MATHE KALENDER

LÖSUNGSHEFT 2010

Deutsche Mathematiker-Vereinigung
www.mathekalender.de
DFG-Forschungszentrum Matheon
Mathematik für Schlüsseltechnologien

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das war also der 8. Mathekalender. Wie immer gab es einige Neuerungen und einiges Althergebrachtes. Wir hoffen, dass zu den vertrauten Dingen gehört, dass wir wieder vielen Menschen etwas anspruchsvolle Adventsfreude bereiten konnten. Immerhin hatten wir wieder über 13.000 Mitspieler. Die genaue Zahl ist in Aufgabe 24 versteckt. Unter den Neuerungen ist auf jeden Fall die fruchtbare Kooperation mit dem niederländischen Mathematik-Forschungsinstitut 3TU.AMI (`http://ami.3tu.nl/Home.html`) zu nennen. Immerhin fünf der 24 Aufgaben stammen aus den Niederlanden. Zwei weitere Aufgaben wurden uns von einem „Mathemacher“ zugespielt. Anscheinend gibt es über das Matheon hinaus noch viele, die Aufgaben beisteuern wollen. Wir werden diese Möglichkeit für 2011 im Auge behalten.
Auch das Prinzip, die Geschichten in eine durchgehende Rahmenhandlung einzubauen, ist neu. Anfänglich nur eine fixe Idee, wurde es zum Selbstläufer und plötzlich tauchten verschiedene Charaktere immer wieder auf. Den Rückmeldungen im Forum ist zu entnehmen, dass die Idee gut ankommt. Wir werden also versuchen, das weiterzuführen.
Schlussendlich müssen wir wieder eingestehen, dass trotz monatelanger Vorbereitung wieder Fehler aufgetaucht sind. Wir hoffen, dass die damit entstandenen Schwierigkeiten zur Zufriedenheit aller gelöst worden sind. Entsprechende Hinweise sind bei den jeweiligen Aufgaben zu finden.

Jetzt aber erstmal viel Freude mit dem Lösungsheft.

Euer Mathekalenderteam: Alina, Katha, Benny, Sven, Falk

1 Die kaputte Waage auf dem Weihnachtsmarkt

Autor: Ingmar Rubin

1.1 Aufgabe

Adventszeit - was für eine tolle Zeit. Um im ganzen langweiligen kommenden Jahr mich etwas daran erinnern zu können, habe ich ein Advents-Tagebuch angefangen.
Heute ist mir auch gleich etwas sehr interessantes passiert.

Auf einem Weihnachtsmarkt fand ich einen Verkaufsstand an dem diverse Köstlichkeiten angeboten wurde, als da wären: gebrannte Mandeln, feinste Schokostreusel, türkischer Honigkuchen und kandierte Äpfel. So war es ist kein Wunder, dass vor allem die kleinen Kinder mit laufenden Nasen und leuchtenden Augen an diesem Stand ein großes Gedränge verursachten. Und dies war wohl auch der entscheidende Grund für das Malheur: Irgendwann scheppert es, und die stilvolle Balkenwaage zum Abwiegen des Süßkrams lag samt dem dazu gehörenden Satz an Wägestücken auf dem Boden. Die Wägestücke sind durch den Sturz nicht beschädigt worden, wohl aber war der Waagebalken verrutscht, so dass die Arme der Balkenwaage nicht mehr die gleiche Länge aufwiesen.

Der Verkäufer hatte aber sofort einen Ausweg aus diesem Dilemma parat. Er wog bei jedem Kunden zweimal ab, indem er eine Hälfte des gewünschten Süßwerks auf der linken Waagschale mit dem entsprechenden Wägestück auf der rechten Schale gegen wiegt und anschließend umgekehrt. Wünscht also beispielsweise jemand 500 Gramm gebrannte Mandeln, so werden zunächst auf der linken Schale 250 Gramm abgewogen (das 250-Gramm- Wägestück liegt dabei auf der rechten Schale) und anschließend 250 Gramm auf der rechten Schale (das 250-Gramm-Wägestück liegt dabei auf der linken Schale).
Was ich mich nun frage ist, ob damit der Fehler der Waage tatsächlich ausgeglichen wird oder nicht?

1. Der Fehler wird durch das zweimalige Wiegen vollständig ausgeglichen.
2. Der Kunde erhält stets mehr als die gewünschte Menge.
3. Der Kunde bekommt auf diese Weise immer 9/8 des verlangen Gewichtes.
4. Der Kunde erhält stets weniger als die gewünschte Menge.
5. Die Frage lässt sich nur genau beantworten wenn man ausmessen kann, um wieviele Millimeter der Waagebalken aus der Mitte verschoben ist.
6. Das Verfahren funktioniert nur bei einer Menge von 500 Gramm exakt.
7. Der Kunde bekommt auf diese Weise stets die doppelte Menge an Süßwaren.
8. Der Kunde bekommt auf diese Weise stets die halbe Menge an Süßwaren.
9. Es gibt genau 3 mögliche Positionen des Wägebalkens, so dass die Balkenwaage exakt misst.
10. Man erhält stets mehr als die gewünschte Menge, aber nicht mehr als das Doppelte.

1.2 Lösung

Richtige Antwort: 2 Der Kunde erhält stets mehr als die gewünschte Menge.

Sei l die Länge des Waagebalkens und x und y seine linke, bzw. rechte Seite. Es gilt also

$$l = x + y, \quad x = l - y.$$

Aus der Aufgabe folgt $x \neq y$. Wir prüfen das Wägeverfahren mit einem $250g$ Gewicht. Bei der ersten Wägung wird die Menge m_1 abgewogen. Bei Gleichgewicht der Waage gilt nach dem Hebelgesetz:

$$y \cdot 250 = x \cdot m_1, \quad \longrightarrow \quad m_1 = \frac{250y}{x}.$$

Bei der zweiten Wägung sind die Seiten x und y vertauscht. Im Gleichgewicht der Waage gilt nun

$$x \cdot 250 = y \cdot m_2, \quad \longrightarrow \quad m_2 = \frac{250x}{y}.$$

Die Summe aus m_1 und m_2 liefert die Gesamtmenge aus beiden Wägungen.

$$m = \frac{250y}{x} + \frac{250x}{y} = 250\frac{x^2 + y^2}{xy} = 500\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{xy}$$

An dieser Stelle kann man die Ungleichung zwischen quadratischem Mittel und geometrischen Mittel entdecken:

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

Gleichheit gilt nur bei $x = y$ und das ist laut Aufgabe ausgeschlossen. Folglich ist bei

$$m = 500 \underbrace{\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{xy}}_{>1} > 500.$$

Analog kann man auch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Vektoren $[x,\, y]^T$ und $[1,\, 1]^T$ benutzen. Alternativ kann man den Term $\frac{x^2+y^2}{xy}$ auch als Funktion von y auffassen.

$$f(y) = \frac{(l - y)^2 + y^2}{(l - y)y}$$

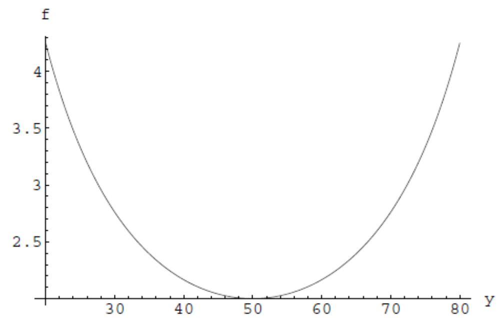


Abbildung 1: Funktionsverlauf für $l = 100$ und $y \in [20, 80]$

Der Funktionsverlauf ist in Abb. 1 dargestellt und zeigt, dass im interessanten Bereich $f(y) \geq 2$ gilt. Gleichheit tritt bei $y = 50$ ein, was wegen $x \neq y$ aber ausgeschlossen ist. Demnach ist

$$m = 250 \cdot f(y) > 500.$$

2 Vier Schlitten und viele Pakete

Autoren: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven), Falk Ebert (Matheon)

2.1 Aufgabe

Schriftführer Sigismund berichtet:

Leider kann der Weihnachtsmann sein neues Tagebuch heute nicht selbst führen. Warum, erzähle ich im folgenden.
Die Wichtel hatten 1000 Weihnachtsgeschenke in 1000 Pakete eingepackt, die jeweils 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , 999 und 1000 Kilogramm schwer waren. Der Weihnachtsmann wollte diese 1000 Pakete derart auf seine vier Schlitten aufteilen, dass jeder Schlitten genau dieselbe Gesamtlast trägt. Das ist wichtig für die Rentiere, weil sich sonst einige über Überlas-tung beschweren. Das gibt Ärger mit der Gewerkschaft und davon gab es im letzten Jahr bereits genug. Die 3 Wichtel mit den schwersten Geschenken (998kg bis 1000kg) hatten sich verspätet, doch der Weihnachtsmann hat schon mal mit Packen der ersten 997 Pakete begonnen - das will er immer selbst tun. Das wollte ihm aber einfach nicht gelingen, und so stand er vor den vier Schlitten und kratzte sich am Kopf. Da schleppte ein Wichtel noch das 998te Paket heran, das 998 Kilogramm wog. Der Weihnachtsmann kratzte sich am Kopf.
Nach einer Viertelstunde brachte dann ein anderer Wichtel ein 999tes Paket mit 999 Kilogramm. Der Weihnachtsmann kratzte sich wieder am Kopf.
Schlussendlich kam noch das letzte Paket mit 1000 Kilogramm. Und der Weihnachtsmann kratzte sich immer noch am Kopf, begann aber zu packen.
Da zupfte ihn der Wichtel, der das 1kg-Paket gebracht hat, am Arm und piepste:
Uns wurde aber vertraglich zugesagt, dass kein Geschenk mit einem anderen Geschenk zusammen transportiert wird, das 500kg oder mehr schwerer *ist. Also meins darf nicht mit einem 501kg-Paket oder einem schwereren fahren. Du weißt schon - Schutz des geistigen und handwerklichen Eigentums. Das wurde so ausgehandelt mit der Ge...*
In diesem Moment riss sich der Weihnachtsmann die Mütze vom Kopf, raufte sich die Haare und lief mit den Worten *Nicht schon wieder die Gewerkschaft!* schreiend davon.
Seitdem ist der Alte verschwunden und wir stehen nun hier und müssen die Schlitten beladen und wissen nicht, wie es geht und ob überhaupt. Welche der Aufteilungsprobleme sind denn vertraglich einwandfrei lösbar?

1. Nur die Beladung mit 1kg bis 997kg ist lösbar.
2. Nur die Beladung mit 1kg bis 998kg ist lösbar.
3. Nur die Beladung mit 1kg bis 999kg ist lösbar.
4. Nur die Beladung mit 1kg bis 1000kg ist lösbar.
5. Nur die Beladungen mit 1kg bis 997kg und 1kg bis 998 kg sind lösbar.
6. Nur die Beladungen mit 1kg bis 999kg und 1kg bis 1000 kg sind lösbar.
7. Nur die Beladungen mit 1kg bis 998kg und 1kg bis 999 kg sind lösbar.
8. Nur die Beladungen mit 1kg bis 997kg und 1kg bis 1000 kg sind lösbar.
9. Nur wenn man die 500kg - Differenz - Beschränkung weglässt, dann existiert überhaupt eine Lösung.
10. Alle Beladungen (1-997kg, 1-998kg, 1-999kg und 1-1000kg) sind einwandfrei lösbar.

2.2 Lösung

Richtige Antwort: 3 Nur die Beladung mit 1kg-999kg ist lösbar.

Zuerst schauen wir uns an, wieviel Gewicht denn verteilt werden muss. Bei 1 bis n Paketen mit den entsprechenden Gewichten sind das insgesamt $\frac{n(n+1)}{2}$kg. Diese Zahl muss durch 4 teilbar sein, sonst kann das Gesamtgewicht nicht gleichmäßig auf 4 Schlitten verteilt werden. Eine der Zahlen n oder $(n+1)$ muss also durch 8 teilbar sein. Die andere ist ungerade. Die einzige durch 8 teilbare Zahl in der Nähe der 1000 ist die 1000 selbst. Das heißt, die Beladungen mit 1-999kg und 1-1000kg sind schonmal in 4 gleichschwere Teile zerlegbar.
Nun kommt der Aspekt dazu, dass innerhalb jedes dieser 4 Teile keine 2 Geschenke einen Gewichtsunterschied von 500 oder mehr haben dürfen. Jetzt müssen wir prüfen, ob für die 999er oder die 1000er-Variante so eine Aufteilung existiert.
Betrachten wir die 999 Geschenke. Dann wiegt jede Schlittenladung (in Kilogramm)

$$\frac{999 \cdot 1000}{8} = 124875.$$

Das 1er Paket darf mit allen Paketen bis zur 500 fahren, mit keinem schwereren. Für den ersten Schlitten können sich also maximal

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 499 + 500 = 125250$$

Kilo ergeben. Das ist mehr als genug. Das 375kg Paket muss dableiben und kommt auf den 2. Schlitten. Dort sind jetzt vorerst die Pakete 375 und 501 bis 707

$$375 + 501 + 502 + \ldots + 706 + 707 = 125403.$$

Das sind 528kg zu viel also kommt das 528kg Paket auf den dritten Schlitten. Auf den packen wir vorerst 528kg und 708kg bis 866kg.

$$528 + 708 + 709 + \ldots + 865 + 866 = 125661.$$

Das sind jetzt nochmal 786kg zu viel und darum kommt das 786kg-Paket zusammen mit dem ganzen Rest auf den letzten Schlitten. Da müssen sich durch unsere vorangegangene Rechnung alle Gewichte genau zu 124875kg aufsummieren. Wir fassen also zusammen:

Schlitten	Beladung	größte Differenz
1	1,...,374,376,...,500	499
2	375,501,...,527,529,...,707	332
3	528,708,...,785,787,...,866	338
4	786,867,...,999	213

Alles passt. Die 1-999 Beladung ist also machbar.
Versuchen wir das Gleiche bei der 1-1000 Beladung. Dort müssen auf jeden Schlitten

$$\frac{1000 \cdot 1001}{8} = 125125$$

Kilogramm. Das 1er Paket darf wieder nur mit allen Paketen bis zur 500 fahren. Für den ersten Schlitten können sich wieder maximal

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 499 + 500 = 125250$$

Kilo ergeben. Das reicht. Man muss nur Pakete mit einem Gesamtgewicht von 125kg auf einen anderen Schlitten packen. Damit die Gewichtsdifferenzbeschränkung eingehalten wird, dürfen auf dem nächsten Schlitten nur Pakete bis 624kg mitfahren. Nun sind aber

$$125 + 501 + 502 + \ldots + 623 + 624 = 69875 < 125125.$$

Damit kann kein weiterer Schlitten voll beladen werden und die 1-1000 Beladung ist nicht möglich.

3 Weihnachtsbaumkugeln sortieren!

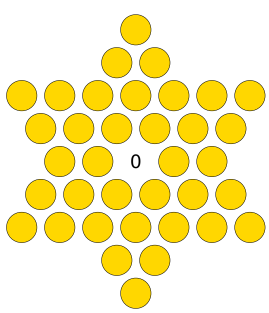
Autor: Jens Griepentrog (Matheon)

3.1 Aufgabe

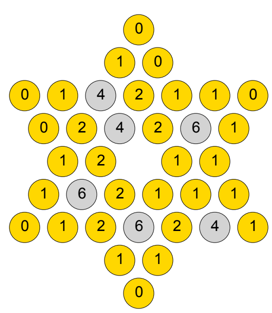
Räumwichtel Raimund berichtet:

Der Weihnachtsmann ist tatsächlich verschwunden. Scheinbar hat er wieder seinen Adventskoller bekommen und muss jetzt „erst wieder zu sich finden“. Ich hoffe, seine Suche ist erfolgreich und er findet sich und bringt sich wieder hierher, *bevor* die heiße Phase beginnt.

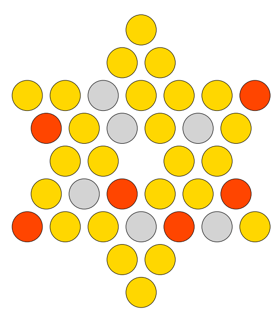
Na ja, wenigstens können wir in der Zwischenzeit wieder mal aufräumen. Wir verfügen über ein ansehnliches Sortiment von bunten Weihnachtsbaumkugeln. Nach alter Väter Sitte werden die wertvollen Kugeln in mit Samt ausgeschlagenen Koffern zu jeweils 36 Stück in Form einer Schneeflocke aufbewahrt. Genauer gesagt handelt es sich, wie in der Abbildung zu sehen ist, um sechs verschiedene Koffer mit (a) 36 goldenen Kugeln; (b) 30 goldenen und sechs silbernen Kugeln; (c) 24 goldenen sowie jeweils sechs silbernen und roten Kugeln; (d) 18 goldenen sowie jeweils sechs silbernen, roten und weißen Kugeln; (e) 12 goldenen sowie jeweils sechs silbernen, roten, weißen und blauen Kugeln sowie (f) jeweils sechs goldenen, silbernen, roten, weißen, blauen sowie grünen Kugeln.



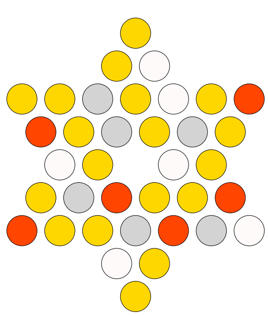
(a)



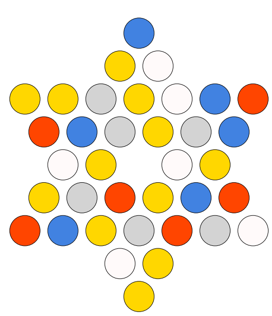
(b)



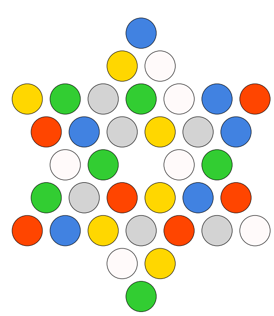
(c)



(d)



(e)



(f)

Während es an Koffer (a) natürlich nichts zu beanstanden gibt, ist jedoch beim Einsammeln der Kugeln nach dem vorigen Weihnachtsfest in die übrigen Koffer (b) bis (f) einiges tüchtig durcheinander geraten. Wohl stimmt jeweils die angegebene Anzahl der verschiedenfarbigen Kugeln in allen Koffern, sie liegen jedoch offenbar recht unordentlich sortiert!

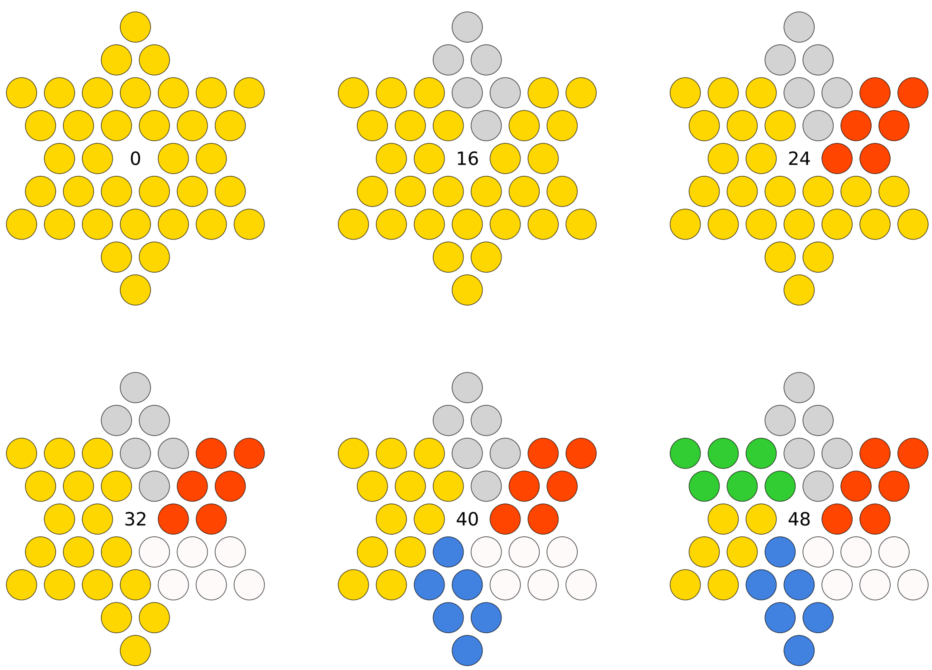
Innerhalb der Schneeflocke haben manche Kugeln sechs oder fünf, andere nur vier oder zwei unmittelbare Nachbarn. Wie in der Abbildung (b) dargestellt ist, soll das Maß für die Unordnung in der Umgebung einer beliebigen Kugel die Anzahl der andersfarbigen Kugeln in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft sein. Man erhält nun den Grad der Unordnung in einem Koffer, indem man die Summe dieser Zahlen über alle in ihm enthaltenen Kugeln bildet. Wie können wir die Kugeln eines jeden Koffers (b) bis (f) mit dem Ziel der minimalen Unordnung umsortieren? Als Lösung genügt es, jeweils den Grad dieser minimalen Unordnung anzugeben. Wie groß ist die Summe der Grade der minimalen Unordnung in allen Koffern?

1. 40
2. 60
3. 80
4. 96
5. 120
6. 150
7. 160
8. 192
9. 196
10. 216

3.2 Lösung

Richtige Antwort: 7 160

Die sechs Kugeln gleicher Farbe müssen jeweils zusammenhängend und in kleinen Trauben gruppiert werden, wobei die Nachbarschaftsregionen zu den andersfarbigen Kugeln möglichst klein gehalten werden sollten. In der Abbildung sind jeweils Lösungen der Aufgaben mit dem zugehörigen Grad der minimalen Unordnung für die sechs verschiedenen Koffer mit (a) 36 goldenen Kugeln; (b) 30 goldenen und sechs silbernen Kugeln; (c) 24 goldenen sowie jeweils sechs silbernen und roten Kugeln; (d) 18 goldenen sowie jeweils sechs silbernen, roten und weißen Kugeln; (e) 12 goldenen sowie jeweils sechs silbernen, roten, weißen und blauen Kugeln sowie (f) jeweils sechs goldenen, silbernen, roten, weißen, blauen sowie grünen Kugeln dargestellt:



Es ergibt sich als Gesamtgrad der minimalen Unordnung 160, Antwort 7 ist also richtig.

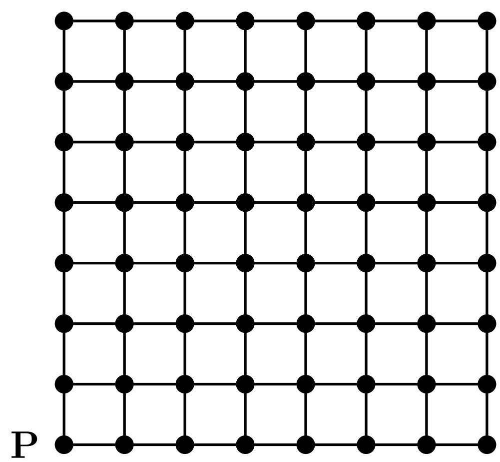
4 Es hat geschneit!

Autor: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)

4.1 Aufgabe

Räumwichtel Raimund berichtet:

In der Nacht hat es stark geschneit, und ein Schneepflug soll nun die Straßen zwischen den Geschenkemanufakturen räumen. Für jede Teilstrecke zwischen zwei benachbarten Kreuzungen benötigt der Schneepflug fünf Minuten - egal, ob dort noch Schnee liegt oder schon geräumt wurde. Zum Beispiel braucht der Schneepflug 35 Minuten, um von der linken unteren Ecke in die linke obere Ecke zu gelangen, und dann 35 weitere Minuten bis zur rechten oberen Ecke.



Der Schneepflugfahrer beginnt im Punkt P (in der linken unteren Ecke) und muss auf seinem Weg jede Straße mindestens einmal durchqueren und vom Schnee befreien. Am Ende muss er zum Punkt P zurückkehren und den Schneepflug wieder im Depot abstellen.

Der Weihnachtsmann hatte immer einen tollen Fahrplan dafür. Leider kennen wir den nicht. Die Frage lautet also: Was ist die kürzest mögliche Zeit, in der der Schneepflugfahrer seine Arbeit erledigen kann?

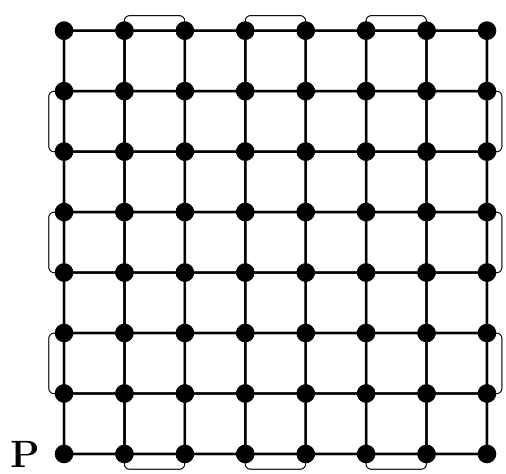
1. 560 Minuten
2. 570 Minuten
3. 575 Minuten
4. 580 Minuten
5. 590 Minuten
6. 600 Minuten
7. 610 Minuten
8. 620 Minuten
9. 630 Minuten
10. 640 Minuten

Projektbezug
Die Aufgabe fragt nach einer möglichst kurzen Route durch alle Strecken eines vorgegebenen Netzwerks. Derartige Routenplanungsprobleme fallen in das Gebiet der kombinatorischen Optimierung und werden in der Forschungsgruppe „Kombinatorische Optimierung“ an der TU Eindhoven untersucht.

4.2 Lösung

Richtige Antwort: 8 620 Minuten

Wir betrachten eine Kreuzung K und alle (zwei oder drei oder vier) an K angrenzenden Straßen. Jedesmal wenn der Schneepflug in die Kreuzung K einfährt, verlässt er K auch wieder. Deshalb ist die Gesamtzahl aller Durchquerungen der an K angrenzenden Straßen eine gerade Zahl.
Am Rand des Straßenplans befinden sich 24 Kreuzungen mit drei angrenzenden Straßen. Mindestens eine der drei jeweils angrenzenden Straßen muss doppelt durchfahren werden. Das Bild zeigt, wie der Schneepflugfahrer mit nur zwölf doppelt durchfahrenen Straßen auskommen kann. Wir überlassen es dem Leser, eine entsprechende Tour zu finden. Es gibt $8 \cdot 7$ vertikale Straßen, $8 \cdot 7$ horizontale Straßen, und 12 doppelt durchfahrene Straßen. Der Schneepflug braucht dazu $(56 + 56 + 12) \cdot 5 = 620$ Minuten.



5 Zahlenturm

Autor: Falk Ebert (Matheon)

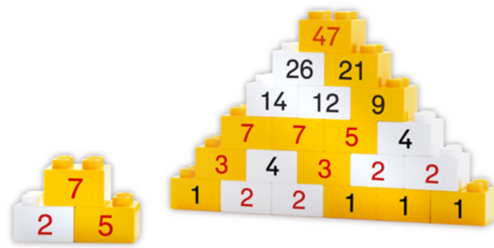


Abbildung 2: Beispielbild der Entwickler

5.1 Aufgabe

Gasteintrag von Bildungs- und Wissenschaftswichtel Boleslaw:

Da bin ich doch mal heute wieder durch den Wichtelkindergarten gegangen und wiedermal hab' ich Wichtel Marek mit Bausteinen erwischt. Der hat ja schon im letzten Jahr fleißig dreieckige Türme gebaut. Doch dieses Mal waren Zahlen auf den Bausteinen (natürliche Zahlen, also keine 0). Ich weiß nicht, wie die Spielzeugentwickler das hinbekommen haben, aber die Steine passen nur so aufeinander, dass auf einem Stein die Summe der beiden darunterliegenden Steine steht - außer natürlich in der untersten Reihe (siehe Beispielbild der Entwickler). Der Turm war auch schon ziemlich hoch.

Was ich noch weiß ist, dass der oberste Stein eine 2412 war - so eine Zahl sticht natürlich ins Auge. Und die Steine in der untersten Reihe waren ziemlich kleine Zahlen, aber welche genau es waren, weiß ich nicht mehr. Was ist wohl die minimale Summe der Zahlen in der untersten Turmreihe, damit so ein Turm zustandekommt?

1. Es ist nicht möglich, einen solchen Turm zu bauen.
2. 10
3. 14
4. 17
5. 19
6. 22
7. 28
8. 31
9. 55
10. 112

Projektbezug

Dieses Beispiel verdeutlich gut, was in der Numerischen Mathematik unter Fehleranalyse verstanden wird. Bis ein Endergebnis feststeht, müssen üblicherweise viele Rechenschritte durchlaufen werden. Da die Berechnungen auf einem Computer stattfinden, wird mit gerundeten Werten gerechnet und da kann es vorkommen, dass kleinste Rundungsfehler sich im Laufe der Rechnung zu dramatischen Veränderungen des Ergebnisses entwickeln. Die Fehleranalyse versucht herauszufinden, an welchen Stellen welche Fehler welchen Einfluss auf das Ergebnis haben.

Bemerkung

Die Steine gibt es wirklich. Sie wurden von Professor Kortenkamp an der TU Berlin entwickelt. Allerdings lassen sie sich beliebig übereinanderstapeln. Die eingebaute Rechenkontrolle gibt es noch nicht.

5.2 Lösung

Richtige Antwort: 4 17

Mit ein wenig Überlegung kommt man schnell darauf, dass die Zahlen in einer Reihe sich unterschiedlich stark auf das Ergebnis an der Spitze auswirken. Nennen wir den obersten Wert a_1, die Werte in der 2. Reihe b_1, b_2, in der 3. Reihe c_1, c_2, c_3, in der 4. Reihe d_1, d_2, d_3, d_4 usw. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \cdot a_1 \\ &= 1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \\ = (c_1 + c_2) + (c_2 + c_3) &= 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 \\ = (d_1 + d_2) + 2(d_2 + d_3) + (d_3 + d_4) &= 1 \cdot d_1 + 3 \cdot d_2 + 3 \cdot d_3 + 1 \cdot d_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Faktoren, mit denen der k-te Stein in der n-ten Reihe in das Ergebnis eingeht, gleich $\binom{n-1}{k-1}$ ist. Die rechte Pyramide auf dem Beispielbild hat beispielsweise 6 Reihen und es gilt:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \binom{5}{0} + 2 \cdot \binom{5}{1} + 2 \cdot \binom{5}{2} + 1 \cdot \binom{5}{3} + 1 \cdot \binom{5}{4} + 1 \cdot \binom{5}{5} \\ = \;& 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \\ = \;& 47. \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt, dass die Summe der Binomialkoeffizienten $\binom{n-1}{k-1}$, $k = 1 \ldots n$ genau 2^{n-1} ist. Das heißt, dass wenn die n-te Reihe nur aus 1en besteht, der oberste Stein den Wert 2^{n-1} trägt. Um auf $2^{11} \leq 2412 \leq 2^{12}$ zu kommen, darf man also maximal 12 Reihen haben. Besteht die 12. Reihe komplett aus 1en, reicht die Summe noch nicht komplett aus um auf den Wert 2412 zu kommen - es fehlen weitere 364. Wenn man jetzt die Binomialkoeffizienten zu $12 - 1 = 11$ betrachtet:

$$\begin{aligned}
\binom{11}{0} &= \binom{11}{11} = 1,\\
\binom{11}{1} &= \binom{11}{10} = 11,\\
\binom{11}{2} &= \binom{11}{9} = 55,\\
\binom{11}{3} &= \binom{11}{8} = 165,\\
\binom{11}{4} &= \binom{11}{7} = 330,\\
\binom{11}{5} &= \binom{11}{6} = 462,
\end{aligned}$$

stellt man fest, $364 = 1 \cdot 330 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 1$. Diese Summe ist so gewählt, dass die großen Koeffizienten zuerst untergebracht werden. Diese Werte braucht man zusätzlich zu den bereits mindestens vorhandenen 1en. Eine mögliche untere Reihe wäre: 2, 4, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Die Summe dieser Zahlen ist 17 und man kann sich leicht überzeugen, dass man mit 12 Reihen keine kleinere Summe hinbekommt und dass mit weniger Reihen, die Summe noch deutlich grösser wird. Mehr als 12 Reihen sind wegen der Forderung, dass die kleinsten Zahlen 1en sind, nicht möglich.

