in \{-1, 0, 1\}$ und $a, b \in \{-1, 1\}$. Dann wählen wir aus dem Topf T_k zwei Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} v_r : x_1 + Kx_2 \pm (ax_3 + bx_4) &= y_r \\ v_s : x_1 + Kx_2 + cx_3 + dx_4 &= y_s, \end{aligned}$$

wobei $(c, d) \neq \pm(a, b)$, $K \neq J$. Man überlegt sich leicht, dass das immer geht. Es bleibt zu zeigen, dass dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Betrachtet man die Gleichungen $\frac{v_p+v_q}{2}$ und $\frac{v_p-v_q}{2}$ erhält man

$$x_1 + Jx_2 = \frac{y_p + y_q}{2} \quad (10)$$

$$ax_3 + bx_4 = \frac{y_p - y_q}{2}. \quad (11)$$

Addiert bzw. subtrahiert man Gleichung (11) von v_r erhält man

$$x_1 + Kx_2 = y_r \pm \frac{y_p - y_q}{2}. \quad (12)$$

Subtrahiert man (12) von v_s ergibt sich

$$cx_3 + dx_4 = y_s - \left(y_r \pm \frac{y_p - y_q}{2} \right) \quad (13)$$

Da $(c, d) \neq \pm(a, b)$ bestimmen die Gleichungen (11), (13) die Mengen an Milch und Geheimzutat eindeutig, und die Gleichungen (10) und (12) bestimmen die restlichen Zutaten eindeutig.

Fall 2: In T_j sind zwei Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} v_p : x_1 + Jx_2 + ax_3 + bx_4 &= y_p \\ v_q : x_1 + Jx_2 + cx_3 + dx_4 &= y_q \end{aligned}$$

wobei $(c, d) \neq \pm(a, b)$. Dann folgt, dass in T_k zwei Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} v_p : x_1 + Kx_2 + gx_3 + hx_4 &= y_p \\ v_q : x_1 + Kx_2 - (gx_3 + hx_4) &= y_q \end{aligned}$$

sind, wobei (g, h) entweder gleich (a, b) oder gleich (c, d) ist und $K \neq J$. Der Rest folgt analog zu Fall 1.

Sechs beliebige Gleichungen reichen nicht aus. Wählt man beispielsweise die Gleichungen

$$v_1, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{12}$$

aus, und sei (x_1, x_2, x_3, x_4) eine Lösung des Gleichungssystems, dann ist $(x_1, x_2, x_3 + z, x_4 - z)$ offenbar auch eine Lösung für jedes beliebige z . Die Lösung ist nicht eindeutig.

Im zweiten Teil der Aufgabe lässt sich mit 9 Gleichungen die Lösung noch bestimmen. Da ein Lösungswert falsch ist, muss der Weihnachtsmann nach einer Lösung suchen, die mit 8 der 9 Lösungswerten übereinstimmt. Es kann aber nur eine Kombination geben, die mindestens 8 Gleichungen erfüllt. Nimmt man nämlich an, dass es zwei Lösungen dieser Art gibt, so erfüllen diese mindestens 7 Gleichungen gemeinsam. Nachdem ersten Teil der Aufgabe genügt das um zu behaupten das beide Lösungen gleich sein müssen.

Nur 8 Gleichungen reichen hingegen nicht aus wie man beispielsweise sieht, wenn man $v_1, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}$ wählt und $y_1 = y_4 = y_5 = y_8 = y_9 = y_{12} = 0$, und $y_{10} = -2$, $y_{11} = 2$. Hier ist $(0, 0, 1, -1)$ die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $v_1, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{12}$ und $(0, 0, -1, 1)$ die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $v_1, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}$.

22 Eitle Rentiere

Autor: Kersten Schmidt, Dirk Klindworth, Robert Gruhlke



22.1 Aufgabe

„Oh nein, Weihnachten steht vor der Tür!“ Um das Fest zu sichern, ist der Weihnachtsmann (auch *Klaus* genannt) auf hoch motivierte Rentiere angewiesen. Dabei kennt er seine Rentiere ganz genau:

- Ist es zu warm, dann werden sie gemütlich und faul.
- Ist es zu kalt, dann droht eine Erkältung, die auskuriert werden muss.
- Bei Temperaturen zwischen $T_K = -14.625$ und $T_W = 0$ sind sie absolut zufrieden.

Da es am Nordpol sehr kalt ist, heizt Klaus (selbstverständlich ohne CO_2 -Ausstoß) das ganze Jahr über, sodass die Außenwand seines Hauses ($x_0 = 0$) konstant $T_A = 15$ beträgt. Aus dem Wetterbericht erfährt der Weihnachtsmann von einem $x_1 = 2$ Weihnachtsmeter entfernten Schneesturm der Stärke $s = -5$ der bis zum $x_2 = 4$ Weihnachtsmeter entfernten großen Nordmantannenwald wütet. Legenden besagen, dass in den Tiefen des Nordmantannenwaldes ($x_N = 5$) Rekordtemperaturen von $T_E = -40$ erreicht werden. Santa Klaus steht nun vor der Aufgabe herauszufinden, in welchem Bereich x_A bis x_B er die Rentiere hausen lassen kann. Da der Weihnachtsmann mit der Planung seiner Weihnachtsrouten viel zu beschäftigt ist, um sich selbst um dieses Anliegen zu kümmern, beauftragt er den Wichtel FEM:

Lieber FEM,

ich brauche Deine Hilfe. Die Funktion u beschreibt das Temperaturverhalten vom Haus bis in die Tiefen des Nordmantannenwaldes. Dabei ist $u(x)$ die Temperatur an einem Ort $x \in [0, x_N]$. Das Auftreten des Schneesturms sei durch eine Funktion f beschrieben mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_1), \\ 1, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & x \in (x_2, x_N]. \end{cases}$$

Die Stärke des Schneesturms beträgt $s = -5$. Die Randtemperatur an zwei Orten ist bekannt:

$$u(0) = T_A = 15 \quad \text{und} \quad u(x_N) = T_E = -40.$$

Ich weiß, dass es immer kälter wird, um so weiter ich von meinem Haus entfernt bin. Aber wo ist es gerade T_W warm und T_K kalt?

PS: Mir genügt eine ungefähre Angabe, bitte erinnere Dich an die Weihnachtsmützen.

Weihnachtsmützen? In FEMs Zauberbuch muss doch darüber etwas zu finden sein: Und so blättert er wie wild und wird schließlich fündig:

Man nehme drei von links nach rechts angeordnete gleichschenklige Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, deren Bodenlänge G je der halben Gesamtstrecke (von x_0 bis x_N) entspricht und deren Höhe vorerst 1 beträgt. Vierteln wir die Strecke gleichmäßig, so seien die Dreiecke so angeordnet, dass deren Spitzen je genau über einer Teilung zu finden sind. Die gesuchten Werte h_1, h_2 und h_3 ergeben sich aus folgenden Regeln:

- Ein Wert $f_j, j = 1, 2, 3$ ergibt sich als Schnittfläche eines Dreiecks Δ_j und der vom Boden und Graph der Funktion f eingeschlossenen Fläche.
- Dem Anfangsort x_0 wird der Wert $h_0 = T_A$ und dem Endort x_N wird der Wert $h_4 = T_E$ zugeordnet.
- Für $j = 1, 2, 3$ gilt die Beziehung

$$-h_{j-1} + 2 \cdot h_j - h_{j+1} = 0.5 \cdot s \cdot G \cdot f_j.$$

Sind h_1, h_2 und h_3 richtig ermittelt, dann ändert sich die Höhe jedes Dreiecks Δ_j in h_j ($j = 1, 2, 3$). Dabei wandert nur die Spitze des jeweiligen Dreiecks, gleichschenklilig ist es immer noch.

Nach kurzer Überlegung kommt dem kreativen FEM die Idee: „Die sich so ergebenden Höhen stellen eine Annäherung an die gesuchte Temperatur an den jeweiligen Stellen dar. Ziehe ich nun stückweise Geraden durch die resultierenden Punkte, so kann ich an diesen eine Temperaturannäherung ablesen.“

„Das könnte Weihnachten schließlich retten!“

In welchem Bereich wird der flinke FEM dem Weihnachtsmann empfehlen seine Rentiere zu stationieren?

Antwortmöglichkeiten:

1. In gar keinem. Weihnachten fällt dieses Jahr wohl aus.
2. Zwischen 0.25 und 1.25.
3. Zwischen 0.25 und 2.75.
4. Zwischen 0.50 und 2.75.

5. Zwischen 0.75 und 2.25.
6. Zwischen 0.75 und 3.25.
7. Zwischen 1.00 und 2.00.
8. Zwischen 1.00 und 3.50.
9. Zwischen 1.25 und 2.75.
10. Die Rentiere fühlen sich überall wohl.

22.2 Lösung

Nummer 7 ist richtig.