6 Geschenkezocken

Autoren: Madeleine Theile, Andreas Wiese

6.1 Aufgabe

Schriftführer Sigismund berichtet:

Der Alte ist nach wie vor verschwunden und langsam wird es unheimlich. Wie sollen wir ohne Weihnachtsmann anständig Weihnachten begehen? Als Notlösung haben wir uns entschieden, einige unserer Außendienstmitarbeiter schon vorzeitig zu aktivieren.

Antonio de las Vegas und Louis de Monte Carlo sind zwar vielleicht nicht die erste Wahl, aber immerhin kurzfirstig verfügbar. Zur Zeit spielen sie gerade um ihren Adventskalender. Dabei geht es nicht darum, an jedem Tag ein Türchen zu öffnen, sondern auf einen Schlag 24 Geschenke zu bekommen. Jeder bringt 12 Geschenke als Einsatz mit. Letztes Jahr haben sie Beard Jack gespielt, im Jahr davor Reindeer Hold'em. Traditionell bekommt der Gewinner alle Geschenke des Verlierers.

Dieses Jahr spielen sie folgendes Spiel: Ihre insgesamt 24 Geschenke werden auf zwei Haufen, einen linken und einen rechten Haufen, verteilt. Die Spieler sind abwechselnd an der Reihe und nehmen nach folgenden Regeln Geschenke von den Stapeln:

- Ein Spieler nimmt von einem der beiden Haufen eine beliebige Anzahl von Geschenken – jedoch mindestens eins – weg und von dem anderen Stapel kein Geschenk, oder

- er nimmt von beiden Haufen gleich viele Geschenke – jedoch mindestens eins pro Haufen.

Sieger ist, wer das letzte Geschenk wegnimmt.
Sie einigen sich durch einen fairen Münzwurf darauf, dass Antonio den ersten Zug hat, Louis dafür jedoch die Geschenke vor Beginn des Spiels auf zwei Haufen verteilen darf – und zwar so wie er möchte.

Wie muss Louis die Haufen verteilen, damit er garantiert gewinnen kann, egal wie klug Antonio spielt?

1. Egal, wie Louis die Geschenke aufhäuft, Antonio kann immer gewinnen, egal wie gut Louis spielt.
2. Egal, wie Louis die Geschenke aufhäuft, er wird gewinnen können (egal wie gut Antonio spielt).
3. Louis legt auf den linken Haufen kein Geschenk und auf den rechten 24 Geschenke: $(0, 24)$.
4. Louis legt auf den linken Haufen ein Geschenk und auf den rechten 23 Geschenke: $(1, 23)$.
5. Louis legt auf den linken Haufen 2 Geschenke und auf den rechten 22 Geschenke: $(2, 22)$.
6. Louis legt auf den linken Haufen 8 Geschenke und auf den rechten 16 Geschenke: $(8, 16)$.
7. Louis legt auf den linken Haufen 9 Geschenke und auf den rechten 15 Geschenke: $(9, 15)$.
8. Louis legt auf den linken Haufen 11 Geschenke und auf den rechten 13 Geschenke: $(11, 13)$.
9. Louis legt auf den linken Haufen 12 Geschenke und auf den rechten 12 Geschenke: $(12, 12)$.
10. Die Aufgabe ist nicht lösbar.

Projektbezug:
Wir lieben es, kniffelige Aufgaben für den Weihnachtskalender zu bauen, die uns davon abhalten, Paper zu schreiben. ☺

6.2 Lösung

Richtige Antwort: 7. (9, 15)

Wir nennen im Folgenden ein Tupel (n, m) eine *Konfiguration*, welche eine Verteilung von $n + m$ verbleibenden Geschenken auf die beiden Haufen symbolisiert, sodass auf dem einen Haufen n und auf dem anderen Haufen m Geschenke liegen. Eine Konfiguration heißt *gewonnen* wenn der Spieler, der am Zug ist, gewinnen kann, egal wie sein Gegner spielt. Entsprechend heißt die Konfiguration verloren, wenn der Spieler, der am Zug ist, auf jeden Fall verliert, egal wie er spielt. Wichtig ist uns hierbei auch, die Differenz $\Delta = m - n$ zwischen n und m zu betrachten. (Aus Symmetriegründen beschränken wir uns auf Konfigurationen (n, m) mit $m \geq n$.)
Wir wollen im Folgenden verlorene Konfigurationen berechnen, da Weihnachtsmann Louis nach einer solchen Verteilung von Geschenken sucht, dass Weihnachtsmann Antonio, der ja den ersten Zug hat, verlieren wird, egal wie gut er spielt. Hierzu beginnen wir mit einer Übersicht über verlorene Konfigurationen sowie deren Konstruktionsweise und klären erst im Anschluss durch einen mathematischen Beweis, wieso dies gilt. Zur Differenz $\Delta = 1$ gibt es genau eine verlorenen Konfiguration: $(1, 2)$. Man überlegt sich leicht, dass Antonio nur wenig Möglichkeiten hat entsprechend der Regeln des Spiels Geschenke von den Stapeln zu nehmen:

- Man kann vom linken Stapel ein Geschenk herunternehmen. Es entsteht die Konfiguration $(2, 0)$. Der Gegner kann dann vom rechten Stapel zwei Geschenke herunternehmen und hat gewonnen.

- Man kann vom rechten Stapel ein Geschenk herunter nehmen, was die Konfiguration $(1, 1)$ erzeugt. Der Gegner kann nun in einem Zug gewinnen, indem er von beiden Stapeln ein Geschenk wegnimmt.

- Man kann vom rechten Stapel zwei Geschenke wegnimmt, gibt dies die Konfiguration $(1, 0)$. Der Gegner kann nun in einem Zug gewinnen.

- Wenn man von beiden Stapeln ein Geschenk wegnimmt, erhält man ebenfalls die Konfiguration $(1, 0)$ (von der aus der Gegner in einem Zug gewinnen kann).

In jedem Fall führt dies aber zu der Situation, dass Louis das letzte Geschenk nimmt und das Spiel gewinnt. Die gleiche Argumentation lässt sich für die Differen $\Delta = 2$ und $n = 3$ mit der resultierenden Konfiguration $(3, 5)$ durchführen.

Intuitiv suchen wir nun nach der nächsten „unbesetzten“ Zahl, die wir bisher noch nicht in der Liste der verlorenen Konfigurationen gesehen haben und addieren die nächsthöhere Differenz darauf. Es ergibt sich damit folgendes Bild für $n \leq 50$ und $m \leq 50$ (natürlich muss gelten dass $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$).

Δ	$(n, m = n + \Delta)$
0	(0,0)
1	(1, 2)
2	(3, 5)
3	(4, 7)
4	(6, 10)
5	(8, 13)
6	(9, 15)
7	(11, 18)
8	(12, 20)
9	(14, 23)
10	(16, 26)
11	(17, 28)
12	(19, 31)
13	(21, 34)
14	(22, 36)
15	(24, 39)
16	(25, 41)
17	(27, 44)
18	(29, 47)
19	(30, 49)

In den folgenden Bildern ergänzen wir die Kurzform der Lösung durch die angegebene Tabelle durch einen weiteren konstruktiven (dynamische Programmierung) Berechnungsansatz. Jedes Feld korrespondiert hierbei zu einer Konfiguration. Das Feld in der linken unteren Ecke entspricht der Konfiguration $(0, 0)$, das Feld in der rechten oberen Ecke der Konfiguration $(24, 24)$. Und wir zeigen konstruktiv, wie sich aus der Tabelle die verlorenen und gewonnenen Konfigurationen berechnen lassen. Die roten Felder entsprechen

gewonnenen, die grünen Felder verlorenen. Über blaue Felder ist bisher nichts bekannt.
Wir untersuchen die Konfigurationen per Rückwärtsinduktion und beginnen mit der verlorenen Konfiguration $(0,0)$ vergleiche auch Abbildung 3. Alle Konfigurationen, von denen man in einem Zug $(0,0)$ erreichen kann, sind entsprechend gewonnen: Das sind die Konfigurationen $(n,0)$ - symmetrisch dazu $(0,n)$ - und (n,n) für $n \geq 1$

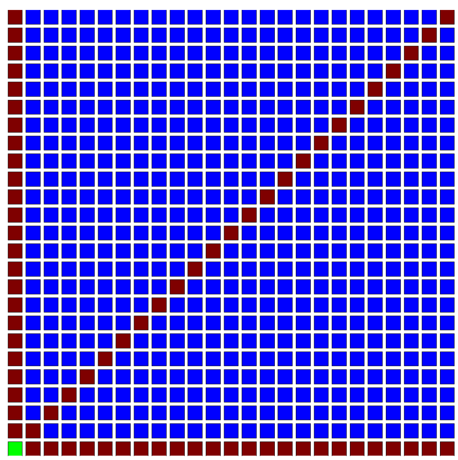


Abbildung 3: Die Tabelle zeigt die verlorene Konfiguration $(0,0)$ in grün und die daraus resultierenden gewonnenen Konfigurationen in rot.

Also verbleiben Konfigurationen (n,m) mit $m \geq 1$ und $n-m \geq 1$, welche noch zu untersuchen sind. Wie schon geklärt, ist die Konfiguration $(1,2)$ ebenfalls verloren, und daraus resultiert, dass alle Konfigurationen $(n,1)$, $(n',2)$ und $(n'+1,n')$ mit $n \geq 3$ und $n' \geq 2$ gewonnen sind vergleiche hierzu Abbildung 4. In der Tabelle findet man die nächste verlorene Konfiguration hierbei dadurch auf, dass man in den nächstgrößeren Spalten oder auch Zeilen nach der kleinsten Konfiguration sucht, über die wir noch nicht wissen, ob diese gewonnen oder verloren ist. In der Tabelle entspricht dies also dem blauen Feld, welches am weitesten links und unten steht.
Insbesondere ist damit für alle Konfigurationen (n,m) mit $\Delta = m-n = 1$ oder $m \in \{0,1,2\}$ bekannt, ob sie gewonnen oder verloren sind. Die "nächste"

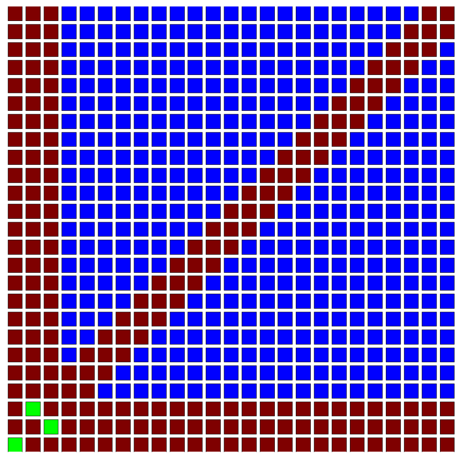


Abbildung 4: Die Tabelle zeigt die nächste verlorene Konfiguration $(2,1)$ und $(1,2)$ in grün und die daraus resultierenden gewonnenen Konfigurationen in rot.

ungeklärte Konfiguration ist damit $(5,3)$, und alle Konfigurationen $(n,3)$, $(n',5)$, und $(n'+2,n')$ mit $n \geq 6$, $n' \geq 4$ sind damit gewonnen.
Wenn man dieses Schema Schritt für Schritt weiterführt, bekommt man die Tabellen, die in Abbildung 5 gezeichnet sind. Daraus lässt sich dann die Lösung der Aufgabe ablesen.

Mathematischer Beweis

Nun wollen wir einen Beweis führen, dass das obige Schema tatsächlich immer funktioniert (auch, wenn wir uns die Tabellen nicht mehr aufmalen).
Wir beweisen, dass es tatsächlich ausreichend ist, sich zusammen mit den möglichen Differenzen, die nächste unbesetzte Zahl anzusehen. Zuerst überlegt man sich, dass es für jedes $\Delta \in \mathbb{N}$ nur ein $f(\Delta) \in \mathbb{N}$ geben kann, sodass die Konfiguration $(f(\Delta)mf(\Delta) + \Delta)$ verloren ist. (Wenn nämlich z.B. $(f(\Delta), f(\Delta) + \Delta)$ und $(f(\Delta) + i, f(\Delta) + i + \Delta)$ verloren wären, könnte man bei Konfiguration $(f(\Delta) + i, f(\Delta) + i + \Delta)$ von beiden Stapeln i Geschenke wegnehmen und hätte gewonnen, weil $(f(\Delta), f(\Delta) + \Delta)$ ja verloren ist). Mit dem gleichen Argument gilt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur ein $g(n) \in \mathbb{N}$ geben kann, sodass $(n, g(n))$ (bzw. $(g(n), n)$) verloren ist.
Angenommen, es existiert ein Δ_0, sodass wir für alle $\Delta \leq \Delta_0$ die Zahl $f(\Delta)$ berechnet haben. Sei $M := \{(f(\Delta), f(\Delta) + \Delta) | \Delta \leq \Delta_0, \Delta \in \mathbb{N}\}$. Es gibt – wie oben besprochen – für jede Zahl n genau eine Zahl $g(n)$, sodass $(n, g(n))$ verloren ist. Das gilt insbesondere für jede Zahl n, für die es ein $\Delta \leq \Delta_0$ gibt, sodass $n = f(\Delta)$. Für solche Zahlen n gilt sogar, dass $(n, g(n)) = (n, n+\Delta) = (f(\Delta), f(\Delta) + \Delta)$. Deswegen "erfasst" unsere Menge M automatisch alle Paare $(n, g(n))$, für die es ein $\Delta \leq \Delta_0$ gibt, sodass $(n, g(n)) = (f(\Delta), f(\Delta) + \Delta)$. Mathematisch ausgedrückt:

$$M = \{(f(\Delta), f(\Delta) + \Delta) | \Delta \leq \Delta_0\} = \{(f(\Delta), g(f(\Delta))) | \Delta \leq \Delta_0\}$$

Wir interessieren uns nun für die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $n \notin M$. Wir betrachten die Konfiguration $(n + \Delta_0 + 1, n)$.

Behauptung 1. $(n + \Delta_0 + 1, n)$ *ist verloren.*

Welche Züge kann man in dieser Konfiguration machen?

1. Wenn man von beiden Stapeln gleich viele Geschenke herunternimmt, bekommt man eine Konfiguration $(n + \Delta_0 + 1 - i, n - i)$. Nach Vorraussetzung ist damit $n - i \in M$. Jedoch gibt es nur eine Zahl $g(n-i)$, sodass $(g(n-i), n-i)$ verloren ist und es gilt $|g(n-i) - (n-i)| \leq \Delta_0$. Daher ist $(n + \Delta_0 + 1 - i, n - i) \neq (g(n-i), n-i)$ und damit $(n + \Delta_0 + 1 - i, n - i)$ gewonnen.

2. Wenn man vom rechten Stapel i Geschenke herunter nimmt, bekommt man die Konfiguration $(n + \Delta_0 + 1, n - i)$. Nach Vorraussetzung ist

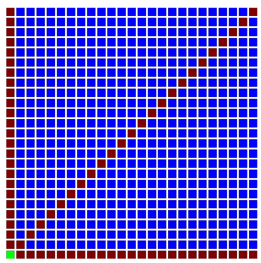
$n - i \in M$ und daher gibt es ein $\Delta \leq \Delta_0$, sodass $f(\Delta) = n - i$. Dann gilt nach Vorraussetzung $f(\Delta) + \Delta < n + \Delta_0 + 1$ und daher kann der Gegner im nächsten Zug die Konfiguration $(f(\Delta) + \Delta, f(\Delta))$ erspielen (und die ist verloren).

3. Wenn man vom linken Stapel i Geschenke herunter nimmt, bekommt man die Konfiguration $(n+\Delta_0+1-i, n)$. Wir unterscheiden zwei Fälle

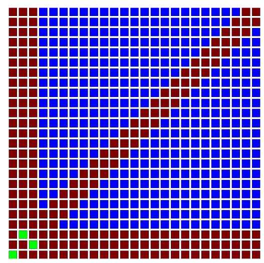
   (a) $n + \Delta_0 + 1 - i \geq n$: In dem Fall gilt dass $\Delta' := (n + \Delta_0 + 1 - i) - n \leq \Delta_0$. Da aber $n \notin M$ ist $(n + \Delta_0 + 1 - i, n)$ *nicht* die eindeutige Konfiguration $(f(\Delta') + \Delta', f(\Delta'))$, die verloren ist. Daher ist $(n + \Delta_0 + 1 - i, n)$ gewonnen.

   (b) $n+\Delta_0+1-i < n$: In diesem Fall ist $n+\Delta_0+1-i \in M$. Da aber $n \notin M$ ist $(n+\Delta_0+1-i, n)$ *nicht* die eindeutige Konfiguration $(g(n), n)$ (bzw. $(n, g(n))$), die verloren ist. Damit ist $(n + \Delta_0 + 1 - i, n)$ gewonnen.

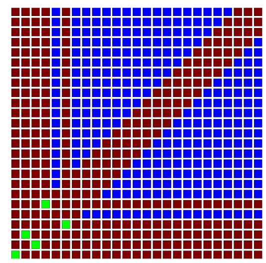
Wir setzen daher $f(\Delta_0 + 1) := n$ und haben damit für alle $\Delta \leq \Delta_0 + 1$ den Wert $f(\Delta)$ berechnet. Dies setzen wir induktiv so fort und bekommen die Werte aus der obigen Tabelle.



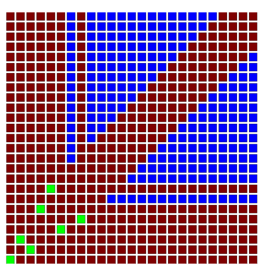
(a) Konfiguration $(0, 0)$



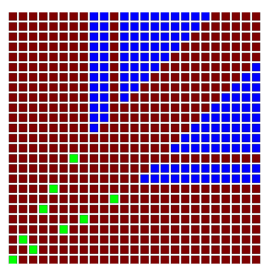
(b) Konfiguration $(1, 2)$



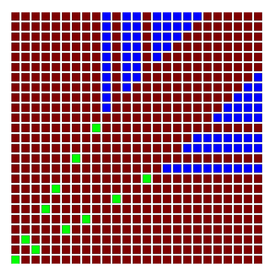
(c) Konfiguration $(3, 5)$



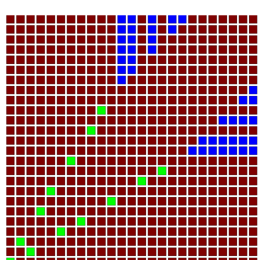
(d) Konfiguration $(4, 7)$



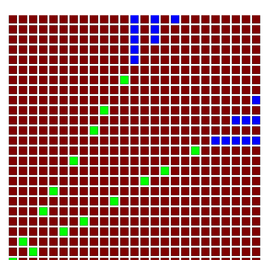
(e) Konfiguration $(6, 10)$



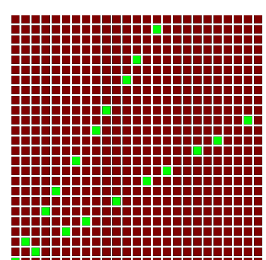
(f) Konfiguration $(8, 13)$



(g) Konfiguration $(9, 15)$



(h) Konfiguration $(11, 18)$



(i) Alle Konfigurationen $(0, 0)$ bis $(24, 24)$

Abbildung 5: Die vollständige Lösung der Aufgabe für die Konfigurationen $(0, 0)$ bis $(24, 24)$ anhand einer dynamischen Programmierungstabelle. Die Lösung lässt sich in Bild 5(g) ablesen.

7 Korrupte UEFA

Autor: Gregor Heyne (Matheon)

7.1 Aufgabe

Schriftführer Sigismund (mal wieder):

Der Weihnachtsmann ist immer noch verschwunden. Mittlerweile hat das durchaus Auswirkungen auf die Arbeitsmoral. Heute morgen ist ein 2 Jahre alter Streit wieder aufgeflammt. Im März 2008 ereignete sich nämlich Folgendes. Während der Mittagspause verfolgten die Weihnachtswichtel und der Chef die Radioübertragung der Auslosung der Viertelfinalbegegnungen in der Champions League. Es wurden die folgenden vier Begegnungen ausgelost:

1. Arsenal – Liverpool,

2. AS Rom – Manchester United,

3. Schalke – Barcelona,

4. Fenerbahce Istanbul – Chelsea.

Am Abend stellte der Weihnachtsmann fest, dass etwa anderthalb Stunden vor der Auslosung ein Mitglied eines Internet-Forums des FC Liverpool eine Nachricht verbreitet hat, in der er behauptete: *Es kursieren Gerüchte, nach denen die Auslosung manipuliert sei. Er glaube das zwar nicht. Wenn es aber doch zutreffe, seien es die folgenden vier Begegnungen.* Dann nannte er genau die Spiele, die dann später gezogen worden waren, und zwar auch in der richtigen Reihenfolge der Gegner (durch die ja das Heimrecht geregelt ist). Zusätzlich hatte der Autor dieser Nachricht auch noch die zugleich ausgelosten Halbfinals, inklusive der Reihenfolge der Teams, (Spiele werden nummeriert, und dann werden Nummern gezogen) richtig vorhergesagt.
Dieses seltsame Ereignis[1] wurde noch Tage später lebhaft in verschiedenen Internetforen diskutiert, unter dem Titel: *Ist die UEFA korrupt?* Eine in den Medien verbreitete Antwort der UEFA auf viele aufgebrachte Mails lautete lakonisch: *he was just lucky and guessed the matches.*
Auch die Weihnachtswichtel diskutierten nun angeregt darüber, wie hoch denn die Wahrscheinlichkeit sei, die richtigen Spielansetzungen zu raten. Der

[1] Es handelt sich hier um eine wahre Begebenheit. Siehe auch: `http://www.liverpooldailypost.co.uk/liverpool-fc/liverpool-fc-news/2008/03/14/daily-post-forums-swamped-by-champions-league-claim-64375-20624765/`

Weihnachtsmann versprach dem Wichtel, der die korrekte Antwort ermittelt, eine Woche Ferien zusätzlich. Bisher hat nur keiner eine überzeugende Antwort geben können. Und nun, da der Weihnachtsmann weg ist, und sich etwas Langeweile breit macht, kam die Diskussion wieder auf. Welche der von den Wichteln genannten Wahrscheinlichkeiten ist denn nun richtig - oder möglichst nah am richtigen Wert? Dann könnte man die Sache nämlich abhaken und die Wichtel könnten wieder weiterarbeiten.

1. 1/967680
2. 1/1000000
3. 1/40320
4. 1/568
5. 1/483840
6. 1/10
7. 1/20160
8. 1/4032
9. 1/80640
10. 1/90740

Hinweis: Um potentiellen Verwirrungen unter Fußballlaien vorzubeugen:

- Das Spiel *Arsenal - Liverpool* ist ein anderes Spiel als *Liverpool - Arsenal*, weil wichtig ist, wer bei wem im Heimstadion spielt.
- Ob die Begegnung *Arsenal - Liverpool* vor oder nach *AS Rom - Manchester United* gezogen wird, ist egal. Hauptsache, das Spiel kommt zustande.
- Zu den Halbfinalspielen: In der Reihenfolge, in der die Spiele stattfinden, werden Nummern in den Topf geworfen. Für das erste Halbfinale werden dann 2 Nummern gezogen (Reihenfolge wichtig) und für das zweite Halbfinale ebenso.
- Ob Halbfinalspiel 1 vor Halbfinale 2 oder umgekehrt gezogen wird, ist unerheblich, weil man ja nur wissen will, wer gegen wen spielt.

7.2 Lösung

Richtige Antwort: 7 1/20160

Die Wahrscheinlichkeit die Viertelfinalansetzungen richtig zu raten kann wie folgt bestimmt werden:
Exp. 1: ziehe Team 1 für Spiel 1: 8 Möglichkeiten
Exp. 2: ziehe Team 2 für Spiel 1: 7 Möglichkeiten
Exp. 3: ziehe Team 1 für Spiel 2: 6 Möglichkeiten
Exp. 4: ziehe Team 2 für Spiel 2: 5 Möglichkeiten
Exp. 5: ziehe Team 1 für Spiel 3: 4 Möglichkeiten
Exp. 6: ziehe Team 2 für Spiel 3: 3 Möglichkeiten
Exp. 7: ziehe Team 1 für Spiel 4: 2 Möglichkeiten
Exp. 8: ziehe Team 2 für Spiel 4: 1 Möglichkeit.

Es gibt nach dem allgemeinen Zählprinzip also 8! Möglichkeiten, die 4 Begegnungen mit Berücksichtigung der Reihenfolge zu ziehen. Die Reihenfolge der 4 Spiele spielt keine Rolle bei der Ziehung. Es gibt 4! mögliche Permutationen der 4 Spiele. Also gibt es insgesamt $\frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$=1680 verschiedene Resultate der Viertelfinalauslosung.

Für die zusätzliche Auslosung der Halbfinals geht man wie folgt vor. Spiele des Viertelfinals werden durchnumeriert von 1 bis 4.
Exp. 1: ziehe Team 1 für Spiel 1: 4 Möglichkeiten
Exp. 2: ziehe Team 2 für Spiel 1: 3 Möglichkeiten
Exp. 3: ziehe Team 1 für Spiel 2: 2 Möglichkeiten
Exp. 4: ziehe Team 2 für Spiel 2: 1 Möglichkeit.

Also gibt es 4! mögliche Auslosungen der Spiele bei Berücksichtigung der Reihenfolge der Auslosung. Da auch hier das Heimrecht wieder relevant ist, ist die Reihenfolge der Teams in den Spielen wichtig. Lediglich die Reihenfolge der beiden Halbfinalpaarungen ist irrelevant. Also gibt es $\frac{4!}{2!} = 12$ mögliche Ausgänge der Halbfinalauslosung.

Nimmt man die beiden richtigen Vorhersagen zusammen, hatte der Schreiber der Mail also eine Chance von 1 zu $1680 \cdot 12 = 20160$, die richtigen Ergebnisse der Auslosung zu erraten.

8 Christbaumkugel

Autor: Daniel Peterseim (Matheon)

8.1 Aufgabe

Dekowichtel Detlef schreibt:

Im Prospekt sah alles echt toll aus: *Weltbekanntes europäisches Kristallimperium stellt die weltgrößte Christbaumkugel her. Sie hat mehrere Meter Durchmesser und ist aus futuristisch anmutenden gekrümmten dreiecksähnlichen Glasteilen zusammengesetzt. Bestellung nur telefonisch. Preis astronomisch.* Um die Kosten zu minimieren, wurde Planung und Produktion ausgelagert. Lediglich die Endmontage erfolgt beim Endnutzer, also bei uns. Heute trafen nun nach langer Verzögerung die Einzelteile aus dem fernen Osten ein. Die Konstruktion ist aufwändig, da keines der Teile einem anderen gleicht. Es gibt genau eine Möglichkeit die Glasteile korrekt zusammenzusetzen. Leider fehlt ein Plan. Zum Glück sind die Ecken aller Einzelteile mit Nummern gekennzeichnet. Haben zwei Steine jeweils eine Ecke mit gleicher Nummer, so bedeutet das, dass sich diese Ecken berühren. Die folgende Liste zeigt für jedes vorhandene Teil die Nummern seiner Ecken, wobei die Reihenfolge der Nummerierung keine Rolle spielt:

8	24	26	24	26	30	1	5	16	7	24	28
7	24	30	1	7	30	8	10	24	8	23	26
3	4	29	3	15	29	15	20	29	20	28	29
7	28	29	4	7	29	3	11	27	3	9	15
3	9	27	9	15	20	19	21	27	20	22	28
22	24	28	10	22	24	14	23	26	5	14	19
1	5	14	1	14	26	3	11	25	3	16	25
5	16	25	5	19	25	19	25	27	11	25	27
6	9	20	6	9	27	6	21	27	2	19	21
6	17	20	17	20	22	13	17	22	2	12	19
2	12	23	12	14	19	12	14	23	13	17	18
8	10	18	10	13	18	6	17	18	6	18	21
2	18	21	8	18	23	2	18	23			

Mit dieser Information lässt sich die Kugel eindeutig zusammensetzen, falls alle Teile vorhanden sind. Aber genau da liegt das Problem. Sind eigentlich alle Teile geliefert worden? Falls nicht, wie lautet die minimale Anzahl von Bauteilen, die nachgefertigt werden müssten um das Kunstwerk zu vollenden?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. Alle Teile sind vorhanden.

Praxisbezug
Dreiecksnetze (Triangulierungen), oder allgemeinere Unterteilungen von Körpern und Flächen in einfache geometrische Objekte, spielen eine wichtige Rollen in vielen Gebieten der Mathematik. Sie bilden z.B. die Grundlage vieler numerischer Verfahren zur Simulation physikalischer Prozesse wie etwa der Temperaturentwicklung auf der Erdoberfläche. Weitere Anwendungen finden sich in der Computergraphik.

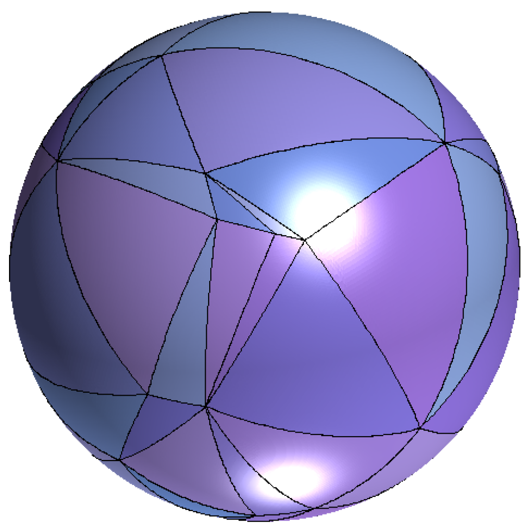


Abbildung 6: So soll das Meisterwerk einmal aussehen.