Das Ergebnis der Aufgabe ergibt sich durch das Lösen der folgenden Teilprobleme

- Berechnung der Werte f_j für $j = 1, 2, 3$.
- Berechnung von h_j für $j = 1, 2, 3$
- Berechnung der Geraden durch die relevanten Höhenpunkte und Suche nach dem Wohlfühlbereich $[x_W, x_K]$

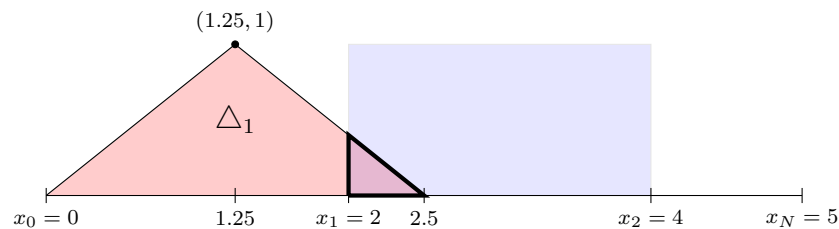
Berechnung von f_j

Die Bodenlänge eines Dreiecks entspricht der halben Gesamtstrecke, das heißt $G = 0.5 \cdot (x_N - x_0) = 2.5$. Der Flächeninhalt A_Δ eines Dreiecks Δ_j mit festgesetzter Höhe 1 ist dann gegeben durch

$$A_\Delta = 0.5 \cdot G \cdot 1 = 1.25.$$

Die Berechnung eines f_j ergibt sich durch Berechnung der Schnittflächen wie folgt:

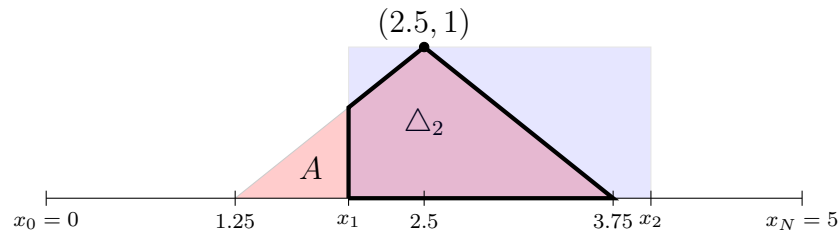
Berechnung von f_1



Die Schnittfläche entspricht dem Flächeninhalt des eingerahmten Dreiecks. Die Höhe des Dreiecks beträgt $(2.5 - 2) \cdot \frac{2}{G} = \frac{1}{G} = 0.4$. Daher gilt

$$f_1 = \frac{1}{2} \cdot (2.5 - 2) \frac{1}{G} = 0.25 \cdot 0.4 = \mathbf{0.1}.$$

Berechnung von f_2



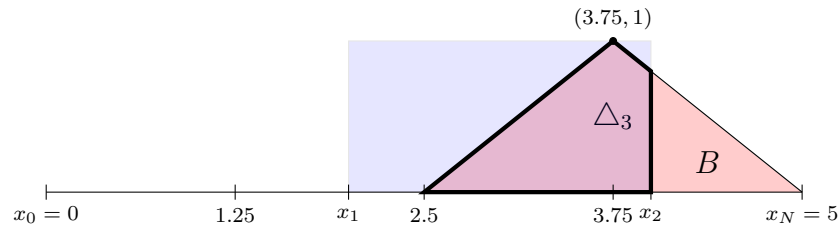
Die zu berechnende Schnittfläche lässt sich durch den Flächeninhalt des gesamten Dreiecks Δ_2 mit Höhe 1 abzüglich der Fläche des Dreiecks A bestimmen. Die Höhe h_A und die Grundfläche G_A des Dreiecks A errechnen sich durch

$$h_A = (x_1 - 1.25) \frac{2}{G} = 0.75 \cdot 0.8 = 0.6, \quad G_A = x_1 - 1.25 = 0.75$$

Die Schnittfläche f_2 errechnet sich dann durch

$$f_2 = A_{\Delta} - 0.5 \cdot h_A \cdot G_A = 1.25 - 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.75 = \mathbf{1.025}.$$

Berechnung von f_3



Die Schnittfläche lässt sich analog zu f_2 durch den Flächeninhalt A_{Δ} des gesamten Dreiecks Δ_3 mit Höhe 1 und der Fläche des Dreiecks B bestimmen. Die Höhe h_B und die Grundfläche G_B des Dreiecks B errechnen sich durch

$$h_B = (x_N - x_2) \frac{2}{G} = 1 \cdot 0.8 = 0.8, \quad G_B = x_N - x_2 = 5 - 4 = 1.$$

Die Schnittfläche f_3 errechnet sich dann durch

$$f_3 = A_{\Delta} - 0.5 \cdot h_B \cdot G_B = 1.25 - 0.5 \cdot 0.8 \cdot 1 = \mathbf{0.85}.$$

Berechnung der Höhen h_j

Die Beziehung

$$h_{j-1} + 2h_j - h_{j+1} = 0.5 \cdot s \cdot G \cdot f_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

ergibt ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den fünf Höhen h_0, h_1, h_2, h_3 und h_4 . Es gilt

$$0.5 \cdot s \cdot G = 0.5 \cdot (-5) \cdot 2.5 = -6.25$$

und das Gleichungssystem hat die Gestalt

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -1h_0 + 2h_1 - 1h_2 \qquad \qquad \qquad = -6.25f_1, \\ \text{II} \qquad \qquad - 1h_1 + 2h_2 - 1h_3 \qquad \qquad \qquad = -6.25f_2, \\ \text{III} \qquad \qquad \qquad - 1h_2 + 2h_3 - 1h_4 = -6.25f_3. \end{array}$$