8.2 Lösung

Richtige Antwort: 5 5

Zur Lösung sollte man für jedes Teil auf der Liste seine 3 Kanten (alle möglichen Paare seiner Ecken) bestimmen. Falls alle Teile vorhanden sind, so sollte in der Liste aller so bestimmten Kanten jedes Paar von Ecken genau zweimal vorkommen. Kanten die nur einmal auftreten, signalisieren fehlende Teile. Mit etwas Fleiß (der Aufwand hängt stark vom algorithmischen Vorgehen ab - es lohnt sich kurz nachzudenken - länger als 15min sollte das nicht dauern) ermittelt man, dass die Kanten

1	7	1	16
26	1	30	1
4	3	16	3
7	4	10	13
22	10	13	22
26	30		

nur einmal auftreten. Daraus muss nun eine minimale Anzahl fehlender Bauteile rekonstruiert werden, z.B.

1	26	30
1	4	7
10	13	22
3	4	16
1	4	16

Diese Rekonstruktion ist zwar nicht eindeutig, die korrekte Antwort ist aber in jedem Fall 5.

8.3 Teilnehmerlösung

Albert Armbruster, ein Mitspieler des Mathekalenders hatte eine sehr schöne, elegante Lösungsidee geliefert. Bemüht man den Euler'schen Polyedersatz, ergibt sich die Bedingung:

$$\#\text{Ecken} + \#\text{Flächen} = \#\text{Kanten} + 2.$$

Zwar handelt es sich bei der Kugel nicht um einen Polyeder. Für das Gitternetz auf der Kugel gilt der Satz trotzdem.

Wir nehmen an, dass zumindest alle Eckpunkte der Dreiecke vorhanden sind. Das sind genau $e = 30$. Die Anzahl der Flächen f ist nicht bekannt. Von den Kanten k weiß man, dass jede Fläche 3 Kanten hat. Allerdings wird diese Kante auch noch mit einem anderen Dreieck geteilt. Demnach gilt $k = \frac{3f}{2}$. Also folgt

$$30 + f = \frac{3}{2}f + 2$$

oder $f = 56$. Dann sind in der Liste mit 51 Flächen genau 5 zuwenig angegeben.

9 Der Weihnachtsmann im Mond

Autor: Maciek Korzec (Matheon)

9.1 Aufgabe

Irma, Wichtelin für interstellare Expansion erzählt:

Immer wieder musste der Weihnachtsmann in den letzten Jahren umziehen, weil die Bevölkerungszahlen der Erde rasant in die Höhe schossen und weil sich die Menschen, vor allem die Kinder, mehr und mehr Geschenke wünschten. Jährlich grüßte das Murmeltier... Der alte Mann arbeitete das ganze Jahr Wunschlisten ab und sammelte Spielsachen, Bücher, Elektronik usw. für Groß und Klein in seinem Lagerhaus. Am Ende des Jahres platzte es aus allen Nähten, so dass er immer wieder, nachdem er alle Geschenke verteilt hatte, beschloss umzuziehen. Nach 7 Umzügen und 7 verschiedenen Lagerhäusern, schließlich gigantischen Lagerpalästen, die doch wieder vorne und hinten nicht ausreichten, war es ihm zuviel und er fand endlich ein wirklich großes Lager: Einen perfekt runden, winzigen, hohlen Jupitermond mit einem Innenradius von etwa 40 Kilometern, genauer $r = 60000/(\pi^{1/3})\ m$. Viele Jahrzehnte vergingen und der Weihnachtsmann hat sich gut eingelebt. Er hat sogar ein kleines Wohnhaus in dem Mond. Doch mit der Zeit, mit dem wachsenden Materialismus auf der Erde, wuchs der Geschenkeberg ins unvorstellbar Unermessliche. Als vor Weihnachten 2007 der von den Menschen bislang unentdeckte Mond bis zur Hälfte mit Geschenken gefüllt war, fing der Mann mit dem weißen Bart an, Buch über die Mondauslastung zu führen, um vorherzusehen, wie lange er noch in seinem geliebten Hause leben könne. Im folgenden Jahr, 2008, stellte er schockiert fest, dass zusätzlich die Hälfte des freien Volumens gefüllt war und er befürchtete nun 2009 schon ausziehen zu müssen. Zu seinem Glück bremste das Wachstum ab, die Geschenkvolumenzunahme wurde geringer. 2009 wurde von dem Viertel, dass im Jahr zuvor noch frei war, wieder zusätzlich die Hälfte gefüllt. Wenn also das Volumen des Mondes V_0 ist, war 2007 $V_1 = 1/2 \times V_0$ mit Geschenken belegt, 2008 $V_2 = 3/4 \times V_0$, 2009, $V_3 = 7/8 \times V_0$. Man kann davon ausgehen, daß sich auch in den Folgejahren diese Regelmäßigkeit eines anscheinend abbremsenden Wachstums fortsetzt. Es scheint ihm aber so, dass der Mond auch in ferner Zukunft ausreichen könnte, um alle Geschenke aufzubewahren. Er möchte jedoch $400\,m^3$ für sich haben, für sein Häuschen, den Pool, etc. Falls auch diese belegt werden würden, würde er schweren Herzens wieder umziehen - in einen größeren Mond.

Bis zu welchem Jahr muss ich einen neuen Mond gefunden haben, damit der Weihnachtsmann umziehen kann (weil in dem Jahr der Mond erstmalig zu klein ist), wenn sich die von ihm beobachtete Gesetzmäßigkeit fortsetzt?

1. 2010
2. 2023
3. 2024
4. 2027
5. 2036
6. 2045
7. 2046
8. 2049
9. 2063
10. Er muss nie wieder umziehen.

9.2 Lösung

Richtige Antwort: 7 2046

Das Volumen des perfekt runden Mondes ist durch den Radius bestimmt, $V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 = 2.88 \times 10^{14} m^3$, von diesen sollen $400 m^3$ für den Weihnachtsmann übrigbleiben, sonst zieht er um.

Komplizierter Weg für Schritt 1:
Es gilt

$$\begin{aligned} V_3 &= V_2 + (V_0 - V_2)/2 \\ &= V_1 + (V_0 - V_1)/2 + (V_0 - V_1 - (V_0 - V_1)/2)/2 \\ &= V_0/2 + (V_0 - V_0/2)/2 + (V_0 - V_0/2 - (V_0 - V_0/2)/2)/2 \\ &= V_0/2 + V_0/4 + V_0/8 \end{aligned}$$

Daraus schließt man eine generelle Formel für das $n$te Jahr nach Beginn der Buchführung für die Volumina,

$$V_n = V_0 \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k,$$

die belegt sind. Da diese Summe eine geometrische Reihe darstellt, kann man ihren Wert leicht bestimmen. Allgemein gilt für $q \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} \quad ,$$

so dass man hier erhält:

$$V_n = V_0 \frac{1/2 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = V_0(1 - (1/2)^n) \quad .$$

Einfacher Weg für Schritt 1:
Diese Formel kann man natürlich auch leicht einsehen, indem man sich überlegt, dass jedes Jahr $(1/2)^n$ des Gesamtvolumens frei bleibt. Sei also $\bar{V}_n$ das freie Volumen im $n$ten Jahr, so hat man $\bar{V}_1 = 1/2 V_0$, $\bar{V}_2 = (1/2)^2 V_0$, $\bar{V}_2 = (1/2)^3 V_0$ und dementsprechend hat man das belegte Volumen $V_n = V_0 - \bar{V}_n = V_0 -$

$(1/2)^n V_0$.

Schritt 2: Jetzt muss man sich nur noch überlegen wann $\bar{V}_n < 400m^3$ wird:

$$\begin{aligned}
&\bar{V}_n < 400m^3\\
&\Leftrightarrow (1/2)^n V_0 < 400m^3\\
&\Leftrightarrow n\log(1/2) < \log(400m^3/V_0)\\
&\Leftrightarrow n > \frac{\log(400m^3/V_0)}{\log(1/2)} = 39.389 \quad .
\end{aligned}$$

Im 40sten Jahr nach dem Beginn der Aufzeichnungen wird der Weihnachtsmann umziehen müssen, wenn die Regelmäßigkeit im Zuwachs der Geschenkeanzahl bleibt wie vorhergesehen. D.h. im Jahr 2046.

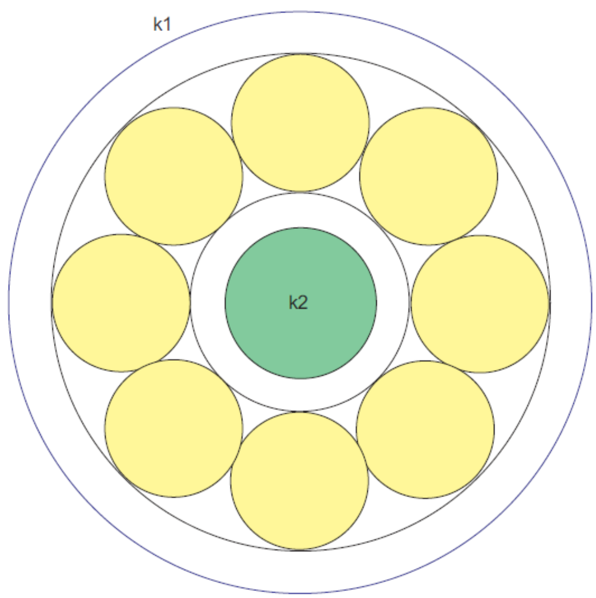
10 Ein neues Kirchenfenster

Autor: Ingmar Rubin

10.1 Aufgabe

Bauabteilungs-Wichtelin Bernadette:

Der letzte Herbststurm hat der Dorfkirche von Weihnachtshausen mächtig zugesetzt. Das große, kreisrunde Ostfenster wurde komplett zerstört und muss durch ein Neues ersetzt werden. In einer alten Zeichnung sind leider nicht mehr alle Maße klar erkennbar.



Der äußere Kreis k_1 hat einen Durchmesser von zwei Metern. Dem Kreis k_1 ist mittig der Kreis k_2 einbeschrieben. Weiterhin befinden sich acht gleich große Kreisscheiben so zwischen k_1 und k_2, wie in der Abbildung ersichtlich. Je zwei dieser Kreise berühren sich untereinander. Zwischen den 8 Kreisen und k_1 sowie k_2 befindet sich jeweils ein gläserner Ring, der eine Breite von 20 cm hat. Die acht gleich großen Kreise haben also einen (minimalen) Abstand von 20 cm zu sowohl k_1 als auch k_2.

Welchen Radius hat dann der innerste Kreis k_2?

1. $\approx$ 15,7 cm
2. $\approx$ 16,3 cm
3. $\approx$ 17,1 cm
4. $\approx$ 18,7 cm
5. $\approx$ 19,6 cm
6. $\approx$ 20,2 cm
7. $\approx$ 20,8 cm
8. $\approx$ 21,2 cm
9. $\approx$ 22,1 cm
10. Die Maßangabe lässt sich nicht eindeutig ermitteln.

Hinweis: Die Zugabe, die für das Fassen der einzelnen Scheiben nötig ist, wird ignoriert.

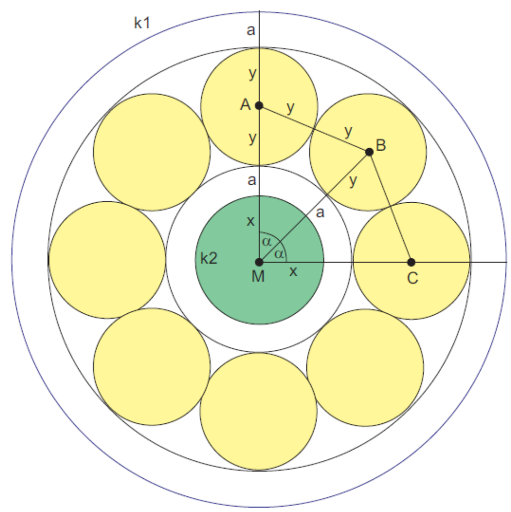


Abbildung 7: Skizze zur Lösung

10.2 Lösung

Richtige Antwort: 1 $\approx$ 15,7 cm

Wir nutzen die Bezeichnungen wie in Abb. 7. Für den Fall, dass sich die acht Kreise exakt in je einem Punkt berühren, gilt für den Radius von k_1

$$1 = x + 2a + 2y. \tag{1}$$

Für den Winkel gilt $\alpha = \sphericalangle AMB = 45°$. Im Dreieck AMD kann der Kosinussatz verwendet werden

$$\triangle AMB : (y+y)^2 = 2 \cdot (x+a+y)^2 \cdot (1 - \cos\alpha), \quad \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel und erhalten

$$2y = \sqrt{2}(x+a+y) \cdot \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = (x+a+y)\sqrt{2-\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Einsetzen von $a = \frac{1}{5}$ und Lösen des Gleichungssystems (1) und (2) liefert

$$x = \frac{6 - 5\sqrt{2-\sqrt{2}}}{10 + 5\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 0,15717, \quad y = \frac{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}{10+5\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 0,221415.$$

Der gesuchte Radius ist genau x.

11 Der Bus

Autor: Onno Boxma (TU Eindhoven)

11.1 Aufgabe

Schriftführer Sigismund berichtet:

Immer noch kein Weihnachtsmann, dafür jede Menge mehr oder weniger faulenzende Wichtel. Um sie ein bisschen vor dem kompletten geistigen Verfall zu bewahren, habe ich ihnen eine Denkaufgabe gestellt. Ich hätte nicht erwartet, dass einige das Problem angehen, indem sie sich an den Schultern fassen und mit den Worten „Brumm, brumm, wir sind der Bus!“ durch das Haus rennen. Na ja, wenigstens haben sie etwas Bewegung und futtern nicht ständig die Plätzchen weg. Es wird aber wirklich Zeit, dass der Weihnachtsmann wiederkommt.

Ach ja, die Aufgabe war die folgende: Mein Haus steht genau mittig zwischen Wichtelingen und Weihnachtshausen. Es ist also prinzipiell egal, wohin ich für meine Weihnachtseinkäufe gehe. Es fährt auch in jede Richtung ein Bus im (angeblichen) 20-Minuten-Takt. Allein die Verlässlichkeit der Busse lässt zu wünschen übrig. Beim Bus in Richtung Wichtelingen vergehen in der Hälfte der Fälle zwischen den Ankünften von zwei Bussen an der Haltestelle 20 Minuten. In 25 % der Fälle verstreichen nur 10 Minuten, während in den übrigen 25 % die Zwischenankunftszeiten 30 Minuten betragen. Für den Bus nach Weihnachtshausen habe ich herausgefunden, dass der zeitliche Abstand in der Hälfte der Fälle 10 Minuten beträgt und sonst 30 Minuten.

Wenn ich nun an die Haltestelle komme, wie lange muss ich dann durchschnittlich auf den Bus nach Wichtelingen/Weihnachtshausen warten?

1. (10 min/10 min)
2. (9 min/9 min)
3. (11 min/11 min)
4. (9 min/11 min)
5. (11 min/9 min)
6. ($11\frac{1}{4}$ min/$11\frac{1}{4}$ min)
7. ($12\frac{1}{2}$ min/$12\frac{1}{2}$ min)
8. ($11\frac{1}{4}$ min/$12\frac{1}{2}$ min)
9. ($12\frac{1}{2}$ min/$11\frac{1}{4}$ min)
10. Keine dieser Möglichkeiten

Projektbezug
Die Gruppe „Stochastic Operations Research“ an der TU Eindhoven beschäftigt sich mit Warteschlangenproblemen. Solche Probleme treten nicht nur bei Staus im Straßenverkehr oder an der Supermarktkasse auf; Warteschlangen sind ein alltägliches Phänomen. Warteschlangentheorie ist u. A. bei der Steuerung von Produktionsprozessen in Fabriken oder bei der Entwicklung von Protokollen in Computer- und Kommunikationssystemen bedeutsam. Man denke nur an Filesharing-Anwendungen wie BitTorrent oder an Systeme zur drahtlosen Kommunikation für Mobiltelefone.
Weil die „Kunden“ (bzw. Datenpakete) im Allgemeinen nicht zu festen Zeitpunkten ankommen und ihre Bearbeitungszeiten auch nicht deterministisch, sondern zufällig sind, verwendet die Warteschlangentheorie Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Modellierung und Analyse dieser Systeme und betreibt daher „Entscheidungsfindung unter Unsicherheit“.

11.2 Lösung

Richtige Antwort: 8 ($11\frac{1}{4}$min, $12\frac{1}{2}$min)

Die Aufgabe besteht aus zwei Teilaufgaben, die sich nach den gleichen Prinzipien lösen lassen. Wir machen zuerst eine Beobachtung:
Wenn man auf einen Bus wartet, der alle n Minuten fährt, dann ist die durchschnittliche Wartezeit $\frac{n}{2}$ Minuten, da wir uns an einem beliebigen Zeitpunkt zwischen der Abfahrt des letzten Busses und der Ankuft des nächsten Busses befinden. Ein größerer Wert als $\frac{n}{2}$ würde bedeuten, dass wir im Mittel den letzten Bus immer gerade verpasst haben. Eine kleinere Wartezeit als $\frac{n}{2}$ hieße, dass wir immer kurz vor dem nächsten Bus erst an die Haltestelle kommen. Beide Szenarien widersprechen der Annahme, dass wir keine Ahnung haben, wann der nächste Bus kommt. (Es geht zwar auch mathematischer zu beweisen, aber das ist nicht Stoff der 10. Klasse.)
Schauen wir uns den Bus nach Wichtelingen an: Durchschnittlich einer von 4 Bussen kommt 10 Minuten nach seinem Vorgänger, zwei von 4 Bussen kommen 20 Minuten später und wieder einer von 4 Bussen kommmt erst nach 30 Minuten. Durchschnittlich fahren in einem Segment von 80 Minuten ($80 = 10 + 2 \cdot 20 + 30$) also 4 Busse. Die Wahrscheinlichkeit, dass als nächstes der 10-Minuten-Bus kommt, ist $p_{10} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8}$, die Wahrscheinlichkeit für den 20-Minuten-Bus ist $p_{20} = 2 \cdot \frac{20}{80} = \frac{1}{2}$ und die für den 30-Minuten-Bus ist $p_{30} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$. Mit den zugehörigen Wartezeiten ergibt sich eine durchschnittliche Wartezeit

$$\begin{aligned}\overline{w} &= p_{10}\frac{10}{2} + p_{20}\frac{20}{2} + p_{30}\frac{30}{2} \\ &= \frac{1}{8} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{3}{8} \cdot 15 \\ &= 11,25.\end{aligned}$$

Analog erhält man für den Bus nach Weihnachtshausen $p_{10} = \frac{1}{4}$ und $p_{30} = \frac{3}{4}$ und als Wartezeit

$$\begin{aligned}\overline{w} &= p_{10}\frac{10}{2} + p_{30}\frac{30}{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 15 \\ &= 12,5.\end{aligned}$$

12 Geschenke für das Waisenhaus

Autor: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

12.1 Aufgabe

Schriftführer Sigismund berichtet:

Ohne den Weihnachtsmann stehen wir ganz schön dumm da. Ein Waisenhaus hatte um einen Besuch des Weihnachtsmannes gebeten. Und weil sie sich keinen verkleideten Studenten leisten können, wollte der *echte* das selbst übernehmen. Jetzt ist der verschwunden und wir sitzen auf einem Haufen von gespendeten Geschenken. Einer der Weihnachtsmannvertreter (Antonio de las Vegas oder Louis de Monte Carlo, ich weiß nicht welcher, aber der, der das Spiel verloren hat) übernimmt die Auslieferung. Rudolf, das Rentier, zieht den Schlitten. Weil das aber eine *vorweihnachtliche Sonderzustellung* ist, will er nur 150 kg ziehen. Das wäre so vertraglich festgehalten - ich fange lieber nicht wieder davon an...

Jetzt wollen wir natürlich möglichst viel an Wert verschenken. Aber dann passen nicht alle Geschenke auf den Schlitten. Also können nur bestimmte Geschenke mitgenommen werden. Wir suchen also eine Kombination von Geschenken, die einerseits in den Schlitten passt und andererseits einen möglichst hohen Gesamtwert besitzt. Geschenke können nicht nur teilweise mitgenommen werden.

Geschenk Nr.	Gewicht (kg)	Preis (€)	Geschenk Nr.	Gewicht (kg)	Preis (€)
1	17	7	8	5	3
2	57	26	9	14	8
3	12	6	10	24	10
4	102	50	11	35	17
5	62	34	12	43	24
6	28	15	13	66	28
7	32	16	14	44	19

Was ist der größtmögliche Wert einer zulässigen Schlittenladung?

1. 74 €
2. 75 €
3. 76 €
4. 78 €
5. 79 €
6. 80 €
7. 81 €
8. 82 €
9. 83 €
10. 84 €

12.2 Lösung

Richtige Antwort: 8 82€

Zwar ist es nicht so schwer eine Lösung zu finden, aber zu beweisen, dass die beste Möglichkeit vorliegt ist etwas schwieriger. Es ist klug, zunächst die Objekte nach ihrem Wert pro Gewichtseinheit zu ordnen. Das ergibt für die sieben Gegenstände mit der höchsten Wertdichte:

Objekt	8	9	12	5	6	3	7
Wert	3	8	24	34	15	6	16
Gewicht	5	14	43	62	28	12	32
Verhältnis	0,60	0,57	0,56	0,55	0,54	0,50	0,50

Die ersten fünf besitzen ein Gesamtgewicht von 152 kg und einen Gesamtwert von 84 Euro. Wäre es auch zulässig Geschenke nur teilweise mitzunehmen, so ergäbe sich ein maximaler Wert von $84 - 2 \times \frac{15}{28} = 82\frac{13}{14}$. Demnach gibt es keine Lösung mit einem Wert, der größer ist als 82 Euro. Wenn man nun die Geschenke Nr. 3,5,6,8 und 12 auswählt, ergibt sich ein Gesamtwert von 82 Euro, bei zugelassenem Gesamtgewicht von 150 kg.

Projekt
Die Aufgabe betrifft einen Gegenstand der kombinatorischen Optimierung, das sogenannte Rucksackproblem. Dieses Problem tritt in allerlei Alltagssituationen auf. Die beste Lösung besteht darin, alle Möglichkeiten zu finden und die beste auszuwählen. Leider verdoppelt sich die Anzahl von Möglichkeiten mit jedem zusätzlichen Objekt.

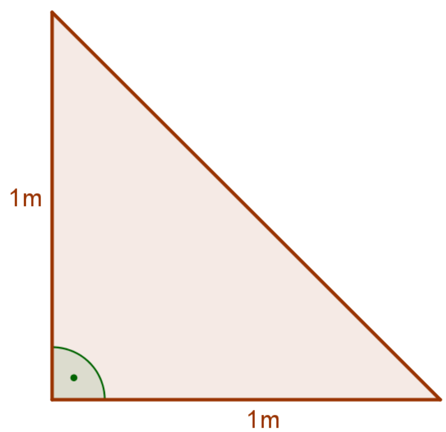
13 Ein neuer Landeplatz

Autor: Falk Ebert (Matheon)

13.1 Aufgabe

Workflow-Organizer Wolfried-Otto berichtet:

Der Alte ist immer noch verschwunden. Wir wollen aber die Zwischenzeit nutzen, um den Schlittenlandeplatz neu zu gestalten. Ich habe große, quadratische $1m \times 1m$ Außenanlagen-Bodenplatten besorgt und wollte die gestern verlegen. Konstantinus-Ganimed, der Wichtel für künstlerische Gestaltung war mit den damit machbaren Mustern aber unzufrieden und wollte sämtliche Platten diagonal geteilt haben. Gut, das haben wir dann gestern eben getan. Jetzt findet er die möglichen Muster immer noch zu öde. Er meint, das wäre keine runde Sache und will, dass wir die Platten erneut in flächengleiche Teile teilen. Da ich den weiteren Aufwand aber möglichst gering halten will, sollen alle Platten mit einem möglichst kurzen, geraden Schnitt in 2 flächengleiche Teile zerlegt werden. Wie lang ist dieser Schnitt?



1. $0,5m$
2. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}m$
3. $\sqrt{\sqrt{2}-1}m$
4. $\frac{2}{3}m$
5. $\frac{\sqrt{2}}{2}m$
6. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}m$

7. $\frac{\sqrt{3}}{2}m$

8. $1m$

9. $\frac{\sqrt{5}}{2}m$

10. $\sqrt{2}m$

Hinweise: Diese Aufgabe ist mit Mitteln der Analysis aus der 11. Klasse gut lösbar. Da natürlich nicht jeder unserer Teilnehmer sofort Zugang dazu hat, sei erwähnt, dass der geschickte Einsatz der Ungleichung zwischen geometrischem und algebraischem Mittel viel schneller zum Ziel führen kann als plumpe Kurvendiskussion. Und unter Umständen kann man die Lösung sogar erraten.

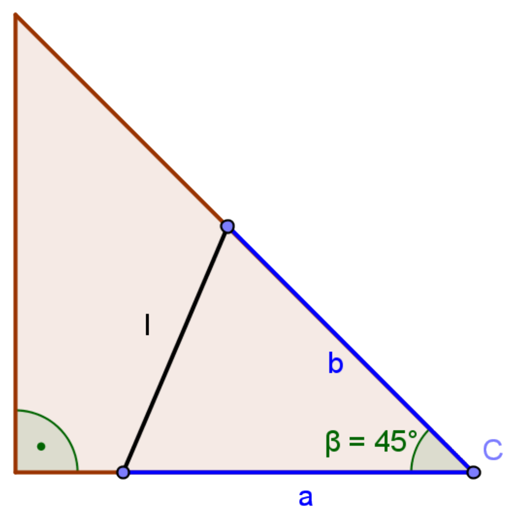
Projektbezug

Nichtlineare Optimierungsprobleme spielen in einer Vielzahl von Anwendungen eine Rolle und auch in vielen Matheon-Projekten. Da die Lösung nicht immer einfach ist, hilft es häufig, einen *guten Riecher* für mögliche Optimallösungen zu haben.

13.2 Lösung

Richtige Antwort: 3 $\sqrt{\sqrt{2}-1}m$

Zuerst vergewissern wir uns, dass jeder gerade Schnitt durch das Dreieck quasi eine Ecke abschneidet. Das Abschneiden der Ecke mit dem rechten Winkel führt zu sehr langen Schnittkanten - günstigstenfalls zur Länge $1m$. Versuchen wir also eine spitze Ecke abzuschneiden. Dazu betrachten wir die folgende Skizze.



Wir betrachten das Dreieck mit den Seiten a, b und l. Sein Flächeninhalt ist

$$A = \frac{1}{2}ab\cos(45°) = ab\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Dieser Flächeninhalt soll die Hälfte des Inhalts des ursprünglichen Dreiecks ($\frac{1}{2}m^2$) also $\frac{1}{4}m^2$ sein. Es muss also (unter Vernachlässigung der Einheiten) gelten

$$\begin{aligned} ab\frac{\sqrt{2}}{4} &= \frac{1}{4}, \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}a}. \end{aligned}$$

Die Länge l lässt sich mit dem Cosinussatz bestimmen:

$$\begin{aligned} l^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \\ &= a^2 + \frac{1}{2a^2} - 2a\frac{1}{\sqrt{2}a}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= a^2 + \frac{1}{2a^2} - 1. \end{aligned}$$

Es gilt $l \geq 0$. Wenn l minimal werden soll, dann wird auch l^2 und $l^2 + 1$ minimal. Wir versuchen

$$l^2 + 1 = a^2 + \frac{1}{2a^2}$$

zu minimieren. Das geht mit Kurvendiskussion oder auch ohne. Jetzt kommt die Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel ins Spiel. Für beliebige $x, y \geq 0$ gilt

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Gleichheit der beiden Seiten gilt für $x = y$. Bei uns ist $x = a^2$, $y = \frac{1}{2a^2}$. Es gilt also

$$\frac{a^2 + \frac{1}{2a^2}}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{2a^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

beziehungsweise

$$a^2 + \frac{1}{2a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{2a^2}} = \sqrt{2}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} l^2 + 1 &\geq \sqrt{2} \\ l &\geq \sqrt{\sqrt{2} - 1} \approx 0,644. \end{aligned}$$

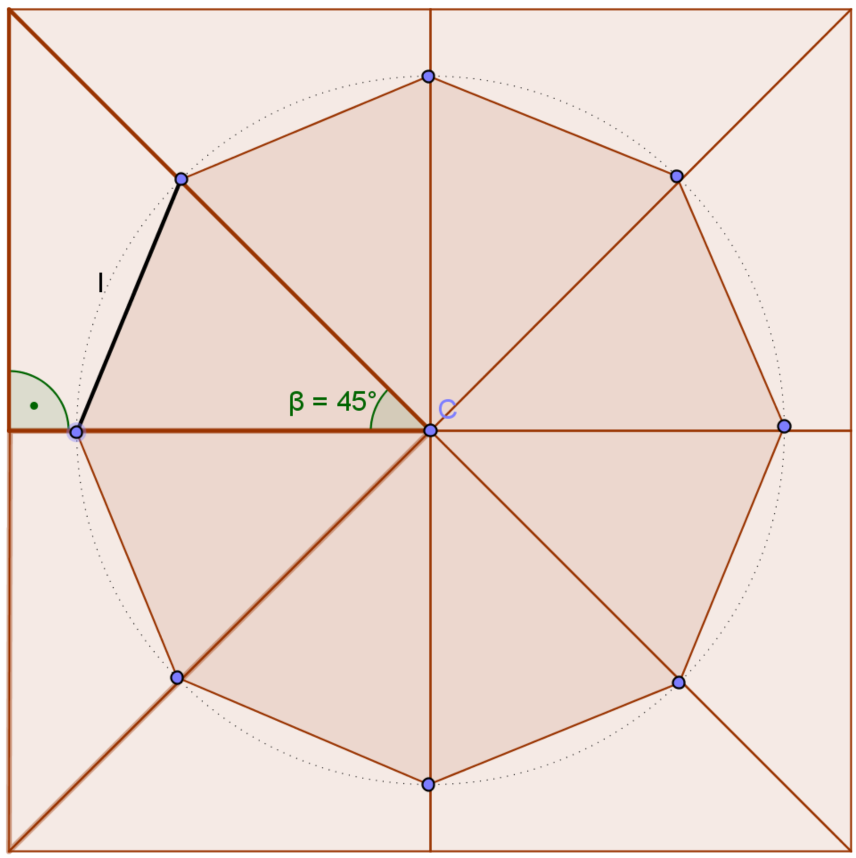
Dieses Minimum wird auch angenommen, nämlich für

$$a^2 = \frac{1}{2a^2}$$

also

$$a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Und kürzer geht es jetzt mit einem geraden Schnitt wirklich nicht mehr.