Die Höhen am Rand sind bereits gegeben durch $h_0 = T_A = 15$ und $h_4 = T_E = -40$ und damit lässt sich das Gleichungssystem umformen und es verbleiben drei Unbekannte:

$$\begin{array}{l} \text{I} \qquad \qquad 2h_1 - 1h_2 \qquad \qquad \qquad = -6.25f_1 + 15, \\ \text{II} \quad - 1h_1 + 2h_2 - 1h_3 = -6.25f_2, \\ \text{III} \qquad \qquad - 1h_2 + 2h_3 = -6.25f_3 - 40. \end{array}$$

Wir addieren I + 2II und erhalten eine neue zweite Gleichung:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 2h_1 - 1h_2 \qquad \qquad \qquad = -6.25f_1 + 15, \\ \text{II} \qquad \qquad 3h_2 - 2h_3 = -6.25(2f_2 + f_1) + 15, \\ \text{III} \quad - 1h_2 + 2h_3 = -6.25f_3 - 40. \end{array}$$

Addieren wir nun II + 3III so ergibt sich eine veränderte dritte Gleichung:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 2h_1 - 1h_2 \qquad \qquad \qquad = -6.25f_1 + 15, \\ \text{II} \qquad \qquad 3h_2 - 2h_3 = -6.25(2f_2 + f_1) + 15, \\ \text{III} \qquad \qquad \qquad 4h_3 = -6.25(3f_3 + 2f_2 + f_1) - 105. \end{array}$$

Nun können wir den Wert h_3 durch Division mit 4 ermitteln es ist

$$h_3 = \frac{-6.25(3f_3 + 2f_2 + f_1) - 105}{4} = \mathbf{-33.59375}.$$

Rückwärtseinsetzen ergibt für h_2

$$h_2 = \frac{-6.25(2f_2 + f_1) + 15 + 2h_3}{3} = -\mathbf{21.875}$$

und schließlich ergibt Einsetzen in die Gleichung I den letzten gesuchten Höhenwert h_1 :

$$h_1 = \frac{-6.25f_1 + 15 + h_2}{2} = -\mathbf{3.75}.$$

Geraden und Wohlfühlbereich

Zusammenfassend haben wir nun die fünf Höhenpunkte. Die berechneten Werte stellen, wie angegeben, eine Annäherung an die gesuchte Temperatur dar. Wir nutzen die Angabe des Weihnachtsmannes einer monoton fallenden Temperatur. Gesucht sind die Werte x_K und x_W an denen die Temperaturen $T_K = -14.625$ und $T_W = 0$ angenommen werden. Wir werden daher nur drei Höhenpunkte

$$H_0(0, 15), \quad H_1(1.25, -3.75) \quad \text{und} \quad H_2(2.5, -21.875).$$

benötigen. Da $-3.75 > T_K > -21.875$, liegt der Punkt (x_K, T_K) auf der Geraden zwischen H_1 und H_2 . Die Gerade wird mithilfe der Zweipunkteform beschrieben:

$$y = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{2.5 - 1.25}(x - 1.25) = -3.75 - 14.5(x - 1.25).$$

Nach x umgestellt erhalten wir

$$x = \frac{y + 3.75}{-14.5} + 1.25.$$

Setzen wir $y = T_K = -14.625$ ein, so erhalten wir $x_K = 2$.