Eine intuitive Möglichkeit, auf eine Lösungsidee zu kommen ist die, wenn man 8 Dreiecke an den spitzen Ecken zusammenfügt. Das Finden einer kürzesten Länge wird zum Finden der Länge der kürzesten geschlossenen Kurve mit gegebenem Flächeninhalt - in unserem Fall $8 \cdot \frac{1}{4} = 2$. Ideal wäre natürlich der Kreis. Da man den aber nicht mit Streckenstücken hinbekommt, nehmen wir die nächstbeste Näherung - hier das regelmäßige Achteck. Ein Tafelwerk oder die Wikipedia verrät, dass bei Seitenlänge l der Flächeninhalt $A = 2l^2(1+\sqrt{2})$

beträgt. In unserem Fall folgt also

$$\begin{aligned} 2 &= 2l^2(1+\sqrt{2}) \\ l &= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

14 Zurück zur Arbeit!

Autoren: Christina Büsing, Jens Schulz (Matheon)

14.1 Aufgabe

Schriftführer Sigismund berichtet:

Hurra, der Alte - pardon - der Weihnachtsmann ist wieder da. Konstantinus-Ganimed stolziert wie ein Pfau durch die Gegend und erzählt jedem, der es wissen will oder auch nicht, dass das nur wegen seiner Neugestaltung des Schlittenlandeplatzes geschehen ist.
Jetzt, wo der Chef wieder da ist, müssen aber wieder straffere Sitten einkehren. Genug mit der Bummelei!
Ich war zum Beispiel vorhin bei Alice und Bob, dem sonst so dynamischen Duo für bemalte Holzfiguren. Die saßen bis 17:30h selig da und haben sich darüber unterhalten, ob man aus Latschenkiefer besonders trittfeste Holzschuhe schnitzen kann. Wahrscheinlich hätten sie bis zum Feierabend um 18:00h so weitergemacht, wenn ich nicht dazwischen gegangen wäre. Dann haben sie sich aber auch sofort an die Arbeit gemacht - sie haben ja noch so viel zu tun. Sie sollen unterschiedliche Holzfiguren aus großen Platten aussägen und bemalen. Jede dieser Figuren ist einzigartig und so dauert das Zurechtsägen und Anmalen unterschiedlich lange. Da Alice sehr fix im Sägen und Bob geschickt im Malen ist, haben sie beschlossen die Arbeit aufzuteilen. Alice sägt und Bob malt alles an. Dabei kann Bob eine Figur immer erst bemalen, nachdem Alice sie ausgesägt hat. Bob nutzte die Zeit zu Beginn, um seine Malerwerkzeuge aufzubauen. Sobald Alice alles fertig gesägt hat, wird sie schon mal die Späne auffegen und wartet dann auf Bob, um mit ihm gemeinsam Feierabend zu machen. Natürlich wollen die beiden so schnell wie möglich fertig werden.
Hier die Tabelle mit allen Figuren und Zeiten für Sägen und Anmalen.

Figur	Apfel	Birne	Clown	Dinosaurier	Elch	Frosch
Sägen [min]	6	12	12	8	12	8
Anmalen [min]	4	8	14	6	10	10

Da sie wissen, dass die Reihenfolge, in der sie die Geschenke anfertigen, einen großen Einfluss darauf hat, wann sie fertig werden, haben sie auch einen genauen Arbeitsplan, um alles zu schaffen.

Wenn sie beginnend um 17:30h alles noch erledigen (sägen und anmalen), wie viele Minuten nach Feierabend sind die beiden frühestens fertig?

1. Die Reihenfolge spielt keine Rolle, sie hören pünktlich auf.
2. Sie machen 28 Überminuten.
3. Sie machen 30 Überminuten.
4. Sie machen 32 Überminuten.
5. Sie machen 34 Überminuten.
6. Sie machen 36 Überminuten.
7. Sie machen 58 Überminuten.
8. Sie machen 60 Überminuten.
9. Sie machen 62 Überminuten.
10. Sie machen 70 Überminuten.

Projektbezug:
Reihenfolgeprobleme treten in vielen industriellen Anwendungen auf, so z.B. in der Fließbandfertigung in der Automobil- oder Lebensmittelindustrie oder in der Arbeitsplanung, wo Rohstoffe, Maschinen oder Arbeitskräfte ihren Arbeitsgebieten zugeordnet werden müssen. Aber auch auf eurem Computer müssen die einzelnen Prozesse (Anwendungen) optimal gesteuert werden. Die Reihenfolge der Arbeitsvorgänge mitsamt ihrer Startzeiten nennen wir einen *Schedule*, also einen Ablaufplan.

Wir haben uns hier einen kleinen Produktionsprozess angeschaut: zwei Arbeitschritte, die immer in der gleichen Reihenfolge stattfinden, erst Sägen und dann Lackieren. Man spricht von einem sogenannten *FlowShop*-Modell. Dieses lässt sich auf beliebig viele aufeinanderfolgende Arbeitsgänge erweitern. Für ein Auto muss zunächst die Karosserie angefertigt und lackiert werden, dann kommen nacheinander die Innenausstattung, die Türen und die Reifen hinzu. Sowohl der gesamte Prozess, als auch die einzelnen Prozesse, wie die Innenausstattung einrichten, sind sehr komplex und müssen gut geplant werden.

Häufig ist das Ziel die Gesamtkosten zu minimieren, den Ertrag zu maximieren oder die Bestände zwischen den Maschinen gering zuhalten. Je mehr produziert werden kann in kurzer Zeit, umso besser wird solch ein Schedule bewertet. Aber auch andere Zielkriterien wie die Kundenzufriedenheit können mit mathematischen Methoden optimiert werden.

In unserem Projekt behandeln wir noch viel allgemeinere Scheduling-Probleme. Da es bei diesen sehr schwer ist, optimale Lösungen zu berechnen, bewerten wir gerade den Nutzen verschiedener Lösungstechniken aus der ganzzahligen Optimierung und wollen diese dann geschickt verbinden, um Probleme aus der realen Welt zu lösen.

14.2 Lösung

Richtige Lösung: 4. Sie machen 32 Überminuten.

Das hier vorgestellte Problem ist als 2-Maschinen Flowshop Problem bekannt. Jeder Job (jedes Geschenk) durchläuft die gleichen Maschinen in der gleichen Reihenfolge (erst sägen, dann lackieren). Obwohl die meisten Schedulingprobleme i.A. nicht effizient optimal lösbar sind, ist für dieses spezielle Problem ein effizienter optimaler Algorithmus bekannt, der Algorithmus von Johnson (1954). Vielleicht seid ihr ja selber beim Ausprobieren darauf gestoßen, nach welcher Regel man die Jobs anordnet, um schnellstmöglich fertig zu werden. Der Algorithmus funktioniert wie folgt:

1. Sortiere alle Jobs in zwei Gruppen:
   Gruppe 1: Bearbeitungszeit des ersten Arbeitsganges ist kürzer als die zweite
   Gruppe 2: alle anderen

2. Sortiere die erste Gruppe aufsteigend nach der ersten Bearbeitungszeit (Sägen)

3. Sortiere die zweite Gruppe absteigend nach der zweiten Bearbeitungszeit (Lackieren)

4. Arbeite die Jobs in der sortierten Reihenfolge zuerst aus Gruppe 1, dann aus Gruppe 2 ab.

Das führt dann zu folgender Reihenfolge:

$$F, C, E, B, D, A$$

und ergibt eine Gesamtdauer von 62 Minuten.
Ihr müsst beim Anordnen darauf achten, dass mit dem Lackieren eines Geschenks nie vor dem Sägen begonnen wird. Es wird gefragt, wieviele Minuten sie Überzeit machen. Also 62 Minuten minus 30 Minuten rechnen und ihr habt die richtige Antwort: 32 Minuten.

15 Eisfußball Meisterschaft 2010

Autoren: Samuel Drapeau, Michael Kupper (MATHEON)

15.1 Aufgabe

Schriftführer Sigismund berichtet:

Ja, der Chef ist wieder da. Aber irgendwie hält er sich noch sehr bedeckt und zeigt sich nicht öffentlich. Manchmal erscheint er mir direkt panisch. Ich habe keine Ahnung, was genau er während seiner Abwesenheit getan hat oder wo er war.
Um die Moral unter den Wichteln etwas anzuheben, habe ich ein Eisfußballturnier angesetzt. Erstens diskutieren sie immer noch über diesen dubiosen Zwischenfall bei der UEFA vor 2 Jahren und zweitens haben sie viel zu viel gefuttert. Honigbrot und Spiele - wie es so schön heißt! Schnell haben sich im KO-System 2 Mannschaften als Finalisten herausgestellt: die „eisernen Mechaniker“ und die „stämmigen Tischler“. Und was machen Antonio de las Vegas und Louis de Monte Carlo? Klar, sie eröffnen jeder ein Wettbüro. Das habe ich leider nicht kommen sehen.
Die Stimmung im Stadion ist aufgeheizt, weil die zwei Mannschaften zwar unterschiedliche Qualitäten haben, dennoch von den Wettbüros gleich bewertet werden. Was das Spiel betrifft, gehen alle davon aus, dass bis zur Halbzeit die Ergebnisse 1-0, 0-0 oder 0-1 mit denselben Wahrscheinlichkeiten auftreten. Nach der Halbzeit können folgende drei Szenarien auftreten:

- Beim Halbzeitstand von 0-0 trauen sich beide Mannschaften nicht von ihrer Taktik abzuweichen, so dass das Spiel entweder 1-0, 0-0 oder 0-1 mit denselben Wahrscheinlichkeiten endet.

- Beim Halbzeitstand von 0-1 spielen die Mechaniker mit allen Mitteln nach vorne, um so möglicherweise das Spiel mit zwei Toren zu drehen und somit 2-1 zu gewinnen. Diese Taktik ist jedoch nicht ohne Gefahr, denn die Tischler konzentrieren sich voll auf die Verteidigung und bringen das 0-1 mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ über die Zeit und können möglicherweise mittels eines Konters den Abstand sogar auf 0-2 ausbauen.

- Beim Halbzeitstand von 1-0 ziehen sich die Mechaniker nicht in der Verteidigung zurück und schießen mit der Wahrscheinlichkeit von $4/9$ noch ein Tor und gewinnen das Spiel mit 2-0. Die Tischler lassen sich vom Rückstand jedoch nicht entmutigen und greifen weiter tapfer an, und es besteht die Möglichkeit, dass sie das Spiel drehen und mit zwei sensationellen Toren mit 1-2 gewinnen. Es ist auch möglich, dass keine Tore mehr fallen und die eisernen Mechaniker mit 1-0 gewinnen.

Bei Antonio und Louis spielen die Wichtel um Urlaubstage fürs nächste Jahr. Folgende drei beliebte Wetten werden angeboten.

- Die erste Wette W_1 verspricht viermal die Tordifferenz des Endstands zwischen den Mechanikern und den Tischlern, falls die eisernen Mechaniker gewinnen, sonst nichts. Falls also die Mechaniker mit 2-0 gewinnen, entspräche dies einem Gewinn von acht Urlaubstagen.

- Die zweite Wette W_2 verspricht auch viermal die Tordifferenz des Endstands zwischen den Mechanikern und den Tischlern falls die Mechaniker gewinnen, sonst nichts. Zudem kann die Wette schon während der Halbzeitpause eingelöst werden für fünf mal die Pausentordifferenz zwischen den eisernen Mechanikern und den Tischlern, falls die Mechaniker führen. Falls die Wette in der Pause eingelöst wird, bekommt man am Ende nichts mehr. Falls also die eisernen Mechaniker mit 2-0 zur Halbzeit führen, und man sich für das Einlösen der Wette entscheidet, erfolgt ein Gewinn von zehn Urlaubstagen.

- Die dritte Wette W_3 wird wie die Wette W_1 nur am Ende des Spiels ausbezahlt. Man bekommt drei Tage, falls die Mechaniker mit einer Tordifferenz von $+1$ gewinnen und fantastische zwölf Tage, falls sie mit Tordifferenz $+2$ gewinnen, sonst nichts.

Ich habe mir das Ganze auch weiter unten schon mal aufgezeichnet. Beide Mannschaften sind in jedem Stadium des Spieles gleich gut, so dass an jedem Knoten der ersten Halbzeit der Erwartungswert der vorzeichenbehafteten Tordifferenz in der zweiten Halbzeit gleich der erreichten Tordifferenz in der ersten Halbzeit ist. (Bei einem Ergebnis von 0-1 zur Halbzeit beispielsweise ist die Tordifferenz -1. Die Erwartung der Tordifferenz ausgegangen von diesem Halbzeitergebnis bleibt dann unverändert -1.)

Natürlich reizt es mich, um ein paar zusätzliche Urlaubstage zu spielen. Viele Angebote stehen in den Wettbüros zur Verfügung. Aber welche Wette ist denn diejenige, die mir im Schnitt den meisten Urlaub einbringt, die also den höchsten Erwartungswert liefert?

1. Die Wette W_2 ist bei Antonio gegen zwei Urlaubstage zu haben. Ich nehme sie und verfolge dabei folgende Strategie: Ich warte immer bis zum Ende, außer wenn die Mechaniker zur Halbzeit führen. In diesem Fall löse ich die Wette zur Pause ein und nehme die 5 Tage Urlaub. Sichere Strategien sind immer besser, das hat Workflow-Wolfried empfohlen, und was Wolfried empfiehlt...

2. Die Wette W_3 ist bei Louis gegen zweieinhalb Urlaubstage zu haben. Diese nehme ich, denn im Vergleich zu den Antworten 1 und 5 besteht für einen Einsatz von einem zusätzlichen halben Tag mehr die Möglichkeit, zwölf Urlaubstage zu gewinnen!

3. Ich habe bei Antonio ziemlich gut verhandelt und bekam gleich drei mal die Wette W_1 gegen sechseinhalb Tage. Die einzelne Wette ist zwar schlechter als all die anderen, aber der potenzielle Gewinn mit drei multipliziert übersteigt alle anderen Angebote.

4. Ich verhandle wie im Falle der Antwort 3, aber statt drei Wetten nehme ich nur zwei, dafür gegen viereinhalb Tage. Zu viel riskieren drückt sicherlich den erwarteten Gewinn.

5. Ich nehme die Wette W_2 gegen zwei Urlaubstage genauso wie in Antwort 1, führe aber eine andere Strategie aus: Ich warte immer bis zum Ende des Spiels. Auch wenn ich fünf Urlaubstage nehmen könnte, falls die Mechaniker zur Halbzeit führen, warte ich besser bis zum Ende und habe gute Chancen, acht Urlaubstage mit nach Hause zu nehmen. Wer nichts wagt gewinnt nichts und Wolfried hat sowieso keine Ahnung von Eisfußball.

6. Ich entscheide mich gemeinsam mit meinen Freunden Deko-Detlef und Räum-Raimund, unterschiedliche Wetten zu kaufen und den Gewinn gleichmässig zwischen uns dreien zu teilen. Dabei nehmen wir jeweils einmal die Antwort 1, 2 and 3. So riskieren wir weniger und gleichzeitig maximieren wir unseren Gewinn: Diversifikation ist gegen Unsicherheit immer die beste Lösung.

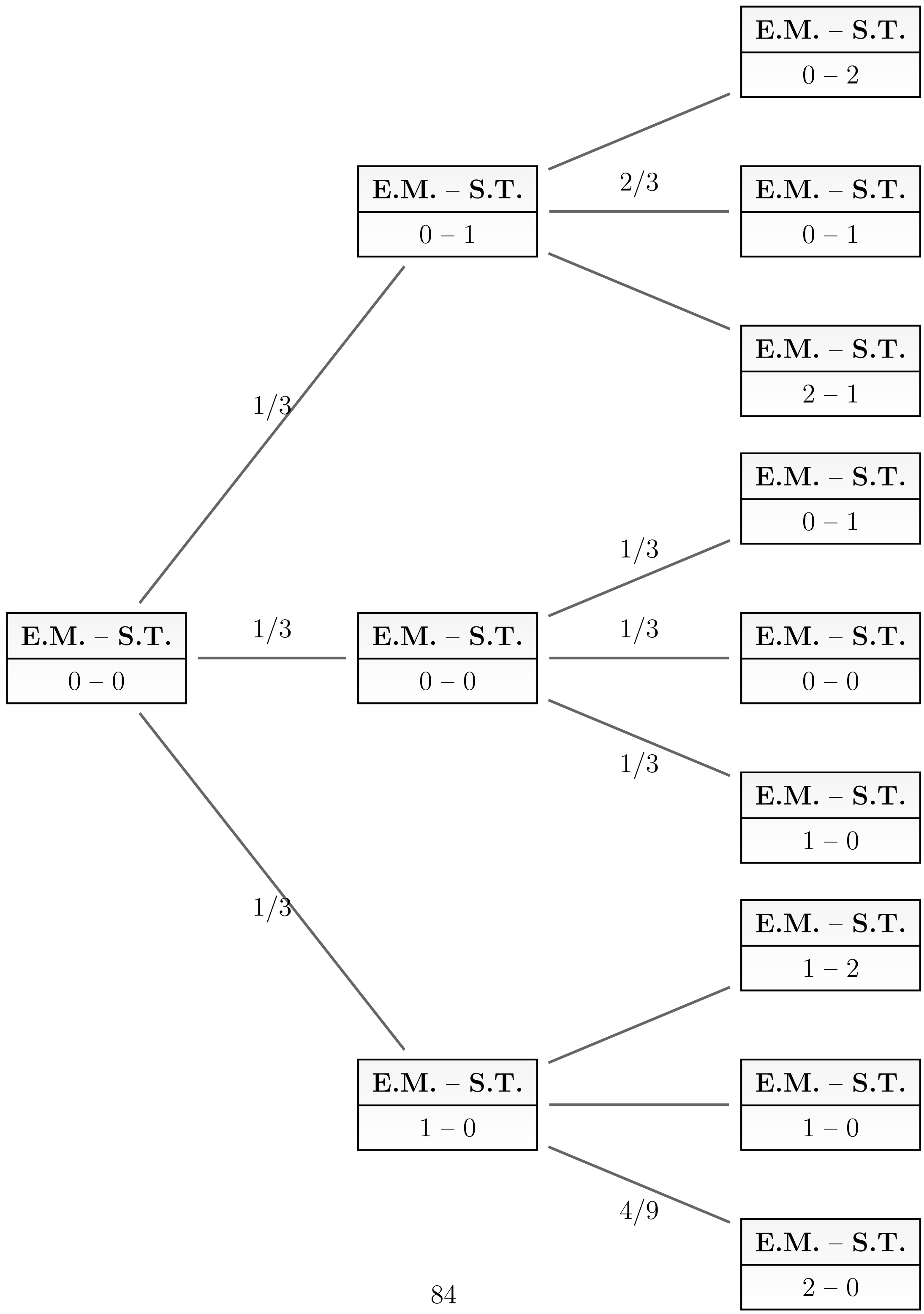
7. Genauso wie in Antwort 6 nur entscheiden wir uns für die Antworten 2, 3 und 5.

8. Genauso wie in Antwort 6, nur entscheiden wir uns für die Antworten 2, 4 und 5.

9. Genauso wie in Antwort 6, nur entscheiden wir uns für die Antworten 1, 4 und 5.

10. Ich kaufe keine Wette! Sie sind alle im Erwartungswert kleiner als der Einsatz. Courtiers sind alles Schwindler!

Projektbezug:
Im Matheon Projekt E11 arbeiten wir an der Analyse von Unsicherheit und Risiko, die auf Finanzmärkten und in der Ökonomie auftreten. Wenn die Zukunft nicht vorhersehbar ist, können mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie Ansätze hergeleitet werden, um optimale Handlungen (in dieser Aufgabe ist es im Sinne des Erwartungswertes) zu finden. Diese Aufgabe ist ein Beispiel dafür, denn die Wetten hier sind einfache Formen von typischen Optionen, die auf Finanzmärkten gehandelt werden. Genauer, W_1 und W_3 sind so genannte europäische Optionen und W_2 ist eine amerikanische Option. Die richtige Einschätzung der Gewinne und Risiken ist dabei sehr wichtig. Eine unserer zentralen Aufgaben ist es deshalb, Instrumente zu schaffen, die dieses Risiko vernünftig messen um waghalsiges Verhalten zu regulieren.


E.M. – S.T.
0 – 0
1/3
1/3
1/3
E.M. – S.T.
0 – 1
E.M. – S.T.
0 – 0
E.M. – S.T.
1 – 0
2/3
1/3
1/3
1/3
4/9
E.M. – S.T.
0 – 2
E.M. – S.T.
0 – 1
E.M. – S.T.
2 – 1
E.M. – S.T.
0 – 1
E.M. – S.T.
0 – 0
E.M. – S.T.
1 – 0
E.M. – S.T.
1 – 2
E.M. – S.T.
1 – 0
E.M. – S.T.
2 – 0

15.2 Lösung

Richtige Antwort 1: Die Wette W_2 ist bei Antonio gegen zwei Urlaubstage zu haben. Ich nehme sie und verfolge dabei folgende Strategie: Ich warte immer bis zum Ende, außer wenn die Mechaniker zur Halbzeit führen. In diesem Fall löse ich die Wette zur Pause ein und nehme die 5 Tage Urlaub. Sichere Strategien sind immer besser, das hat Workflow-Wolfried empfohlen, und was Wolfried empfiehlt...

Zuerst müssen wir die im Baum fehlenden Wahrscheinlichkeiten berechnen. Für den oberen Knoten (Halbzeitstand 0-1) nennen wir q_1, q_2, q_3 die Wahrscheinlichkeiten, dass der Endstand jeweils 0-2, 0-1 oder 2-1 lautet. Wir wissen aus dem Text, dass die Wahrscheinlichkeit, am Ende des Spiel immer noch bei 0-1 zu stehen, gleich zwei Drittel ist, also $q_2 = 2/3$. Darüberhinaus, müssen sich die Wahrscheinlichkeiten zu eins aufsummieren und somit gilt $q_1+q_2+q_3 = 1$. Schließlich sind beide Mannschaften gleich stark, so dass, ausgegangen von dieser Tordifferenz von -1, die Erwartung der Tordifferenz wiederum -1 sein muss, also $-2q_1 - q_2 + q_3 = -1$. Dies führt zum folgenden System

$$\left\{\begin{array}{rl} q_1 + q_2 + q_3 & = 1 \\ -2q_1 - q_2 + q_3 & = -1 \\ q_2 & = 2/3 \end{array}\right. .$$

Dessen Auflösung liefert

$$\left\{\begin{array}{ll} q_1 & = 2/9 \\ q_2 & = 2/3 \\ q_3 & = 1/9 \end{array}\right. .$$

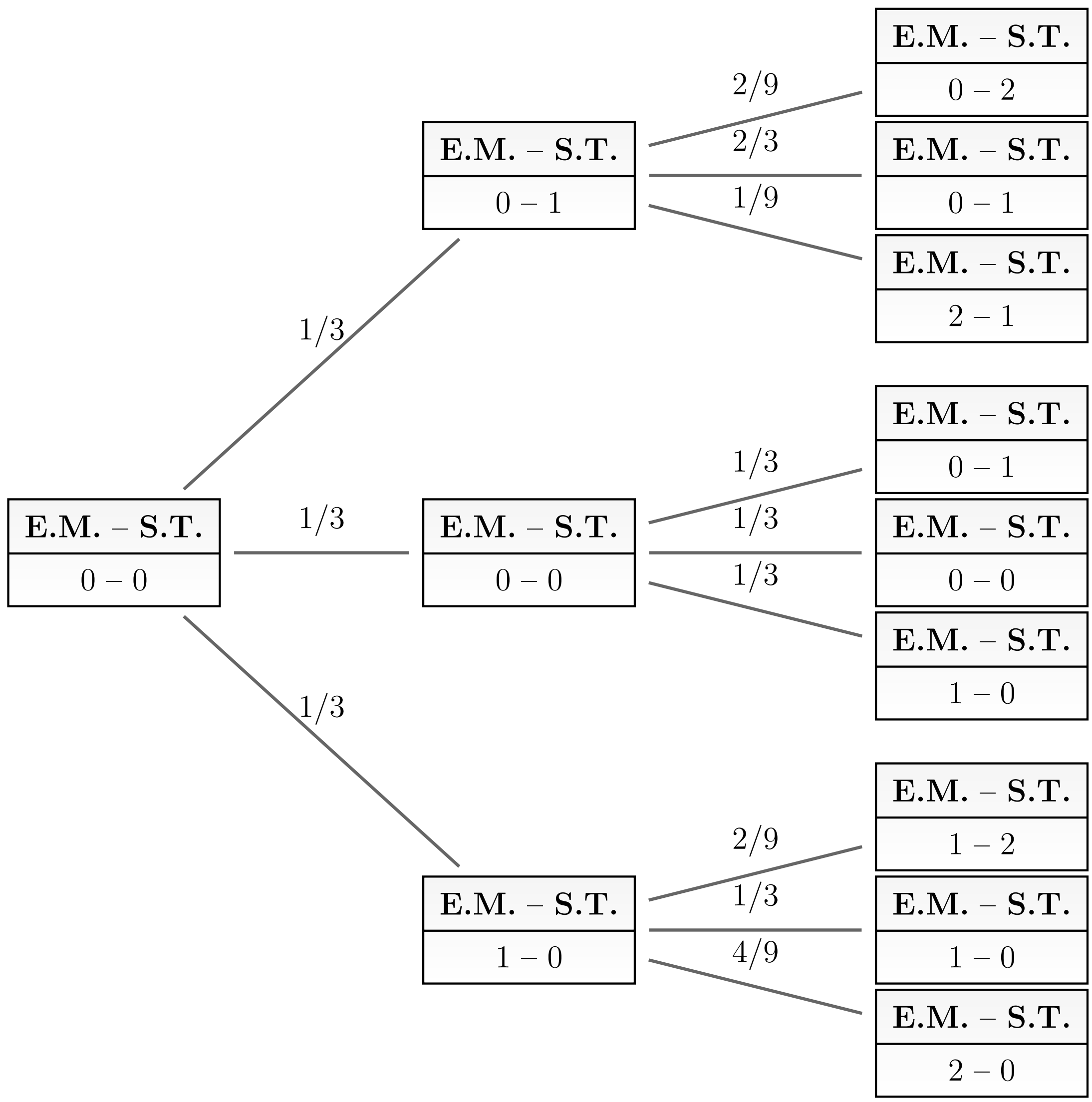
Eine ähnliche Überlegung für den unteren Knoten, wobei $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$ die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Ergebnisse 1-2, 1-0 und 2-0 darstellen, führt zum System

$$\left\{\begin{array}{rl} \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 & = 1 \\ -\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + 2q_3 & = 1 \\ \tilde{q}_3 & = 4/9 \end{array}\right. ,$$

welches folgende Lösung liefert

$$\left\{\begin{array}{ll} \tilde{q}_1 & = 2/9 \\ \tilde{q}_2 & = 1/3 \\ \tilde{q}_3 & = 4/9 \end{array}\right. .$$

Unserem Baum sieht jetzt folgendermaßen aus



Bemerkung: Der zeitliche Verlauf des Spiels entlang des Baums wird *stochastischer Prozess* genannt. Einen stochastischen Prozess nimmt unterschiedliche Werte zu verschieden Zeiten und Szenarien an. Dieser Prozess ist darüber hinaus besonders, denn er ist fair im folgenden Sinne: ausgegangen von einem Szenario in einem bestimmten Zeitpunkt, verändert sich die Lage in der Erwartung nicht. Solch ein stochastischer Prozess wird *Martingal* genannt. Bei einem Martingal erwartet man nicht mehr und nicht weniger von der Zukunft als das, was man zum jeweiligen Zeitpunkt und Szenario hat.

Wir können jetzt die verschiedenen Antworten prüfen. In einer ersten Analyse lassen wir die Antworten, die in allen Fällen sowieso nicht optimal sind, beiseite. Dies ist eine typische Überlegung der Spieltheorie. Betrachten wir dafür die Antworten 3 und 4. Antwort 3 ist pro Stück billiger als Antwort 4 und somit würde Antwort 3 mehr bringen als Antwort 4. Also kann Antwort 4 nicht optimal sein.

Berechnen wir nun, was die Wette W_2 in Erwartung bringt und welche Strategie optimal ist. Dafür nehmen wir an, wir seien in Knoten Nummer 1 oben, und überlegen, was am besten ist. Entweder lösen wir die Wette ein, oder wir warten. Wenn wir die Wette gleich einlösen, dann haben wir alles verloren, denn zu diesem Zeitpunkt führen die stämmigen Tischler. Somit lohnt es sich auf jeden Fall zu warten. Von diesem Knoten aus gesehen erhält man am Ende des Spiels 4 Urlaubstage im Falle dass die Eisernen Mechaniker gewinnen. Dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/9$. Der erwartete Urlaubsgewinn ist dann $4 * 1/9$. Genau dieselbe Überlegung für den zweiten Knoten ergibt, dass man auch hier warten muss. Von diesem Knoten aus bekommt man 4 Urlaubstage am Ende des Spiels mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/3$, was einen erwarteten Urlaubsgewinn von $4 * 1/3$ ergibt. Im dritten Knoten ist die Lage anders. Wenn ich die Wette gleich einlöse, bekomme ich 5 Urlaubstage. Dennoch besteht die Möglichkeit, dass, falls ich warte, die eisernen Mechaniker doch noch mind. ein Tor erzielen, und dass ich dann nicht nur 4 Urlaubstage mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/3$ bekomme, sondern auch 8 mit einer Wahrscheinlichkeit von $4/9$. Jedoch liegt der erwartete Gewinn, falls ich warte, bei

$$4\frac{1}{3} + 8\frac{4}{9} \approx 4.88889\,,$$

bleibt also in Erwartung unter 5. Es ist es also sinnvoll die 5 Urlaubstage in diesem Knoten unmittelbar zu nehmen. Aus dieser ersten Berechnung können wir erkennen, dass Antwort 1 die optimale Strategie für W_2 darstellt, während Antwort 5 für den selben Preis in Erwartung weniger abwirft. Folglich ist Antwort 5 nicht optimal. Aus demselben Grund wird Antwort 7 von Antwort 6 dominiert, denn beide unterscheiden sich nur in der Wahl zwischen 5 und 1. Also ist Antwort 7 auch nicht optimal.

Jetzt, da wir die optimale Strategie zur Halbzeit berechnet haben, müssen wir den erwarteten Urlaubsgewinn am Anfang des Spiels berechnen um zu wissen, ob in Erwartung überhaupt ein Gewinn erreicht wird. Mit unserer obigen optimalen Strategie gilt:

- Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel bekomme ich im ersten Knoten $4 * 1/9$ erwartete Urlaubstage.

- Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel bekomme ich im zweiten Knoten $4 * 1/3$ erwartete Urlaubstage.

- Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel bekomme ich im dritten Knoten 5 Urlaubstage.

Also ist die erwartete Anzahl an Urlaubstagen mit dieser Strategie gegeben durch

$$E[W_2] := \frac{1}{3}\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\frac{4}{3} + \frac{1}{3}5 \approx 2.259 > 2\,.$$

Durch diese Rechnung sehen wir, dass Antwort 1 besser ist als Antwort 10, denn die Differenz zwischen erwartetem Gewinn und dem Einsatz ist ca. $0,259 > 0$, und somit ist Antwort 10 nicht optimal.