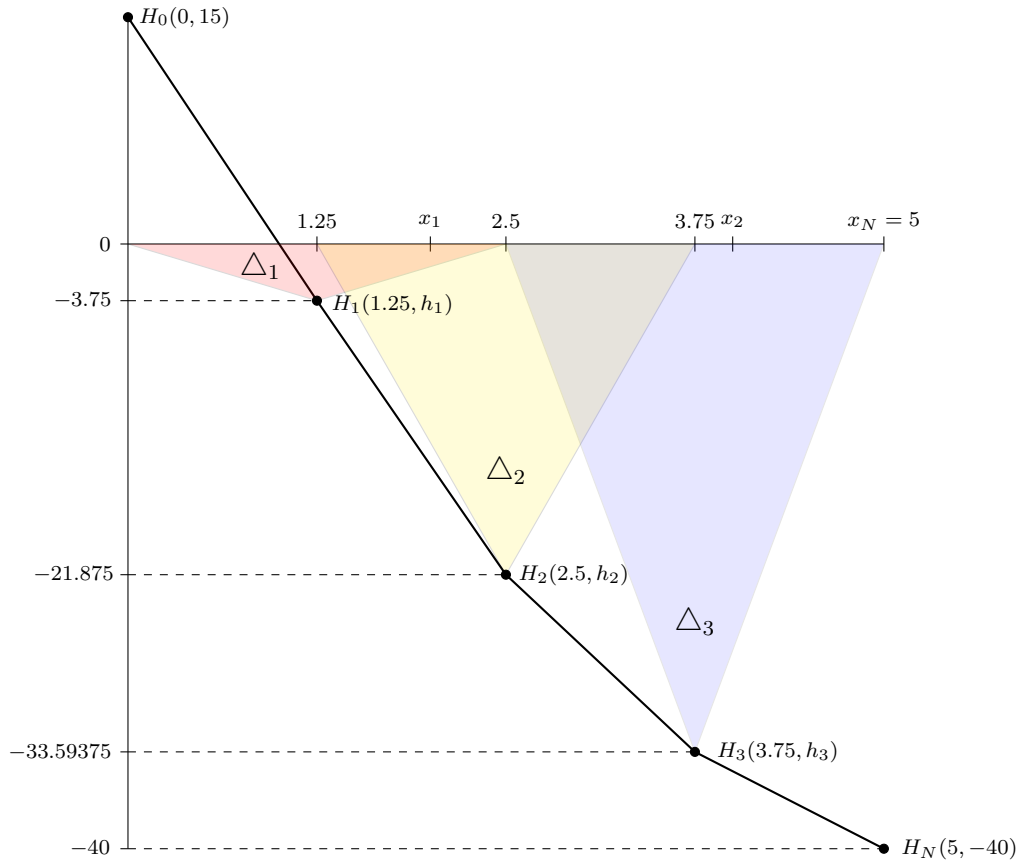
Weiter ist $15 > T_W > -3.75$ und daher befindet sich der Punkt (x_W, T_W) auf der Geraden zwischen H_0 und H_1 . Diese ist gegeben durch

$$y = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{1.25 - 0}(x - 0) = 15 - 15x.$$

Auch hier stellen wir nach x um und erhalten

$$x = \frac{15 - y}{15}.$$

Setzen wir nun $y = T_W = 0$ so erhalten wir schließlich $x_W = 1$. Der Wichtel FEM wird dem Weihnachtsmann daher empfehlen, seine Rentieren zwischen $x_W = 1$ und dem Schneesturm bei $x_K = 2$ zu stationieren. Zum Schluss folgt eine Visualisierung der berechneten Dreieckshöhen und der daraus resultierenden Näherungslösung an die Temperatur.



23 Geschenke umräumen

Autor: Gregor Heyne



23.1 Aufgabe

Der Lagerverwalter des Weihnachtsmanns bekommt die Aufgabe umzuräumen. Im Lagerturm 1 sind 16 unterschiedlich schwere Geschenke gestapelt. Dabei liegt das schwerste (16 Kilogramm) ganz unten und immer ein um 1 Kilogramm leichteres darüber. Das oberste Geschenk wiegt also 1 Kilogramm. Lagerturm 2 und 3 sind leer. Die Aufgabe besteht darin alle Geschenke von Turm 1 in Turm 3 zu bringen und dort zu stapeln. Dabei darf immer nur ein Geschenk gleichzeitig bewegt werden, es darf kein schwereres Geschenk auf ein leichteres gelegt werden und es muss in allen Türmen gestapelt werden.

Was ist die minimale Anzahl an Zügen die der Zwerg braucht, um alle 16 Geschenke von Turm 1 in Turm 3 zu stapeln?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1008
2. 100345
3. 27640
4. 35587
5. 20446
6. 65535
7. 424467
8. 446744
9. 84647
10. 976949

23.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 6

Die allgemeine Formel für n Geschenke ist durch $2^n - 1$ gegeben.

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang: $n=1$, Trivial.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung stimmt für n .

Induktionsschluß: Zeige, dass die Behauptung für $n + 1$ gilt.

Zunächst bewegt man mit $2^n - 1$ Schritten die obersten n Geschenke ins Lager 2. Dann bewegt man das unterste und schwerste Geschenk in Lager 3. Jetzt braucht man nochmals $2^n - 1$ Schritte um die n Geschenke von Lager 2 in Lager 3 zu bewegen. Insgesamt also

$$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Schritte. Daraus folgt, dass bei 16 Geschenken $2^{16} - 1 = 65535$ Schritte benötigt werden. Antwort 6 ist also richtig.

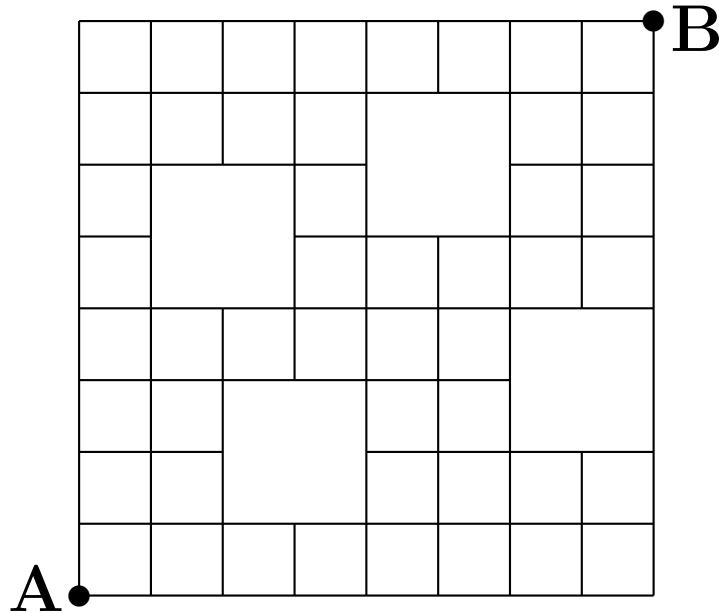
24 Lagerhalle

Autor: Cor Hurkens, Judith Keijsper



24.1 Aufgabe

Die Lagerhalle des Weihnachtsmanns ist acht Blöcke lang und acht Blöcke breit und wird von einigen Gängen in Nord-Süd und Ost-West Richtung durchquert, wie im folgenden Bild angegeben:



Der Weihnachtsmann will die Halle von der linken unteren Ecke A bis zur rechten oberen Ecke B durchqueren. Er fragt sich nun: Wie viele verschiedene kürzeste Wege gibt es denn, die ihn von A nach B führen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es gibt 2167 kürzeste Wege
2. Es gibt 2315 kürzeste Wege
3. Es gibt 2593 kürzeste Wege
4. Es gibt 2744 kürzeste Wege
5. Es gibt 2988 kürzeste Wege
6. Es gibt 3120 kürzeste Wege
7. Es gibt 3345 kürzeste Wege
8. Es gibt 3526 kürzeste Wege
9. Es gibt 3786 kürzeste Wege
10. Es gibt 3933 kürzeste Wege

24.2 Lösung

Antwort Nummer 9 ist richtig.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem über die Lagerhalle, das dem Punkt A die Koordinaten $(0,0)$ und dem Punkt B die Koordinaten $(8,8)$ zuweist. Die Anzahl verschiedener kürzester Wege vom Punkt $A = (0,0)$ bis zum Punkt (x,y) bezeichnen wir mit $W(x,y)$. Da es nur einen einzigen kürzesten Weg von A zu allen Punkten am linken und am unteren Rand gibt, gilt auf jeden Fall $W(x,0) = 1$ und $W(0,y) = 1$ für $0 \leq x, y \leq 8$. Weiters gilt $W(2,5) = W(3,2) = W(5,6) = W(7,3) = 0$, da diese vier Punkte nicht erreichbar sind. Die restlichen Punkte der Lagerhalle erfüllen die Gleichung

$$W(x,y) = W(x,y-1) + W(x-1,y),$$

da der kürzeste Weg entweder durch $(x,y-1)$ oder durch $(x-1,y)$ laufen muss. Mit Hilfe dieser Formeln können wir nun schnell alle Werte $W(x,y)$ bestimmen, indem wir uns vom Punkt A ausgehend immer weiter nach Norden und Osten arbeiten:

	1	9	24	71	215	359	744	1721	3786
1	8	15	47	144	144	385	977	2065	
1	7	7	32	97	0	241	592	1088	
1	6	0	25	65	131	241	351	496	
1	5	15	25	40	66	110	110	145	
1	4	10	10	15	26	44	0	35	
1	3	6	0	5	11	18	26	35	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Wir sehen, dass es 3786 kürzeste Wege nach B gibt und dass die Antwort #9 korrekt ist.

Zweiter Lösungsweg. Ein kürzester Weg von A nach B geht insgesamt 8 Blöcke nach Norden und insgesamt 8 Blöcke nach Osten. Es gibt daher $\binom{16}{8} = 12870$ kürzeste Wege von A nach B , von denen wir allerdings die Anzahl jener Wege abziehen müssen, die durch einen der vier isolierten Punkte C, D, E, F (im folgenden Bild) gehen.