Berechnen wir nun den erwarteten Gewinn der Wette W_1.

- Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel bekomme ich im ersten Knoten $4 * 1/9$ erwartete Urlaubstage.

- Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel bekomme ich im zweiten Knoten $4 * 1/3$ erwartete Urlaubstage.

- Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel bekomme ich im dritten Knoten $4\frac{1}{3} + 8\frac{4}{9}$ erwartete Urlaubstage.

Somit ist der erwartete Urlaubstage-Gewinn für Wette W_1 gleich

$$E[W_1] := \frac{1}{3}\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\left(4\frac{1}{3} + 8\frac{4}{9}\right) \approx 2.2222\,.$$

Die Antwort 3 bringt dann einen erwarteten Gewinn von ca. 6.6666 Urlaubstage bei einem Einsatz von 6.5 und daher ist die Differenz von ca. 0.1666 geringer als diejenige von Antwort 1. Antwort 3 kann deshalb nicht optimal sein. Wir können hier auch gleich Antwort 9 mit ausschließen. In der Tat ist Antwort 1 besser als Antwort 3, die wiederum besser ist als Antwort 4. Ebenso ist Antwort 1 besser als Antwort 5. Daher ist Antwort 1 auch besser als ein Drittel Antwort 1 plus ein Drittel Antwort 4 plus ein Drittel Antwort 5, was Antwort 9 ergibt.

Berechnen wir schließlich den erwarteten Gewinn der Wette W_3.

- Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel bekomme ich im ersten Knoten $3 * 1/9$ erwartete Urlaubstage.
- Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel bekomme ich im zweiten Knoten $3 * 1/3$ erwartete Urlaubstage.
- Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel bekomme ich im dritten Knoten $3\frac{1}{3} + 12\frac{4}{9}$ erwartete Urlaubstage.

Somit ist der erwartete Urlaubstage-Gewinn für Wette W_3 gleich

$$E\left[W_3\right] := \frac{1}{3}\frac{3}{9} + \frac{1}{3}\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\left(3\frac{1}{3} + 12\frac{4}{9}\right) \approx 2.55555\,.$$

Die Antwort 2 ergibt einen erwarteten Gewinn von ca. 2.555 Urlaubstagen bei einem Einsatz von 2.5 und somit ist die Differenz von ca. 0.05555 geringer als diejenige von Antwort 1 und Antwort 3. Also ist Antwort 2 nicht optimal. Wir können zuletzt die verbleibenden zwei Alternativen, Antwort 6 und Antwort 8 ausschließen. In der Tat ist Antwort 1 besser als die Antworten 2 und 3 und somit ist Antwort 1 besser als Antwort 6. Genauso ist Antwort 1 besser als die Antworten 2, 4 und 5, und dadurch besser als Antwort 8. Somit sind Antworten 6 und 8 nicht optimal.

Die richtige Lösung ist daher Antwort 1 und Wolfried hatte doch recht. . .

16 Chamäleons unter dem Weihnachtsbaum

Autor: Quintijn Puite (TU Eindhoven)

16.1 Aufgabe

Tierschutzwichtel Theo erzählt:

Wir haben eine Krise! Viele Kinder haben sich zu Weihnachten Tiere gewünscht. Da bin ich ja schon strikt dagegen. Wenn es dann noch bedrohte Arten sind, dann ist es ganz aus. Und jetzt kommt noch das dazu: Ein Sammler wollte 45 sibirische Chamäleons haben - alle in einer Farbe. Das ist wichtig, denn diese Tiere haben eine kuriose Eigenschaft: Es gibt sie in genau drei Farben: rot, grau oder braun. Sobald sich genau zwei Chamäleons mit verschiedenen Farben treffen, verändern sie ihre Farbe in die dritte Farbe. Wenn z.B. ein graues und ein braunes Tier aufeinandertreffen, nehmen sie beide die rote Farbe an. Die Wissenschaft ist sich noch nicht sicher, welchem Zweck diese Farbwechsel dienen.
Nun habe ich heute früh Wichtel Marek erlaubt, mit den Tieren zu spielen. Dummerweise hat er sein eigenes Chamäleon mitgebracht - damit es sich nicht so einsam fühlt. Und jetzt haben wir den Salat - genauer gesagt haben wir jetzt 13 graue, 15 braune und 17 rote Chamäleons. Wir brauchen die aber *ein*farbig! Welche Farbe es ist, ist eigentlich egal. Ist es möglich, dass irgendwann alle Tiere dieselbe Farbe haben? Falls ja, welche Farben sind dabei möglich und wie viele Begegnungen sind nötig?
Wichtel Marek mit seinem Chamäleon ist auch spurlos verschwunden. Wenn ich den in die Finger kriege!

1. Nein, sie können nicht alle dieselbe Farbe annehmen.
2. Sie können alle grau werden, aber nicht alle braun oder alle rot. Dabei sind nicht mehr als 45 Begegnungen nötig.
3. Sie können alle grau werden, aber nicht alle braun oder alle rot. Dabei sind mehr als 45 Begegnungen nötig.
4. Sie können alle braun werden, aber nicht alle grau oder alle rot. Dabei sind nicht mehr als 45 Begegnungen nötig.
5. Sie können alle braun werden, aber nicht alle grau oder alle rot. Dabei sind mehr als 45 Begegnungen nötig.

6. Sie können alle rot werden, aber nicht alle grau oder alle braun. Dabei sind nicht mehr als 45 Begegnungen nötig.

7. Sie können alle rot werden, aber nicht alle grau oder alle braun. Dabei sind mehr als 45 Begegnungen nötig.

8. Sie können alle grau werden, aber auch alle braun oder alle rot. Dabei sind in allen drei Fällen nicht mehr als 45 Begegnungen nötig.

9. Sie können alle grau werden, aber auch alle braun oder alle rot. Dabei sind in allen drei Fällen mehr als 45 Begegnungen nötig.

10. Keine dieser Antworten ist richtig.

16.2 Lösung

Richtige Antwort: 1 Nein, sie können nicht alle dieselbe Farbe annehmen.

Sei G die Anzahl grauer, B die Anzahl brauner Tiere und $T = G - B$. Wenn ein graues Chamäleon auf ein braunes trifft, dann verringern sich G und B um eins und T bleibt gleich. Bei einem Aufeinandertreffen von Rot und Grau wird G um eins kleiner und B um zwei größer, d.h. T nimmt ab um 3. Bei einer Braun-Roten Begegnung, vergrößert sich G um zwei und B nimmt ab um 1, so dass T sich um drei vergrößert. Bei modulo drei, d.h. $T \equiv a \pmod 3$ (Rest bei Division durch 3) verändert sich T also nicht.
Anfänglich ist $T = -2 \equiv 1 \pmod 3$. Hätten alle Tiere die gleiche Farbe, so müssten G und B entweder null oder 45 sein, also $G \equiv 0 \pmod 3$ und $B \equiv 0 \pmod 3$. Dann aber wäre $T \equiv 0 \pmod 3$, was unmöglich ist.

Projektbezug Die TU/e ist Hauptsponsor der Niederländischen Mathematikolympiade und ein Partner der Organisation der International Mathematical Olympiad 2011 (IMO). Die betrachtete Aufgabe ist ein Klassiker. Sie verwendet Invarianzprinzipien, die beim Training des Niederländischen Teams zum Zug kommen.

17 Heizung

Autor: Falk Ebert (Matheon)

17.1 Aufgabe

Die hier vorliegende Version ist leider nie im Kalender gewesen. Durch einen dummen Fehler wurde sie mit einer alte Version der Aufgabe überschrieben. Das hat inhaltlich keine Auswirkungen. In dieser Fassung ist lediglich die Rahmenhandlung zusätzlich mit dabei.

Bademeister Balduin berichtet:

Ich habe von Sigismund den Auftrag bekommen, dem Weihnachtsmann ein Bad zu bereiten. Der Alte Mann badet doch so gern. Und Sigismund meint, dass man dann vielleicht auch mal aus ihm rausbekommen könnte, was eigentlich vorgefallen ist. Ich hab den Alten noch nie so ängstlich gesehen... Bevor er aber baden gehen kann, muss ich den Heizwichteln immer rechtzeitig Bescheid geben. Die benötigen immer Ewigkeiten, bis das Badewasser bei exakt $40°C$ ist. Zugegebenermaßen, sie fangen mit einer Badewanne voll Wasser, das $4°C$ kalt ist, an. Hildo der Heizer hat es mir mal erklärt: In jeder Minute können sie eine gewisse Menge Spezialkohlen – aber nie mehr als $5kg$ pro Minute – in den Ofen unter der Wanne schippen. Der Ofen wird genau im Minutentakt (einmal pro Minute) beschickt, damit nicht zuviel Hitze entweichen kann. In der Minute, in der die Kohlen im Ofen landen, erhöht ein Kilogramm Kohlen die Temperatur in der Wanne um ein Grad. In der folgenden Minute, wenn sie richtig angebrannt sind, um 2 Grad und in der darauffolgenden Minute noch mal um ein Grad. Dann sind die Kohlen vollständig verbrannt und heizen nicht mehr. Das Problem ist, dass das Badewasser immer wieder abkühlt. Dabei sinkt die Temperatur des Badewassers in einer Minute um die Hälfte der Temperaturdifferenz zur Umgebungstemperatur ($4°C$). Darum muss auch ständig Kohle nachgelegt werden.

Als Beispiel brachte er: Wenn mein Badewasser jetzt $20°C$ Grad heiß ist, und ich vor 2 Minuten $4kg$ und vor 1 Minute $3kg$ Kohlen eingelegt habe, dann kühlt das Wasser zuerst um $\frac{20°C-4°C}{2} = \frac{16°C}{2} = 8°C$ ab, fällt also auf $12°C$. Die Kohlen von vor 2 Minuten erwärmen es um $4°C$ und die von letzter Minute um $2 \cdot 3°C = 6°C$. Insgesamt steigt dann die Wassertemperatur also auf $22°C$. Und für jedes Kilogramm Kohle, das in dieser Minute nachgelegt wird, steigt die Temperatur nochmal um $1°C$, also maximal um $5°C$.

Hildo meinte aber, dass er sich jetzt einen Plan zurechtgelegt hat, dass das Badewasser ziemlich schnell von $4°C$ auf exakt $40°C$ erwärmt wird und es dann auch so bleibt. Und das Gute ist, dass nach der Vorheizphase, ab einem bestimmten Zeitpunkt immer wieder die gleiche Menge Kohlen nachgelegt wird. Bisher musste die Menge ständig angepasst werden und kleine Abweichungen führten zu ständig wechselnder Badetemperatur – und das kann der alte Mann ja gar nicht leiden. Aber jetzt wäre das Problem „totgeschlagen“, meint er. Ich finde die Formulierung zwar merkwürdig, aber ich bin mal gespannt, ob es klappt.

In welcher Minute hat das Badewasser unter den gegebenen Voraussetzungen, wenn man die erste Beschickung des Ofens als 1. Minute zählt, frühestens die (danach) konstante Idealtemperatur von $40°C$ erreicht und bleibt die Kohlenmenge ebenfalls konstant? Oder kann das gar nicht funktionieren?

1. Bei der Beschränkung auf $5kg$ wird man nie die $40°C$ erreichen.
2. in der 2. Minute
3. in der 3. Minute
4. in der 4. Minute
5. in der 5. Minute
6. in der 6. Minute
7. in der 7. Minute
8. in der 9. Minute
9. Man erreicht zwar die $40°C$, aber es ist nicht möglich, die Kohlenmenge konstant zu halten.
10. Man erreicht nie die $40°C$.

Projektbezug

Bei der weihnachtsmännischen Badewanne handelt es sich um ein gesteuertes dynamisches System. Überlässt man es sich selbst, entwickelt es sich mit der Zeit selbstständig (Abkühlung). Die Steuerung (Heizung) bewirkt, dass man das dynamische Verhalten in gewisse gewünschte Bahnen lenkt. Solche Systeme treten in der Praxis häufig auf – zum Beipiel beim Fahren eines Autos. Dort ist die Eigendynamik hauptsächlich die Trägheit und die Steuerung ist die Lenkung, sowie Bremsen und Gasgeben. Ein näher an der Aufgabe liegendes Beispiel ist das Härten von Stahl mit Hilfe eines Laserstrahls (Matheon-Projekt C11)

17.2 Lösung

Richtige Antwort 6 in der 6. Minute

Wir versuchen zuerst, ein Modell für die Wassertemperatur aufzustellen. Dazu bezeichnen wir die Temperatur in Minute i mit T_i. Bevor die ersten Kohlen eingeworfen werden, gilt $T_0 = 4$. Bei der Abkühlung gilt, dass sich das Wasser um die Hälfte der Differenz zu $4°C$, also um $\frac{T_i-4}{2}$ abkühlt. Ohne weitere Erwärmung gilt also

$$T_{i+1} = T_i - \frac{T_i - 4}{2}$$

oder einfacher

$$T_{i+1} = \frac{T_i}{2} + 2.$$

Jetzt betrachten wir zusätzlich die Heizung. Traditionell wird in der Kontrolltheorie eine Steuergröße mit u bezeichnet. Wir nennen also die Menge Kohlen in kg, die in Minute i eingeworfen werden, u_i. Dann gilt mit der Aussage, dass die Kohlen der aktuellen Minute $\frac{1°C}{kg}$, die der letzten Minute $\frac{2°C}{kg}$ und die der vorletzten Minute wieder $\frac{1°C}{kg}$ Erwärmung bringen,

$$T_i = \frac{T_{i-1}}{2} + 2 + u_i + 2u_{i-1} + u_{i-2}.$$

Mit diesem Modell kann jetzt etwas gespielt werden. Zuerst gehen wir davon aus, dass beginnend mit u_1 immer das Maximum von $5kg$ eingeworfen wird.

Dann ist

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\overbrace{T_0}^{4}}{2} + 2 + \underbrace{u_1}_{5} + 2\underbrace{u_0}_{0} + \underbrace{u_{-1}}_{0} \\
&= 2 + 2 + 5 + 0 + 0 = 9, \\
T_2 &= \frac{T_1}{2} + 2 + u_2 + 2u_1 + u_0 \\
&= \frac{9}{2} + 2 + 5 + 2 \cdot 5 + 0 = 21,5, \\
T_3 &= \frac{T_2}{2} + 2 + u_3 + 2u_2 + u_1 \\
&= \frac{21,5}{2} + 2 + 5 + 2 \cdot 5 + 5 = 32,75, \\
T_4 &= \frac{T_3}{2} + 2 + u_4 + 2u_3 + u_2 \\
&= \frac{32,75}{2} + 2 + 5 + 2 \cdot 5 + 5 = 38,375, \\
T_5 &= \frac{T_4}{2} + 2 + u_5 + 2u_4 + u_3 \\
&= \frac{38,375}{2} + 2 + 5 + 2 \cdot 5 + 5 = 41,1875.
\end{aligned}
$$

Das heißt, selbst bei maximaler Kohlenmenge kann die gewünschte Temperatur frühestens in der 5. Minute erreicht werden. Damit fallen die ersten 4 Antwortmöglichkeiten schon weg.
Die nächste Frage ist, wie der Ofen beheizt werden muss, um eine konstante Temperatur von $40°C$ zu halten. Nehmen wir an, es wird in jeder Minute die Menge $\overline{u}$ an Kohlen eingeworfen. Dann muss gelten

$$
\begin{aligned}
40 &= \frac{40}{2} + 2 + \overline{u} + 2\overline{u} + \overline{u} \\
&= 22 + 4\overline{u}, \\
18 &= 4\overline{u}
\end{aligned}
$$

$$4,5 = \overline{u}.$$

Beheizt man den Ofen immer nur mit 4,5kg, dann wird er bei anfangs $4°C$

nie 40°C erreichen:

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{T_{i-1}}{2} + 2 + 4 \cdot 4,5 \\ &= \overbrace{\frac{T_{i-1}}{2}}^{<40} + 20 < 40. \end{aligned}$$

Solange also T_{i-1} kleiner als 40°C ist, wird auch T_i kleiner als 40°C sein. Es muss also eine gewisse Phase geben, in der stärker als nur mit 4,5kg geheizt wird.
Nehmen wir jetzt an, in Minute i werden die 40°C erreicht und beginnend mit dieser Minute wird auch immer nur eine konstante Menge Kohle geheizt. Wir wissen, diese konstante Menge kann nur $\overline{u} = 4,5kg$ sein. Also

$$40 = T_i = \frac{T_{i-1}}{2} + 2 + 4,5 + 2u_{i-1} + u_{i-2}.$$

Dann gilt in der Minute $i + 1$

$$\begin{aligned} 40 &= T_{i+1} = \frac{T_i}{2} + 2 + 4,5 + 2 \cdot 4,5 + u_{i-1}, \\ 40 &= 35,5 + u_{i-1}, \\ u_{i-1} &= 4,5. \end{aligned}$$

Das heißt, die konstante Menge Kohlen von 4,5kg muss bereits in Minute $i - 1$ geheizt werden. Wählen wir jetzt in Minuten 1-3 die volle Menge von 5kg und in Minuten 4 und 5 nur 4,5kg, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} T_1 &= 9, \\ T_2 &= 21,5, \\ T_3 &= 32,75, \\ T_4 &= 37,875, \\ T_5 &= 39,4375. \end{aligned}$$

Dementsprechend kann in Minute 5 noch nicht die volle Temperatur erreicht werden, die dann auch konstant bleibt. Man benötigt also mindestens 6 Minuten. Das reicht allerdings aus. Wenn wir u_1 bis u_3 als 5kg wählen und u_5

sowie u_6 als 4,5kg, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
T_4 &= \frac{32,75}{2} + 2 + u_4 + 2 \cdot 5 + 5, \\
T_5 &= \frac{T_4}{2} + 2 + 5 + 2u_4 + 5, \\
40 &= \frac{T_5}{2} + 2 + 5 + 2 \cdot 5 + u_4.
\end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem in den Variablen T_4, T_5 und u_4 und hat als Lösungen

$$\begin{aligned}
T_4 &= 38, \\
T_5 &= 39,75, \\
u_4 &= 4,625.
\end{aligned}$$

Die richtige Antwort ist also 6.) *in der 6. Minute.*

Anmerkungen

1. Es gibt noch eine riesige Menge anderer Lösungsmöglichkeiten. Allerdings wird keine davon mit weniger als 6 Schritten auskommen. Eine direkte Lösung war aber auch nicht verlangt.

2. Der Ausspruch des Heizers, dass das Problem *totgeschlagen* wäre, bezieht sich auf den Begriff *dead-beat control* aus der Regelungstechnik. Dabei wird innerhalb von einer endlichen Minimalzahl von Regelschritten ein konstanter Zustand erreicht.

18 Der Weihnachtsmann rüstet auf Solarzellen um

Autor: Matthias Liero und Alexander Mielke (Matheon)

18.1 Aufgabe

Tüftelwichtel Thorolf erzählt:

Tja, der Chef ist wieder da - aber irgendwas beschäftigt ihn. Er erscheint ängstlich und paranoid. Das kennt man von ihm eigentlich gar nicht. Und trotz einer ansonsten gesunden Bräune, schien er etwas bleich um die Nase. Aber er muss in seiner kurzen Abwesenheit irgendwo gewesen sein, wo es viel Sonne gab. Das erklärt nämlich auch das Anliegen, mit dem er heute ankam. Bekanntlich haben wir am Nordpol ja ein halbes Jahr lang Sonnenschein. Da wäre es doch ideal, wenn wir endlich auf Solarstrom umstellen würden. Außerdem würde uns das autark machen. Immerhin sind manche der Nordpolanrainer etwas schwierig, wenn es um die Nutzung ihrer Stromleitungen geht.
Wir sind natürlich sehr daran interessiert, die Energie des Sonnenlichts so effizient wie möglich zu nutzen. Und darum sitze ich jetzt vor dem Problem, die Solarzellen so gut wie möglich zu dimensionieren:
Das Sonnenlicht fällt durch eine Glasschicht mit der Lichtstärke $I_{\downarrow}^{\text{außen}} = 1$ senkrecht auf die Solarzelle. Die Grenzschicht Luft/Glas kann ignoriert werden. Die geplante Solarzelle mit der Dicke $d_{\text{Solarzelle}} = 1$ besteht aus drei Schichten (wobei wir uns noch nicht ganz sicher sind, ob das gut so ist), die aus zwei Materialien A und B bestehen (Technische Details lasse ich mal weg.). Dabei ist die (geplante) obere und die (geplante) untere Schicht aus dem Material A und die mittlere Schicht aus dem Material B (siehe Abbildung 9). Aus technischen Gründen wird die Dicke der mittleren Schicht auf $d_B = 0,5$ festgelegt (Einheiten lasse ich auch weg.).
An den Grenzen der fünf Materialien (Glas/A/B/A/Untergrund) wird das Licht teilweise reflektiert und durchgelassen (transmittiert). Die Reflexion und Transmission des Lichts an einem beliebigen Materialübergang lässt sich hierbei wie in Abbildung 8 beschreiben. Wie viel von dem einfallenden Licht reflektiert bzw. transmittiert wird, wird durch den Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizient angegeben. Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten erfüllen hierbei die Beziehung $R + T = 1$.
Das Licht wird nur in den Materialien A und B absorbiert. Die Lichtstärke I eines Strahls nimmt dabei in Ausbreitungsrichtung exponentiell ab, d.h.

$$\begin{aligned} I(x) &= I_0\, e^{-\alpha x}, \qquad \text{in Material } A, \\ I(x) &= I_0\, e^{-\beta x}, \text{in Material } B, \end{aligned}$$

wobei I_0 die Lichtstärke beim Eindringen in ein Material ist und x Eindringtiefe. Die Werte α bzw. β sind die Absorptionskoeffizienten in dem Material A bzw. Material B.
Die Werte für die Reflexions-/Transmissionskoeffizienten und die Absorptionskoeffizienten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} R_{\text{A,Untergrund}} &= R_{\text{B,Untergrund}} = 1 \\ R_{\text{Glas,A}} &= R_{\text{Glas,B}} = 0,25 \\ R_{\text{A,B}} &= R_{\text{B,A}} = 0,5 \\ \alpha = 1, & \quad \beta = 2 \end{aligned}$$

Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten an einem Übergang sind gleich, unabhängig davon, aus welcher Richtung das Licht auf den Übergang fällt.

Wie muss die Dicke d des oberen Materials gewählt werden, damit die Lichtabsorption der Solarzelle maximal, die Reflexion also minimal ist? Und welche Stärke I_{refl} hat hierbei das Licht ungefähr, das von der Solarzelle wieder reflektiert wird?

1. unterste A-Schicht entfällt, $d = 0,5$, $I_{\text{refl}} \approx 0,36$
2. unterste A-Schicht entfällt, $d = 0,5$, $I_{\text{refl}} \approx 0,50$
3. unterste A-Schicht entfällt, $d = 0,5$, $I_{\text{refl}} \approx 0,61$
4. $0 \leq d \leq 0,5$ beliebig, $I_{\text{refl}} \approx 0,15$
5. $0 \leq d \leq 0,5$ beliebig, $I_{\text{refl}} \approx 0,37$
6. $d = 0,14$, $I_{\text{refl}} \approx 0,75$
7. $d = 0,42$, $I_{\text{refl}} \approx 0,23$
8. oberste A-Schicht entfällt, $d = 0,0$, $I_{\text{refl}} \approx 0,06$

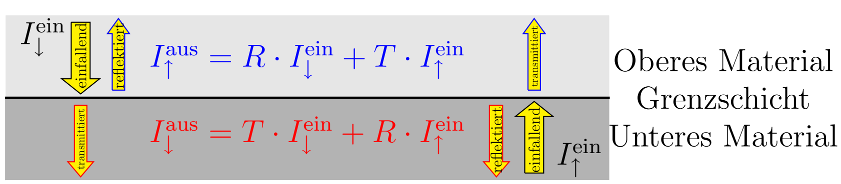


Abbildung 8: Reflexion und Transmission von Licht, das von oben und unten mit Lichtstärken $I_\downarrow^{\text{ein}}$ bzw. $I_\uparrow^{\text{ein}}$ auf einen Materialübergang trifft

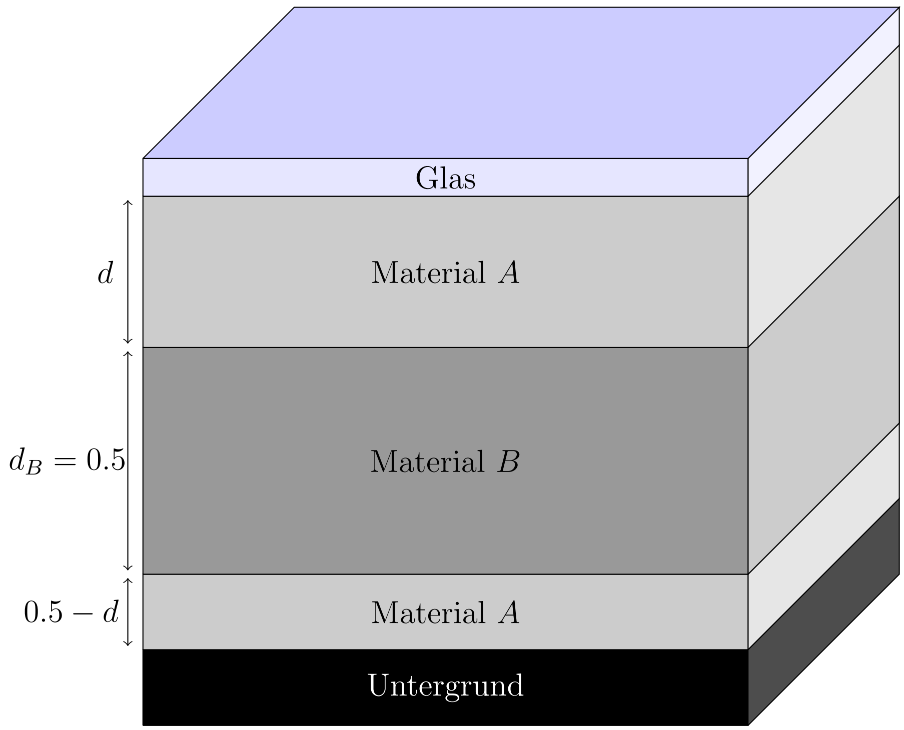


Abbildung 9: Aufbau der Solarzelle

9. oberste A-Schicht entfällt, $d = 0,0$, $I_{\text{refl}} \approx 0,31$
10. oberste A-Schicht entfällt, $d = 0,0$, $I_{\text{refl}} \approx 0,56$

Projektbezug

Moderne Dünnschichtsolarzellen bestehen aus mehreren Schichten unterschiedlicher Materialien (siehe Abbildung 10), an deren Übergängen komplizierte physikalische Effekte auftreten. Um diese Effekte zu verstehen, leiten Mathematiker im Verbund mit Physikern Modelle her, die die Funktionsweise der Solarzelle besser beschreiben. Das Matheon widmet sich diesen Fragestellungen im Projekt D22 *Modellierung elektronischer Eigenschaften von Grenzschichten in Solarzellen.*

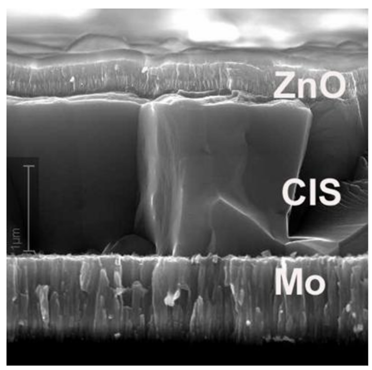


Abbildung 10: Rasterelektronenaufnahme des Querschnitts einer hocheffizienten Dünnschichtsolarzelle auf Basis von Cu(In,Ga)Se2. Die Dicke der gesamten Zellstruktur beträgt nur $3\mu m$. Am Helmholtz Zentrum Berlin hergestellte Solarzellen diesen Typs erreichen Wirkungsgrade von bis zu 18.0%

18.2 Lösung

Richtige Antwort: 9 oberste A-Schicht entfällt, $d = 0,0$, $I_{\text{refl}} \approx 0,31$

Wir müssen die Frage klären, wie sich die Lichtstärke I_{refl} des von der Solarzelle reflektierten Lichts mit der Dicke d der obersten Materialschicht ändert. Dazu gehen wir wie folgt vor: Nach der Abbildung in der Aufgabeberechnet sich die Lichtstärke von Licht, das von einer Grenzschicht kommt, aus zwei Teilen: i) über die Grenzschicht transmittiertes Licht und ii) Licht, das aus entgegengesetzter Richtung kommt, und an der Grenzschicht reflektiert wird. Zwischen den Grenzschichten nimmt die Lichtstärke exponentiell ab.

Wir bezeichnen mit I_1, I_2 und I_3 die Lichtstärken des Lichts, das von oben auf die Grenzflächen Material A/Material B, Material B/Material A, bzw. Material A/Untergrund einfällt (siehe Abbildung 11). Analog bezeichnen wir mit I_4, I_5 und I_6 die Lichtstärken des Lichts, das von unten auf die Grenzflächen Material A/Material B, Material B/Material A, bzw. Material A/Glas einfällt. Wir erhalten das folgende lineare Gleichungssystem:

$\downarrow I_0$	Glas	$\uparrow I_{\text{refl}}$
		$\uparrow I_6$
	Material A	
$\downarrow I_1$		
		$\uparrow I_5$
	Material B	
$\downarrow I_2$		
		$\uparrow I_4$
	Material A	
$\downarrow I_3$		
	Untergrund	

Abbildung 11: Intensitäten an den Grenzflächen

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{e}^{-\alpha d}\left(T_{\text{Glas}} I_0 + R_{\text{Glas}} I_6\right), \\
I_2 &= \mathrm{e}^{-0,5\beta}\left(T_{AB} I_1 + R_{AB} I_5\right), \\
I_3 &= \mathrm{e}^{-\alpha(0,5-d)}\left(T_{AB} I_2 + R_{AB} I_4\right), \\
I_4 &= \mathrm{e}^{-\alpha(0,5-d)} R_{\text{Untergrund}} I_3, \\
I_5 &= \mathrm{e}^{-0,5\beta}\left(R_{AB} I_2 + T_{AB} I_4\right), \\
I_6 &= \mathrm{e}^{-\alpha d}\left(R_{AB} I_1 + T_{AB} I_5\right).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Dieses lineare Gleichungssystem in den sechs Unbekannten $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ muss nun gelöst werden. Das kann man per Hand machen oder man nutzt eines von vielen Programmen. Notfalls kann man sogar eine Tabellenkalkulation zu Hilfe nehmen. Die Lichtstärke des von der Solarzelle reflektierten Lichts berechnet sich nun aus dem direkt am Materialübergang Glas/Material A reflektierten Licht und dem transmittierten aus der Solarzelle kommenden Licht mit Stärke I_6:

$$I_{\text{refl}} = R_{\text{Glas}} I_0 + T_{\text{Glas}} I_6.$$

Zeichen wir I_{refl} in Abhängigkeit von d (siehe Abbildung 12), so sehen wir, dass I_{refl} am kleinsten ist für $d = 0,5$. Es ergibt sich $I_{\text{refl}} \approx 0,3667$ und man könnte annehmen, Antwort 1 wäre richtig, und so war es ursprünglich auch gedacht.

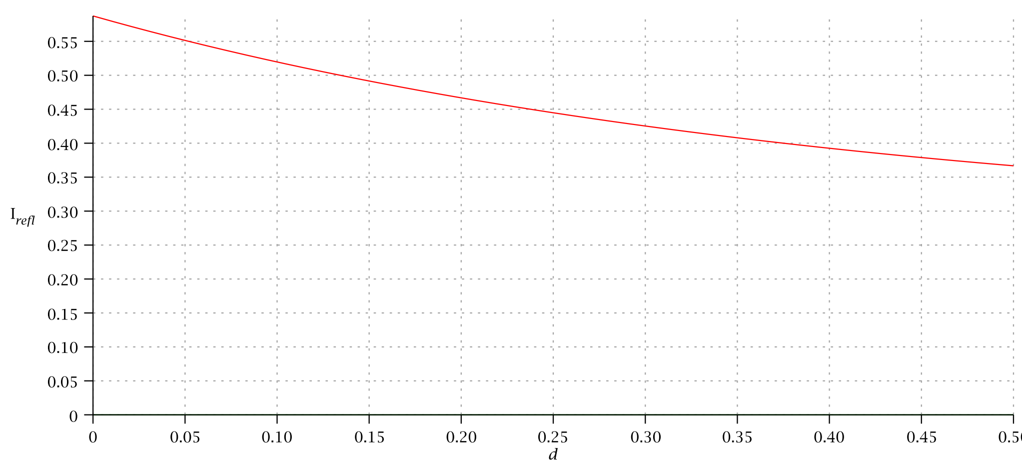


Abbildung 12: Stärke des reflektierten Lichts I_{refl} in Abhängigkeit von der Dicke d der obersten Schicht

Die Interpretation von $d = 0,5$ ist aber, dass mit einer Dicke von $0,5-0,5 = 0$ die unterste A-Schicht komplett entfällt. Es bleibt theoretisch nur die reflektierende Grenzschicht übrig. Das ist auch nicht weiter schlimm, denn direkt im Anschluss an die unterste A-Schicht kommt ja der perfekt reflektierende Untergrund. Da macht es keinen Unterschied, ob die unterste reflektierende Grenzschicht zwischen B/A existiert oder nicht. Wohl aber kann man sich überlegen, was passiert, wenn man die oberste A-Schicht wegfallen lässt ($d = 0$). Die bisherigen Berechnungen sagen zwar aus, dass das ungünstiger wäre als ($d = 0,5$), allerdings ist dabei davon ausgegangen worden, dass die Grenzschichten Glas/A und A/B existieren. Es wird also zweimal reflektiert, bevor Licht in das Innere der Solarzelle eindringt. Ein Wegfallen der oberen A-Schicht führt aber auch zu einem Wegfallen der Glas/A Grenzschicht und es gibt nur noch eine Glas/B Grenzschicht. Damit aändert sich das Gleichungssystem (3) folgendermaßen.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \mathrm{e}^{-0,5\beta}\left(T_{\text{Glas}} I_0 + R_{\text{Glas}} I_5\right), \\
I_3 &= \mathrm{e}^{-0,5\alpha}\left(T_{AB} I_2 + R_{AB} I_4\right), \\
I_4 &= \mathrm{e}^{-0,5\alpha} R_{\text{Untergrund}} I_3, \\
I_5 &= \mathrm{e}^{-0,5\beta}\left(R_{AB} I_2 + T_{AB} I_4\right),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(5)

Die interessierende Intensität des reflektierten Lichts ist dann

$$I_{\text{refl}} = R_{\text{Glas}} I_0 + T_{\text{Glas}} I_5 \approx 0,2976.$$

Das liegt deutlich unter dem Wert für $d = 0,5$ und damit ist nicht Antwort 1 sondern Antwort 9 richtig.

19 Die Kräne

Autoren: Torsten Gellert, Elisabeth Günther (Matheon)

19.1 Aufgabe

Workflow-Optimizer Wolfried-Otto berichtet:

Heute sind unsere schlimmsten Befürchtungen eingetroffen. Einer unserer beiden Kräne in der Spielzeugfabrik hat den Geist aufgegeben. Dabei hatten wir geplant, sie erst zum nächsten Jahr auszuwechseln. So haben wir jetzt die Handwerker in der Halle, während hier alles auf Hochtouren läuft. Vielleicht ist es vernünftig, gleich noch mehr Kräne zu ordern, um hinterher den Rückstand aufzuholen. Aber wie viele sind denn überhaupt sinnvoll?
Alle Kräne werden an einer Schiene an der Decke angebracht. Diese transportieren Materialien und fertige Geschenke in der Halle entlang der Schiene von einem Ort zum anderen. Alle Kräne fahren mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Minute. Natürlich können die Kräne auf der Schiene nicht aneinander vorbeifahren, dadurch bleibt die Reihenfolge der Kräne auf der Schiene immer dieselbe. Da der Platz in der Halle sehr begrenzt ist, kann ein Transportauftrag nur von einem einzelnen Kran erledigt werden, ohne dass dieser das Transportgut zwischendurch absetzt. Jedes Transportgut wird sofort nach dem Aufnehmen auf direktem Weg zu seinem Zielort gefahren. Ein freier Kran hingegen kann an einer Position verharren, wenn er nicht im Wege ist. Alle Kräne starten morgens in einem Depot in der Mitte der Halle, in das sie am Ende wieder zurückkehren. (Zu den Nachbarpositionen ist genügend Platz, damit alle Kräne in die Mitte passen). Abbildung 13 zeigt eine schematische Darstellung von zwei Kränen an ihrer Schiene, zusammen mit den Transportanfragen.

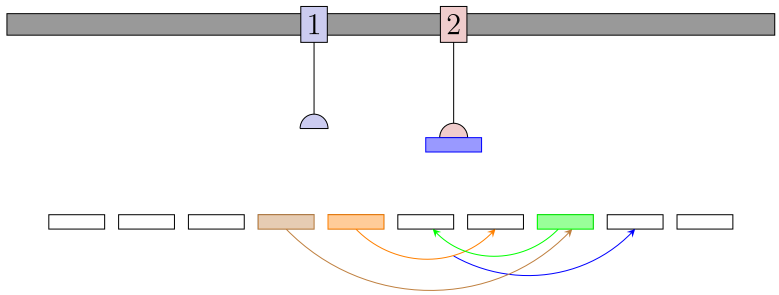


Abbildung 13: Zwei Kräne in der Spielzeugfabrik. Das blaue Gut wird momentan durch den zweiten Kran an seinen Zielort transportiert. Der erste Kran ist auf dem Weg zu dem nächsten zu transportierenden Gut.

Wie sieht es denn bei einem kleinen Beispiel aus? Unsere Halle hat eine Länge von 20 Metern. Das Depot befindet sich also bei Meter 10. Betrachten wir mal folgende acht Transportanfragen:

Transportanfrage	1	2	3	4	5	6	7	8
Startpositon $[m]$	10	18	19	4	3	7	8	7
Zielposition $[m]$	12	16	7	10	1	12	14	9

Dabei muss bei Anfrage 1 ein Gut von Position 10 nach Position 12 transportiert werden, bei Anfrage 2 von Position 18 nach Position 16 und so weiter. Der Schein trügt allerdings: Die Reihenfolge der Transporte ist nicht durch ihre Nummer festgelegt. Abbildung 14 zeigt, wie diese von 2 Kränen bearbeitet werden können, sodass nach 32 Minuten alle Güter an ihrem Ziel und die Kräne wieder im Depot sind. Schneller können diese Anfragen von zwei Kränen mit abschließender Rückkehr ins Depot nicht erledigt werden. Es ist übrigens unproblematisch, wenn zwei Kräne, wie beispielsweise im Bild bei den Transporten 4 und 8, direkt nebeneinander fahren. Es wird auch keine Wartezeit zum Abladen und Aufnehmen der Transporte benötigt, da unsere Wichtel die Güter kurz vor dem Ziel vom Kran entnehmen und den Kran falls nötig neu beladen. Die Geschwindigkeit der Kräne ($1\,m/min$) garantiert ihnen die dafür notwendige Zeit.
Arbeiten wir nur mit einem Kran, brauchen wir für die Transporte mindestens 62 Minuten. Bei so einer starken Verbesserung denken wir natürlich über die Installation von mehr als zwei Kränen nach! Aber wie viele sollen

wir denn ordern? Was ist in unserem Beispiel die größte Anzahl an Kränen, bei der es noch zu einer Verkürzung der benötigten Gesamtzeit zum Abfahren der Transporte und anschließender Rückkehr zum Depot kommt? (Jeder weitere Kran würde also keine Ersparnis mehr bringen.)

1. bei 2 Kränen
2. bei 3 Kränen
3. bei 4 Kränen
4. bei 5 Kränen
5. bei 6 Kränen
6. bei 7 Kränen
7. bei 8 Kränen
8. bei 9 Kränen
9. bei 10 Kränen
10. bei 11 Kränen

Projektbezug

Stehen benötigte Ressourcen, die über die Zeit genutzt werden sollen, nur begrenzt zur Verfügung, ist es oft schwierig diese durch eine geschickte Zuordnung bestmöglich auszunutzen. Probleme dieser Art werden in der Mathematik als *Scheduling* Probleme bezeichnet. Noch schwieriger wird es, wenn zusätzlich zu den Scheduling-Entscheidungen auch *Routing*-Entscheidungen anstehen und sich beide gegenseitig beeinflussen. Sowohl Scheduling als auch Routing für sich gesehen sind relativ gut untersuchte Probleme. Entsteht Interaktion zwischen beiden, tauchen viele neue Fragestellungen und auch Möglichkeiten auf. Das MATHEON-Projekt B24 *Scheduling Material Flows in Logistics Networks* beschäftigt sich damit, für Aufgaben dieser Art integrierte Modelle und Methoden zu entwickeln.

In der Aufgabe stellen die Kräne die knappen Ressourcen dar. Diese müssen die ihnen zugewiesenen Anfragen in konfliktfreien Routen abarbeiten können. Dabei schränken nötige Routing-Entscheidungen stark ein, wann welcher Kran wo zur Verfügung steht. Das hat Einfluss auf die Zuordnung von Anfragen zu Kränen. Ebenso beeinflusst eine Zuordnung von Anfragen auf Kräne stark, welche Routen möglich sind. Scheduling- und Routing-Entscheidungen sollten also nicht unabhängig voneinander getroffen werden, so wie es wahrscheinlich auch jeder beim Lösen der Aufgabe getan hat.

Übrigens stellt die räumliche Ausdehnung von Objekten in diesem Zusammenhang oft noch eine zusätzliche Herausforderung dar. Wenn man Glück hat, ist sie im Verhältnis sehr klein und kann vernachlässigt werden. Andernfalls wird diese Tatsache wenn nötig in einem ersten Schritt zunächst ignoriert, um erst einmal Erkenntnisse über die oben beschriebenen Fragestellungen zu erlangen. So wurde auch diese Aufgabe dahingehend ein wenig vereinfacht.
Projektseite: `http://www.math.tu-berlin.de/coga/projects/matheon/B24/`

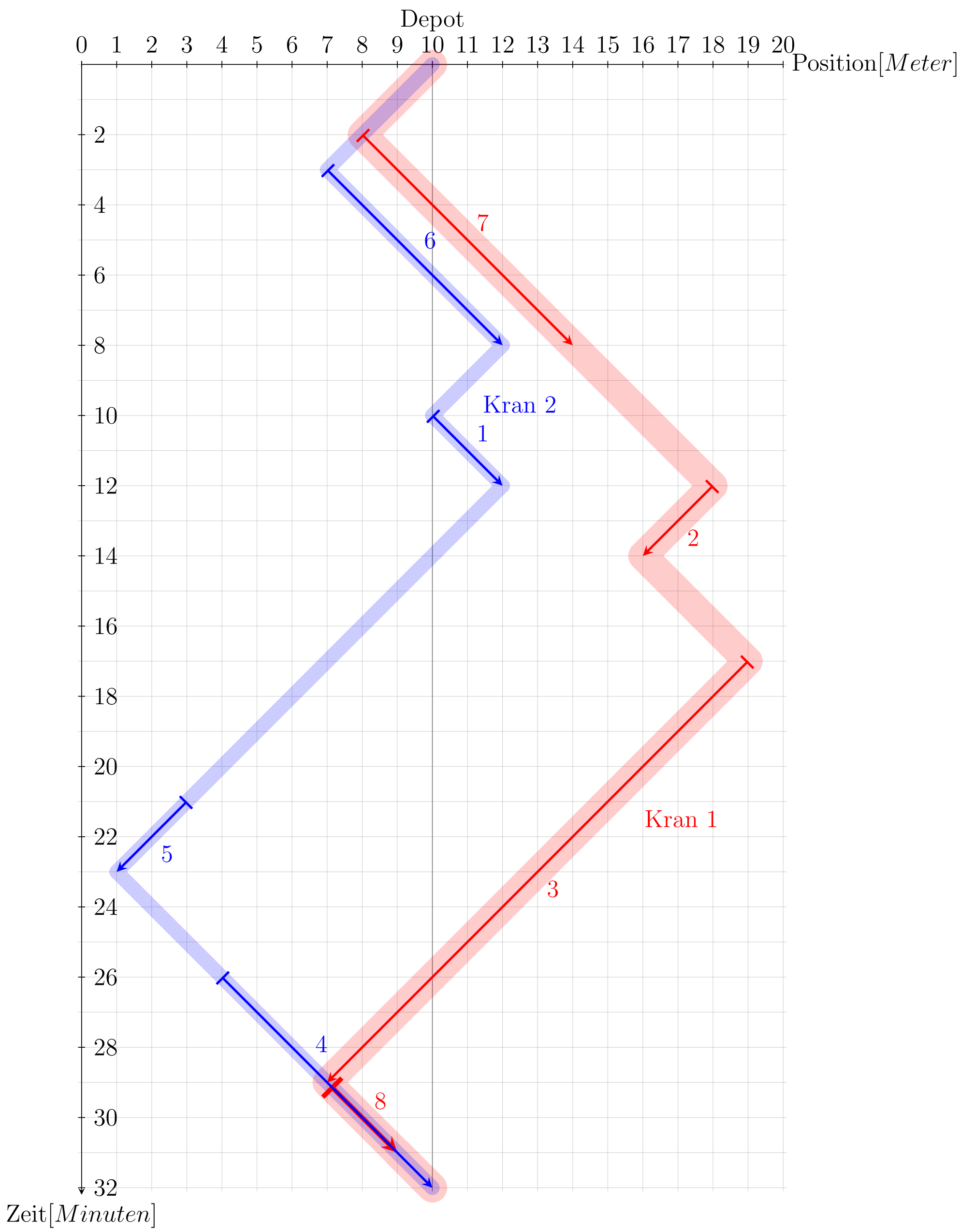


Abbildung 14: Lösung mit 2 Kränen, bei der beide frühestmöglich nach der Abarbeitung aller Anfragen in das Depot zurückkehren. Jede Abarbeitung einer Transportanfrage ist durch einen Pfeil von der Start- zur Zielposition mit zugehöriger Nummer dargestellt. Die dargestellte Farbe gibt den Kran an, der diese Anfrage transportiert. Die Tour jedes Kranes wird durch den blasseren Schlauch in der zugehörigen Farbe um die Pfeile definiert.

19.2 Lösung

Richtige Antwort: 4 bei 5 Kränen

Der Beweis dieser Aussage erfolgt in drei Schritten: 1. Zeigen einer absoluten unteren Schranke, die unabhängig von der verfügbaren Anzahl der Kräne ist; 2. Angabe einer Lösung mit 5 Kränen, die nicht länger als die eben gezeigte absolute untere Schranke benötigt und 3. der Beweis, dass dieser Wert mit 4 Kränen nicht erreicht werden kann. Wir nennen den frühesten Zeitpunkt, zu dem in einer Lösung alle Transportanfragen bearbeitet und alle Kräne in das Depot zurückgekehrt sind, den *Makespan* einer Lösung.
Zum ersten Punkt beobachten wir, das ein Kran allein 24 Minuten benötigt, um Transportauftrag 3 abzuschließen und dann in das Depot zurückzukehren. Siehe dazu die rote Tour, die in Abbildung 15 dargestellt ist. Das heißt, dass jede Lösung unabhängig von der Anzahl der vorhandenen Kräne mindestens einen Makespan von 24 Minuten haben muss.
Zum zweiten Punkt wird in Abbildung 16 eine Lösung angegeben, bei der alle Aufträge so durch 5 Kräne erledigt werden, dass alle Kräne nach dem Abfahren der Anfragen bis Minute 24 das Depot wieder erreicht haben.
Bleibt für den letzten Punkt zu zeigen, dass für 4 Kräne eine Zeit von 24 Minuten nicht ausreicht, um alle Aufträge zu bearbeiten. In Abbildung 15 wird für eine Teilmenge der Transportanfragen für jede Anfrage die frühestmögliche Abarbeitung mit anschließender Rückkehr ins Depot dargestellt. Dabei muss Anfrage 3 für einen Makespan von 24 Minuten wie in der roten Tour bearbeitet werden, da jede Abweichung eine Verlängerung der benötigten Zeit verursachen würde. Ein Kran, der Anfrage 2 bearbeitet, kann keine andere Transportanfrage dieser Auswahl bearbeiten ohne einen Makespan von 24 Minuten zu überschreiten. Keine der drei anderen schwarzen Anfragen kann durch den selben Kran nach Auftrag 2 in benötigter Zeit bearbeitet werden, genauso wenig Anfrage 2 nach Anfrage 5. Bei einer Abarbeitung von Anfrage 2 durch einen Kran der vorher Anfrage 6 oder 7 bearbeitet hat, müsste zur Kollisionsvermeidung, wie durch die grünen gestrichelten Linien in Abbildung 15 verdeutlicht, entweder die rote Tour verschoben werden oder die Abarbeitung nach Beendung der roten Tour erfolgen. Beides hat eine Verletzung des geforderten Makespans zur Folge und ist somit nicht möglich. Bleiben noch zwei Kräne für die Bearbeitung der Anfragen $5, 6$ und 7. Werden die Anfragen 6 und 7 von einem Kran bearbeitet, kommt es bei beiden möglichen Abarbeitungsreihenfolgen aufgrund von Kollisionsvermeidung zu

einer Erhöhung des Makespan über 24 Minuten, entweder durch Verändern der roten Tour oder durch nötige Wartezeit für die zweite Anfrage, damit diese nach der roten Tour bearbeitet wird, siehe wieder die grünen gestrichelten Linien in Abb. 15. Ganz analog folgt, dass auch Anfrage 5 nicht zusammen mit Anfrage 6 oder 7 gemeinsam durch einen Kran bearbeitet werden kann, ohne den benötigten Makespan zu überschreiten. Also reichen 4 Kräne zur Abarbeitung des beschriebenen Beispiels mit einem Makespan von 24 Minuten nicht aus und die Behauptung ist bewiesen.
Auch wenn diese zum Beweis nicht notwendig sind, zeigen die Abbildungen 17 und 18 auch Optimalösungen für drei und vier Kräne. Es fällt auf, dass die Verbesserung im Makespan hier schon nicht mehr so groß ist, wie bei den ersten Kränen.

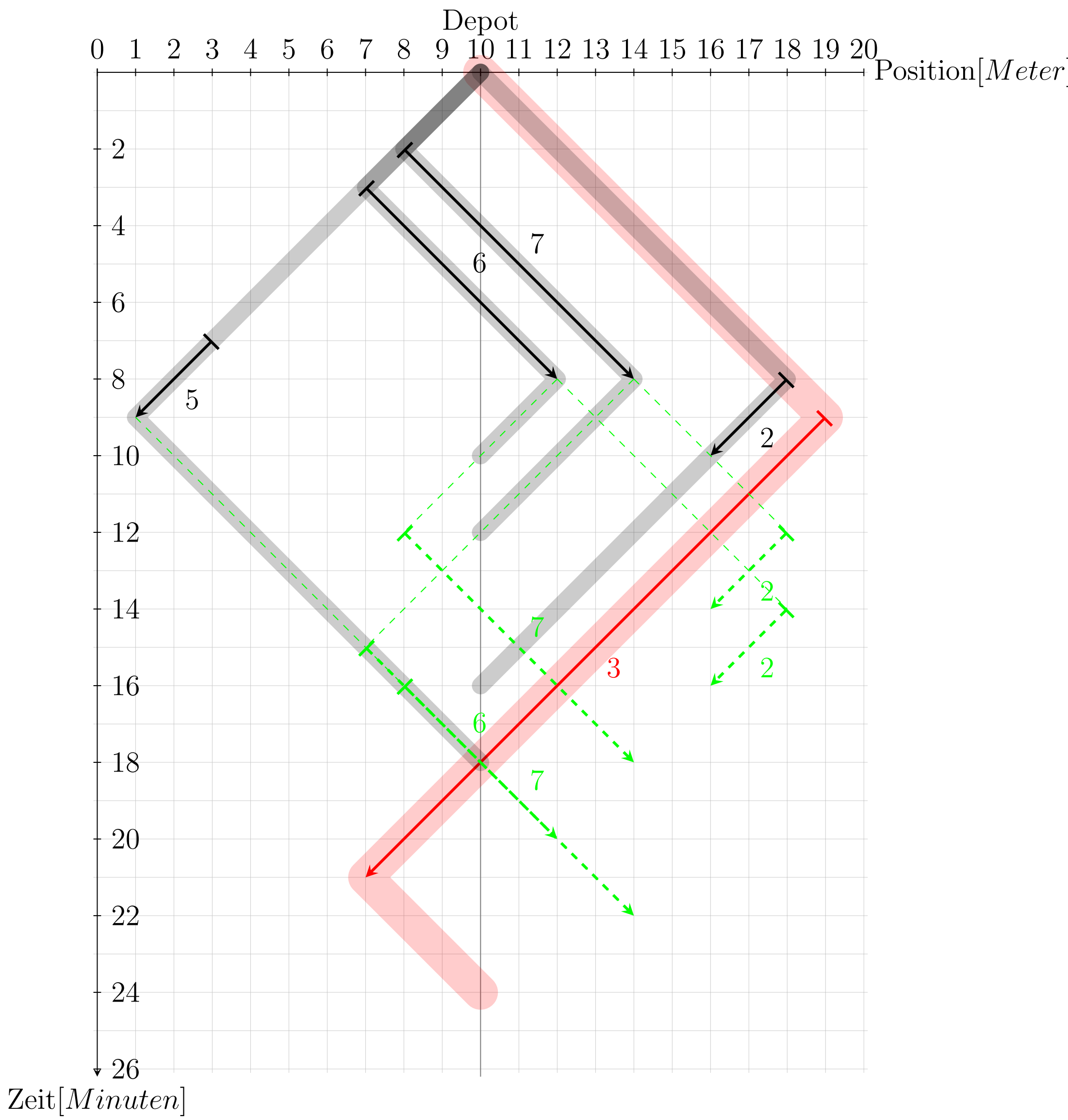


Abbildung 15: Darstellung minimal nötiger Bearbeitungszeiten für einzelne Anfragen zur Ermittlung untere Schranken an einen benötigten Makespan.

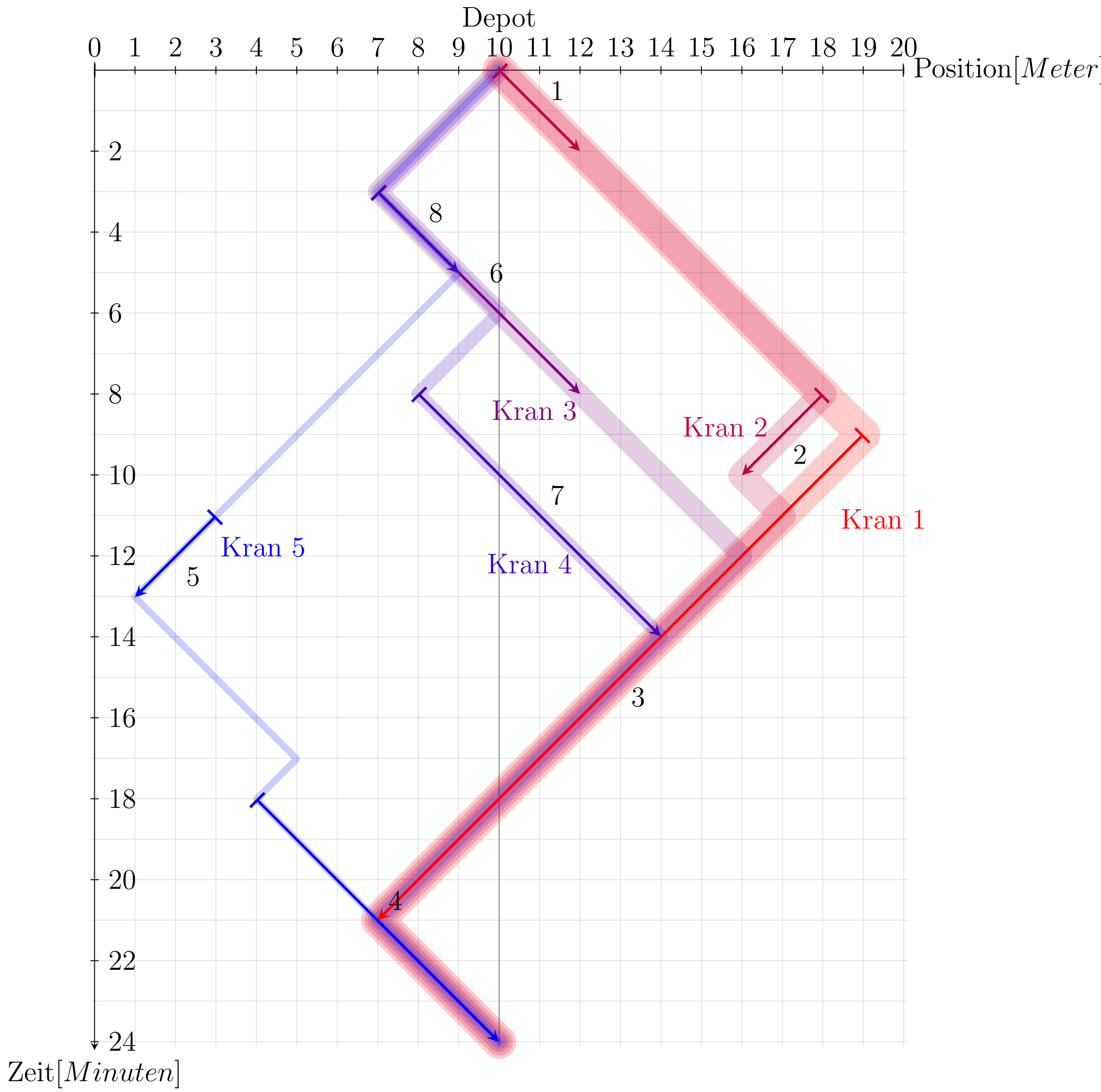


Abbildung 16: Optimallösung für 5 Kräne mit einer benötigten Zeit von 24 Minuten.

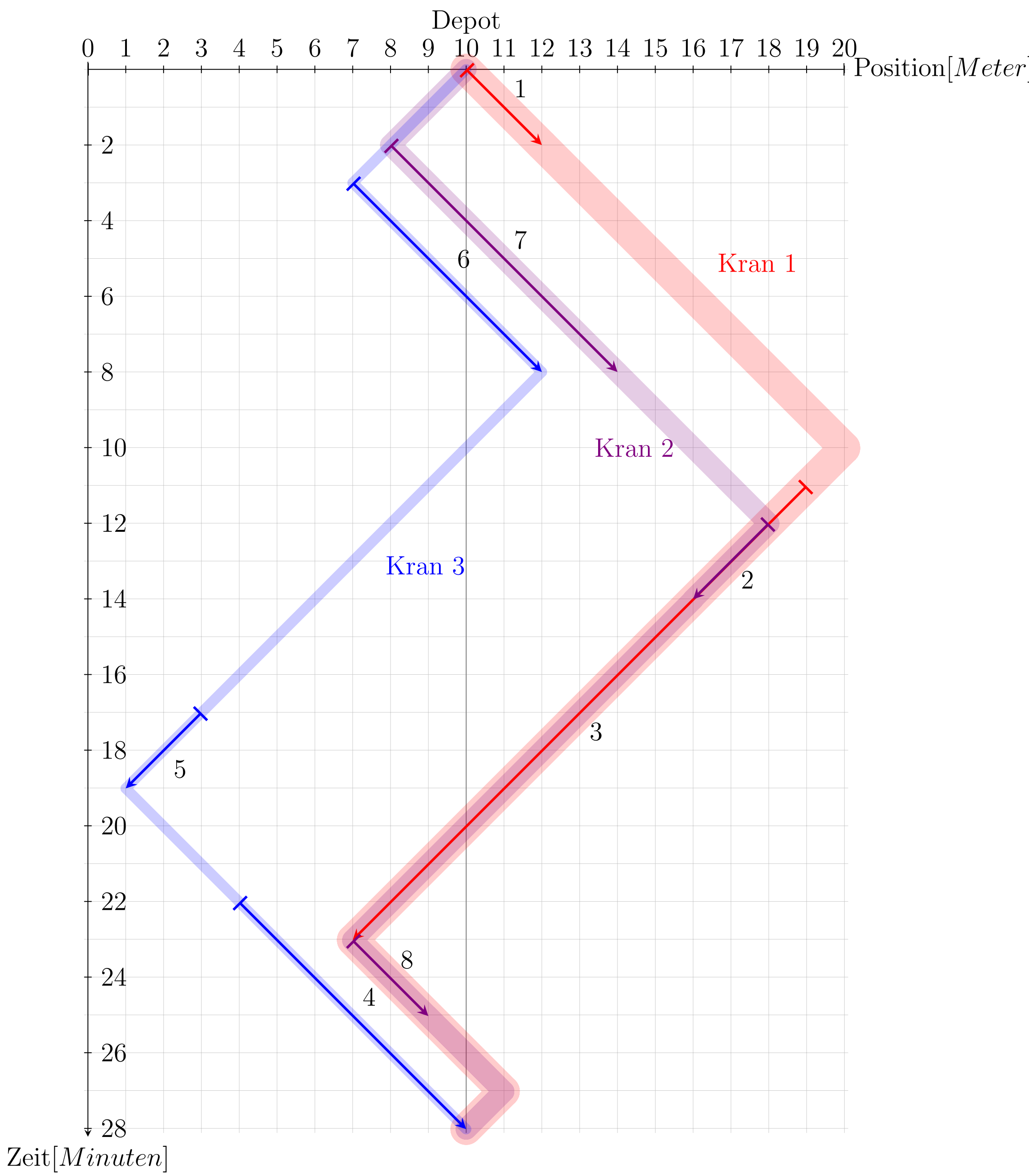


Abbildung 17: Optimallösung für 3 Kräne mit einer benötigten Zeit von 28 Minuten.