- Es gibt $\binom{7}{2} \cdot \binom{9}{3} = 21 \cdot 84 = 1764$ kürzeste Wege $A \rightarrow C \rightarrow B$
- Es gibt $\binom{5}{2} \cdot \binom{11}{5} = 10 \cdot 462 = 4620$ kürzeste Wege $A \rightarrow D \rightarrow B$
- Es gibt $\binom{11}{5} \cdot \binom{5}{2} = 462 \cdot 10 = 4620$ kürzeste Wege $A \rightarrow E \rightarrow B$
- Es gibt $\binom{10}{3} \cdot \binom{6}{1} = 120 \cdot 6 = 720$ kürzeste Wege $A \rightarrow F \rightarrow B$

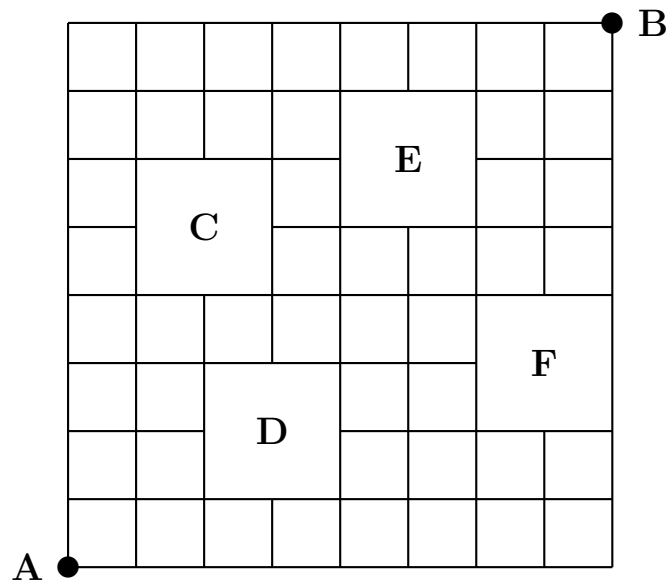
Jetzt haben wir aber jene Wege zweimal abgezogen, die durch zwei dieser vier isolierten Punkte gehen. Diese Wege müssen wieder dazugezählt werden:

- Es gibt $\binom{7}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} = 21 \cdot 4 \cdot 10 = 840$ kürzeste Wege $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B$
- Es gibt $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} = 10 \cdot 15 \cdot 10 = 1500$ kürzeste Wege $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B$
- Es gibt $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1} = 10 \cdot 5 \cdot 6 = 300$ kürzeste Wege $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow B$

Da kein kürzester Weg durch drei der vier Punkte C, D, E, F geht, ist unsere Rechnung abgeschlossen. Insgesamt gibt es

$$= 12870 - (1764 + 4620 + 4620 + 720) + (840 + 1500 + 300) = 3786$$

kürzeste Wege von A nach B . Somit ist Antwort #9 korrekt.



25 Fünf Wichtel

Autor: Falk Ebert

25.1 Aufgabe

Fünf Wichtel haben ihre Not.
Denn es geht ums Teilen
von leckerem Marzipanbrot –
das essen sie zuweilen.

Vier Brote haben sie bekommen,
gleich groß, gleich schön, gleich schwer.
Vier Wichtel haben je eins genommen,
für den letzten bleibt keins mehr.

„Das kann nicht sein, das ist nicht fair!
Das wär' ja ganz schön schlecht.
Ich hol' sofort ein Messer her,
dann teilen wir gerecht.“

Da ruft sofort ein anderer „Hier!“
der sich mit Rechnen auskennt.
„Fünf Wichtel sind wir, mit Broten vier –
für jeden achtzig Prozent.“

Das Messer kommt, er macht sich dran
zu setzen einen Schnitte.
Da merkt ein kleiner Wichtel an:
„Ich hätte da 'ne Bitte.“

„Wenn Du teilst, dann mach es bitte,
auf eine solche Art,
dass jeder hier aus unsrer Mitte
wirklich das gleiche hat.“

„Wenn vier bekommen ein großes Stück –
sei die Länge auch gerecht –
bleibt einer mit den Resten zurück.
Und das wär wirklich schlecht.“

„Nicht etwa nur in der Summe –
absolut gleiches - und nichts weiter.
Sonst ist wieder einer der Dumme.“
tönt da schon ein zweiter.

„Ich soll also teilen, dass jeder dann
aus den Stückchen, die letztlich verbleiben,
das gleiche wie die anderen nehmen kann,
um es sich einzuverleiben?“

„Was ist mit den Rändern? Davon gibt es acht.
Die zu teilen wär' eine Qual.“
Da meint der kleine: „Hab ich auch schon gedacht.
Doch die Ränder sind mir egal.“

„Es geht mir nur um die Länge vom Stück –
nicht um Guss, nicht um Rand oder Ecke.“
das ist's was ich wünsche zu meinem Glück.
Behandle ein Brot wie 'ne Strecke.“

„Nur eines noch - verzeih' es mir.
Ich seh' dich ja schon leiden.
Mach so wenig Stückchen wie möglich hier
um unnötiges Schneiden zu vermeiden.“

Der schnittige Wichtel überlegt eine Weile
und sagt: „Mir fällt nichts ein.
Ich schneide die Brote Euch gerne in Teile,
doch sagt mir, wie viele soll'n 's sein?“

Jetzt ist's an der Zeit.