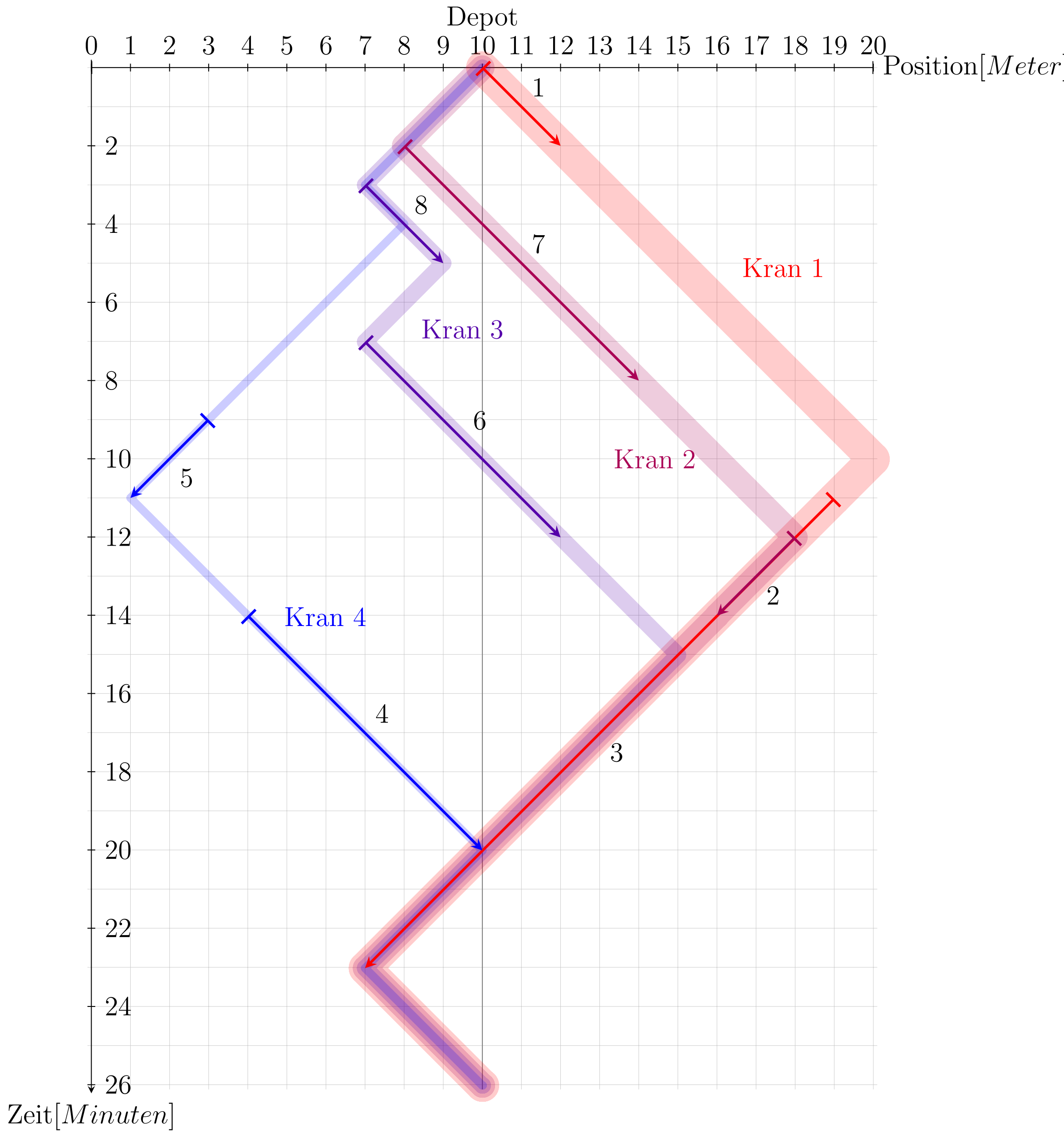


Abbildung 18: Optimallösung für 4 Kräne mit einer benötigten Zeit von 26 Minuten.

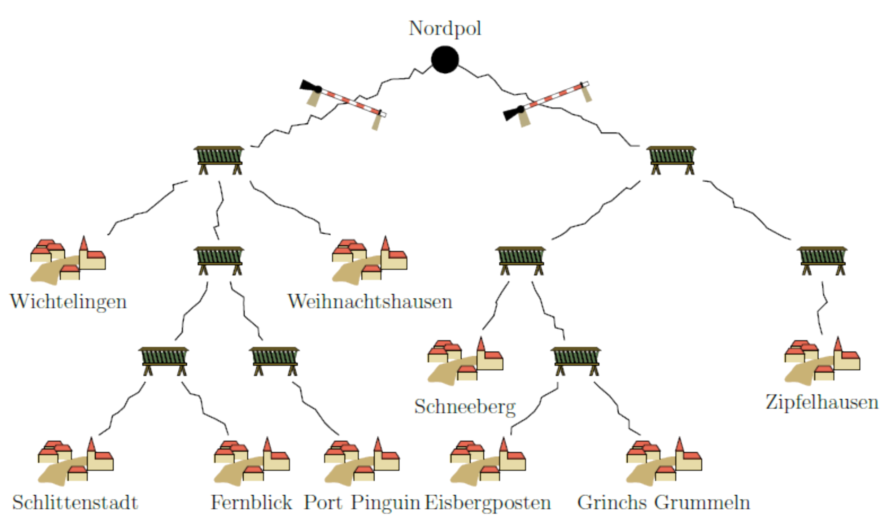
20 Grinchalarm!

Autoren: Martin Groß, Daniel Plümpe, Melanie Schmidt (Matheon)

20.1 Aufgabe

Winston, Chef von Winterpol:

„Winston, wir haben ein Problem!“ Mit diesen Worten stürmte eben Sigismund herein. Er hatte den Weihnachtsmann zur Rede gestellt, was ihm denn auf den Herzen liegt und nach eindringlichem Fragen war klar: Der Grinch ist wieder aktiv. Der Weihnachtsmann wollte eigendlich nur ein paar seiner Tausenden von Überstunden auf den Weihnachtsinseln abbummeln. Dann hat er erfahren, dass das Sandmännchen von den Sanda-Inseln entführt worden ist und als er über Waikiki-Leaks Nachforschungen angestellt hat, wurde klar. Der Grinch hat es entführt und will mit dem Schlafsand unsere Rentiere lahmlegen. Diese Information hat ihn in eine Art Schockzustand versetzt, in dem er alles, was mit der Geschenkeauslieferung zu tun hat verdrängt hat. Verdammt – hätten wir das nur eher erfahren...
Egal, ich habe einen Krisenstab einberufen. Wanda und Widomar, zwei unserer fähigsten Spezialisten arbeiten Pläne aus, wie die Bescherung gerettet werden kann. Schlafzauber sind kompliziert und langwierig in der Vorbereitung. Vielleicht schaffen wir es noch, alle Geschenke zumindest in die Dörfer zu bringen. An zentralen Punkten weltweit befinden sich gut versteckte Wichteldörfer. In diese müssen rechtzeitig alle Geschenke geliefert werden und dann werden sie von unseren lokalen Außendienstmitarbeitern verteilt. Schematisch sieht das Ganze so aus:



Die Rentiere müssen nach einer Stunde Flugzeit einen Zwischenstopp bei einer Futterkrippe einlegen, um einen Beutel Heu einzupacken, den sie auf der Weiterfahrt zum nächsten Stopp fressen können. Die Krippen sind so aufgestellt, dass der Flug von einer Krippe zur nächsten, vom Nordpol zu einer Krippe oder von einer Krippe zu einem Dorf genau eine Stunde dauert. Jedes Wichteldorf muss von genau einem Lastzug erreicht werden, und wenn dieser angekommen ist, müssen die Rentiere dort mehrere Tage Rast machen. Das ist aber kein Problem, da es neun verschiedene Lastzüge gibt. In jeder Stunde können nur zwei Lastzüge den Nordpol verlassen, jeweils einer an jeder der beiden eingezeichneten Schranken. Daher dauert es mindestens zwei Stunden, um einen Lastzug nach Wichtelingen zu bringen, aber mindestens drei Stunden, Wichtelingen und Weihnachtshausen beide zu beliefern.
Wanda hat organisiert, dass alle bisherigen Geschenke im Eiltempo auf die Schlitten verteilt werden. Dass ein paar noch fehlen, ist nicht schlimm. Man kann immer sagen, dass das an der Wirtschaftskrise liegt. Um Mitternacht können die starten. Und sie arbeitet auch an einem Plan, mit dem in möglichst kurzer Zeit alle Dörfer beliefert werden können. Widomar hat aber einige Kontakte angezapft und ist zu dem erschreckenden Ergebnis gekommen, dass der Grinch bereits morgen früh um 4:02 Uhr seinen Schlafzauber fertig haben könnte. Sollte das eintreten, ist Wandas Lieferplan denkbar ungünstig. Widomar bastelt jetzt seinen eigenen Plan, bei dem möglichst viele Dörfer bis dahin beliefert werden können.
Dabei stellen sich mir aber jetzt die Fragen: Wie lang braucht Wandas Plan mindestens und wieviele Dörfer können nach Widomars Überlegungen maximal in 4 Stunden beliefert werden?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es werden 5 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 5 Dörfer beliefert werden.

2. Es werden 5 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 6 Dörfer beliefert werden.

3. Es werden 5 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 7 Dörfer beliefert werden.

4. Es werden 5 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 8 Dörfer beliefert werden.
5. Es werden 6 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 4 Dörfer beliefert werden.
6. Es werden 6 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 5 Dörfer beliefert werden.
7. Es werden 6 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 6 Dörfer beliefert werden.
8. Es werden 7 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 3 Dörfer beliefert werden.
9. Es werden 7 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 4 Dörfer beliefert werden.
10. Es werden 7 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern.
   In 4 Stunden können 5 Dörfer beliefert werden.

Projektbezug:
Das Matheon-Projekt B18 beschäftigt sich mit der Planung von Evakuierungen. Da vorab nicht bekannt ist, wieviel Zeit für eine Evakuierung zur Verfügung steht, müssen Pläne gefunden werden, die für möglichst viele Szenarien optimal bzw. in keinem Szenario furchtbar schlecht sind. Im allgemeinen muss man dafür einen Kompromiss finden; in Spezialfällen, wie z.B. in der Gebäudeevakuierung lassen sich teilweise aber auch Lösungen finden, die für jede zur Verfügung stehende Zeitspanne optimal sind.

20.2 Lösung

Richtige Antwort: 6 Es werden 6 Stunden benötigt, um alle Dörfer zu beliefern. In 4 Stunden können 5 Dörfer beliefert werden.

In der Aufgabe geht es darum, Geschenklaster von Nordpol zu neun verschiedenen Wichteldörfern zu bringen. Dabei können am Nordpol immer zwei Lastschlitten pro Stunde starten, und diese brauchen dann jeweils eine Stunde für jedes Stück ihres Weges (Nordpol-Krippe, Krippe-Krippe oder Krippe-Dorf). Ein Lastschlitten, der angekommen ist, bleibt an seinem Ziel stehen; es fahren daher genau neun verschiedene Lastschlitten, um alle Dörfer zu beliefern.

Das Wichtige ist, zu erkennen, dass es auf lange Sicht schlecht sein kann, ein Dorf schnell und früh zu beliefern, weil die Lastschlitten dann zu einem späteren Zeitpunkt schlecht verteilt sind und die gesamte Geschenkeverteilung länger dauert. Außerdem kann man soch überlegen, dass der „linke“ und der „rechte“ Teil unseres Auslieferungsplans unabhängig sind: Lastschlitten, die Richtung Wichtelingen / Weihnachtshausen / Schlittenstadt / Fernblick / Port Pinguin unterwegs sind, können sich mit Lastschlittenn in Richtung Schneeberg / Eisbergposten / Grinchs Grummeln / Zipfelhausen niemals behindern. Wir können also immer getrennt für die beiden Seiten argumentieren.

Wir überlegen uns schrittweise, wann wie viele Lastschlitten angekommen sein können. Dabei kümmern wir uns nicht nur um die beiden vorgegebenen Fragen, sondern üben zunächst mit kürzeren Zeiträumen.

Wie viele Lastschlitten können ihr Ziel nach einer Stunde bereits erreichen? Keiner, da man in einer Stunde maximal bis zu den ersten Krippen fahren kann. Sinnvoll wird die Frage also erst, wenn wir uns mindestens zwei Stunden Zeit geben. In dieser Zeit kann z.B. ein Lastschlitten bis Wichtelingen fahren. Mehr als einen Lastschlitten können wir aber nicht ins Ziel bringen: Um Weihnachtshausen zusätzlich zu beliefern, muss ein zweiter Lastschlitten über die gleiche Strecke fahren wie der erste, dieser startet eine Stunde später und wäre erst nach drei Stunden da. Alle anderen Dörfer sind sowieso so weit weg, dass eine Fahrt zu ihnen mindestens drei Stunden dauert.

Wir können also in einer Stunde kein Dorf und in zwei Stunden ein Dorf beliefern. Was geschieht nun, wenn wir drei Stunden Zeit haben?

Auf der linken Seite können wir in diesem Fall weder Schlittenstadt, Fernblick noch Port Pinguin beliefern, aber wir können zumindest, wie bereits an-

gedeutet, Wichtelingen und Weihnachtshausen beliefern. Außerdem können wir noch auf der rechten Seite einen Lastschlitten nach Zipfelhausen schicken. Aus dem gleichen Grund, aus dem wir Wichtelingen und Weihnachtshausen nicht in zwei Stunden beliefern können, können wir aber nicht Zipfelhausen und Schneeberg gleichzeitig in drei Stunden beliefern. Es können also maximal drei Dörfer in drei Stunden beliefert werden.
Jetzt wird es langsam interessant, da wir uns nun um den Fall mit vier Stunden kümmern.
Auf der linken Seite können wir den ersten Lastschlitten nach Schlittenstadt fahren lassen, der dann pünktlich nach vier Stunden dort eintrifft. Dann können wir zwar keinen Schlitten mehr nach Fernblick oder Port Pinguin schicken, da diese, um rechtzeitig anzukommen, auch sofort losfahren müssten, aber wir können noch Wichtelingen und Weihnachtshausen beliefern, da dieses, wie oben besprochen, ja zusammen in drei Stunden geht. Im linken Zweig können wir also drei Dörfer beliefern.
Die rechte Seite ist etwas ungünstiger für unsere Lieferungen: Wir sehen direkt, dass wir zwar nun Zipfelhausen und Schneeberg beliefern können. Eisbergposten und Grinchs Grummeln sind dann aber nicht mehr belieferbar, obwohl diese ja in vier Stunden erreichbar sind. Um das zu erkennen, überlegen wir uns folgendes:
Angenommen, wir möchten Eisbergposten oder Grinchs Grummeln erreichen. Dann müssen wir direkt am Anfang einen Lastschlitten dorthin schicken, damit er innerhalb von vier Stunden ankommt. Dadurch können wir den Lastschlitten nach Schneeberg erst eine Stunde später losschicken. Der kommt dann zwar noch rechtzeitig an, blockiert aber den Lastschlitten nach Zipfelhausen, der erst nach zwei Stunden losfahren kann und daher fünf Stunden braucht, um anzukommen. Egal, wie wir es also anstellen, wir können nur zwei Lastschlitten in den rechten Zweig unseres Auslieferungsplans schicken. In vier Stunden kann man also insgesamt fünf Dörfer beliefern.
Wir machen mit fünf Stunden weiter und möchten wissen, ob wir in fünf Stunden alle Dörfer beliefern können. Das geht nicht, da wir Schlittenstadt, Fernblick und Port Pinguin nicht gleichzeitig in fünf Stunden beliefern können: Der dritte Lastschlitten in diese Dörfer könnte erst nach zwei Stunden losfahren und bräuchte dann noch vier Stunden, um ins Ziel zu gelangen. Es sind also genau sechs Stunden nötig, um Schlittenstadt, Fernblick und Port Pinguin zu beliefern.
Kommen wir mit dieser Zeit auch aus, um alle anderen Dörfer zu beliefern? Wichtelingen und Weihnachtshausen schaffen wir, wenn wir die Lastschlitten

als viertes und fünftes losschicken. Auf der rechten Seite des Auslieferungsplans schicken wir die ersten beiden Lastschlitten nach Eisbergposten und Grinchs Grummeln; diese kommen also nach vier bzw fünf Stunden an. Den dritten und vierten Lastschlitten schicken wir nach Schneeberg und Zipfelhausen, wo diese nach fünf bzw. sechs Stunden ankommen. Damit sind alle Dörfer beliefert! Es sind also sechs Stunden notwendig, um alle Dörfer zu beliefern, richtig ist also Antwort 6.
Zum Abschluss überlegen wir uns noch schnell, dass die Lösungen für 4 Stunden und für 6 Stunden tatsächlich verschieden sind. Um in vier Stunden 5 Dörfer zu beliefern, haben wir nämlich den zweiten und dritten Lastschlitten nach Wichtelingen und Weihnachtshausen geschickt. Macht man das so, kann man erst den vierten und fünften Lastschlitten nach Fernblick und Port Pinguin schicken, wo diese erst sieben bzw. acht Stunden ankommen würden. Damit innerhalb von sechs Stunden alle Dörfer beliefert werden können, müssen wir die Lastschlitten nach Fernblick und Port Pinguin spätestens als zweites und drittes losschicken.
Es ist also wichtig, dass wir zu Beginn wissen, wie viel Zeit wir haben, damit wir uns optimal verhalten können! Was ein Dilemma. Zum Glück haben die Wichtel von Winterpol sich für Wandas Lösung entschieden, da der Grinch beim Wirken seines Schlafzaubers so müde wurde, dass er tatsächlich sechs Stunden brauchte, um den Zauber zu wirken. Es ist also alles gutgegangen!

21 Weihnachten auf Uniformia

Autoren: Jörg Polzehl und Karsten Tabelow (Matheon)

21.1 Aufgabe

Irma, Wichtelin für interstellare Expansion erzählt:

Da war gestern so ein Riesenaufruhr wegen Grinchalarm. Und nun? Nichts ist passiert. Die Rentiere sind zwar erschöpft, aber die Geschenke sind alle in den Zwischenlagern in den Wichteldörfern.
Beim Thema Zwischenlager fällt mir ein, dass wir neulich einen neuen Planeten entdeckt haben. Mit dessen Entdeckung erweitert sich natürlich auch der Wirkungsbereich des Weihnachtsmanns - ein typisch irdischer Brauch. Ab dem kommenden Jahr gilt es, den Planeten Uniformia mit Weihnachtsgeschenken zu versorgen. Der Planet ist absolut rund, hat einen Radius von 6350 km (etwa wie die Erde), es gibt keine Berge, keine Ozeane (wie die Wasserversorgung abläuft, wird noch erforscht!). Da wir diesmal die entsprechenden geographischen Gegebenheiten haben, wollen wir einmal sehr systematisch vorgehen und alles ordentlich machen. Wieder müssen wir Wichteldörfer mit Geschenkelagern rund um den Planeten aufbauen, die möglichst gleichmäßig über die gesamte Oberfläche des Planeten verteilt sein sollen. Ich erinnere mich, dass regelmäßige Polyeder dafür geeignet sind. Zum Beispiel hat ein Ikosaeder 12 Ecken, und alle Flächen sind gleichseitige Dreiecke. Wir hatten überlegt, die Dörfer in den Zentren der durch die Ecken des Polyeders gegebenen sphärischen Dreiecke (den Versorgungsgebieten) zu errichten. Jede Station soll höchstens eine Fläche von 7000000 km^2 versorgen. Daher ist vorgesehen, durch eine weitere Zerlegung mehr Ecken/Dreiecke zu schaffen, siehe Abbildung 1. Genau in der Mitte einer jeden Kante wird eine neue Ecke eingefügt. Genügt das so konstruierte Versorgungsnetz den Bedingungen? Wie viele Flächen hat es und wie groß ist die größte Fläche der entstehenden sphärischen Dreiecke? Es ist natürlich geeignet zu runden!

1. Es gibt keine Lösung! Auf so einem blöden Planeten will gar keiner Weihnachten feiern.
2. Es sind 42 Flächen, die größte Fläche hat einen Inhalt von etwa 12100000 km^2.
3. Es sind 120 Flächen, mit einem größten Flächeninhalt von 4220000 km^2.
4. Es gibt 80 Flächen, die größte Fläche hat etwa 7250000 km^2.

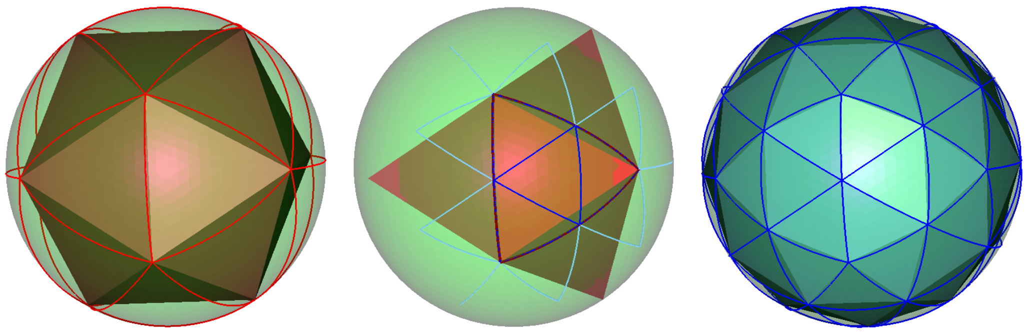


Abbildung 19: Links: Ikosaeder innerhalb von Uniformia. Mitte: „Verfeinerung“ eines Versorgungsgebietes. Rechts: Vollständiger Polyeder nach Zerlegung.

5. Die Anzahl und die Größe der Flächen sind nach diesem Verfahren zufällig. Die Bedingungen des Weihnachtsmanns sind daher nur erfüllt, falls die Landvermesser korrekt gearbeitet und alle Flächen klein genug gemacht haben.

6. Es sind 80 Flächen, die größte Fläche besitzt einen Flächeninhalt von etwa 6330000 km^2.

7. Es sind 80 Flächen, die größte Fläche misst etwa 6030000 km^2.

8. Es gibt 80 Flächen, die größte Fläche hat einen Inhalt von etwa 6960000 km^2.

9. Es gibt 80 Flächen, die größte Fläche misst etwa 6670000 km^2.

10. Es gibt 120 Flächen, der größte Flächeninhalt beträgt etwa 6520000 km^2.

Hinweis:
Natürlich wissen wir, dass sphärische Trigonometrie kein Stoff des Schulunterrichts ist. Aber alles, was man dazu benötigt, ist bekannt. Hilfreiche Formeln findet man beispielsweise auch unter:
`http://de.wikipedia.org/wiki/Sphärische_Trigonometrie`.

Projektbezug:

Polyeder spielen in vielen Matheon-Projekten eine Rolle. Auch das Logo des Matheon basiert auf dem Ikosaeder. Das Projekt A3 beschäftigt sich mit diffusionsgewichteter Bildgebung (DWI) für das menschliche Gehirn. Mit dieser Technik können die anisotropen Strukturen der sogenannten Marklagers sichtbar gemacht werden. Bei der Messung kommt es unter anderem darauf an, Messpunkte auf der Kugeloberfläche möglichst gleichmäßig zu verteilen.

21.2 Lösung

Richtige Lösung: Antwort 4

Zunächst ist zu bemerken, dass es eine eindeutige und triviale Abbildung zwischen den sphärischen Dreiecken und den Flächen der betrachteten Polyeder gibt.
Nach dem Eulerschen Polyedersatz gilt

$$E + F - K = 2$$

wobei E die Zahl der Ecken, F die Zahl der Flächen und K die Anzahl der Kanten des Polyeders bezeichnet. Ein Ikosaeder hat $E_1 = 12$ Ecken, $F_1 = 20$ Flächen und $K_1 = 30$ Kanten. Nach der Zerlegungsregel des Weihnachtsmanns wird jede der Flächen in 4 neue kleinere zerlegt, also ist $F_2 = 80$. Pro Kante kommt eine neue Ecke dazu, daher hat der neue Polyeder $E_2 = 12 + 30 = 42$ Ecken. Folglich ist $K_2 = E_2 + F_2 - 2 = 42 + 80 - 2 = 120$.

Die Fläche A eines sphärischen Dreiecks mit den sphärischen Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ist durch

$$A = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi) \cdot r^2$$

gegeben, wobei r der Radius der Kugel ist.

Um unsere Rechnungen zu vereinfachen, führen wir eine neue Maßeinheit, ein $1 Uni = 5000 km$ ein. Die weiteren Rechnungen erfolgen in Uni.

Eine sehr elegante Darstellung des Ikosaeders in kartesischen Koordinaten ist durch

$$\begin{gathered}(0, \pm 1, \pm \rho)/\nu \\ (\pm 1, \pm \rho, 0)/\nu \\ (\pm \rho, 0, \pm 1)/\nu\end{gathered}$$

mit $\rho = (1 + \sqrt{5})/2$ und $\nu = \sqrt{1 + \rho^2}$, gegeben.

Jede Ecke eines Ikosaeders grenzt an fünf identische gleichseitige Dreiecke, daher beträgt der sphärische Winkel aller durch die Ecken gebildeten sphärischen Dreiecke $2 \cdot \pi/5$, also die Fläche $6 \cdot \pi/5 - \pi = \pi/5$.

Die neuen Koordinaten nach der Zerlegungsregel des Weihnachtsmanns ergeben sich folgendermassen: Seien $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ benachbarte Ecken des Ikosaeders, so ist die Zwischenecke durch $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ mit Normierung gegeben. In obiger kartesischer Darstellung sind zum Beispiel $(0, 1, \rho)/\nu$, $(0, -1, \rho)/\nu$ und $(\rho, 0, 1)/\nu$ benachbarte Punkte. Daher sind die radialen Projektionen der Punkte

$$\begin{aligned} (0,1,\rho) + (0,-1,\rho) &= (0,0,2\rho) \\ (0,-1,\rho) + (\rho,0,1) &= (\rho,-1,1+\rho) \\ (\rho,0,1) + (0,1,\rho) &= (\rho,1,1+\rho) \end{aligned}$$

auf die Kugeloberfläche, d.h. $(0, 0, 1), (1/2, -\frac{1}{2\rho}, \frac{1+\rho}{2\rho})$ und $(1/2, \frac{1}{2\rho}, \frac{1+\rho}{2\rho})$ die neuen Eckpunkte.

Wegen der Symmetrie gibt es genau zwei verschiedene Kantenlängen. Diese erhalten wir, indem wir berücksichtigen, dass der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren der Länge 1 gerade ihr Skalarprodukt ist. Ausserdem entspricht dieser Winkel gerade der sphärischen Kantenlänge (Bogenmaß). Damit haben die entstehenden Kanten folgende Längen: $a = \arccos(\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}) \approx 0.554$ und $b = \arccos(\frac{1+\rho}{2\rho}) \approx 0.628$ und damit ist die innere neue Kante (b) länger.

Den (sphärischen) Innenwinkel γ des (gleichseitigen!) neuen inneren Dreiecks erhalten wir aus dem Halbwinkelsatz:

$$\gamma = 2 \arccos \sqrt{\frac{\sin \frac{3b}{2} \sin \frac{b}{2}}{\sin^2 b}} \approx 1.107$$

Damit ergibt sich als Fläche des inneren Dreiecks (mit 3 gleichen Winkeln) $A_1 = 3\gamma - \pi \approx 0.18$. Jede der 20 sphärischen Seitenflächen des Isokaeders hat einen Flächeninhalt von $\pi/5$, daher sind ist der Flächeninhalt der restlichen drei neuen Dreiecke gerade $A_2 = (\pi/5 - A_1)/3 \approx 0.15$.

Umrechnung in km^2 ergibt $A_1 \approx 7250000km^2$ und $A_2 \approx 6030000km^2$. Es gibt also 20 Flächen mit $7250000km^2$ und 60 Flächen mit $6030000km^2$, also ist Lösung 4 richtig! Allerdings ist die Forderung, dass jedes Wichteldorf maximal $7000000km^2$ versorgt, nicht erfüllt.

Anmerkung
Welche (Irr)wege führen zu den falschen Antworten:

1. Nonsense ...
2. Anzahl der Ecken des Polyeders. Ein 42-stel der Kugeloberfläche.
3. Anzahl der Kanten des Polyeders. Ein 120-stel der Kugeloberfläche.
4. Richtige Antwort.
5. Nonsense ...
6. Ein 80-stel der Kugeloberfläche.
7. Das kleinste sphärische Deieck.
8. Ein Wert fuer den die Forderung des Weihnachtsmannes erfüllt wäre.
9. Die grösste Fläche der planaren Dreiecke des entstehenden Polyeders.
10. Anzahl der Kanten des Polyeders. Ein Wert fuer den die Forderung des Weihnachtsmannes erfüllt wäre.

22 Der lange Weg nach Hause

Autoren: Marika Neumann, Isabel Friedow (Matheon)

22.1 Aufgabe

Feierwichtel Friedolin frohlockt:

Hurra hurra, die Geschenke sind da. Die Lieferungen haben die Wichteldörfer erreicht. Der Grinch konnte nichts dagegen tun. Das muss natürlich gefeiert werden. Traditionsgemäß gehen wir zu diesem Anlass in den „Breiten Wichtel“ in Wichtelingen, wo es immerhin 42 verschiedene Sorten Eierlikör gibt - und Rumkugeln, die ihrem Namen alle Ehre machen. Leider sind wir für den Rückweg immer auf den Nahverkehr angewiesen, weil nach so einer Feier keiner mehr Schlitten fahren darf. Die Busverbindungen sind zwar auch alles andere als verlässlich, aber wenigstens fahren noch Busse. Wir haben folgende Weisheiten für den Heimweg zusammengetragen:

- Insgesamt gibt es fünf Strecken (direkte Verbindungen zwischen zwei Stationen).
- Erst wenn mindestens zwei Strecken durch Schneeverwehungen nicht mehr passierbar sind, dann kommen wir nicht mehr an unser Ziel.
- Es verkehren mehrere Linien. Eine Linie ist dabei immer eine Menge von Strecken. Für diese Strecken gilt, dass der Bus an jeder Station, an der er vorbeikommt, auch hält. (Es gibt also keine Expresslinien.)
- Schade eigentlich, dass wir immer mindestens einmal umsteigen müssen.
- Es müssen mindestens 3 der 6 Linien, die wir nutzen können, ausfallen, damit wir nicht mehr ans Ziel kommen.
- Falls die Linien 1, 4 und 5 ausfallen, kommen wir nicht an unser Ziel.
- Das gleiche gilt, wenn Linien 2, 3 und 6 ausfallen.
- Ebenso, falls Linien 1, 2 und 3 ausfallen oder 2, 5 und 6.
- Selbst wenn Linie 5 fährt aber nicht die Linien 1,3 und 4, kommen wir nicht an.

Eine 3er Kombination an Linien fehlt noch, die bei Ausfall dazu führt, dass die sehr erheiterte Wichtelgemeinschaft es nicht zurück schafft. Welche?

1. (1, 2, 6)
2. (1, 4, 6)
3. (1, 2, 5)
4. (2, 3, 4)
5. (2, 4, 5)
6. (2, 4, 6)
7. (3, 4, 5)
8. (3, 4, 6)
9. (3, 5, 6)
10. (4, 5, 6)

Hinweis:
Weil im Forum die Fragen aufkamen:

- Linien können in beide Richtungen fahren.
- Gründe fuer das Nichtnachhausekommen sind:
  - Streckenausfälle (mindestens 2)
  - Linienausfälle (mindestens 3)

  Beide sind voneinander unabhängig. Der Fahrer einer Linie kann also trotz freier Strecken im Spekulatiusrausch liegen. Und wenn eine Strecke verschneit ist, dann scheitert das Nachhausekommen nicht an den Linien, sondern am Schnee. Schnee legt also keine Linien lahm sondern Strecken. Für die Bestimmung der fehlenden Linienkombination kann davon ausgegangen werden, dass der Schnee keine Rolle spielt.

Projektbezug:
Im Matheon Projekt B15 „Service Design in Public Transport“ geht es unter anderem darum, Linienplanung mit mathematischen Methoden durchzuführen. Dazu ist es wichtig, Strukturen des Nahverkehrsnetzes zu erkennen und zu analysieren.

22.2 Lösung

Richtige Antwort: 3 Linien (1, 2, 5)

Das Nahverkehrsnetz hat 5 Strecken/Kanten. Da mindestens zwei Kanten ausfallen müssen, um nicht vom Start s zum Ziel t zu kommen, ist das Netz zweifach-zusammenhängend, d.h., es gibt mindestens zwei kantendisjunkte Wege von s nach t. Weiterhin muss es mindestens sechs verschiedene minimale Schnitte im Netz geben, da es sechs Kombinationen von je drei Linien gibt, die durch Ausfall keine Verbindung mehr von s nach t zulassen. Als einzige Möglichkeit gibt es daher nur das Netz in Abbildung 20, links.

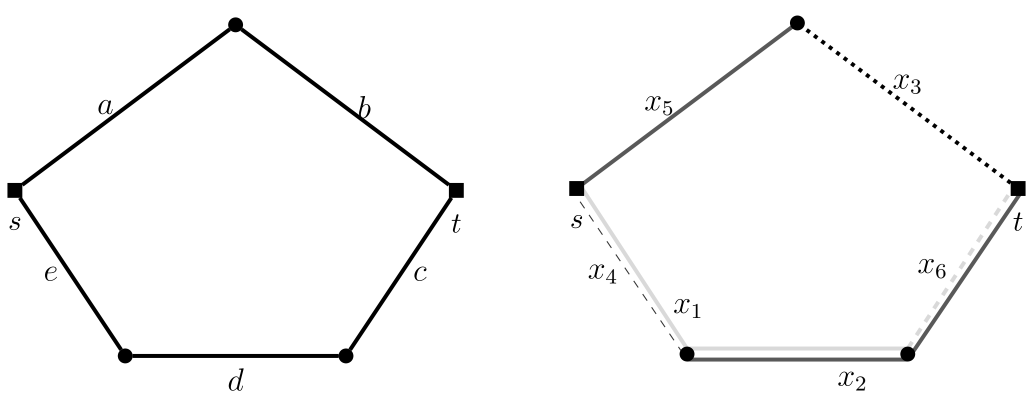


Abbildung 20: *Links:* Nahverkehrsnetz mit 5 Strecken (Kanten), das alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt.

Es gibt 6 Linien, d.h., auf mindestens einer Strecke verkehren 2 Linien. Weiterhin ist Voraussetzung, dass mindestens 3 der 6 Linien ausfallen müssen, so dass es keine Verbindung mehr von s nach t gibt. Im Netz müssen daher entweder auf den oberen zwei Kanten je zwei Linien verkehren oder auf den unteren drei Kanten. Schaut man sich die in der Aufgabe gegebenen „Linienschnitte" an, kommt Linie 4 immer in Verbindung mit 1 und Linie 6 immer in Verbindung mit Linie 2 vor. Durch ein wenig probieren kann man feststellen, dass sich Linie 1 und 4 eine Strecke teilen müssen sowie 2 und 6. Des weiteren kommen Linie 1 und 2 ebenfalls zusammen in einem Schnitt vor. Das heißt, Linie 1 und 2 müssen jeweils zwei Kanten enthalten. Durch ein wenig probieren, erhält man (bis auf Symmetrien) das Liniennetz in Abbildung 20, rechts. Der einzige mögliche Linienschnitt mit drei Linien, der in der Aufgabe

nicht erwähnt wird, ist der mit Linie 1, 2 und 5.
Ausgehend vom Netz aus Abbildung 20, links, kann man auch ein Gleichungssystem aufstellen, um die Belegung der Kanten durch Linien herauszufinden. Wir betrachten dazu folgende Mengen

- $A = \{a, b, c, d, e\}$ Kanten im Netz
- $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Menge der Linien
- $I = \{\{a, e\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}\}$ Kantenkombination, die zu minimalen Schnitten führen
- $J = \{\{1, 4, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 5, 6\}\} \cup \{j_0\}$ Linienschnitte aus der Aufgabe zusammen mit dem gesuchten Schnitt

und zwei Variablentypen.

- x_{ij} Kantenkombination i enthält Linienschnitt j
- $y_{\ell a}$ Linie ℓ fährt auf Kante a

Folgendes Gleichungssystem führt zu verschiedenen (symmetrischen) Belegungen von Linien zu Kanten, alle Lösungen führen aber zum gleichen fehlenden Schnitt

$$
\begin{array}{llll}
(i) & \sum\limits_{j \in J} x_{ij} & = 1 & \forall\, i \in I \\
(ii) & \sum\limits_{i \in I} x_{ij} & = 1 & \forall\, j \in J \\
(iii) & x_{ij} - \sum\limits_{a \in i} y_{\ell a} & \leq 0 & \forall\, \ell \in L \\
(iv) & \sum\limits_{a \in i} \sum\limits_{\ell \in L} y_{\ell a} & = 3 & \forall\, i \in I \\
(v) & x_{ij} & \in \{0, 1\} & \forall\, i \in I, \forall\, j \in J \\
(vi) & y_{\ell a} & \in \{0, 1\} & \forall\, \ell \in L, \forall\, a \in A
\end{array}
$$

Erklärung zu den einzelnen Zeilen des Gleichungssystems

- (i) Jeder Kantenkombination wird genau ein Linienschnitt zugeordnet.
- (ii) Jedem Linienschnitt wird genau eine Kantenkombination zugeordnet.

- (iii) Wenn Linienschnitt i der Kantenkombination j zugeordnet wird, muss jede Linie aus dem Linienschnitt auf wenigstens einer Kante der Kantenkombination fahren
- (iv) Für jede Kantenkombination gilt, dass genau drei Linien auf Kanten dieser Kombination fahren (da jeder Linienschnitt nur drei Linien hat)
- (v) Entschneidungsvariable, ob Kantenkombination i Linienschnitt j enthält ($x_{ij} = 1$) oder nicht ($x_{ij} = 0$)
- (vi) Entscheidungsvariable, ob Linie ℓ auf Kante a fährt

Man erhält als Lösung welche Kanten den gesuchten Linienschnitt enthalten und wie die Linien auf den Kanten fahren. Daraus kann man leicht ablesen, dass der fehlende Linienschnitt die Linien 1, 2 und 5 enthält.

23 Not-Herzen

Autoren: Heidrun Rodner, Gabriele Neumann, Rüdiger Giese (Matheon)

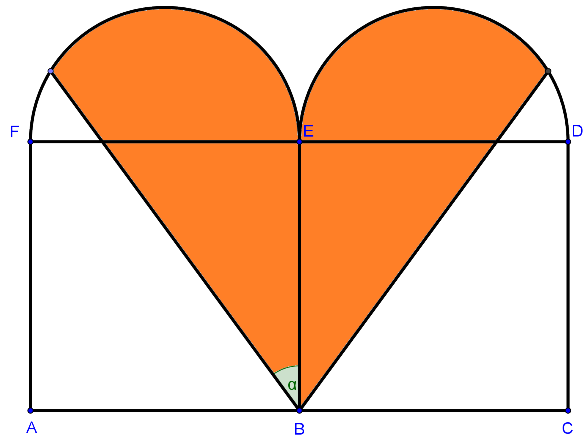
23.1 Aufgabe

Naschmeister Nikodemus Nimmersatt nörgelt:

Alles geht durcheinander. Da wird ein Grinchalarm ausgerufen und schon lassen alle alles stehen und liegen. Dabei sind die Lebkuchenherzen noch nicht fertig! Vielleicht war ja der perfide Plan des Grinch, die Weihnachtsbäckerei durcheinander zu bringen und damit einfach alles leckere Weihnachtsgebäck zu verhindern. Das wäre eine Katastrophe! Aber nicht mit mir! Einer muss sich um die Rettung des Naschwerks kümmern und dieser eine bin *ich*.

Leider sind die Reparaturen und Aufräumarbeiten der im letzten Jahr verwüsteten Lebkuchenbäckereien noch nicht abgeschlossen. Wir nehmen also einfach jeweils 2 Lebkuchenhaus-Dachziegel in der Form von Quadraten $ABEF$ und $BCDE$ mit angeklebten Halbkreisen. Die sind immer in großen Mengen vorrätig. Vom gemeinsamen Eckpunkt B der Quadrate wird mit zwei geraden Schnitten dann eine spiegelsymmetrische, etwa herzförmige Figur hergestellt. Backwichtel Balthasar hat mir aber nur erlaubt, maximal die Hälfte der Dachziegelfläche zu benutzen. Zur Veranschaulichung habe ich das Ganze mal aufgezeichnet.

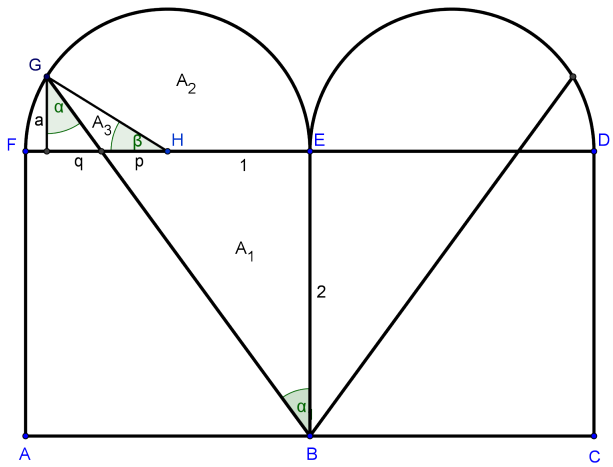
Ich muss also einen Schnittwinkel α finden, der das Gebilde aus zwei Lebkuchenziegeln genau so teilt, dass die herzförmige, braun gekennzeichnete Fläche genau die Hälfte der Fläche der beiden Dachziegel ausmacht. (Irgendwie habe ich gerade ein déjà vu...)



1. Der Winkel muß größer als 45° werden.
2. Der Winkel muß kleiner als 30° werden.
3. $\alpha \approx 45°$
4. $\alpha \approx 40,4°$
5. $\alpha \approx 35,7°$
6. $\alpha \approx 35,5°$
7. $\alpha \approx 35,1°$
8. $\alpha \approx 34,7°$
9. $\alpha \approx 32,8°$
10. $\alpha \approx 31,6°$

23.2 Lösung

Richtige Antwort: 7 $\alpha \approx 35,1°$



Wegen der Symmetrie reicht die Betrachtung der halben Figur. Da α unabhängig von der Kantenlänge des Quadrates ist, wählen wir die Kantenlänge 2, so daß sich der Radius 1 ergibt.
Gesamtfläche: $A_{ges} = 4 + \frac{\pi}{2}$
gesuchte Fläche: $A = \frac{A_{ges}}{2} = 2 + \frac{\pi}{4} = A_1 + A_2 + A_3$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1+p) = 1 + p \\
A_2 &= \frac{180° - \beta}{360°} \cdot \pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \quad (\beta \text{ im Bogenmaß!}) \\
A_3 &= \frac{1}{2} \cdot p \cdot 1 \cdot \sin\beta = \frac{p}{2} \cdot \sin\beta \\
A &= 2 + \frac{\pi}{4} = 1 + p + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{p}{2} \cdot \sin\beta \qquad (6)
\end{aligned}$$

Wir stellen einige trigonometrische Überlegungen an, um die zusätzlichen Unbekannten p und q zu eliminieren.

$$\tan\alpha = \frac{1+p}{2} \quad \text{also: } p = 2\cdot\tan\alpha - 1 \tag{7}$$

$$\tan\alpha = \frac{q}{a} = \frac{q}{\sin\beta} \quad \text{also: } q = \tan\alpha\cdot\sin\beta \tag{8}$$

$$\cos\beta = \frac{p+q}{1} = 2\tan\alpha - 1 + q \quad \text{also: } q = \cos\beta - 2\tan\alpha + 1 \tag{9}$$

Aus den Gleichungen (8) und (9) folgt

$$\begin{aligned} \tan\alpha\sin\beta &= \cos\beta - 2\tan\alpha + 1, \\ \tan\alpha(\sin\beta + 2) &= \cos\beta + 1, \\ \tan\alpha &= \frac{\cos\beta + 1}{\sin\beta + 2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Mit (7) folgt aus (10),

$$p = 2\frac{\cos\beta + 1}{\sin\beta + 2} + 1.$$

Eingesetzt in (6) erhalten wir

$$A = 2 + \frac{\pi}{4} \stackrel{!}{=} 2\frac{\cos\beta + 1}{sin\beta + 2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\cos\beta + 1}{\sin\beta + 2}\sin\beta - \frac{1}{2}\sin\beta$$

oder

$$0 = 2\frac{\cos\beta + 1}{\sin\beta + 2} + \frac{\pi}{4} - 2 - \frac{\beta}{2} + \frac{\cos\beta + 1}{\sin\beta + 2}\sin\beta - \frac{1}{2}\sin\beta$$

„Zu Fuß“ ist das jetzt nicht wirklich nach β auflösbar, aber mit CAS, z. Bsp. mit Derive vereinfacht sich das Ganze zu:

$$2\cos\beta - \sin\beta - \beta + \frac{\pi - 4}{2} = 0$$

mit der Lösung $\beta \approx 0,6192$ bzw. $\beta \approx 35,48°$.
Mit (10) folgt $\alpha \approx 35,11°$.

24 Ende gut...

Autoren: Katharina Mölter, Falk Ebert (MATHEON)

24.1 Aufgabe

Endlich mal wieder ein Weihnachtsmanneintrag:

Heute morgen kam Winston, der Chef von Winterpol mit einem Lächeln auf den Lippen vorbei. Seine Nachforschungen (die auf unerklärliche Weise eine Katze mit Hut und einen sehr hellhörigen Elefanten mit einschlossen) hatten ergeben, dass der Grinch beim Sprechen seines Schlafzaubers, der immerhin das Zählen von 13.401 Schafen beinhaltete, so müde geworden ist, dass er dem Zauber selbst erlag und dann selig schlummernd von Winterpol-Spezialkräften in Verwahrung genommen werden konnte. Jetzt ist er hier am Nordpol in einer Sicherheitszelle. Es haben sich viele Wichtel freiwillig gemeldet, um sicherzustellen, dass er im Falle eines plötzlichen Aufwachens wieder ruhiggestellt werden kann. Der Grinch ist aber niemand, dem man unausgeschlafen gegenübertreten sollte. Also habe ich mir von Zacharias Zipperlein, dem Gesundheitswichtel, die Biorhythmus-Daten der potentiellen Aufpasser besorgt. Aus irgendeinem Grund hat er mir die Werte auf einem Blanko-Sudoku-Blatt gegeben - komisch! Dargestellt sind die Aufmerksamkeitswerte in Prozentpunkten. 100% entspricht dabei der maximalen Wachsamkeit und 0% ist mehr oder weniger Tiefschlaf.

	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	0-1
Alice	40%	60%	30%	80%	80%	50%	90%	30%	50%
Bernadette	60%	70%	80%	100%	80%	70%	90%	70%	70%
Bob	30%	50%	50%	90%	70%	60%	80%	30%	60%
Boleslaw	40%	50%	40%	70%	70%	70%	80%	40%	60%
Detlef	80%	90 %	60%	90%	80%	70%	90%	70%	70%
Irma	30%	60%	30%	70%	70%	60%	70%	30%	70%
Raimund	80%	90%	70%	80%	80%	80%	90%	60%	70%
Sigismund	60%	80%	70%	90%	90%	80%	90%	80%	70%
Theo	30%	60%	40%	70%	90%	60%	80%	40%	50%

Es geht darum, den Bereich zwischen 16 Uhr nachmittags und 1 Uhr nachts abzudecken. Das sind 9 Schichten zu je einer Stunde. Es ist teilweise erschreckend, wie sehr manche Wichtel durchhängen können. Ich muss also eine Verteilung der 9 Wichtel auf die 9 Schichten finden, so dass jeder genau eine Schicht hat. Die beste Verteilung ist diejenige, in der die Summe aller Wachsamkeitswerte der beteiligten Wichtel in ihren entsprechenden Schichten maximal wird.

Welche Aussage stimmt denn jetzt für die bestmögliche Schichtzuweisung?

1. Logisch! Bernadette wird in ihrer wachsamsten Phase, also von 19-20 Uhr eingesetzt.
2. Erschreckend! Ich muss jemanden zu einer Zeit einsetzen, in der sie/er eine Wachsamkeit von 50% oder weniger hat.
3. Schockierend! Die durchschnittliche Wachsamkeit der eingesetzten Wichtel liegt bei unter 80%.
4. Erfreulich! Die durchschnittliche Wachsamkeit der eingesetzten Wichtel liegt bei über 90%.
5. Erstaunlich! Alle eingesetzten Wichtel haben in ihren Schichten exakt die gleichen Wachsamkeiten.
6. Niedlich! Alice und Bob haben ihre Schichten direkt nacheinander.
7. Merkwürdig! Ich muss jemanden am Tiefpunkt seiner Wachsamkeit einteilen.
8. Emanzipiert! Alice, Bernadette und Irma haben die ersten drei Schichten.
9. Uneindeutig! Es gibt gleich mehrere optimale Schichtverteilungen.
10. Frustrierend! Keine der genannten Möglichkeiten trifft zu.

Hinweise:

- Nachdem um 1 Uhr die Geschenkeauslieferung beendet ist, ist der Grinch natürlich wieder frei. Alles andere wäre schlechter Sportsgeist.
- Bevor die Frage aufkommt: Nein, es soll tatsächlich *kein* Sudoku gelöst werden. Unser Sudokumeister Günter Ziegler konnte leider in diesem Jahr keins vorbereiten.

Projektbezug:
Ein Zuordnungsproblem dieser Art stellt sich uns jedes Jahr, wenn wir versuchen müssen, Aufgaben, Forumverfügbarkeit der Aufgabensteller, Kalendertürchen, Schwierigkeitsgrad, möglichst unterschiedliche Typen an aufeinanderfolgenden Tagen u.s.w. unter einen Hut zu bringen.

24.2 Lösung

Richtige Antwort: 9 Uneindeutig! Es gibt gleich mehrere optimale Schichtverteilungen.

Das Ziel ist es, in der folgenden Tabelle 9 Einträge auszuwählen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einer ist. Es gibt 9! = 362.880 solche Verteilungen. Da ist es nicht sehr schwer, das ganze den Computer rechnen zu lassen. Aber es geht auch „zu Fuß“.

	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	0-1
Alice	40%	60%	30%	80%	80%	50%	90%	30%	50%
Bernadette	60%	70%	80%	100%	80%	70%	90%	70%	70%
Bob	30%	50%	50%	90%	70%	60%	80%	30%	60%
Boleslaw	40%	50%	40%	70%	70%	70%	80%	40%	60%
Detlef	80%	90 %	60%	90%	80%	70%	90%	70%	70%
Irma	30%	60%	30%	70%	70%	60%	70%	30%	70%
Raimund	80%	90%	70%	80%	80%	80%	90%	60%	70%
Sigismund	60%	80%	70%	90%	90%	80%	90%	80%	70%
Theo	30%	60%	40%	70%	90%	60%	80%	40%	50%

Dazu überlegen wir uns 3 Dinge:

- Es gibt keine höhere Wachsamkeit als 100%.
- Wenn man alle Wachsamkeitswerte eines Wichtels um den gleichen Wert erhöht oder herabsetzt, ändert das nicht, in welcher Schicht er/sie eingeteilt wird.
- Wenn man alle Wachsamkeitswerte innerhalb einer Schicht um den gleichen Wert erhöht oder herabsetzt, ändert das nicht, welcher Wichtel dafür eingeteilt wird.

Das heißt also, dass man in der Tabelle jede Zeile und jede Spalte um einen konkreten Wert erhöhen/herabsetzen kann. Das ändert zwar das Optimum, nicht aber die optimale Verteilung. Das nutzen wir aus um in der Tabelle den höchsten Wert in jeder Zeile auf 100% zu bringen.

	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	0-1	Änderung
Alice	50%	70%	40%	90%	90%	60%	100%	40%	60%	+10%
Bernadette	60%	70%	80%	100%	80%	70%	90%	70%	70%	+0%
Bob	40%	60%	60%	100%	80%	70%	90%	40%	70%	+10%
Boleslaw	60%	70%	60%	90%	90%	90%	100%	60%	80%	+20%
Detlef	90%	100%	70%	100%	90%	80%	100%	80%	80%	+10%
Irma	60%	90%	60%	100%	100%	90%	100%	60%	100%	+30%
Raimund	90%	100%	80%	90%	90%	90%	100%	70%	80%	+10%
Sigismund	70%	90%	80%	100%	100%	90%	100%	90%	80%	+10%
Theo	40%	70%	50%	80%	100%	70%	90%	50%	60%	+10%

Jetzt können wir in den Schichten auch jeweils den gleichen Wert addieren um dort jeweils auch als Maximum 100% zu erhalten.

	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	0-1
Alice	60%	70%	60%	90%	90%	70%	100%	50%	60%
Bernadette	70%	70%	100%	100%	80%	80%	90%	80%	70%
Bob	50%	60%	80%	100%	80%	80%	90%	50%	70%
Boleslaw	70%	70%	80%	90%	90%	100%	100%	70%	80%
Detlef	100%	100%	90%	100%	90%	90%	100%	90%	80%
Irma	70%	90%	80%	100%	100%	100%	100%	70%	100%
Raimund	100%	100%	100%	90%	90%	100%	100%	80%	80%
Sigismund	80%	90%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	80%
Theo	50%	70%	70%	80%	100%	80%	90%	60%	60%
Änderung	+10%	+0%	+20%	+0%	+0%	+10%	+0%	+10%	+0%

Jetzt interessieren wir uns für die Zeilen und Spalten, in denen nur eine 100% vorkommt. Beispielsweise sollte Theo unbedingt die 20-21 Uhr Schicht übernehmen. In allen anderen Schichten ist er schlechter. Ebenso sollte die 23-0 Uhr Schicht von Sigismund und die 0-1 Uhr Schicht von Irma übernommen werden. Alice ist am besten in der 22-23 Uhr Schicht und Bob in der von 19-20 Uhr. Sie sind in den Zeiträumen optimal wachsam. Diese Wichtel markieren wir und auch alle anderen Einträge in den entsprechenden Zeilen und Spalten. Denn, sobald ein Wichtel für eine Schicht gewählt ist, kann er keine andere übernehmen und auch niemand anderes muss in dieser Schicht ebenfalls eingesetzt werden.

	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	0-1
Alice	60%	70%	60%	90%	90%	70%	100%	50%	60%
Bernadette	70%	70%	100%	100%	80%	80%	90%	80%	70%
Bob	50%	60%	80%	100%	80%	80%	90%	50%	70%
Boleslaw	70%	70%	80%	90%	90%	100%	100%	70%	80%
Detlef	100%	100%	90%	100%	90%	90%	100%	90%	80%
Irma	70%	90%	80%	100%	100%	100%	100%	70%	100%
Raimund	100%	100%	100%	90%	90%	100%	100%	80%	80%
Sigismund	80%	90%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	80%
Theo	50%	70%	70%	80%	100%	80%	90%	60%	60%

Jetzt gehen wir analog im verbleibenden weißen Teil der Tabelle vor. Hier zeigt sich, dass Bernadette unbedingt die 18-19 Uhr Schicht übernehmen sollte und Boleslaw die von 21-22 Uhr.

	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	0-1
Alice	60%	70%	60%	90%	90%	70%	100%	50%	60%
Bernadette	70%	70%	100%	100%	80%	80%	90%	80%	70%
Bob	50%	60%	80%	100%	80%	80%	90%	50%	70%
Boleslaw	70%	70%	80%	90%	90%	100%	100%	70%	80%
Detlef	100%	100%	90%	100%	90%	90%	100%	90%	80%
Irma	70%	90%	80%	100%	100%	100%	100%	70%	100%
Raimund	100%	100%	100%	90%	90%	100%	100%	80%	80%
Sigismund	80%	90%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	80%
Theo	50%	70%	70%	80%	100%	80%	90%	60%	60%

Es verbleiben die beiden Schichten von 16-17 Uhr und 17-18 Uhr für Raimund und Detlef. Egal welche Wahl getroffen wird, es wird stets eine Optimallösung sein. Demnach gibt es also 2 Optimallösungen.

Zur Klärung für die anderen Antworten: Überträgt man das Färbungsmuster auf die Ausgangstabelle, erhält man eine optimale Gesamtwachsamkeit von 470 Prozentpunkten, das entspricht einem Durchschnitt von etwa 82,2%.

A Ultimative Aufgabe

Ihr habt abgestimmt. Zu bewerten waren die beste, zweitbeste und drittbeste Aufgabe. Insgesamt haben 822 Teilnehmer abgestimmt. Hier sind die Ergebnisse.

Platz	Punkte	Tür	Aufgabe (Autor)
1.	689	1	„Die kaputte Waage auf dem Weihnachtsmarkt" (Ingmar Rubin)
2.	638	6	„Geschenkezocken" (Madeleine Theile, Andreas Wiese)
3.	551	2	„Vier Schlitten und viele Pakete" (Falk Ebert, Gerhard Woeginger)
4.	485	5	„Zahlenturm" (Falk Ebert)
5.	413	3	„Weihnachtsbaumkugeln sortieren!" (Jens Griepentrog)
6.	403	4	„Es hat geschneit!" (Gerhard Woeginger)
7.	363	8	„Christbaumkugel" (Daniel Peterseim)
8.	329	7	„Korrupte UEFA" (Gregor Heyne)
9.	319	9	„Der Weihnachtsmann im Mond" (Maciek Korzec)
10.	267	13	„Ein neuer Landeplatz" (Falk Ebert)
11.	253	10	„Ein neues Kirchenfenster" (Falk Ebert, Ingmar Rubin)
12.	251	16	„Chamäleons unter dem Weihnachtsbaum" (Quintijn Puite)
13.	238	21	„Weihnachten auf Uniformia" (Jörg Polzehl, Karsten Tabelow)
14.	226	20	„Grinchalarm!" (Martin Groß, Melanie Schmidt, Daniel Plümpe)
15.	218	17	„Heizung" (Falk Ebert)
16.	212	22	„Der lange Weg nach Hause" (Marika Neumann, Isabel Friedow)
17.	184	23	„Not-Herzen" (Rüdiger Giese, Gabriele Neumann, Heidrun Rodner)
18.	168	24	„Ende gut..." (Falk Ebert, Katha Mölter)
		15	„Eisfußball Meisterschaft 2010" (Samuel Drapeau, Michael Kupper)
19.	148	19	„Die Kräne" (Elisabeth Günther, Torsten Gellert)
20.	146	18	„Der Weihnachtsmann rüstet auf Solarzellen um" (Alexander Mielke, Matthias Liero)
21.	120	12	„Geschenke fr das Waisenhaus" (Cor Hurkens)
22.	111	11	„Der Bus" (Onno Boxma)
23.	73	14	„Zurück zur Arbeit!" (Jens Schulz, Christina Büsing)

B Ultimatives Bild

Die Wahl des besten Bildes war unabhängig von der Wahl der besten Aufgabe. Gewählt werden konnte nur ein Favorit. Insgesamt wurden 530 Stimmen abgegeben.

1. Platz mit 51 Punkten

Aufgabe vom 16. Dezember
„Chamäleons unter dem Weihnachtsbaum“

2. Platz mit 43 Punkten

Aufgabe vom 17. Dezember
„Heizung“

3. Platz mit 41 Punkten

Aufgabe vom 24. Dezember
„Ende gut...“

4. Platz mit 40 Punkten

Aufgabe vom 22. Dezember
„Der lange Weg nach Hause“

5. Platz mit 39 Punkten

Aufgabe vom 4. Dezember
„Es hat geschneit!“

6. Platz mit 38 Punkten

Aufgabe vom 10. Dezember
„Ein neues Kirchenfenster“

7. Platz mit 29 Punkten

Aufgabe vom 20. Dezember
„Grinchalarm!“

8. Platz mit 26 Punkten

Aufgabe vom 19. Dezember
„Die Kräne“

Aufgabe vom 9. Dezember
„Der Weihnachtsmann im Mond“

9. Platz mit 24 Punkten

Aufgabe vom 6. Dezember
„Geschenkezocken“

Aufgabe vom 21. Dezember
„Weihnachten auf Uniformia“

10. Platz mit 20 Punkten

Aufgabe vom 12. Dezember
„Geschenke fr das Waisenhaus“

11. Platz mit 16 Punkten

Aufgabe vom 18. Dezember
„Der Weihnachtsmann rüstet auf Solarzellen um“

12. Platz mit 15 Punkten

Aufgabe vom 2. Dezember
„Vier Schlitten und viele Pakete“

13. Platz mit 13 Punkten

Aufgabe vom 14. Dezember
„Zurück zur Arbeit!“

14. Platz mit 12 Punkten

Aufgabe vom 11. Dezember
„Der Bus“

15. Platz mit 11 Punkten

Aufgabe vom 13. Dezember
„Ein neuer Landeplatz“

Aufgabe vom 8. Dezember
„Christbaumkugel“

Aufgabe vom 1. Dezember
„Die kaputte Waage auf dem Weihnachtsmarkt“

16. Platz mit 10 Punkten

Aufgabe vom 23. Dezember
„Not-Herzen“

Aufgabe vom 15. Dezember
„Eisfußball Meisterschaft 2010“

Aufgabe vom 3. Dezember
„Weihnachtsbaumkugeln sortieren!“

17. Platz mit 6 Punkten

Aufgabe vom 7. Dezember
„Korrupte UEFA“

18. Platz mit 4 Punkten

Aufgabe vom 5. Dezember
„Zahlenturm“