Habt Ihr denn Ideen?

Die kleinste Stückchenzahl nach Möglichkeit.

Wählt aus aus den folgenden zehn.

1. zwei Stückchen für jeden
2. drei Stückchen für jeden
3. vier Stückchen für jeden, alle unterschiedlich
4. vier Stückchen für jeden, zwei davon gleich groß
5. fünf Stückchen für jeden, alle unterschiedlich
6. fünf Stückchen für jeden, genau zwei davon gleich groß
7. fünf Stückchen für jeden, eines davon kleiner als 1% der Länge eines Marzipanbrottes
8. sechs Stückchen für jeden
9. acht Stückchen für jeden
10. Keine solche Aufteilung möglich.

25.2 Lösung

Jedem Wichtel stehen $\frac{4}{5}$ eines Marzipanbrottes zu und es muss gelten $\frac{4}{5} = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$. Weiterhin müssen sich 5 Kopien dieser s_i zu 4 ganzen Broten (also Einsen) zusammenlegen lassen. Dass es nicht ein Stück für jeden sein kann, sollte offensichtlich sein. Das hieße, die Gesamtzahl der Stücke ist 5. Demnach muss ein Brot irgendwie geteilt werden, um auf 5 Stückchen zu kommen. Davon haben 3 die Länge 1 (ganze Brote) und 2 Stückchen haben zusammen die Länge 1. Wir sind also weit entfernt von einer gerechten, geschweigedenn gleichen Verteilung.

Betrachten wir den Fall mit 2 Stückchen pro Wichtel. Insgesamt müssen es also 10 Stücken sein. Um 4 Brote in 10 Teile zu zerlegen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Eines kann ganz bleiben und 3 werden in je drei Teile zerschnitten. Diese Variante liefert ein Stück, das die Länge 1 hat. Alle anderen sind kürzer. Diese Aufteilung ist also nicht sinnvoll. Folglich muss jedes Brot zerschnitten werden. Dies liefert 8 Stücke. Von diesen 8 werden 2 weiter geteilt, damit man auf insgesamt 10 kommen kann. Nehmen wir an, dass dieser erste Schnitt nicht mittig erfolgt, dann bleibt bei einem Schnitt eines Brotes ein Stück mit einer Länge von mehr als $\frac{1}{2}$. Da nur 4 Brote vorhanden sind, kann es auch nur 4 Stückchen der Länge $> \frac{1}{2}$ geben und die Verteilung ist nicht mehr gleich für alle Wichtel. Der beste erste Schnitt zerlegt also alle Brote mittig. Damit sind 8 Stückchen der Länge $\frac{1}{2}$ vorhanden. Fünf davon könnten direkt an die Wichtel verteilt werden. Die sind alle gleich groß, gleich schön, gleich schwer. Es bleiben 3 Stückchen der Länge $\frac{1}{2}$ übrig. Diese können jetzt leider nicht mit zwei Schnitten so geteilt werden, dass 5 gleiche Teile daraus werden. Es muss also eine feinere Unterteilung her.

Diese feinere Unterteilung wird möglich, wenn wir 3 Stückchen pro Wichtel zulassen. Jeder Wichtel hat ein Stück der Länge $\frac{1}{2}$ erhalten. Es bleiben 3 Stückchen der Länge $\frac{1}{2}$ zur weiteren Zer- und Verteilung übrig. Teilen wir diese 3 wieder mittig, dann erhalten wir 6 Stückchen der Länge $\frac{1}{4}$ jeweils. Davon werden sofort 5 an die 5 wartenden Wichtel verteilt. Es verbleibt 1 Stückchen der Länge $\frac{1}{4}$, das man mit 4 gekonnten Schnitten in 5 Stückchen der Länge $\frac{1}{20}$ zerteilt. Diese werden an die 5 naschhaften Wichtel ausgegeben und fertig!

Zur Überprüfung: Jeder Wichtel hat die folgenden Stückchen:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}. \quad (14)$$

Und die Stückchen lassen sich folgendermaßen zu Broten zusammenlegen:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}.$$

Jeder der Brüche kommt genau fünf mal vor. Die Zerlegung (14) nennt man übrigens *Stammbruchzerlegung* (Alle Zähler sind gleich eins.) und war das Werkzeug, mit dem im antiken Ägypten mit Brüchen gerechnet wurde. In den meisten Fällen ist sie etwas unhandlich - aber sie liefert stets gerechte Verteilungen von b Marzipanbrotchen auf w Wichtel. Ob es jeweils auch die mit der geringsten Stückchenzahl ist, weiß ich auch nicht.